

۱ به ازای کدام مقدار m رابطه‌ی $\{(3, 4), (m, 1), (3, m+2), (5, m)\}$ یک تابع است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

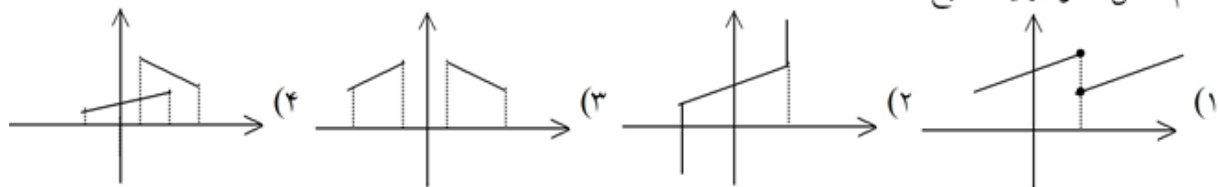
۲ کدام یک از روابط زیر به ازای $m = -1$ یک تابع است؟

(۱) $\{(m, 2m), (2m, m), (-1, 3m)\}$ (۲) $\{(m, 2m), (3m, -1), (-1, 3m)\}$
 (۳) $\{(m, 2m), (2m, m), (2m, -2)\}$ (۴) $\{(m, 2m), (2m, m), (3, m)\}$

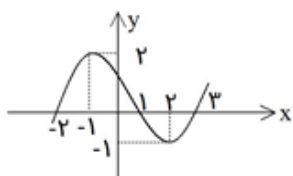
۳ رابطه‌ی $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 2 (۴) هیچ مقدار m

۴ کدام شکل، نمودار یک تابع است؟



۵ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، $f(-1)$ چقدر است؟



(۱) ۲
 (۲) ۱
 (۳) صفر
 (۴) -2

۶ در تابع $f = \{(2, 3), (3, 1), (4, 2), (1, 4)\}$ مقدار $2f(2) - f(4)$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۷

۷ اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x - 1), x \in A\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸ رابطه‌ی $R = \{(x, y) \mid x, y \in Z, |x| + |y| = 2\}$ چند عضو زوج مرتب دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۹ فرض کنید تابع f به صورت $f = \{(a, a^2) ; a = 0, 1, 2\} \cup \{(a, a+b) | a, b \in \{0, 1, 2\}\}$ توصیف شده باشد. تعداد عناصر f ، کدام است؟

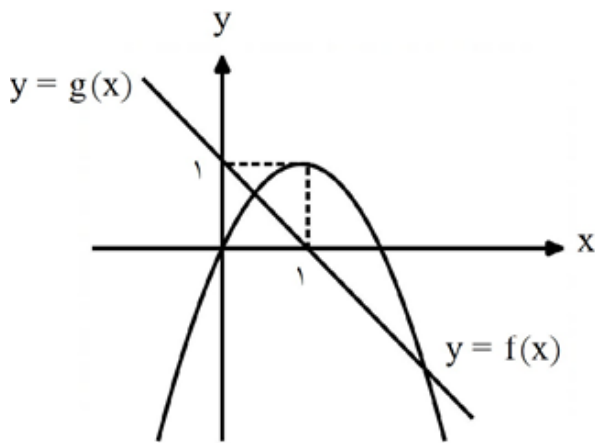
- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۱۰ اگر تابعی بر R باشد که در رابطه « به ازای هر a و b از R ، $f(a+b) = f(a) + f(b)$ » صدق کند. $f(na)$ عدد طبیعی (کدام است)؟

- $f(a)f(a) - n$ (۱) $nf(a)$ (۲) $f(a)f(a)^n$ (۳) $f(a) + n$ (۴)

۱۱ در بازه $[x, +\infty)$ نمودار تابع با ضابطه‌ای $f(x) = \frac{1}{4}x + 2$ بالاتر از خط به معادله‌ی $y = 3(x - 1)$ قرار نمی‌گیرد کمترین مقدار $f(x)$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



۱۲ نمودار تابع با ضابطه‌های سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه‌ی مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادله‌ی $f(x) = g^2(x)$ ، کدام است؟

- ۲ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴)

۱۳ نقطه تلاقی نمودار تابع $y = x^2 - x - 4$ با نیمساز ناحیه دوم کدام است؟

- (۲ و -۲) (۱) (۲ و -۲) (۲) (۴ و -۴) (۳) (-۴ و ۴) (۴)

۱۴ اگر $f = \{(x, y) | y = 4x^2 + 4ax + 5a^2\}$ ، $\{(x, a) | (x, a) \in f\}$ یک مجموعه تک عضوی باشد، مقدار a کدام است؟

- ۴ (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴)

۱۵ اگر $f(x) + xf(-x) = x^2 + 1$ آنگاه $f(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۶ اگر $f(x+1) = x^2 - 2x + 1$ باشد، تابع $f(x)$ کدام است؟

- $(x-2)^2$ (۱) $(x-1)^2$ (۲) $x^2 - 2x$ (۳) $(x+2)^2$ (۴)



۱۷ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع با ضابطه $y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

- (۱) -3 (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) 3

۱۸ اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y = (a - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 6

۱۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول یک و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -6 قطع کرده و از نقطه $(-2, -6)$ می‌گذرد، $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) -8 (۲) -7 (۳) -5 (۴) -4

۲۰ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2 - x)^2$ ، حاصل $f(1 + x) - f(1 - x)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $4x$ (۳) $2x^2$ (۴) $4x^2$

۲۱ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x + 3$ حاصل $f(1 + \sqrt{2}) - f(2)$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۲۲ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ ، $x > -1$ در بازه‌ی (a, b) زیرمحور x ها است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 3 (۳) 4 (۴) 5

۲۳ منحنی به معادله‌ی $y = (2x + 1)(x + 8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است؟

- (۱) $9 < m < 25$ (۲) $15 < m < 23$ (۳) $7 < m < 15$ (۴) $5 < m < 13$

۲۴ به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m + 1)x + m + 6$ بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

- (۱) -4 (۲) $4, -12$ (۳) $-4, 12$ (۴) 12

۲۵ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟

- (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$



۲۶) مقادیر تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ در بازه‌ی (a, b) بزرگ‌تر از $\frac{7}{4}$ می‌باشد. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۵/۵ (۳) ۶ (۴)

۲۷) نمودار تابع با ضابطه $y - |x| = 2$ از کدام نواحی مختصات می‌گذرد؟

- (۱) اول و دوم (۲) دوم و سوم (۳) اول و سوم (۴) سوم و چهارم

۲۸) مساحت محدود بین دو نمودار تابع $y = |x-1|$ ، $y = 2-|x|$ کدام است؟

- $\frac{3}{2}$ (۱) ۲ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۳ (۴)

۲۹) مساحت محدود به نمودار تابع با ضابطه $y = 3 - |x|$ و محور x ها کدام است؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۳۰) اگر $f(x) = |x^2 - 5|$ و $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ مقدار $\frac{1+f(-2)}{g(2)}$ کدام است؟

- $\frac{5}{2}$ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۳۱) اگر $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + |x|$ باشد، $f(2 - \sqrt{5})$ کدام است؟

- $0/25$ (۱) $0/5$ (۲) $0/75$ (۳) $1/25$ (۴)

۳۲) اگر $f(x) = |2x - 5|$ باشد، مقدار $f(2 + \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2})$ کدام است؟

- ۲ (۱) $4\sqrt{2} - 4$ (۲) ۳ (۳) $2\sqrt{2} + 2$ (۴)

۳۳) اگر $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + |2x|$ باشد، $f(2\sqrt{2} - 3)$ کدام است؟

- $-\frac{1}{3}$ (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴)

۳۴) مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = 5 - |x - 1|$ و $y = |x|$ کدام است؟

- ۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۳۵) در بازه‌ی (a, b) نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



۳۶ مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $y = \frac{1}{4}x + 2$ ، کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

۳۷ نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{4}x \right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف X های منفی و یک واحد به طرف Y های مثبت انتقال می‌دهیم.

نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع‌اند؟

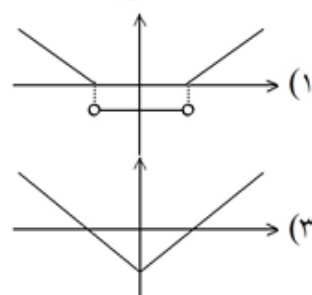
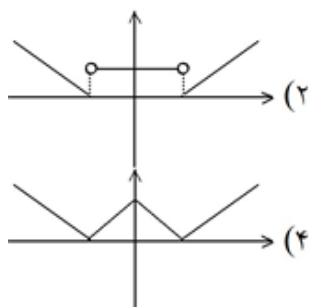
-۲ (۴)

-۲/۵ (۳)

-۳ (۲)

-۳/۵ (۱)

۳۸ منحنی نمایش تابع $f(x) = ||x| - 2|$ کدام است؟



۳۹ نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف X های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف Y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

(۲, ۶) (۴)

(۳, ۵) (۳)

(۲, ۵) (۲)

(۳, ۴) (۱)

۴۰ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف X های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور X ها غیر منفی باشد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۱)

۱ (۱)

۴۱ نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف X های منفی سپس ۹ واحد به طرف Y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور X ها است؟

(-۲, ۵) (۴)

(-۲, ۳) (۳)

(-۵, ۳) (۲)

(-۵, ۲) (۱)

۴۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(-f(x))$ برابر کدام است؟

 $(x^2 + 1)^2 + 1$ (۴) $x^2 + 1$ (۳) $x + 1$ (۲)

۱ (۱)



۴۳ تابع با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & x \geq 1 \end{cases}$$

$f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ کدام است؟

$\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۱)

۴۴ اگر هر سه زوج مرتب $(n^2 - 3n, 4)$ و $(20, n^2 + n)$ و $(1, m + n)$ بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم باشند، m کدام است؟

6 (۴) 2 (۳) -2 (۲) -3 (۱)

۴۵ اگر $f = \{(3, n^2 - 2n), (m, 8), (2n - 5, t), (4, 3m + 2)\}$ یک تابع ثابت سه عضوی باشد، $m + n + t$ کدام است؟

14 (۴) 12 (۳) 11 (۲) 10 (۱)

۴۶ اگر $f(x) = x + \frac{2}{x}$ باشد، مقدار $f(1 + \sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

2 (۴) 1 (۳) -1 (۲) -2 (۱)

۴۷ اگر $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2}$ باشد، مقدار $f(2) - f(-2)$ کدام است؟

$\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{8}{6}$ (۲) $\frac{10}{6}$ (۱)

۴۸ فرض کنید $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ و اگر $y = f(x)$ آنگاه x بر حسب y عبارت است از:

$-f(-y)$ (۴) $f(-y)$ (۳) $f(y)$ (۲) $-f(y)$ (۱)

۴۹ فرض کنیم $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x} - 4$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ باشند، در این صورت $f(x)$ کدام است؟

$x^2 + 2$ (۴) x^2 (۳) $x^2 - 2$ (۲) $x^2 - 4$ (۱)



۵۰ فرض کنید که f تابعی باشد بطوری که $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ اگر n عدد طبیعی باشد و

$f(1) \neq 0$ آنگاه مقدار $\frac{f(n)}{f(1)}$ کدام است؟

n^2 (۴)

n (۳)

$\frac{1}{n}$ (۲)

$\frac{1}{n^2}$ (۱)

سید علی موسوی

۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

مشهد مقدس



۱ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که هیچ دو عضو آن دارای مؤلفه‌ی اول یکسان نمی‌باشد. چون این مجموعه دارای ۲ عضو مرتب است که دارای مؤلفه‌ی اولیه یکسان یعنی ۳ می‌باشند پس مؤلفه‌ی دوم آنها نیز باید یکسان باشد پس داریم: $m + 2 = 4 \Rightarrow m = 2$

۲ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای این که رابطه‌ای مانند f تابع باشد باید داشته باشیم:
 $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$
 یعنی این که به ازای یک x ، دو y نامساوی نداشته باشیم. با توجه به این مطلب اگر m را ۱- قرار دهیم فقط در گزینه ۴، شرط بالا برقرار می‌باشد. یعنی x های آن‌ها مساوی نباشند و اگر x ها مساوی بودند، y ها هم مساوی باشند.

۳ گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای این که رابطه‌ی $\{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ یک تابع باشد، نباید دو (یا چند) زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول یکسان در آن رابطه وجود داشته باشند. دقت کنیم اگر در تابعی دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز مساوی باشند تا آن دو زوج مرتب برابر شده و در واقع تبدیل به یک زوج مرتب شوند. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در دو زوج مرتب اول و چهارم، مؤلفه‌های اول یکسان می‌باشند. در نتیجه با برابر قرار دادن مؤلفه‌های دوم آن دو، داریم:

$$m^2 = m + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow$$

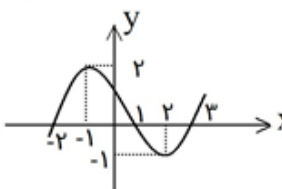
$$\begin{cases} m = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \{(3, 1) \text{ و } (2, 1) \text{ و } (-2, -1) \text{ و } (3, 1) \text{ و } (-1, 4)\} \Rightarrow \text{تابع است} \\ m = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \{(3, 4) \text{ و } (2, 1) \text{ و } (-2, 2) \text{ و } (3, 4) \text{ و } (2, 4)\} \Rightarrow \text{تابع نیست} \end{cases}$$

$m = 2$ قابل قبول نمی‌باشد چون به ازای آن دو زوج مرتب دوم و پنجم مؤلفه‌های اول یکسان می‌شوند اما مؤلفه‌های دوم برابر نمی‌شوند.

۴ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. شکلی تابع است که هر خط موازی محور y ها، فقط نمودار تابع را در حداکثر یک نقطه قطع کند. با این توضیح گزینه ۳ تابع می‌باشد درحالی‌که در سایر شکلها حداقل یک خط موازی محور y ها وجود دارد که نمودار تابع نمایش داده شده را در بیش از یک نقطه قطع کند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن $f(-1)$ باید از نقطه $x = -1$ خطی عمودی رسم کنیم و محل تلاقی

خط با منحنی تابع، مقدار تابع را به دست می‌دهد. با توجه به شکل تابع x ، ملاحظه می‌شود که خط عمود بر محور x ها در نقطه $x = -1$ تابع را در $+2$ قطع می‌کند. پس $f(-1) = 2$ بوده و گزینه ۱ درست است.



می‌دانیم در زوج مرتب‌های (x, y) داریم $f(x) = y$ پس:

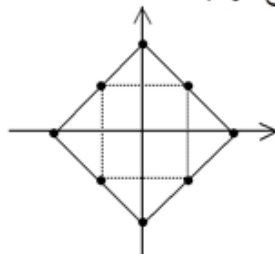
$$2f(2) - f(4) = (2 \times 3) - 2 = 6 - 2 = 4$$

یعنی گزینه‌ی ۳ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f = \{(1, 1)(2, 3)(3, 5)(4, 7)(5, 9)\} \Rightarrow f \circ f = \{(1, 1)(2, 5)(3, 9)\}$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار $|x| + |y| = 2$ معادله‌ی مربعی به ضلع $2\sqrt{2}$ است. نقاط مشخص شده در

نمودار $x \in Z$ و $y \in Z$ می‌باشند. پس ۸ زوج مرتب دارد.



$$f = \{(0, 2), (0, -2), (1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1), (2, 0), (-2, 0)\}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(a, a^2) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

$$(a, a + b) = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$$

اجتماع این دو مجموعه ۹ عضو خواهد داشت.

با توجه به رابطه داده شده $f(2a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$ و می‌توانیم عبارت زیر را تشکیل دهیم:

$$f(3a) = f(a) + f(2a) = f(a) + 2f(a) = 3f(a)$$

$$f(4a) = f(a) + f(3a) = f(a) + 3f(a) = 4f(a)$$

و به همین ترتیب $f(na) = nf(a)$ و گزینه ۲ جواب صحیح است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۱)

$$\frac{1}{2}x + 2 < 3x - 3 \Rightarrow \frac{5x}{2} > 5 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \min(x, \cdot) = 2 \Rightarrow \min(f(x, \cdot)) = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی هریک از توابع داده شده را به دست می‌آوریم: (۱۲)

$$g(x) = -x + 1$$

$$f(x) = a(x-1)^2 + 1 \Rightarrow (0, 0) \Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x-1)^2 + 1 = -x^2 + 2x \Rightarrow f(x) = g^2(x) \Rightarrow -x^2 + 2x = (-x+1)^2$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$$

می‌دانیم معادله خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم $y = -x$ است، پس محل تلاقی دو تابع را بدست می‌آوریم: (۱۳)

$$y = x^2 - x - 4 \quad \left. \begin{array}{l} \\ y = -x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x - 4 = -x \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

چون مسئله نقطه تلاقی در ناحیه دوم را خواسته، پس x باید منفی باشد، بنابراین $x = -2$ قابل قبول می‌باشد و در نتیجه $y = 2$ می‌باشد. بنابراین نقطه تلاقی $(-2, 2)$ بوده و گزینه ۱ صحیح است.چون دوتایی (x, a) عضو f است پس در ضابطه f صدق خواهد کرد. یعنی داریم: (۱۴)

$$a = 4x^2 + 4ax + 5a^2 \Rightarrow (4x + a)^2 + 4a^2 - a = 0$$

$$4a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0, \frac{1}{4}$$

حال با فرض آنکه مجموعه $\{(x, a)\}$ تک عضوی است پس:

یعنی گزینه ۴ صحیح است.

با قرار دادن $x = 2$ و $x = -2$ در معادله داده شده، داریم: (۱۵)

$$\begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ f(-2) - 2f(2) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2) + 2f(-2) = 5 \\ -2f(-2) + 4f(2) = -10 \end{cases} \Rightarrow 5f(2) = -5 \Rightarrow f(2) = -1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

اگر $u = x + 1$ باشد در نتیجه: $x = u - 1$. پس: (۱۶)

$$f(x+1) = f(u) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (u-1-1)^2 = (u-2)^2 \Rightarrow F(u) = (u-2)^2$$

که با تغییر متغیر $x \rightarrow u$ داریم: $f(x) = (x-2)^2$. که گزینه ۱ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۷)

$$\begin{cases} m - 2 > 0 \\ 9 - 4(m-2)(m+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 9 - 4(m^2 - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -4m^2 + 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{2}$$



۱۸

$$x = 2 = -\frac{1}{2a-2} \Rightarrow -2a + 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \text{ریشه مثبت} = 6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بدیهی است نقاط $(1, 0)$ و $(0, -6)$ و $(-2, -6)$ در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ صدق می‌کنند.

$$(0, -6) \Rightarrow c = -6$$

$$(1, 0) \Rightarrow a + b - 6 = 0$$

$$(-2, -6) \Rightarrow 4a - 2b - 6 = -6 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

پس تابع داده شده به صورت $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ خواهد بود که $f(-1)$ برابر است با:

$$f(-1) = 2 - 4 - 6 = -8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(1+x) - f(1-x) = (1+x)^2(1-x)^2 - (1-x)^2(1+x)^2 = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x-1)^2 + 2$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = (1 + \sqrt{2} - 1)^2 + 2 = 2 + 2 = 4 \quad (1)$$

$$f(2) = (2-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3 \quad (2)$$

$$(1) - (2) = 4 - 3 = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0 \Rightarrow (x^3 - x) - 4(x^2 - 1) < 0$$

$$x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) < 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x - 4) < 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-4) < 0$$

$$\begin{array}{l} x > -1 \\ x+1 > 0 \end{array} \rightarrow (x-1)(x-4) < 0 \Rightarrow x \in (1, 4) \Rightarrow b - a = 4 - 1 = 3$$

	$-\infty$	1	4	$+\infty$
		$+$	$-$	$+$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(2x+1)(x+8) = mx \Rightarrow 2x^2 + 16x + x + 8 = mx \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (17-m)^2 - 64 < 0 \Rightarrow |m-17| < 8 \Rightarrow -8 < m-17 < 8 \Rightarrow 9 < m < 25$$



۲۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید معادله‌ی تلاقی نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ با نیم‌ساز ناحیه‌ی اول ($y = x$) ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2 - 4(2)(m+6) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m - 24 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

چون تأکید شده نمودار بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول مماس است. ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی تلاقی (طول نقطه‌ی تماس) باید مثبت باشد.

$$m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \text{ . ریشه‌ی مضاعف منفی دارد.}$$

$$m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ . ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد.}$$

پس $m = -4$ صحیح است. نمودار بر نیم‌ساز ربع اول مماس است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۵

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{a})^2 + 4a(1-a) < 0 \Rightarrow 4a + 4a - 4a^2 < 0 \end{cases}$$

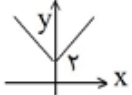
$$\Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a+2)(a-3) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a < -2$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \Rightarrow -x^2 + 4x + 12 > 7 \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 > 0 \text{ . گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۶}$$

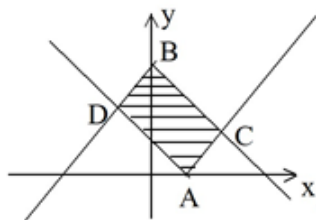
$$\Rightarrow (-x+5)(x+1) > 0 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow b - a = 6$$

$$y - |x| = 2 \Rightarrow y = |x| + 2$$

شکل نمودار $y = |x| + 2$ به صورت  می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل نمودار، تابع از نواحی اول و دوم می‌گذرد. بنابراین گزینه ۱ صحیح است. ۲۷



طبق تعریف قدر مطلق: ۲۸



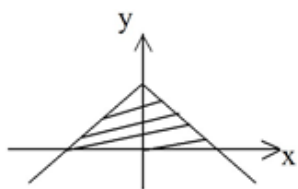
$$y = |x - 1| \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 & x - 1 \geq 0 \\ y = -(x - 1) & x - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 1 & x \geq 1 \\ y = -x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$y = 2 - |x| \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - x & x \geq 0 \\ y = 2 + x & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین شکل منحنی بصورت رسم شده می‌باشد، که یک مستطیل است. طول اضلاع مستطیل فاصله نقطه $A(1, 0)$ از خطوط $y - x - 2 = 0$ و $y + x - 2 = 0$ است. می‌دانیم فاصله نقطه (x_0, y_0) از خط به معادله

$$ax + by + c = 0 \quad \text{بصورت} \quad \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{می‌باشد. بنابراین} \quad AC = \frac{|0 + 1 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و}$$

$$AD = \frac{|0 - 1 - 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{می‌باشد. بنابراین مساحت مستطیل برابر با} \quad \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \quad \text{می‌باشد. لذا گزینه ۱ صحیح است.}$$



$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ y = 0 \Rightarrow |x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow S = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

ارتفاع منطقه هاشورخورده ۳ و قاعده آن ۶ می‌باشد. پس گزینه ۴ صحیح است.

$$f(x) = |x^2 - 5| \Rightarrow f(-2) = |(-2)^2 - 5| = |-1| = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \frac{x}{1 + x^2} \Rightarrow g(2) = \frac{2}{1 + 2^2} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1 + f(-2)}{g(2)} = \frac{1 + 1}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(2 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{5})^2 + |2 - \sqrt{5}| = \frac{1}{4}(4 + 5 - 4\sqrt{5}) + \sqrt{5} - 2 \\ = \frac{9 - 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 8}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. (۳۲)

$$f(x) = |2x - 5| \Rightarrow f(2 + \sqrt{2}) = |2(2 + \sqrt{2}) - 5| = |4 + 2\sqrt{2} - 5| = \underbrace{|2\sqrt{2} - 1|}_{+}$$

$$= 2\sqrt{2} - 1$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = |2(1 + \sqrt{2}) - 5| = |2 + 2\sqrt{2} - 5| = \underbrace{|2\sqrt{2} - 3|}_{-} = 3 - 2\sqrt{2}$$

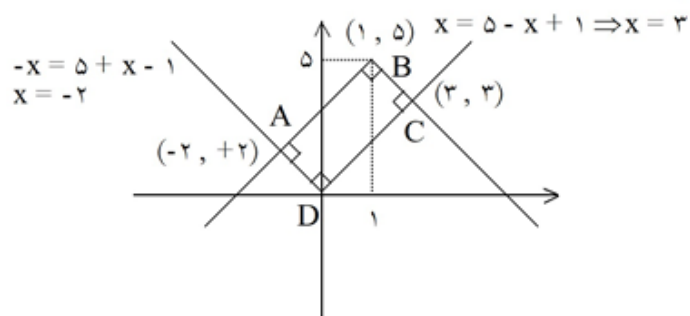
$$\Rightarrow f(2 + \sqrt{2}) + f(1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 1 + 3 - 2\sqrt{2} = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\sqrt{2}$ تقریباً برابر با $1/4$ است، بنابراین $2\sqrt{2} \simeq 2/8$ می‌شود و عدد
 $2\sqrt{2} - 3$ یک عدد منفی خواهد بود و اعداد منفی هنگام بیرون آمدن از قدرمطلق، یک منفی در آنها ضرب می‌شود.با جای‌گذاری عدد $2\sqrt{2} - 3$ در تابع مسئله داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{3}x^2 + |2x| \xrightarrow{x = 2\sqrt{2} - 3} f(2\sqrt{2} - 3) = -\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 3)^2 + |2(2\sqrt{2} - 3)| \\ &= -\frac{1}{3}\left((2\sqrt{2})^2 - 2(2\sqrt{2})(3) + (3)^2\right) - 2(2\sqrt{2} - 3) = -\frac{1}{3}(8 - 12\sqrt{2} + 9) - 4\sqrt{2} + 6 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{12\sqrt{2}}{3} - \frac{9}{3} - 4\sqrt{2} + 6 = -\frac{1}{3} + \cancel{4\sqrt{2}} - 3 - \cancel{4\sqrt{2}} + 6 = -\frac{1}{3} + 3 = \frac{-1 + 9}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۴



$$AB = \sqrt{(-2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$$

$$2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$x \geq \sqrt{2} \Rightarrow 2x^2 - 4 < 2x \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

$$x \geq \sqrt{2} \cap -1 < x < 2 \Rightarrow \sqrt{2} \leq x < 2 \quad (1)$$

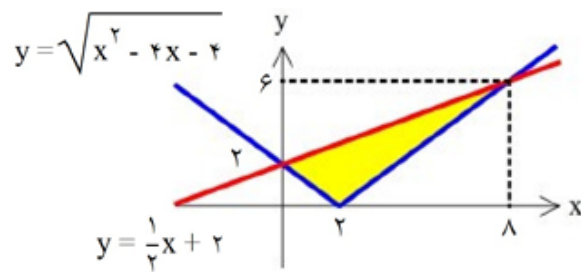
$$x < \sqrt{2} \Rightarrow -2x^2 + 4 < 2x \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 1$$

$$x < \sqrt{2} \cap ((-\infty, -2) \cup (1, +\infty)) = 1 < x < \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} = (1, 2) \Rightarrow b - a = 2 - 1 = 1$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۶



$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$$

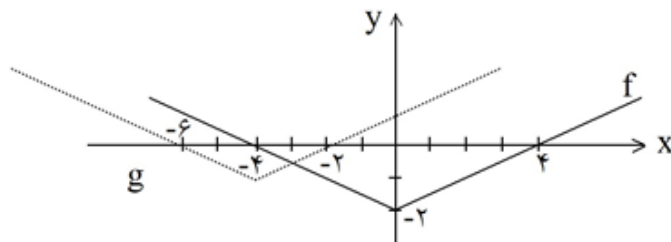
مساحت دو مثلث سفید کوچک - مساحت ذوزنقه = مساحت قسمت رنگی

$$S = \left(\frac{(2+6) \times 4}{2} \right) - \left(\frac{2 \times 2}{2} + \frac{6 \times 6}{2} \right) = 12$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$f(x) = \frac{1}{2}|x| - 2$$

x	-4	0	4
y	0	-2	0



$$g(x) = \left(\frac{1}{2}|x+4| - 2 \right) + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}|x+4| - 1$$

x	-6	-4	-2
y	0	-1	0

$$\text{نقطه‌ی برخورد: } \frac{1}{2}(x+4) - 1 = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow x+4-2 = -x-4 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که اگر $f(x) = f(-x)$ باشد، تابع زوج است و نسبت به محور y ها قرینه است و کافی است که شکل آن را در بازه $[0, +\infty)$ بررسی نماییم. در این مسئله $f(-x) = f(x)$ می‌باشد، پس تابع زوج است و همانطور که گفته شد رفتار تابع در $[0, +\infty)$ بررسی می‌شود. پس:

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ 2 - x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

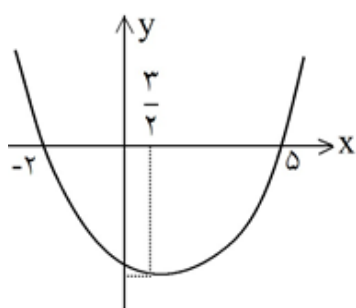
بنابراین شکل تابع در بازه $[0, +\infty)$ به صورت  می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ که از تقارن شکل به دست آمده، حاصل می‌شود، پاسخ صحیح می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$\text{تابع جدید: } y = (-(x-3)^2 + 2(x-3) + 5) - 2 \Rightarrow y = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3$$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow -x^2 + 7x - 12 > 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

$$x = 3, x = 4$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ یک سهمی قائم است که محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند. ۴۰

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -2$$

به آن که سهمی محور x ها را در نقطه‌ای به طول -2 قطع کرده است. اگر سهمی را 2 واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، سهمی از مبدأ خواهد گذشت و دیگر طول تلاقی اش با محور x ها منفی نیست. به نمودار روبه‌رو دقت کنید.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۱

$$\text{تابع جدید: } y = ((x+2)^2 - (x+2) - 3) - 9 = x^2 + 3x - 10 < 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-2) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

باتوجه به تعریف داده شده $f(x)$ همواره مثبت است، پس $f(x)$ منفی است. بنابراین با توجه به تعریف داده شده $f(-f(x)) = 1$ می‌باشد. پس گزینه ۱ صحیح است. ۴۲

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است. ۴۳



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. یادآوری می‌کنیم که نیمسازي ناحیه‌ی اول و سوم تابع همانی است.

$$m + n = 1 \quad (1)$$

$$n^2 + n = 20 \Rightarrow n^2 + n - 20 = 0 \Rightarrow (n + 5)(n - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -5 \\ n = 4 \end{cases}$$

$$n^2 - 3n = 4 \Rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0 \Rightarrow n = -1, \quad n = +4$$

$$\xrightarrow{(1)} m + 4 = 1 \Rightarrow m = -3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f = \{(3, n^2 - 2n), (m, 8), (2n - 5, t), (4, 3m + 2)\}$$

$$\text{تابع ثابت} \Rightarrow \begin{cases} t = 8 \\ 3m + 2 = 8 \Rightarrow m = 2 \\ n^2 - 2n = 8 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0 \Rightarrow (n - 4)(n + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 4 \text{ می شود} \\ n = -2 \text{ غ ق} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m + n + t = 2 + 4 + 8 = 14$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} + \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)}$$

$$1 + \sqrt{2} + \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{2 - 1} = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 = 3\sqrt{2} - 1$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} + \frac{2}{1 - \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} + \frac{2(1 + \sqrt{2})}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = 1 - \sqrt{2} + \frac{2(1 + \sqrt{2})}{1 - 2}$$

$$= 1 - \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} = -1 - 3\sqrt{2} \Rightarrow f(1 + \sqrt{2}) + f(1 - \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 1 - 1 - 3\sqrt{2} = -2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مقدار $f(x)$ را به ازای ۲ و -۲ محاسبه می‌نماییم:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2} \Rightarrow \begin{cases} f(2) = \frac{8 - 1}{4 + 2} = \frac{7}{6} \\ f(-2) = \frac{(-8) - 1}{4 + 2} = \frac{-9}{6} \end{cases}$$

$$f(2) - f(-2) = \frac{7}{6} - \left(\frac{-9}{6}\right) = \frac{7}{6} + \frac{9}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$



۴۸

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1}$$

چون طبق تعریف تابع داریم:

پس از ساده سازی سعی می‌کنیم X را بر حسب y تشکیل دهیم داریم:

$$xy - y = x + 1 \Rightarrow x(y - 1) = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

با توجه به قانون تابع گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به ضابطه داده شده: ۴۹

$$f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \quad \Rightarrow$$

$$g(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$f(g(x)) = (g(x))^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵۰

با استفاده از رابطه $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ابتدا $f(n)$ را حساب می‌کنیم (بر حسب $f(1)$)

$$f(2) = f(1) + f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1) \Rightarrow f(4) = f(3) + f(1)$$

و بالاخره $f(n) = nf(1)$ پس $\frac{f(n)}{f(1)} = n$ و گزینه ۳ صحیح است.

سید علی موسوی

۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

مشهد مقدس

