

۱ در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$ ،  $(A = 90^\circ)$  و  $tg C = \frac{3}{5}$  تصویر ضلع  $c$  بر روی ضلع  $a$  برابر  $\frac{3}{6}$  واحد است. اندازه

ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

- (۱) ۴ (۲)  $\frac{4}{8}$  (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴) ۶

۲ در مثلث  $ABC$  داریم:  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $tg B = \sqrt{2}$  و  $a = 3\sqrt{3}$  اندازه ضلع  $c$  کدام است؟

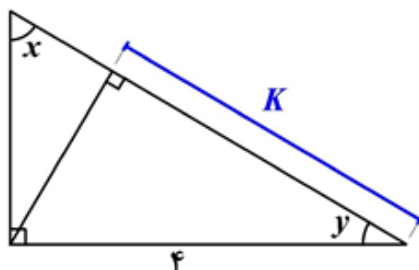
- (۱)  $\sqrt{6}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳) ۲ (۴) ۳

۳ کدامیک از نامساوی‌های زیر بین نسبت‌های مثلثاتی زوایای  $40^\circ$  و  $50^\circ$  درجه برقرار است؟

(۱)  $\sin 50^\circ < \sin 40^\circ$  (۲)  $\cos 50^\circ < \cos 40^\circ$

(۳)  $tg 50^\circ < tg 40^\circ$  (۴)  $\cotg 40^\circ < \cotg 50^\circ$

۴ در شکل زیر مقدار  $k$  کدام است؟



- (۱)  $4 \sin x$  (۲)  $4 \sin y$

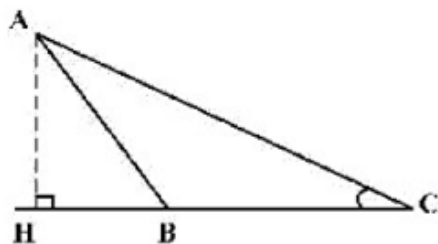
- (۳)  $\frac{1}{4} \sin y$  (۴)  $\frac{1}{4} \sin x$

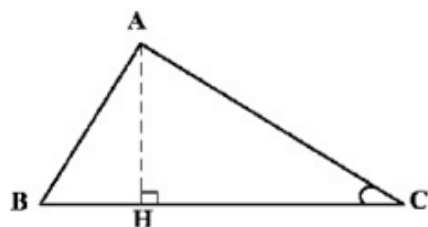
۵ در شکل زیر، فرض کنید  $\sin C = \frac{5}{13}$  و  $CH = 9$ . اندازه‌ی ارتفاع

$AH$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{25}$  (۲)  $\frac{3}{5}$

- (۳)  $\frac{3}{6}$  (۴)  $\frac{3}{75}$





در شکل زیر،  $\text{Cotg } C = \frac{\sqrt{5}}{2}$  و  $AC = 96$ . اندازه‌ی ارتفاع  $AH$ ،

کدام است؟

- (۱) ۴۸  
(۲) ۵۶  
(۳) ۶۴  
(۴) ۷۲

اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و  $8\sqrt{3}$  واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی  $60^\circ$  درجه متقاطع هستند. مساحت

این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- (۱) ۴۸  
(۲) ۵۴  
(۳) ۶۴  
(۴) ۷۲

اگر  $\text{Sin } \theta = \frac{-\sqrt{5}}{5}$  و انتهای کمان  $\theta$  در ربع سوم باشد مقدار  $\tan \theta$  کدام است؟

- (۱) -۲  
(۲)  $-\frac{1}{2}$   
(۳)  $\frac{1}{2}$   
(۴) ۲

اگر  $\text{Sin } \alpha \text{ Cos } \alpha > 0$  و  $\text{Cos } \alpha \text{ Cotg } \alpha < 0$  آنگاه انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- (۱) اول  
(۲) دوم  
(۳) سوم  
(۴) چهارم

اگر  $\text{Sin } x = \frac{1}{4}$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه دوم باشد، مقدار  $2 \text{Cos } x$  کدام است؟

- (۱)  $-\sqrt{3}$   
(۲)  $-\sqrt{2}$   
(۳)  $\sqrt{2}$   
(۴)  $\sqrt{3}$

اگر  $1 - \text{Cos } \theta = \frac{5}{4}$  و  $\text{tg } \theta < 0$ ، انتهای کمان  $\theta$  در کدام ربع مثلثاتی است؟

- (۱) اول  
(۲) دوم  
(۳) سوم  
(۴) چهارم

اگر  $\text{tg } x = -\frac{1}{4}$  و  $\text{Cos } x < 0$ ، مقدار  $\text{Sin } x$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
(۲)  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$   
(۳)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$   
(۴)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

اگر  $\text{Sin } x \text{ Cos } x = -\frac{1}{4}$  آنگاه مقدار  $\text{Sin } x + \text{Cos } x$  کدام است؟

- (۱)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$   
(۲)  $\pm 1$   
(۳)  $\pm \sqrt{2}$   
(۴)  $\pm 2$



۱۴ خلاصه شده عبارت  $(\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x)^2 - \frac{1}{(\operatorname{Sin} x)^2}$  کدام است؟

- (۱)  $(\operatorname{tg} x)^2$  (۲)  $(\operatorname{Cotg} x)^2$  (۳)  $1 + (\operatorname{Cotg} x)^2$  (۴)  $1 + (\operatorname{tg} x)^2$

۱۵ اگر  $\operatorname{Sin} x + \operatorname{tg} x > 0$  و  $\frac{1}{\operatorname{Cos} x} - \operatorname{Sin} x \operatorname{tg} x < 0$  باشد، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۶ اگر انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه اول دایره مثلثاتی باشد، عبارت  $\sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{1 + \operatorname{Cos} \alpha}}$  برابر

- (۱)  $-\operatorname{tg} \alpha$  (۲)  $-\operatorname{Cotg} \alpha$  (۳)  $\operatorname{tg} \alpha$  (۴)  $\operatorname{Cotg} \alpha$  کدام است؟

۱۷ اگر انتهای کمان روبرو به زاویه  $\alpha$  در ناحیه دوم باشد، حاصل  $\sqrt{\frac{\operatorname{Cotg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha}}$  کدام است؟

- (۱)  $-\operatorname{Cotg} \alpha$  (۲)  $-\operatorname{Cos} \alpha$  (۳)  $\operatorname{Cotg} \alpha$  (۴)  $\operatorname{Cos} \alpha$

۱۸ اگر  $\operatorname{Cos} x = \sqrt{\frac{\operatorname{Cotg} x}{\operatorname{Cotg} x - a^2}}$  ( $a \in \mathbb{R}$ )، انتهای کمان  $x$  در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۹ حاصل  $\operatorname{Sin}^2 \alpha (1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha)$  کدام است؟

- (۱)  $-1$  (۲)  $1$  (۳)  $\operatorname{Sin} \alpha$  (۴)  $\operatorname{Cos} \alpha$

۲۰ اگر  $x = \frac{2}{\operatorname{Sin} \alpha}$ ،  $y = 3 \operatorname{Cotg} \alpha$ ، مقدار  $9x^2$  چقدر است؟

- (۱)  $4 + 9y^2$  (۲)  $9 + 4y^2$  (۳)  $36 - 4y^2$  (۴)  $36 + 4y^2$



۲۱) حاصل  $(1 + \operatorname{tg} \theta)(1 + \operatorname{Cotg} \theta) - \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta}$  کدام است؟

۲ (۱)      ۱ (۲)      ۳ (صفر)      ۴ (۱-)

۲۲) عبارت  $\operatorname{tg} 135^\circ \sin^2 60^\circ$  برابر کدام است؟

$-\frac{3}{4}$  (۱)       $-\frac{1}{2}$  (۲)       $\frac{1}{4}$  (۳)       $\frac{3}{4}$  (۴)

۲۳) حاصل  $\sin^2 x \cos^2 x (2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{Cotg}^2 x)$  کدام است؟

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۱ +  $\cos^2 x$ )      ۴ (۱ +  $\sin^2 x$ )

۲۴) حاصل  $(\cos^4 x - \sin^4 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{tg}^2 x$  کدام است؟

۱ (صفر)      ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)

۲۵) به ازای کدام مقدار A تساوی  $\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^4 x - 1$  یک اتحاد است؟

۲ (۱)      ۱ (۲)      -۱ (۳)      -۲ (۴)

۲۶) حاصل  $(\frac{1}{\cos \theta} - 1)(\frac{1}{\cos \theta} + 1)$  برابر کدام است؟

$\operatorname{tg}^2 \theta$  (۱)       $\operatorname{Cotg}^2 \theta$  (۲)       $\frac{1}{\sin^2 \theta}$  (۳)       $\frac{1}{\cos^2 \theta}$  (۴)

۲۷) خلاصه شده عبارت  $\cos^2 \alpha (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 1$  برابر کدام است؟

۱ (۱)       $\cos^2 \alpha$  (۲)       $\sin^2 \alpha$  (۳)       $1 + \sin^2 \alpha$  (۴)

۲۸) حاصل  $(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \operatorname{tg} \theta \cos^2 \theta$  برابر کدام است؟

۱ (۱)       $\operatorname{tg} \theta$  (۲)       $1 + \operatorname{Cotg} \theta$  (۳)      ۰ (۴)

۲۹) ساده شده عبارت  $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$  کدام است؟

$2 \cot^2 \theta$  (۱)       $2 \tan^2 \theta$  (۲)       $1 - 2 \cos^2 \theta$  (۳)       $1 - 2 \sin^2 \theta$  (۴)



۳۰ حاصل  $\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$  کدام است؟

(۴)  $\cot^2 \theta$       (۳)  $\tan^2 \theta$       (۲)  $\cos^2 \theta$       (۱)  $\sin^2 \theta$

۳۱ با فرض  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$  حاصل عبارت  $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta}$  کدام است؟

(۴)  $\frac{2}{3}$       (۳)  $\frac{1}{2}$       (۲)  $\frac{4}{9}$       (۱)  $\frac{1}{3}$

۳۲ حاصل  $\left( \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) - 2 \tan^2 \theta$  کدام است؟

(۴) ۲      (۳) ۱      (۲) ۰      (۱) -۱

۳۳ ساده شده عبارت  $(1 - \sin^2 \theta) \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - (1 - \cos \theta)^2$  کدام است؟

(۴)  $2 \cos \theta$       (۳)  $-\cos^2 \theta$       (۲)  $\cos^2 \theta$       (۱)  $\sin^2 \theta$

۳۴ اگر  $\sin^2 x + 2 \cos^2 x = \frac{3}{2}$  باشد، آنگاه  $\tan^2 x$  کدام است؟

(۴)  $\frac{1}{2}$       (۳)  $\frac{3}{2}$       (۲) ۲      (۱) ۱

۳۵ اگر  $1 - \cos \theta = \frac{5}{3}$  و  $\tan \theta \cos \theta > 0$  باشد انتهای کمان  $\theta$  در کدام ربع مثلثاتی است؟

(۴) چهارم      (۳) سوم      (۲) دوم      (۱) اول

۳۶ حاصل عبارت  $\cos^2 \theta (1 + 2 \tan^2 \theta) + (\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)$  کدام است؟

(۴) ۲      (۳) ۱      (۲) صفر      (۱) -۱



۳۷

اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم مثلثاتی و  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\operatorname{Cos}\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Cos}(\alpha + \pi)}{\operatorname{Cotg}(2\alpha)}$  کدام

است؟

$-\frac{1056}{175}$  (۴)

$\frac{96}{175}$  (۳)

$\frac{1056}{175}$  (۲)

$-\frac{96}{175}$  (۱)

در صورتی که  $\operatorname{Cos} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) > 0$ ، انتهای کمان  $\alpha$  در کدام ناحیه (نواحی) مثلثاتی می‌تواند باشد؟

۳۸

(۴) اول و چهارم

(۳) اول و سوم

(۲) دوم

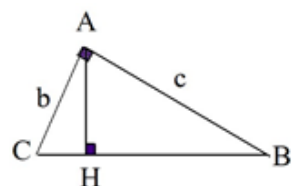
(۱) اول

سید علی موسوی

۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

مشهد مقدس





گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱

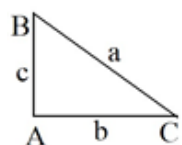
می‌دانیم:

طبق شکل داریم:

$$B + C = 90 \Rightarrow \operatorname{tg} \hat{C} = \operatorname{Cotg} \hat{B}$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{Cotg} B = \frac{3}{5} = \frac{BH}{AH} = \frac{3/6}{AH}$$

$$\Rightarrow BH = 3/6 \Rightarrow AH = \frac{5 \times 3/6}{3} = 6$$



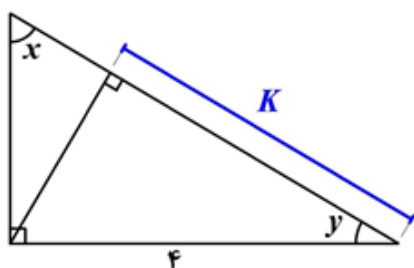
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق شکل با توجه به اینکه مثلث ABC قائمه است داریم: ۲

$$\begin{cases} \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{b}{c} = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2}c \\ \text{رابطه فیثاغورث: } \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 = (\sqrt{2}c)^2 = (\sqrt{2}c)^2 + c^2 = 3c^2 \Rightarrow c = 3$$

می‌دانیم برای زاویه حاده (۰ تا ۹۰ درجه)  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{Sin} \alpha$  صعودی و  $\operatorname{Cotg} \alpha$ ,  $\operatorname{Cos} \alpha$  نزولی است، پس ۳

$50^\circ > 40^\circ \Rightarrow \operatorname{Cos} 50^\circ < \operatorname{Cos} 40^\circ$  در نتیجه گزینه ۲ صحیح است.



در مثلث قائم‌الزاویه کوچک با اضلاع k و ۴ داریم: ۴

$$\frac{k}{4} = \operatorname{Cos} y \Rightarrow k = 4 \operatorname{Cos} y$$

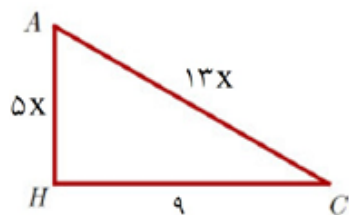
با توجه به اینکه x و y دو زاویه متمم هستند پس:

$$x = 90 - y \Rightarrow \operatorname{Sin} x = \operatorname{Cos} y \Rightarrow k = 4 \operatorname{Sin} x$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون مقدار sin را داریم می‌توان به این صورت در نظر گرفت: ۵

با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورث داریم:



$$(13x)^2 = (5x)^2 + 81 \Rightarrow x^2 = \frac{81}{144} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$AH = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3.75$$

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا مقدار  $AC = 96$ ،  $\cot C = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \tan C = \frac{2}{\sqrt{5}}$  را در نظر می‌گیریم:

$$\sin C = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \times \sin C \Rightarrow AH = 96 \times \frac{2}{3} = 64$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

$$S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

$$4 \times 18 = 72$$

$\theta$  در ناحیه ی سوم  $\Rightarrow \tan \theta > 0$ .

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸

$$\sin \theta = \frac{-\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{5}}{\frac{-2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cot \alpha = \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$$

۹

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \alpha > 0 \\ \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha \cos \alpha > 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \alpha < 0 \end{cases}$$

سینوس و کسینوس هر دو منفی هستند، پس انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد و گزینه ۳ صحیح است.





۱۰

$$\sin x = \frac{1}{4}, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

چون  $x$  در ناحیه دوم است. پس  $\cos x < 0$  می‌باشد. بنابراین:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{1}{16}} = -\sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{-\sqrt{15}}{4} \Rightarrow 2 \cos x = -\sqrt{15}$$

گزینه ۱ صحیح است.

$$\cos \theta = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

(۱)  $\theta$  در ربع دوم یا سوم

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۱

$$\tan \theta < 0 \quad \theta \text{ در ربع دوم یا چهارم}$$

$\theta$  در ربع دوم است  $\Rightarrow$  (۱), (۲)

چون  $\cos x$  و  $\tan x$  هر دو منفی هستند، پس  $x$  در ناحیه دوم است.  $\sin x$  در این ناحیه مثبت است، پس:

$$\left. \begin{aligned} \tan x = \frac{-1}{2} &\Rightarrow \cot x = -2 \\ \sin^2 x &= \frac{1}{1 + \cot^2 x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{1 + 4} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = +\frac{\sqrt{5}}{5}$$

لذا گزینه ۴ صحیح است.

۱۲

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cdot \cos x \quad \text{و} \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{می‌دانیم که}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$$

پس: با توجه به سؤال،  $\sin x \cdot \cos x = \frac{-1}{4}$  است.

۱۳

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \left( \frac{-1}{4} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x + \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

گزینه ۱ صحیح است.



$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x)^2 - \frac{1}{(\operatorname{Sin} x)^2} = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{Cotg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x \operatorname{Cotg} x - (1 + \operatorname{Cotg}^2 x) =$$

۱۴

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{Cotg}^2 x + 2 - 1 - \operatorname{Cotg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

بنابراین گزینه ۴ درست است.

با ساده‌سازی رابطه دوم خواهیم داشت: ۱۵

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} x} - \operatorname{Sin} x \operatorname{tg} x < 0 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{Cos} x} - \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos} x} < 0 \Rightarrow \frac{1 - \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Cos} x} < 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Cos} x} = \operatorname{Cos} x < 0$$

بنابراین کمان  $x$  در ربع دوم و سوم است. با ساده‌سازی رابطه اول:

$$\operatorname{Sin} x + \operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{Cos} x) > 0$$

می‌دانیم همواره  $1 + \operatorname{Cos} x \geq 0$  پس  $\operatorname{tg} x > 0$  یعنی انتهای کمان در ربع اول یا سوم قرار دارد. با توجه به نتایج بدست آمده، ربع سوم در هر دو نتیجه مشترک می‌باشد. پس انتهای کمان  $x$  در ربع سوم بوده و گزینه ۳ صحیح است.

$$\sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{1 + \operatorname{Cos} \alpha}} = \sqrt{1 + \operatorname{Cotg}^2 \alpha} - \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{Cos} \alpha)(1 - \operatorname{Cos} \alpha)}{(1 + \operatorname{Cos} \alpha)(1 - \operatorname{Cos} \alpha)}}$$

۱۶

$$= \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{Cos} \alpha)^2}{1 - \operatorname{Cos}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}} - \sqrt{\frac{(1 - \operatorname{Cos} \alpha)^2}{\operatorname{Sin}^2 \alpha}}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Sin} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{Cos} \alpha}{\operatorname{Sin} \alpha} = \operatorname{Cotg} \alpha$$

پس گزینه ۴ صحیح است.



$$\text{می دانیم: } \frac{1}{1 + \text{Cotg}^2 \alpha} = \text{Sin}^2 \alpha, \text{ Cotg} \alpha = \frac{\text{Cos} \alpha}{\text{Sin} \alpha}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\text{Cotg}^2 \alpha}{1 + \text{Cotg}^2 \alpha}} &= \sqrt{\frac{(\text{Cotg}^2 \alpha) \cdot \frac{1}{1 + \text{Cotg}^2 \alpha}}{1 + \text{Cotg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{\text{Cos}^2 \alpha}{\text{Sin}^2 \alpha} \times \text{Sin}^2 \alpha} \\ &= \sqrt{\text{Cos}^2 \alpha} = |\text{Cos} \alpha| \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{\text{Cotg}^2 \alpha}{1 + \text{Cotg}^2 \alpha}} = -\text{Cos} \alpha$$

$$\text{دوم ناحیه در } \alpha \Rightarrow \text{Cos} \alpha < 0 \Rightarrow |\text{Cos} \alpha| = -\text{Cos} \alpha$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$\text{Cos} x$  مثبت است زیرا مساوی یک رادیکال با فرجه زوج است. طرفین را به توان می‌رسانیم و داریم:

$$\text{Cos}^2 x = \frac{\text{Cotg} x}{\text{Cotg} x - a^2}$$

$$\frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{\text{Cotg} x}{\text{Cotg} x - a^2} \Rightarrow \text{Cotg} x + \text{Cotg} x \text{tg}^2 x = \text{Cotg} x - a^2 \quad \text{پس از ساده سازی داریم:}$$

$$\Rightarrow \text{Cotg} x + (\text{Cotg} x \cdot \text{tg} x) \text{tg} x = \text{Cotg} x - a^2 \Rightarrow \text{Cotg} x + \text{tg} x = \text{Cotg} x - a^2$$

پس  $\text{tg} x = -a^2$ . یعنی  $\text{tg} x$  منفی است پس انتهای کمان  $x$  می‌تواند در نواحی دوم و چهارم مثلثاتی باشد. اما طبق صورت مسئله مقدار  $\text{Cos} x$  مثبت می‌باشد لذا  $x$  در ناحیه چهارم واقع است. پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

با توجه به اینکه  $\frac{1}{\text{Sin}^2 \alpha} = 1 + \text{Cotg}^2 \alpha$  می‌باشد، داریم:

$$\text{Sin}^2 \alpha \times (1 + \text{Cotg}^2 \alpha) = \text{Sin}^2 \alpha \times \frac{1}{\text{Sin}^2 \alpha} = 1$$

لذا گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به اینکه  $\frac{1}{\text{Sin}^2 \alpha} = 1 + \text{Cotg}^2 \alpha$  و با جایگذاری روابط داده شده:

$$\frac{1}{\text{Sin}^2 \alpha} = 1 + \text{Cotg}^2 \alpha \Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 + \frac{y^2}{9} \Rightarrow 9x^2 = 36 + 4y^2$$

پس گزینه ۴ جواب صحیح است.



$$\begin{aligned}
 (1 + \operatorname{tg} \theta)(1 + \operatorname{Cotg} \theta) - \frac{1}{\operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta} &= 1 + \operatorname{tg} \theta + \operatorname{Cotg} \theta + \operatorname{tg} \theta \cdot \operatorname{Cotg} \theta - \frac{1}{\operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta} \\
 &= 1 + \frac{\operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cos} \theta} + \frac{\operatorname{Cos} \theta}{\operatorname{Sin} \theta} + 1 - \frac{1}{\operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta} = 2 + \frac{\operatorname{Sin}^2 \theta + \operatorname{Cos}^2 \theta}{\operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta} - \frac{1}{\operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta} \\
 &= 2 + \frac{1}{\operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta} - \frac{1}{\operatorname{Sin} \theta \cdot \operatorname{Cos} \theta} = 2
 \end{aligned}$$

۲۱

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{tg}(135^\circ) \times \operatorname{Sin}^2(60^\circ) = (-1) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = -\frac{3}{4}$$

۲۲

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

اگر عدد ۲ داخل پرانتز را به ۱+۱ تبدیل کنیم، می‌توان بجای  $1 + \operatorname{tg}^2 x$  عبارت  $\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x}$  و بجای

۲۳

$1 + \operatorname{Cotg}^2 x$  عبارت  $\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x}$  را قرار داد. بنابراین:

$$\operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cos}^2 x (2 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{Cotg}^2 x) = \operatorname{Sin}^2 x \operatorname{Cos}^2 x \left( \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 x} \right) =$$

$$\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x = 1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

$$(\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{tg}^2 x = (\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x) \frac{(\operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Sin}^2 x)}{\operatorname{Cos}^2 x} + \operatorname{tg}^2 x$$

۲۴

$$= (\operatorname{Sin}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x)(\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x) \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x} + \operatorname{tg}^2 x$$

$$= (\operatorname{Cos}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x) \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x} + \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 1$$

بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.



$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{A}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x - 1$$

پس از ساده سازی داریم :

$$\frac{1 + A \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x(1 + A)}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)}{\cos^2 x} \Rightarrow \sin^2 x + (1 + A)\cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 1 + A = -1 \Rightarrow A = -2$$

یعنی گزینه ۴ درست است.

(مقدار A را با قرار دادن مثلاً  $x = 0$  در طرفین تساوی نیز می‌توانستیم بدست آوریم)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۶

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} - 1\right)\left(\frac{1}{\cos \theta} + 1\right) = \frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \operatorname{tg}^2 \theta$$

$$\cos^2 \alpha (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - 1 = \cos^2 \alpha \left(2 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) - 1 = 2\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 1 =$$

$$= 2\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \operatorname{tg} \theta \cos^2 \theta$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۸

$$A = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۹

$$(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) = \cos^2 \theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$



۳۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم  $\cot^2 \theta = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \cot^2 \theta$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + \cos^2 \theta$$

$$= 1(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۲

$$\left( \frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) - 2 \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{(1 + \sin \theta) + (1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} - 2 \operatorname{tg}^2 \theta$$

$$= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} - 2 \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2(1 - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{2 \cancel{\cos^2 \theta}}{\cancel{\cos^2 \theta}} = 2$$

روش دوم: می‌توان با فرض  $\theta = 0$  و امتحان گزینه‌ها به جواب رسید.

$$\theta = 0 \rightarrow \left( \frac{1}{1 - \sin 0} + \frac{1}{1 + \sin 0} \right) - 2 \operatorname{tg}^2 0 = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) - 0 = 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  و از آنجا  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$  حال پراشته را ضرب می‌کنیم: ۳۳

$$\cos^2 \theta \left( 1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) - (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) = \cos^2 \theta + 1 - 1 - \cos^2 \theta + 2 \cos \theta = 2 \cos \theta$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$1 - \cos^2 x + 2 \cos^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2} \\ \sin^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$1 - \cos \theta = \frac{5}{3} \Rightarrow 1 - \frac{5}{3} = \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{2}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$\operatorname{tg} \theta \cdot \cos \theta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta < 0 \\ \operatorname{tg} \theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ناحیه دوم}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۳۶)

$$\cos^2 \theta (1 + \tan^2 \theta + \tan^2 \theta) + \underbrace{(\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1)}_{\text{مزدوج}} =$$

$$\cos^2 \theta \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) + \cos^2 \theta - 1 = 1 + \underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_1 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۳۷)

$$\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cotg(2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cotg 2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{25}{16}} = \frac{24}{25}$$

$$\frac{1}{\cotg 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{-4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cotg 2\alpha} = \frac{\frac{24}{25} - \left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{24 + 20}{25}}{\frac{7}{24}} = \frac{1056}{175}$$

چون عبارت  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$  همواره مثبت است، پس از نامعادله داده شده نتیجه می‌شود  $\cos \alpha > 0$  و این در صورتیکه انتهای کمان  $\alpha$  در ناحیه اول و چهارم باشد صحیح می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۳۸)

## سید علی موسوی

۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

مشهد مقدس

