Subject:

Year. Month. Date. ( )

$y = x^2 + c \Rightarrow y' = 2x$ [illegible]

تشکیل

برای تعیین معادله دیفرانسیل یک دسته منحنی یک پارامتری باید پارامتر بین معادله و مشتق آن حذف شود

$y = cx^2 + 4 \qquad y' = 2cx \Rightarrow y = \frac{y'}{2}x + 4$

$y = x^2 + ax + b \qquad y = ax^2 + bx + 5$

$y' = 2x + a \qquad y' = 2ax + b$

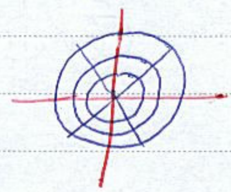
$\boxed{y'' = 2} \qquad y'' = 2a$

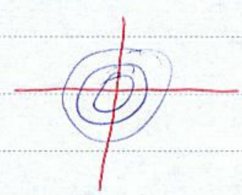
اگر یک دسته منحنی n پارامتر داشته باشد و بخواهیم معادله دیفرانسیل آن را پیدا کنیم باید n پارامتر را بین خودش و مشتقاتش حذف کنیم

مسیرهای قائم

هرگاه دو منحنی از دسته منحنیهای دو معادله برهم عمود باشند یکی از منحنی‌ها را مسیرهای قائم دسته منحنی دیگر می‌گوییم

$y = ax \qquad y^2 + x^2 = c^2$





معادله معلوم ← مسیر اصلی

معادله‌ای که بدست می‌آید ← مسیر قائم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قدم ۱ برای تعیین مسیرهای قائم باید معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را تشکیل داد

$y = ax \qquad y' = a \qquad y' = \frac{y}{x}$

قدم 2 تشکیل معادله دیفرانسیل مسیر قائم.

هرکجا y' داریم آن را با $-\frac{1}{y'}$ عوض می‌کنیم:

$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0 \qquad y^2 + x^2 = c^2$

$F(x, y, y') = 0$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول:
الزاماً باید y' را داشته باشد

$4xy' + 3y - 1 = 0$ — ۱- نسبت به مشتق حل می‌شوند

مرتبه اول

$\cos y' + 3xe^{y'} - 2y = 2$ — 2- نسبت به مشتق حل نمی‌شوند

۱- نسبت به مشتق حل می‌شوند:
به فرم زیر است:

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

تابع حاصلضرب دو تابع یکی از x و دیگری از y است $h(x,y) = h_1(x) \cdot h_2(y)$

$\Rightarrow f_1(x)\, f_2(y)\,dx + f_3(x)\, f_4(y)\,dy = 0 \qquad \times \frac{1}{f_2 f_3}$

$H(x)\,dx + G(y)\,dy = 0 \Rightarrow$ معادله تفکیک پذیر است

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر معادله تفکیک پذیر بود آنگاه

$H(x)dx + G(y)dy = 0$

$\int \quad + \int \quad = c$

1-

$(1+x^3)\,dy - x^2 y\,dx = 0$

$\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + \ln c$

$\ln y^3 = \ln(1+x^3) + \ln c \Rightarrow y^3 = c(1+x^3)$

2-

$x\frac{dy}{dx} + y^2 = 4 \Rightarrow x\,dy + (y^2-4)\,dx = 0$

$\frac{dy}{(y^2-4)} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x = \ln c$

$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x^4 = \ln c \Rightarrow \frac{y-2}{y+2} = \frac{c}{x^4}$

3- حد جواب مسأله زیر وقتی $x \to \infty$ برابر است با

$y' = 2x\cos^2 y \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}$

1- π

2- $\frac{\pi}{4}$

3- $\frac{\pi}{2}$ ✓

4- ∞

$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2x\,dx \qquad \tan y = x^2 + c \quad x=0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = \operatorname{Arc}\tan(x^2+1) = \frac{\pi}{2}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

4- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید

$$x(y-1)\frac{dy}{dx}=y \Rightarrow \frac{y-1}{y}dy=\frac{dx}{x}$$

$$y=\ln xy+c$$

معادلاتی به صورت معادله تابعی از یک خط:

$$y'=f(ax+by+c)$$

$$y'=2x+y-1 \quad , y'=\tan(3x+4y)+2 \quad , y'=e^{4x-y+3}+\sqrt{4x-y+3}-1$$

$$u=ax+by+c \quad , y'=f(u)$$

اگر تو تابعی از یک خط باشد می توان خط را به صورت u گرفت و معادله را به معادله تفکیک پذیر تبدیل کرد

5: $$y'=(y-4x)^2 \Rightarrow u=y-4x \Rightarrow u'=y'-4$$

$$\Rightarrow y'=u^2 \Rightarrow u'+4=u^2 \qquad \frac{du}{u^2-4}=dx$$

$$\frac{1}{4}\ln$$

6: $$y'=(x+y)^2 \qquad u=x+y \Rightarrow y'=u'-1$$

$$u'-1=u^2 \qquad \frac{du}{u^2+1}=dx \qquad \tan^{-1}u=x+c$$

 $$x+y=\tan(x+C)$$

6

Subject:
Year. Month. Date. ( )

:7

$y' = e^{2x+y-1} - 2 \Rightarrow u = 2x+y-1 \qquad u' = 2 + y'$

$u' - \cancel{2} = e^{u} - \cancel{2} \qquad e^{-u}\,du = dx$

$-e^{-u} = x + c$

:2 همگن

$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} h(x,y) \Longrightarrow$ همگن است

در رابطه $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ اگر دو ضریب P و Q همگن با درجه همگنی مساوی باشند ⇐ معادله بالا همگن است و اگر همگن بود می‌توان بجای $y = vx$ قرار داد

$\Rightarrow y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

:8

$x\dfrac{dy}{dx} = x\,tg\left(\dfrac{y}{x}\right) + y = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = tg\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}$

$\cancel{v} + x\dfrac{dv}{dx} = tg\,v + \cancel{v}$

$\cot g\,v\,dv = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln \sin v = \ln cx$

$\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) = cx \qquad y = x\sin^{-1}(cx)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹- همگن درجه صفر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+y^3}{xy^2} = \frac{2+v^3}{v^2}$$

$$\cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \cancel{v} + \frac{2}{v^2} \qquad 2\frac{dx}{x} = v^2 dv$$

$$\frac{1}{3}v^3 = 2\ln x + c \qquad \frac{y^3}{x^3} = 6\ln x + c \Rightarrow y = x\sqrt[3]{}$$

۱۰: همگن از درجه صفر

۱- ۱

۲- ۰ ✓

۳- ∞

۴- موجود نیست

$$y' = \frac{x^2+2y^2}{xy} \quad \xrightarrow{x=0} \quad = \frac{1+2v^2}{v}$$

$$\cancel{v} + xv' = \frac{1+2v^2}{v} - v = \frac{1+v^2}{v}$$

$$\frac{v}{1+v^2}dv = \frac{dx}{x} \qquad \ln(1+v^2) = \ln cx^2$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx^2 \qquad x^2 + y^2 = cx^4 \quad \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$$

۱۱: تمام معادلات به فرم $y = f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$ که صورت و مخرج معادله یک خط باشند که از مبدأ بگذرد هم همگن از درجه صفر می باشد.

$$y = \frac{x+3y+1}{2x-y+4} \qquad \text{همگن نیست}$$

$$y = \frac{ax+by+c}{ex+hy+n}$$

(همگن نیست) در این معادله که همگن نیست مبدأ مختصات را به محل تلاقی دو خط منتقل کنیم به شرطیکه دو خط موازی نباشند

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف- دو خط موازی:

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right) \qquad u = ax+by$$

با تغییر متغیر u، y کاملاً جدا از هم می‌شوند

11- $$y' = \frac{y-x}{y-x-1} \qquad u = y-x \Rightarrow y' = u'+1$$

$$u'+1 = \frac{u}{u-1} \qquad u' = \frac{u}{u-1} - 1 = \frac{1}{u-1} \Rightarrow (u-1)\,du = dx$$

$$(u-1)^2 = 2x + C$$

12- $$y' = \frac{x-y}{2x-2y+1} \qquad u = x-y \Rightarrow y' = 1-u'$$

$$1-u' = \frac{u}{2u+1} \qquad -u' = \frac{u}{2u+1} - 1 = -\frac{u+1}{2u+1}$$

$$\frac{(2u\overset{+1-1}{+1})}{u+1}\,du = dx \qquad 2u - \ln(u+1) = x + C$$

13-

$$(3y+2x+4)\,dx - (4x+6y+5)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{4x+6y+5} \qquad u = 2x+3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}x$$

$$y' = \frac{1}{3}(u'-2) = \frac{u+4}{2u+5} \Rightarrow \frac{3u+12}{2u+5} = (u'-2)$$

$$u' = \frac{7u+22}{2u+5} \Rightarrow \frac{2u+5}{7u+22}\,du = dx$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

دو خط متقاطع باشند

ب : متقاطع

محل تلاقی (x_0, y_0)

$$a x_0 + b y_0 + c = 0$$
$$e x_0 + h y_0 + n = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \overset{\text{جدید}}{X} + x_0 \qquad dx = dX$$
$$y = \overset{\text{جدید}}{Y} + y_0 \qquad dy = dY$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{eX+hY}\right) \quad \Rightarrow \quad Y = vX \qquad \text{تغییر متغیر}$$

14-

$$y' = \frac{x-y+2}{x+y-1}$$

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$x = X - \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad y = Y + \frac{3}{2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1-v}{1+v} \qquad X\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v = \frac{-v^2-2v+1}{1+v}$$

$$-\frac{1+v}{v^2+2v-1}\,dv = \frac{dX}{X}$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3 - کامل

معادله $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را کامل گوییم اگر تابعی مانند $U=U(x,y)$ موجود باشد بطوری که

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q$$

$$dU=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dU=Pdx+Qdy=0$$

$$\Rightarrow du=0 \quad \Rightarrow U=c$$ — به عنوان تابعی از x و y ثابت است.

اگر $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ باشد معادله دیفرانسیل کامل می‌شود.

13: جواب معادله که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟ $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+y\cos x}{4y^3-\sin x}$

$$(\underbrace{3x^2+y\cos x}_{P})dx+(\underbrace{\sin x-4y^3}_{Q})dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos x \quad \Rightarrow$$ کامل است

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y\cos x \quad \Rightarrow \quad u=x^3+y\sin x+f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cancel{\sin x}+f'(y)=\cancel{\sin x}-4y^3 \longrightarrow f'(y)=-4y^3$$

$$x^3+y\sin x-y^4=c \qquad x=0\,,\,y=0 \Rightarrow c=0$$

مثال 14: a را طوری تعیین کنید تا معادله زیر یک معادله کامل باشد

$$(aye^{xy}+2xy)dx+(xe^{xy}+x^2)dy=0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\frac{\partial P}{\partial y} = ae^{xy} + axye^{xy} + \dots$

$ae^{xy} = e^{xy} \Rightarrow a = 1$

$\frac{\partial Q}{\partial y} = e^{xy} + yxe^{xy} \dots$

مثال 15: معادله دیفرانسیل کامل است مقدار a کدام است

$(x^{-1} + y^{-1})dx + axy^{-2}dy = 0$

مثال 16: $y'(y^2 - x) = y$ چه جوابی دارد؟

$y\,dx + (x - y^2)\,dy = 0$

$U = \int y\,dx + f(y) \qquad U = yx + f(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y} = \cancel{x} + f'(y) = \cancel{x} - y^2 \Rightarrow f'(y) = -y^2 \Rightarrow f(y) = -\frac{1}{3}y^3$

$U = yx - \frac{1}{3}y^3 = c$

مثال 17: $(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad , \; y(1) = 1 \Rightarrow y(0) = ?$

دنبال $U = \int (x-y)\,dy + f(x) \Rightarrow U = xy - \frac{1}{2}y^2 + f(x)$

$\frac{\partial U}{\partial x} = \cancel{y} + f'(x) = x + \cancel{y} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$U = xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c = 1$

$y(0) \Rightarrow \quad y^2 = -2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

اگر دیفرانسیل کامل نشود اصلاً قادر به حل مسأله نیستیم

$x\,dy - y\,dx = 0$ کامل نیست ۱- و ۱+

$\frac{1}{xy} \to \frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0$ کامل است ۰ و ۰

$\frac{1}{x^2} \to \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$ $-\frac{1}{x^2}$ و $-\frac{1}{x^2}$ ~

$\frac{1}{y^2} \to \frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx = 0$ $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{y^2}$ ~

عوامل غیر صفری که در یک معادله ناکامل ضرب می‌شوند و معادله را کامل می‌کنند را عامل انتگرال‌ساز گوییم.

فاکتور انتگرال $F=F(x,y) \neq 0$ تابعی است از (x,y) در حالت کلی مخالف صفر به طوری که اگر در طرفین یک معادلهٔ دیفرانسیل ناکامل ضرب شود دیفرانسیل را کامل کند

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$(FP)dx + (FQ)dy = 0 \Rightarrow u = c$$

جوابی که از این طریق بدست می‌آید (u) همان جواب مسأله است.

$$f_1(x) f_2(y)\,dx + f_3(x) f_4(y)\,dy = 0$$

$\frac{1}{f_2 f_3}$ فاکتور انتگرال معادلات جدا از هم

$\frac{1}{xP+yQ}$ همگن ~ ~ ~ بهتر است از روش قبلی حل شوند

اگر معادله ای جواب داشته باشد حتماً یک و بینهایت فاکتور انتگرال‌ساز دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x) \longrightarrow F=e^{\int f(x)dx}$

اگر $\frac{-1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(y) \longrightarrow F=e^{\int f(y)dy}$

اگر عوامل غیر جبری نباشد مثلا ln خوب کار می‌کند $x^{\alpha}y^{\beta}$

مثال 18:

$(xy+y^2)dx-(x^2+xy)dy=0$

1. بیش از یک عامل انتگرال ساز دارد ✓
2. کامل است .
3. فقط یک عامل انتگرال ساز تابعی از x دارد غ
4. فقط یک عامل انتگرال ساز تابعی از y دارد غ

$\frac{\partial P}{\partial y}=x+2y$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x-y$

کامل نیست $\not\equiv$ اما $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3(x+y)$

$\frac{3(x+y)}{Q=-x(x+y)}=-\frac{3}{x}$ $\quad F=e^{-3\int\frac{dx}{x}}=e^{-3\ln x}=\frac{1}{x^3}$

یا

$-\frac{3(x+y)}{P=y(x+3)}=-\frac{3}{y}$ $\quad F=\frac{1}{y^3}$

یا

$x^{\alpha}y^{\beta}(xy+y^2)dx-x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy)dy=0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} - (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\begin{cases} \beta+1 = -\alpha-2 \\ \beta+2 = -\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow$$ جواب می دهد پس می توانیم از این عامل انتگرال ساز استفاده کرد

ولی چون α و β منفی به ما داده استفاده می شود $\Rightarrow$ بینهایت جواب دارد $\alpha+\beta=-3$

مثال 19:

$x^{\alpha}y^{\beta}$ جواب نمی دهد

$$(1+x^2)\,dy - (\operatorname{tg}^{-1}x - y)\,dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \text{تفاضل} \Rightarrow 1-2x$$

$$\frac{1-2x}{Q = 1+x^2} = f(x) \qquad e^{\operatorname{tg}^{-1}x - \ln(1+x^2)} \Rightarrow \frac{e^{\operatorname{tg}^{-1}x}}{1+x^2}$$

مثال 20: عبارت $x^{\alpha}y^{\beta}$ عامل انتگرال ساز معادله زیر است $\alpha+\beta$ کدام است

2 1 -1 -2

$$(x^2+xy^2)\,y' - 3xy + 2y^3 = 0$$

$$x^{\alpha}y^{\beta}(2y^3-3xy)\,dx + x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(\beta+3)x^{\alpha}y^{\beta+2} - 3(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} 2(\beta+3) = \alpha+1 \\ -3(\beta+1) = \alpha+2 \end{cases} \qquad \alpha = 1, \quad \beta = -2$$

$$\alpha + \beta = -1$$

مثال 21:

$$2xy\,dx + (4y+3x^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x \qquad \text{تفاضل} = -4x$$

$$\frac{-4x}{-2xy} = \frac{2}{y} \qquad 2\ln y \Rightarrow F = y^2$$

$$y^2 \times (\qquad) = 0$$

$$2xy^3\,dx + (4y^3 + 3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$u = x^2y^3 + f(y) \Rightarrow \cancel{3x^2y^2} + f'(y) = 4y^3 + \cancel{3x^2y^2}$$

$$f(y) = y^4 \qquad (x^2y^3 + y^4 = C)$$

مثال 22: عامل انتگرال ساز کدام است

$$2\sin y^2\,dx + xy\cos y^2\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y\cos y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = y\cos y^2 \qquad \text{تفاضل} = 3y\cos y^2$$

$$\frac{3y\cos y^2}{xy\cos y} = \frac{3}{x} \Rightarrow F = x^3$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

23 : فاکتور انتگرال ساز

$$y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dx = 0$$

xe^{2x}

$\frac{e^{2y}}{x}$

$\frac{e^{2y}}{y}$

ye^{2y}

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad \text{تفاضل} = 1-2y$$

$$\rightarrow \frac{1-2y}{-y} = 2 - \frac{1}{y} \qquad 2y - \ln y \qquad F = e^{2y-\ln y}$$

$$F = \frac{e^{2y}}{y}$$

24 :

$$dx + 2xy\,dy = ye^{-y^2}\,dy$$

e^{y^2} ✓

e^{x^2}

e^{-x^2}

e^{-y^2}

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \qquad \text{تفاضل} = -2y$$

$$\frac{-2y}{-1} = 2y \qquad F = e^{y^2}$$

25 : α و β را طوری تعیین کنید که $x^\alpha y^\beta$ یک فاکتور انتگرال برای معادله زیر باشد

$$y\,dx + x(1-3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$x^\alpha y^{\beta+1}\,dx + x^{\alpha+1}y^\beta(1-3x^2y^2)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)(x^\alpha y^\beta) + 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+1)x^\alpha y^\beta - 3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}$$

$\alpha = \beta = -3$ $\qquad \alpha = -3$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

26 : فاکتور انتگرال ساز ؟ به x بستگی دارد

$$x^2 dy - xy\, dx = (x-2)e^{x} dx$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \qquad \text{تفاضل} = -3x$$

$$\frac{-3x}{x^2} = \frac{-3}{x} \qquad F = \frac{1}{x^3}$$

27 : جواب عمومی معادله کدام است

$$(1+y^2)dx = (tg^{-1}y - x)\, dy$$

$$(1+y^2)dx + (x - tg^{-1}y)\, dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \qquad \text{تفاضل} = 2y-1$$

$$-\frac{2y-1}{1+y^2} \Rightarrow tg^{-1}y - \ln(1+y^2) \Rightarrow F = \frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}$$

$$e^{tg^{-1}y}\, dx + (x - tg^{-1}y) \cdot \frac{e^{tg^{-1}y}}{1+y^2}\, dy = 0$$

$$u = x e^{tg^{-1}y} + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(\cancel{1+}\frac{1}{1+y^2}\right) e^{tg^{-1}y} + f'(y) =$$

$$f(y) = -\int \frac{tg^{-1}y}{1+y^2}\, e^{tg^{-1}y}\, dy$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$tg^{-1}y = T \Rightarrow (tg^{-1}y)' =$

$Fy = -\int T e^{T} dT$

تکامل : 28

$y(x^2-y)dx + x(x^2+3y)dy$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 - 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$ تفاضل $= -1-2x^2$ نتیجه می‌دهد

$x^{\alpha}y^{\beta+1}(x^2-y)dx + x^{\alpha+1}y^{\beta}(x^2+3y)dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)y^{\beta}x^{\alpha+2} - (\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta} + 3(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}$

$\beta+1 = \alpha+3 \qquad \beta - \alpha = 2 \qquad \alpha = -\frac{7}{4}$

$-(\beta+2) = 3(\alpha+1) \qquad 3\alpha + \beta = -5 \qquad \beta = \frac{1}{4}$

$-\beta - 2 = 3\alpha + 3$

اگر معادله‌ای به فرم $y' + yf(x) = r(x)$ باشد بیان شود معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول می‌شود

$(yf(x) - r(x))dx + dy = 0$ اگر مرتبه خطی بود اینطوری

همگن معادلاتی نیز پر نیست

$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ تفاضل $= f(x)$

$\left(F = e^{\int f(x)dx} \right)$ یعنی انتگرال ساز معادلات خطی که حل می‌شد حفظ شود

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' + y\,f(x) = r(x) \qquad h(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow y = e^{-h(x)}\left[\int r(x)\,e^{h(x)}\,dx + c\right]$$

یا $\dfrac{dx}{dy} + x\,f(y) = r(y)$ جای x و y در معادله عوض شود

$$y' - y\,tg\,x = 2\cos x \qquad \text{مثال دیگر} = 2 \qquad :28$$

$\ln \cos x$ $\qquad y = \dfrac{1}{\cos x}\left[\int 2\cos^2 x\,dx + c\right]$

$$xy' - y = x^2 \cos x \qquad :29$$

$$y' = \frac{1}{x}\,y = x \cos x$$

$h(x) = -\ln x$ $\qquad y = x\left[\int \dfrac{\cancel{x}\cos x}{\cancel{x}}\,dx + c\right]$

:30

$$dy + (y\,cotg\,x - e^{\cos x})\,dx = 0 \quad , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

هرگاه y تک در معادله دیده شد باید خطی بودن چک گردد

$$\frac{dy}{dx} + y\,cotg\,x = e^{\cos x}$$

$h(x) = +\ln \sin x$ $\qquad y = \dfrac{1}{\sin x}\left[\int \sin x\,e^{\cos x}\,dx + c\right] \qquad c = 2$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

31: جواب معادله‌ی زیر در $x=e$ کدام است؟ $y(1)=2$ $x>0$

$$x^2y' + xy = 1 \Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = \ln x$$

$$y = \frac{1}{x}\left[\int \frac{1}{x^2}\, x\,dx + c\right]$$

32: $y' - xy - 2x = 0$

33: $xy' + y - x^2 = 0$

34: $xy' - y = 3x^4$

35: $\frac{xy' - y}{x^2} + \frac{y}{x} = e^{-x}$ $\qquad t = \frac{y}{x}$

$$t' + t = e^{-x}$$

$h(x) = x$ $\qquad \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{-x}\left[\int e^{-x}e^{x}\,dx + c\right]$

36: جواب معادله برحسب $\lambda = \frac{1}{\cos y}$ کدام است؟

$$\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y) \qquad \cos y = \frac{1}{\lambda}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' \sin y = \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} \qquad \frac{1}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda = -x$$

$h(x) = -x$

$$\lambda = e^{x}\left[\int -x e^{-x}dx + c\right]$$

$(1+y^2)\,dx = (tg^{-1}y - x)\,dy$: 37

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{tg^{-1}y}{1+y^2}$$

$h(y) = tg^{-1}(y)$

$$x = e^{-tg^{-1}(y)}\left[\int \frac{tg^{-1}y}{1+y^2}\, e^{tg^{-1}y}\, dy + c\right]$$

$\int u e^{u} du$

معادله برنولی:

صورت کلی

$$y' + y f(x) = y^{\alpha} r(x)$$

برای حل مسأله طرفین را بر y^{α} تقسیم می کنیم سپس تغییر متغیر $u = y^{1-\alpha}$ می گیریم سپس معادله تبدیل به معادله خطی می شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

38: در معادله زیر کدام تغییر متغیر آن را خطی می کند.

$y' + y\sin x = y^3 \cos x$

39: جواب معادله $y' = xy^2 - y$ $\quad y^{-2}$

$y' + y = xy^2 \qquad \alpha = 2$

$y'y^{-2} + y^{-1} = x \qquad u = y^{-1} \qquad u' = -y'y^{-2}$

$u' - u = -x$

$h(x) = -x \qquad \frac{1}{y} = u = e^{x}\left[\int -xe^{-x}\,dx + c\right]$

40: $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

$y'y^{-2} + y^{-1} = \cos x - \sin x$

$u = y^{-1} \to u' = -y'y^{-2}$

$u' - u = \sin x - \cos x$

$h(x) = -x \qquad \frac{1}{y} = e^{x}\left[\int \cancel{-x}\,(\sin x - \cos x)e^{-x}\,dx + c\right]$

41: $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$

$y' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{y} \qquad \alpha = -1$

$y'y - \frac{2}{x}y^2 = x \qquad v = y^2,\ u' = 2yy'$

$u' - \frac{4}{x}u = 2x$

$h(x) = -4\ln x \qquad u = y^2 = x^4\left[\int 2x\frac{x}{4}\,dx + c\right]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y' + y = \frac{x}{y}$:42

$y' + y = (x-1)y^2$:43

$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3\cos x^2}{y}$:44

$xy' + y = xy^3$:45

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$ $\qquad \frac{dx}{dy} - xy = \frac{y^3}{x}$:46

برنولی نسبت به x وابسته

$x\frac{dx}{dy} - x^2 = y^3$ $\qquad V = x^2 \ , \quad \frac{dV}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$

$\frac{du}{dy} - 2yu = 2y^3$

$h(y) = -y^2$ $\qquad V = x^2 = e^{y^2}\left[\int 2y^3 e^{-y^2} dy + c\right]$

جزء به جزء ⇐ $t = y^2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسیرهای قائم : $f(x, y, c) = 0$

47 : معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم همه دوایری که از مرکز می گذرد و مرکز آنها بر روی محور x است کدام است

$(x-c)^2 + y^2 = c^2$

حتی المقدور سعی کنید c به یک طرف کشیده شود تا مشتق آن صفر گردد

$x^2 + y^2 = 2cx$

$x + yy' = c \qquad x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$

$y^2 - x^2 = 2xyy' \qquad \frac{-1}{y'} \qquad y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ معادله خطوط قائم

48 : مسیرهای قائم دسته منحنی $xy = c$ کدام است

$y + xy' = 0$

$y + x\left(\frac{-1}{y'}\right) = 0$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم $\Rightarrow yy' = x \qquad y\,dy = x\,dx$

$y^2 - x^2 = a$

49. : معادله مسیرهای قائم $y = cx^2$ کدام است

$\frac{y = cx^2}{y' = 2cx} \qquad \frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \quad \frac{-1}{y'} \quad -yy' = \frac{x}{2} \Rightarrow -2y\,dy = \frac{x}{2}\,dx$

$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = c$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

-50 $x^3y - xy^3 = c$

-51 $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$

-52 معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم را بدست آورید $y^2 = cx^3 + x^2 - 1$

$2yy' - 2x = 3cx^2 \Rightarrow \cancel{y^2 - x^2}$

$\div$ $y^2 - x^2 + 1 = cx^3$

$= \frac{2yy' - 2x}{y^2 - x^2 + 1} = \frac{3}{x}$ $\qquad 2xyy' = 3y^2 - x^2 + 3 \qquad \frac{-1}{y'}$

$y' = \frac{-2xy}{3y^2 - x^2 + 3}$

معادله اصلی منحنی از حذف c بین خودش و معادله دیفرانسیل آن بدست می‌آید

معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

مسیرهای قائم در مختصات قطبی. منحنی $f(r, \theta, \frac{dr}{d\theta})$

$f(r, \theta, -r^2\frac{d\theta}{dr})$ قائم بر آ

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

: 53

$$r = C(1+\sin\theta)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = C\cos\theta \qquad \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$ معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

$$\frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم بر منحنی اصلی

$$\frac{-dr}{r} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

$$-\ln r = -\ln k(1-\sin\theta)$$

$$r = k(1-\sin\theta)$$

54 : معادله مسیرهای قائم

$$r = 2C\cos\theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -2C\sin\theta \qquad \frac{r}{dr/d\theta} = -\cot\theta$$

$$\frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = -\cot\theta \qquad \frac{dr}{r} = \cot\theta\,d\theta$$

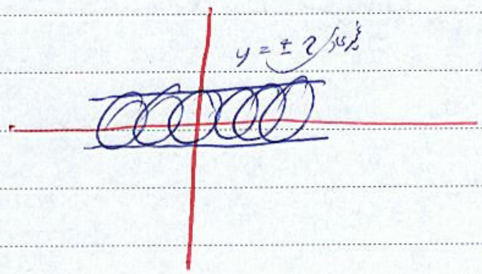
$$\ln r = \ln a\sin\theta \qquad \underline{r = a\sin\theta}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جواب غیرعادی

منحنی نمایش آن بر کلیه منحنیهای جواب عمومی (دسته منحنی) و بر هر کدام در یک نقطه مماس می شود

$$y^2(1+y'^2)=4 \Rightarrow \begin{cases}(x-c)^2+y^2=4 \\ -2(x-c)=0 & \text{مشتق نسبت به } c\end{cases}$$



پوش یک دسته منحنی منحنی است که بر کلیه منحنی های جواب عمومی (دسته منحنی) و بر هر کدام در یک نقطه مماس می شود.

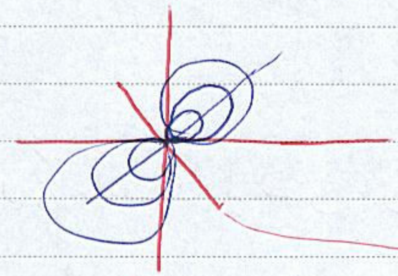
برای بدست آوردن پوش c را بین دسته منحنی و مشتق آن نسبت به c حذف می کنیم.

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

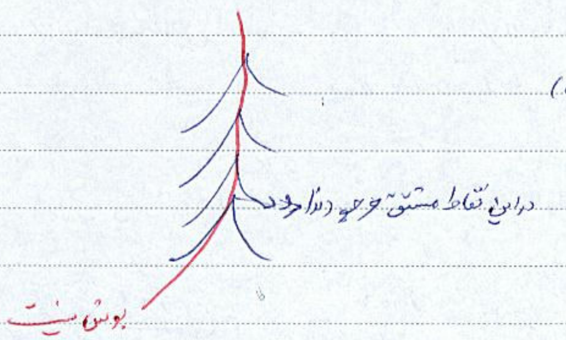
دوایری را نشان می دهد که از مرکز می گذرند و مرکزشان روی نیمساز است. $(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$

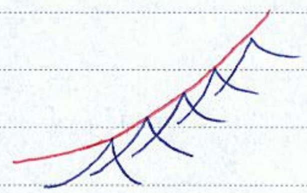


$$(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$$
$$-2(x-c)-2(y-c)=4c$$

$$x+y=0$$

تمام $x+y=0$ پوش نیست فقط $(0,0)$





برای این نقاط استثنایی دیوانی را بدست آوریم داریم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\end{cases}$$

اگر یک دسته منحنی مکان هندسی نقاط استثنایی داشته باشد از رابطه $\dfrac{\partial F}{\partial c}=0$, $F(x,y,c)=0$

هم بدست می آید که باید جوابهای بدست آمده از رابطه های قبل را از این رابطه حذف کرد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$(\quad) (\quad) = 0$

مثلاً $y = x^2$ d

جواب غیرعادی دیفرانسیل دارد

جواب عمومی نباید حذف شود

وگرنه غلط می شود

معادلاتی که نسبت به مشتق حل نمی شود:

$F(x, y, y') = 0$

حالت 1 $F(y') = 0$ $\ln y' - \sin y = 0$ تابع متغیرتابعی از نوع باشد

$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0$

زمانی می توان حل کرد که معادله لااقل دارای یک ریشه حقیقی $y' = k$ باشد

$\Rightarrow F(k) = 0 \qquad y = kx + c \Rightarrow k = \frac{y-c}{x} \Rightarrow F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$

$y' - 2 = 0 \Rightarrow \frac{y-c}{x} - 2 = 0$

جمع توابع پیوسته پیوسته است

$\ln y' - \sin x = 0$

$\Rightarrow \ln \frac{y-c}{x} = \sin \frac{y-c}{x}$

$\pi \quad + \quad + \quad +$ > لااقل یک ریشه حقیقی دارد

$\frac{\pi}{4} \quad -$

$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0 \qquad \left(\frac{y-c}{x}\right)^7 - 3(\quad) \cdots - 1 = 0$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f(x, y, y')$

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$$ جواب عمومی

اگر معادله ای نسبت به مشتق حل نشود معمولاً به فرم پارامتری مطرح می شود.

حالت اول

$f(y, y') = 0$

$y = f(y')$

$y' = p \Rightarrow dy = p\,dx$

$dy = f'(p)\,dp$

$p\,dx = f'(p)\,dp \longrightarrow \begin{cases} y = f(p) \\ x = \displaystyle\int \frac{f'(p)}{p}\,dp + c \end{cases}$

$y = y'^2 e^{y'}$

$y = p^2 e^p \rightarrow p\,dx = e^p(2p + p^2)\,dp \quad p(\quad) = 0$

$p=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$ درمعادله صدق می کند و چون y وابسته به c نیست جواب غیرعادی است

$$\begin{cases} y = p^2 e^p \\ x = e^p + pe^p + c \end{cases}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت دوم

$x = f(y')$

$y' = p \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{p}\, dy$

$$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p\, f'(p)\, dp + c \end{cases}$$

$\rightarrow dx = f'(p)\, dp$

$\frac{1}{p}\, dy = f'(p)\, dp$

۱- جواب عمومی کدام است

$x = 2y' + \sin y'$

$$\begin{cases} x = 2p + \sin p \\ y = p^2 + p\sin p + \cos p + C \end{cases}$$

$\frac{1}{p}\, dy = (2 + \cos p)\, dp$

$p \neq 0$

حالت سوم

$x = f(y, y')$

$y' = p \rightarrow dx = \frac{1}{p}\, dy$

$x = f(y, p)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$x = 4y^2 + e^{y'} - \cos y'$$

$$\begin{cases} x = 4y^2 + e^p - \cos p \\ \Theta \leftarrow p \text{ نتیجه حل برای حذف } \end{cases}$$

$$\frac{1}{p}\, dy = 8y\, dy + (e^p + \sin p)\, dp$$

$$\left(-\frac{1}{p} + 8y\right) dy + (e^p + \sin p)\, dp = 0$$ نسبت به مشتق - حل می‌شود

حالت چهارم:

$$y = f(x, y')$$

$$y' = p \rightarrow dy = p\, dx$$

$$\begin{cases} y = f(x, p) \\ \end{cases}$$

$$y = x^2 y'^2 + y'^3 \rightarrow \begin{cases} y = x^2 p^2 + p^3 \\ \text{برای حذف } p \text{ وارد شود} \end{cases}$$

$$p\, dx = 2xp^2\, dx + (2px^2 + 3p^2)\, dp$$ نتیجه حل معادله

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مهم ۹۰٪ معادله کلرو :

صورت کلی : $y = xy' + f(y')$

در معادله کلرو به جای y' را p قرار دهیم معادله حل می‌شود $y = xp + f(p)$

$dy = p\,dx = p\,dx + (x + f'(p))\,dp = 0$

جواب غیر عادی مسئله $x + f'(p) = 0$

جواب $dp = c$ $\Rightarrow y = xc + f(c)$

نسبت به c $y' = 0 = x + f'(c)$

جواب غیر عادی به فرم پارامتری

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x = -f'(p) \end{cases} \Rightarrow y = -xf'(p) + f(p)$$

این دستگاه جواب غیر عادی را می‌دهد اگر p حذف شد

اگر p حذف نشد جواب غیر عادی به فرم پارامتری است

اگر از جواب عمومی نسبت به c مشتق بگیریم و c ماند جواب غیر عادی به فرم پارامتری و c حذف شد 〃 〃 〃 است

1- جواب عمومی

$y = xy' + \sqrt{y'}$

$y = xc + \sqrt{c}$

2- جواب غیر عادی

$y = xy' - y'^3$

$y = xc - c^3$

$x = 3c^2$

جواب $27y^2 = 4x^3$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

4- پوش کدام است : جواب غیرعادی

$y = xy' + \frac{1}{y'}$ $\quad y = xc + \frac{1}{c}$

$x = \frac{1}{c^2}$ $\quad y^2 = x + x + 2x = 4x$

5: جواب غیرعادی

$y = xy - \frac{y^2}{4}$

$$\begin{cases} y = xc - \frac{c^2}{4} \\ x = \frac{c}{2} \end{cases} \qquad y = x^2$$

6: جواب غیرعادی

$y = xy' + \cos y'$

$$\begin{cases} y = xc + \cos c \\ x = \sin c \end{cases} \qquad y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2}$$

معادله لاگرانژ : بحث جواب به فرم پارامتری است

$y = x\,h(y') + f(y')$ مثال $y = xy'^2 + y'$

$$\begin{cases} y = x\,h(p) + f(p) \\ x = \varphi(p, c) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = xp^2 + p \\ x = \dots \end{cases}$$

P4PCO

$p\,d(x) = h(p)\,dx + (\underline{\underline{x}}\,h'(p) + f'(p))\,dp$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$dy = p\,dx = p^2\,dx + (2px+1)\,dp$$ به صورت یک معادله خطی نسبت به x حل شود

$$\underbrace{p(1-p)}\,dx = (2p\underline{x}+1)\,dp$$

$$\frac{dx}{dp} + x\,\frac{2}{p-1} = \frac{1}{p(1-p)}$$

$2\ln(p-1)$

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{\int \frac{1-p}{p}\,dp + c\right\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p=0 & y=0 \\ p=1 & y=x+1 \end{array}\right\}$$ دو جواب غیرعادی

$$y'^{\,n} + y'^{\,n-1} f_1(x,y) + \cdots + f_n(x,y) = 0$$

$$(y' - h_1(x,y))(y' - h_2(x,y)) \cdots (y' - h_n(x,y)) = 0$$

$$y' = h_i(x,y) \qquad i = 1 \ldots n$$

برای هر یک c داریم

$$\varphi_i = f(x,y,c)$$

$\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ جواب عمومی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله مرتبه دوم:

معادله‌ای که الزاما y'' داشته باشد $F(x, y, y', y'')$

خطی: $y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$

مرتبه دوم: f_1 و f_2: ضرایب

غیرخطی

اگر f_1 و f_2 هر دو عدد باشد $\Rightarrow$ معادله خطی با ضرایب ثابت $y''+ay'+by=f(x)$

" " " هر دو یا یکی عدد نباشد $\Rightarrow$ " " " " متغیر

اگر $f(x)=0 \Rightarrow$ همگن

ضرایب ثابت

مرتبه دوم: خطی / غیرخطی

ضرایب متغیر

ضعیف

خطی همگن	خطی غیرهمگن	غیرخطی
$y''+y=0$	$y''+y=1$	$yy''=xy'$
جواب $y=\sin x$	$y=\sin x+1$	$y=x^2$
$y=c\sin x$	غ $\cancel{y=2\sin x+2}$	غ $\cancel{y=3x^2}$

در معادلات خطی غیرهمگن و غیرخطی اگر یک جواب داشته باشیم C برابر آن جواب نیست

" " همگن " " " " " " " " " " است

و این قضیه ربطی به مرتبه معادله ندارد و برای مرتبه n صادق است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' + y = 0$	$y'' + y = 1$	$yy'' = xy'$
$y_1 = \sin x$	$y_1 = \sin x + 1$	$y_1 = x^2$
$y_2 = \cos x$	$y_2 = \cos x + 1$	$y_2 = 4$

$y = \sin x + \cos x$ ‏ غ $\cancel{y = \sin x + \cos x + 2}$ ‏ غ $\cancel{y = x^2 + 4}$

+ در معادلات خطی غیرهمگن و غیرخطی جمع جوابها، جواب نیست
+ " " " همگن " " " است و برای مرتبه n صادق است

معادلات خطی همگن

$$\text{جواب}\left\{\begin{array}{ll} y_1 & c_1y_1 \\ y_2 & c_2y_2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = c_1y_1 + c_2y_2 = \text{جواب}$$

جواب عمومی است، به شرط اینکه دو بار مشتق داشته باشد و از دوتا کمتر نباشد.

n جواب ~~همگن~~ " n " n ،

شرط اینکه $c_1y_1 + c_2y_2$ جواب عمومی باشد این است که y_1 و y_2 مستقل از هم باشند

$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} \neq k \quad \text{مقدار ثابت}$$

$$c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + \dots + c_ny_n$$

اگر y_1 تا y_n جوابهای یک معادله خطی همگن باشند $y_1, y_2, \dots, y_n$ استقلال دارند اگر

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

مستقل $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

مستقل $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$

استقلال ندارند $\begin{vmatrix} x & 4x \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

1- اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی برای معادلهٔ $y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = \overset{0}{\cancel{R(x)}}$ باشند آنگاه رابطه زیر

$y_1 y_2' - y_2 y_1'$ $\quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

1 بیشتر از صفر است
2 کمتر 〃 〃
3 مخالف 〃 〃 ✓
4 برابر 〃 〃

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2- کدامیک از زیر مجموعه‌های زیر وابسته هستند

1 $1, e^{x}, e^{2x}$

2 $\sin x, \cos x$

3 x, xe^{x}

4 $1, \cos 2x, \sin^2 x$ ✓

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \sin^2 x \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

معادله خطی همگن با ضرایب ثابت :

$y'' + ay' + by = 0$

$y' + ay = 0$

$\frac{dy}{y} = -a\,dx$

$y = ce^{-ax}$

$y = e^{tx}$

$\Rightarrow e^{tx}(t^2 + at + b) = 0$

معادله مشخصه $\Rightarrow (t^2 + at + b) = 0$

ریشه‌ها را پیدا کرده در جواب می‌گذاریم

ریشه‌ها

1- $\Delta > 0 \Rightarrow t_1 \neq t_2 \in R$

$\Rightarrow$ یک جواب $e^{t_1 x}$

$\Rightarrow$ یک جواب $e^{t_2 x}$

$\frac{e^{t_1 x}}{e^{t_2 x}} = e^{(t_1 - t_2)x} \neq 0$ مستقل هستند $\Rightarrow y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$

$y'' - 2y' - 3y = 0$ $\quad t^2 - 2t - 3 = 0$

$3, -1$ $\quad y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' - 4y = 0$

$\pm 2 \qquad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$y'' - 2y' = 0$

$0, 2 \Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{2x}$

$t(t-1)(t+1)(t-2) = 0$ معادله مشخصه یک معادله دیفرانسیل

$c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{2x}$

تا وقتی که n ریشه حقیقی متمایز داریم جواب به صورت بالا محاسبه می‌شود

:2 $\Delta = 0 \Rightarrow t$ یک ریشه

$y = (c_1 + c_2 x) e^{tx}$

مثال $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2$

$D^2 - 4D + 4$

$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$

پرانتز : نماد اپراتوری

$D = \frac{d}{dx} \Rightarrow y' = \frac{d}{dx} y$

$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \qquad y'' = \frac{d^2}{dx^2} = D^2 y$

$\vdots \qquad \vdots$

$D^n = \frac{d^n}{dx^n} \qquad y^{(n)} = D^n y$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow D^2y - 4Dy + 4y = 0$$

$$(D^2 - 4D + 4)y = 0 \Rightarrow (D-2)^2 y = 0 \qquad D = 2$$

مثال:

$$D(D-1)(D-2)^3 y = 0$$

ریشه صفر 0 ، ریشه 1 ، ریشه 2,2,2

$$y = C_1 + C_2 e^{x} + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2)e^{2x}$$

3: $\Delta < 0$, $p \pm iq$, $q \neq 0$

$3 \pm i\sqrt{-4}$

یک جواب $C_1 \propto e^{(p+iq)x} = e^{px}(C_1 \cos qx + C_1 i \sin qx)$

$+$

جواب دیگر $C_2 \propto e^{(p-iq)x} = e^{px}(C_2 \cos qx - C_2 i \sin qx)$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\Rightarrow y = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$$ A و B حقیقی و $y=\dots$ کاملا حقیقی

$A = C_1 + C_2$ $\qquad$ $A = C_1 + C_2$

$i \times (B = i(C_1 - C_2))$ $\qquad$ $-i \times (B = i(C_1 - C_2))$

$\frac{1}{2}(A + iB) = C_2$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(A - iB) = C_1$

P4PCO

مثال: $(D+1)(D-1)^2(D^2+1)(D^2-2D+5)y=0$ معادله از مرتبه 7 است

$-1 \qquad 1 \qquad \pm i \qquad 1\pm 2i$

$\beta=0,\quad q=1$

$$y = c_1 e^{-x} + (c_2+c_3x)e^{x} + c_4\cos x + c_5 \sin x + e^{x}(c_6\cos 2x + c_7 \sin 2x)$$

1- $y''+2y'+10y=0 \qquad -1\pm 3i$

$y = e^{-x}(c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x) \qquad y = Ae^{-x}\sin(3x+\alpha)$

$$y = e^{-x}(\underbrace{A\sin 3x \, A\cos\alpha}_{c_2} + \underbrace{A\cos 3x \, \sin\alpha}_{c_1})$$

2- مقدار a و b چه باشد تا $y_1=e^{-2x}$ و $y_2=e^{3x}$ دو جواب مستقل خطی معادله زیر باشد؟

$(t+2)(t-3)=0$ معادله مشخصه $\Rightarrow t^2-t-6=0 \Rightarrow y''-y'-6y=0$

$ab=6$

3- ضرایب y و y' در معادله دیفرانسیل مرتبه دومی که دو جواب مستقل آن e^{2x} و e^{-x} باشد کدام است

$(t-2)(t+1)=0 \qquad t^2-t-2=0 \qquad y''-y'-2y=0$

$-1y' \quad -2y$

4: کدام یک از توابع زیر در معادله دیفرانسیل $y''+2y'+5y=0$ صدق می‌کند

$y=e^{-t}(\cos^2 t-\sin^2 t) \qquad y=e^{-t}(\cos t+i\sin t)^2$

$y=2e^{-t}\sin t\cos t \qquad \checkmark\, y=e^{-t}(\cos t+\underline{\underline{t}}\sin t)$ صدق نمی‌کند

نداریم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$-1 \pm 2i$

$e^{-x} \cos 2x$

$e^{-x} \sin 2x$

5: برای آنکه معادله زیر خطی باشد:

$x^n y'' + y' + f(x)\, y'^m = 0$

1- $m=1$ ✓

2- $n=0$ و $m=1$

3- $n=0$

4- $n=m=0$

$y'' + f_1(x)\, y' - f_2(x)\, y = f(x)$

معادله دیفرانسیل خطی غیر همگن:

$y'' + f_1(x)\, y' + f_2(x)\, y = f(x)$

$y'' + ay' + by = f(x)$

$y = y_h + y_p$

y_h = جواب عمومی معادله همگن متناظر $\quad y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

y_p = یک جواب ساده بدون پارامتر معادله

— معادله با ضرایب ثابت $\quad y'' + ay' + by = f(x)$

حل از راه مشتق گیری

روشهای y_p (که هم را حفظ کنید):
- ضرایب نامعین ↑ — معایب: فقط برای معادلات با ضرایب ثابت و برای هر تابع $f(x)$ نمی‌توان استفاده کرد و فقط برای تابع‌های مشخص صادق است
- اپراتورهای معکوس
- عمومی (تغییر پارامتر) — معایب بالا را ندارد — حل از راه انتگرال گیری

P4PCO

الهه کاظمی زاده مکانیک

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعیین y_p با استفاده از روش ضرایب نامعین :

۱- $f(x)=M(x)$ و $M(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n

$y'' - 2y' + 3y = 5$ یا $5x$ یا $4x^2 - 3$

$$\Rightarrow y_p = x^m \times (\text{یک چند جمله‌ای کامل از درجه } n)$$

m تعداد ریشه های صفر معادلهٔ مفسر.

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5$

$m=0$ 5 درجه صفر ⇐ چند جمله‌ای از درجه صفر

$y_p = Ax^0 = A$

در معادله $0 - 0 + 3A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{3}$

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5x$

$y_p = Ax + B$

در معادله $0 - 2A + 3Ax + 3B = 5x \Rightarrow \begin{cases} 3A = 5 \\ -2A + 3B = 0 \end{cases}$

مثال

$D^2(D-1)y = 7x^2 + 3$

0 دوبار ریشه معادله مفسر است

$y_p = x^2 (Ax^2 + Bx + C)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\ldots = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

$$y_{p_1} + y_{p_2} + \ldots + y_{p_n}$$

2: اگر $f(x) = e^{p(x)} \mathcal{M}(x)$

$\Rightarrow y_p = x^m e^{px} \times$ (یک چندجمله‌ای کامل از درجه n)   m تعداد ریشه‌های p معادله مفسر

p = ریشه چند بار

مثال: $y'' - 2y' - 3y = 5e^{x}$ $p=1$

3 و -1 ریشه معادله مفسر نیست $1 \Rightarrow m=0$

$y_p = Ae^{x}$

در معادله $A - 2A - 3A = 5 \Rightarrow A = -4$

$$y'' - 2y' - 3y = \underbrace{5e^{x}}_{f_1} + \underbrace{2xe^{-x}}_{f_2} + 7x \quad p=-1$$

یکبار

$y_{p_1} = Ae^{x}$ $y_{p_2} = xe^{-x}(Bx + C)$ $y_{p_3} = Dx + E$

در معادله گذاشته شود و معادل $2xe^{-x}$ قرار گیرد

مثال: $D(D-1)^3(D+1)\,y = x^2 + 4xe^{x} + 7x^2e^{-x} + 5e^{2x}$

$y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C)$

$y_{p_2} = x^3e^{x}(A_1x + B_1)$

$y_{p_3} = xe^{-x}(A_2x^2 + B_2x + C_2)$

$y_{p_4} = A_3e^{2x}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3: $f_{(x)} = M_{(x)} \cos qx + N_{(x)} \sin qx$

$$y_p = x^m \left(R(x) \cos q(x) + S(x) \sin q(x) \right)$$

* m : تعداد ریشه های $+iq$ معادله مفسر .

* R و S دو چند جمله ای از درجه n و n بزرگترین درجه N و M است .

مثال $y'' + 4y = x \cos 2x + 7 \sin 3x$

$\pm 2i \qquad +2i \qquad +3i$

$$y_{p_1} = x \left((Ax+B) \cos 2x + (A_1 x + B_1) \sin 2x \right)$$

$$y_{p_2} = A_2 \cos 3x + B_2 \sin 3x$$

4 $f_{(x)} = e^{px} \left(M_{(x)} \cos qx + N_{(x)} \sin qx \right)$

$$y_p = x^m e^{px} \left(R(x) \cos qx + S(x) \sin qx \right)$$

m تعداد ریشه های $p+iq$ معادله مفسر .

$\pm i \qquad 1 \pm 2i \qquad -1 \pm 3i$

مثال : $D(D^2+1)(D^2-2D+5)(D^2+2D+10)^2 y = x + x\cos x + x^2 e^x \sin 2x$

$+ 5e^{-x} \sin 3x + xe^{x} \cos 3x$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y_{P_1} = x(Ax+B)$$

$$y_{P_2} = x\big((A_1x+B_1)\cos x + (A_2x+B_2)\sin x\big)$$

$$y_{P_3} = xe^{x}\big((A_3x^2+B_3x+C_3)\cos 2x + (A_4x^2+B_4x+C_4)\sin 2x\big)$$

$$y_{P_4} = x^2e^{-x}(A_5\cos 3x + B_5\sin 3x)$$

$$y_{P_5} = e^{x}\big((A_6x+B_6)\cos 3x + (A_7x+B_7)\sin 3x\big)$$

$y'' - 4y' = -4$ ‏۱- جواب عمومی

$\overset{0}{4}$

$c_1 + c_2\cancel{e^{-4x}} - x$

$c_1 + c_2\cancel{e}^{4x} + x$ ✓

$c_1\cos\cancel{2}x + c_2\sin\cancel{2}x$ ✓

$c_1x\cancel{e}^{4x} + x^2$

$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$ ‏۲- ۲ نیست، ۱ ریشه هست

$1, 3$

$y = Ae^{x} + \cancel{B}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{3x}$

$y = Ae^{x}\cancel{+B}e^{2x} + xe^{3x}$

$y = Ae^{x} + Be^{3x} + \frac{x}{2}e^{3x}$

$y = Ae^{x}\cancel{+Be^{3x}} + x^2\cancel{\frac{2}{e}}^{3x}$ ‏دقت با ۲ ریشه معادله مشخصه است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

:3

$(D^2-1)y = 8xe^x$

$1, -1$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \cancel{\cos x}$

$y = c_1 \cos x + \cancel{c_2} \sin x + \frac{x}{2} \sin x$

$y = e^{2x}(\cancel{c_1 + c_2 x} + \frac{x^2}{2})$

✓ $y = c_1 e^{-x} + e^x(c_1 - 2x + 2x^2)$

$y_p = xe^x(Ax+B)$

:4 کدام گزینه یک جواب خصوصی معادله زیر است

$y''' + 2y'' + y' - 2y = e^x + \cos x$

$c = e^{1\alpha x} \quad c = e^x$ اجزای ریشه‌های معادله مشخص نیست

Ae^x

$B\cos x + C\sin x$

:5 جواب عمومی کدام است

$y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x}$

$2 \pm i \qquad y_h = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$y_p = Ae^{3x} \Rightarrow y_p = e^{3x}$

$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{3x}$

1- $Ae^{2x}\sin(x+\alpha) - e^{3x}$

2- $\cancel{Ae^{1x}} \sin(2x+\alpha) + e^{3x}$

3- ✗ 〃 $-2e^{3x}$

4- ✓ $Ae^{2x}\sin(x+\alpha) + e^{3x}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

6: کدام تابع در معادله صدق می کند

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$$

3 و 1-

1. $e^{x} - e^{2x}$
2. $e^{x} + e^{2x}$
3. $e^{3x} - e^{2x}$ ✓
4. $e^{3x} + e^{2x}$

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + A e^{2x} \qquad A = -1$$

1 5
از گزینه ها

7: جواب عمومی معادله $y^{(4)} - y = x\sin x$ ضرایب نامعین جواب خصوصی را تعیین کنید

1، 1-، 1، 1-

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

$$x\left[(c_5 + c_6 x)\cos x + (c_7 + c_8 x)\sin x\right]$$

8: جواب خصوصی معادله $y'' + 9y = e^{x}\cos 2x$ در $x = 0$ کدام است

$\pm 3i$

از روش اپراتور های معکوس حل شود

$$e^{x} A \cos 2x$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' + 4y = \cos x$ — اگر خود $\cos x$ را بگیریم کافی است و نیاز به $\sin x$ ندارد

$y'' - 2y' + 7y = \sin x$ $\quad A\sin x + B\cos$

اگر معادله مشتق فرد نداشت کسینوس ها را با ضریب سمت راست معادله را جواب ~~[illegible]~~ می‌گرفت خصوصی

Subject:

Year. Month. Date. ( )

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

روش عمومی

در این روش یک w به صورت زیر حساب می‌کنیم

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$y = -y_1 \int \frac{f y_2}{w} dx + y_2 \int \frac{f y_1}{w} dx$$

-1 $$(D-1)^2 y = \frac{e^t}{t^2}$$

-2 $$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$

-3 $$(D^2 - 9D + 18) y = e^{e^{-3x}}$$

حل 1:

$$y_1 = e^t \qquad e^t$$

$$y_2 = t e^t \qquad e^t + t e^t$$

$$\Rightarrow w = e^{2t} \qquad \Rightarrow y = -e^t \int \frac{\cancel{e^t}\, \cancel{t}\, e^t}{t^{\cancel{2}}\, \cancel{e^{2t}}} dt + t e^t \int \frac{\cancel{e^t}\, e^t}{t^2 e^{2t}} dt$$

حل 2:

$$y_1 = e^{2x} \qquad 2e^{2x}$$

$$y_2 = x e^{2x} \qquad e^{2x} + 2x e^{2x}$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$w = e^{4x}$$

$$y = -e^{2x}\int \frac{e^{2x}\, x e^{2x}}{x e^{4x}}\,dx + x e^{2x}\int \frac{e^{2x}\, e^{2x}}{x e^{4x}}\,dx$$

حل 3:

$$y_1 = e^{3x} \qquad 3e^{3x}$$

$$w = 3e^{9x}$$

$$y_2 = e^{6x} \qquad 6e^{6x}$$

$$y = -e^{3x}\int \frac{e^{-3x}\, e^{6x}}{3e^{9x}}\,dx + e^{6x}\int \frac{e^{-3x}\, e^{+3x}}{3e^{9x}}\,dx$$

دستورات کاهش مرتبه

برای معادلات مرتبه دوم غیرخطی

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

حالت اول: $F(x, y', y'') = 0$ فاقد تابع

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

۱- فاقد y

$$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$$

$$p' + \frac{2x}{1+x^2}\,p = \frac{x^3}{1+x^2}$$

$$\ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{1+x^2}\left[\int x^3\,dx + c_1\right]$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$p=\left(\frac{1}{4}\frac{x^4}{1+x^2}+\frac{c_1}{1+x^2}\right)=\frac{dy}{dx}$$

$$(1+x^2)y''+2xy'=\cancel{x}^3\cdot\frac{1}{1+x^2}$$ -2

$$xy'''-2y''=0 \qquad xp'=2p$$ -3

$$\frac{dp}{p}=2\frac{dx}{x}\Rightarrow p=c_1x^2 \qquad y''=c_1x^2 \qquad y'=c_1x^3+c_2$$

$$y=c_1x^4+c_2x+c_3$$

$$xy''+y'=2x\ln x \qquad p'+\frac{1}{x}p=2\ln x$$ -4

حالت دوم: $F(y,y',y'')=0$ فاقد متغیر

$$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$$

$F\left(y,p,\frac{dp}{dx}\right)=$ سه مجهول غ ق حل $\Rightarrow y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\cdot\dfrac{dp}{dy}$

$$y''=p\frac{dp}{dy}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

-1

$$y'' + y'^3 e^{2y} = 0 \qquad \cancel{p}\frac{dp}{dy} + p^{\cancel{3}\,2} e^{2y} = 0$$

$$\frac{dp}{p^2} + e^{2y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{p} + \frac{1}{2} e^{2y} = c_1$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} e^{2y} + c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} e^{2y} + c_1$$

$$dx = \left(\frac{1}{2} e^{2y} + c_1\right) dy \qquad x = \frac{1}{4} e^{2y} + c_1 y + c_2$$

-2

$$y y'' + y'^2 = 1 \qquad y'' = p\frac{dp}{dy} \qquad y$$

$$y p \frac{dp}{dy} + p^2 = 1 \qquad \frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} = \frac{1}{py}$$

$$p\frac{dp}{dy} + \frac{p^2}{y} = \frac{1}{y}$$ برنولی $$u = p^2$$

$$\frac{du}{dy} = 2p\frac{dp}{dy} \qquad \frac{du}{dy} + \frac{2}{y} u = \frac{2}{y}$$

یا جداشدنی

$$\frac{p\,dp}{1-p^2} + \frac{dy}{y} = 0$$

-3

(تغییرمکان $y'' + \sin y = 0$ $\Rightarrow$ معادله مسیر $= ?$ $\qquad y(0) = \frac{\pi}{3}$

$y'(0) = 0$

$$p\frac{dp}{dy} + \sin y = 0 \qquad \frac{1}{2} p^2 = \cos y + C$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y' = p = \sqrt{2\cos y + c}$ $\quad c = -1$

$0 = \sqrt{2\cos\frac{\pi}{3} + c} \Rightarrow c = -1$

-4

$2yy'' + y'^2 = 0 \qquad 2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$

$\frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\frac{dy}{y} = 0 \qquad \ln p y^{\frac{1}{2}} = \ln c_1$

$py^{\frac{1}{2}} = c_1 \Rightarrow y^{\frac{1}{2}}dy = c_1 dx$

-5

$y'' = xy'^3$

$\frac{dp}{dx} = xp^3 \qquad \frac{dp}{p^3} = x\,dx \qquad \frac{1}{p^2} = -x^2 + c_1$

$y'^2 = \frac{1}{c_1 - x^2} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{1}{c_1 - x^2}}$

6

$y'' - 3y^2 = 0 \qquad y'(0) = 4 \quad , y(0) = 2$

$p\frac{dp}{dy} = 3y^2 \qquad p\,dp = 3y^2 dy \qquad p^2 = \frac{2}{2}y^3 + c_1$

$y' = \sqrt{\frac{2}{2}y^3 + c_1} \quad \Rightarrow c_1 = 0 \qquad \Rightarrow y' = \sqrt{2y^3}$

$y' = \sqrt{2}\,y^{\frac{3}{2}} \qquad y^{-\frac{3}{2}}dy = \sqrt{2}\,dx$

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$xy'' + y' = 1 + x^2$ 7

حالت سوم: $F(x, y, y', y'')$

نسبت به y و مشتقاتش همگن است هرگاه $F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^{\alpha} F(x, y, y', y'')$

$\Rightarrow y = e^{\int z\,dx} \qquad z = f(x)$

۱- x, y, y'' همگن نیست

$x^2 y y'' = (y - xy')^2$

$y = e^{\int z\,dx} \Rightarrow y' = z\, e^{\int z\,dx} \Rightarrow y'' = z' e^{\int z\,dx} + z^2 e^{\int z\,dx}$

مرتبه $\frac{1}{2}$

$x^2 y y'' - y^2 - x^2 y'^2 + 2xyy' = 0 \qquad e^{2\int z\,dx}\left(x^2 z' + \cancel{x^2 z^2} - 1 - \cancel{x^2 z^2} + 2xz\right) = 0$

1) $xz' = 2 + xz$ 2) $x^2 z' = 1 - 2xz$ ✓

3) $xzz' = 1 + xz$ 4) $xzz' = 2 - 2xz$

همیشه $e^{\alpha \int}$ بیرون می‌افتد

α درجه همگنی $= 2$

$x^2 z' = 1 - 2xz \qquad z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}$

$yy'' + y'^2 + xy^2 = 0$

معادلات خطی با ضرایب متغیر:

معادله کوشی از مرتبه دوم: $x^2 y'' + axy' + by = f(x)$

تغییر متغیر $x = e^z \Rightarrow$ تبدیل به معادله خطی با ضرایب ثابت

$z = \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + a\frac{dy}{dz} + by = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + (a-1)\frac{dy}{dz} + by = f(x) \Rightarrow$$ معادله با ضرایب ثابت

$$t^2 + (a-1)t + b = 0$$ معادله مشخصه ای حفظ شود فقط از a کم و اضافه شود

$t_1 \neq t_2 \in R$ $\quad \Delta > 0$

$$y = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2}$$

e^{tz}, $e^{t\ln x}$

t $\quad \Delta = 0$

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^t$$

$p \pm iq$ $\quad \Delta < 0$

$$y = x^p\left(c_1\cos(q\ln x) + c_2\sin(q\ln x)\right)$$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$ -1

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \qquad t = 2$$

$$y = (c_1 + c_2\ln x)x^2$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

-2

$$x^2 y'' + x y' + 9y = 0$$

-3

$$x^2 y'' + x y' + 5y = \ln x$$

$$t^2 - 2t + 5 = 0 \qquad 1 \pm 2i$$

$$y_h = x\left(c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x) \right)$$

$$t^2 - t + 5 = 0 \qquad \ddot{y} - \dot{y} + 5y = z \qquad y_p = Az + B$$

$$0 - 2A + 5\overset{A}{\cancel{z}} + 5B = z$$

$$5Az = z \qquad 5A = 1 \qquad A = \frac{1}{5} \qquad y_p = \frac{z}{5} + \frac{2}{25}$$

$$-2A + 5B = 0 \qquad B = \frac{2}{25}$$

$$x^2 y'' - 2y = 0 \qquad t^2 - t - 2 = 0$$ -4

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + by = 0$$ -5

کلیه مقادیری از ثابت b که به ازای آنها جواب کراندار بماند

$t \to \infty$

$$\lambda^2 + 2\lambda + b = 0 \qquad -1 \pm \sqrt{1 - b}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y_1 = c_1 t^{(-1-\sqrt{1-b})} + c_2 t^{-1+\sqrt{1-b}}$$

لازم است بدانید وقتی t به سمت بینهایت میرود رابطه و b محدود باشد آنست که

$$-1+\sqrt{1-b} < 0 \qquad 0 < \sqrt{1-b} < 1$$

$$0 < 1-b < 1 \Rightarrow -1 < -b < 0 \Rightarrow 0 < b < 1$$

معادله خطی با ضرایب متغیر 2 :

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

فرض y₁ یک جواب معادله همگن متناظر موجود باشد

$$y_1'' + y_1' f_1 + y_1 f_2 = 0$$

پس جواب عمومی $y = u y_1$

$$u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'' \quad , \quad u' y_1 + u y_1'$$

$$u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'' + f_1 u' y_1 + f_1 u y_1' + u y_1 f_2 = f$$

$$u(y_1'' + f_1 y_1' + f_2 y_1) = 0$$

$$\Rightarrow u'' + u'\left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1\right) = \frac{f}{y} \Rightarrow$$ معادله فاقد تابع

خطی شود $$\Rightarrow u' = p \Rightarrow p' + p\left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1\right) = \frac{f}{y_1}$$

معمولاً $f = 0$ است =

$$u'' + u'\left(\frac{2y_1'}{y} + f_1\right) = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{u''}{u'} + 2\frac{y_1'}{y_1} = -f_1 \qquad \ln u' y_1^2 = -\int f_1\,dx$$

$$u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1\,dx} \Rightarrow u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1\,dx}\,dx$$

u دو بار انتگرال دارد

چون معادله همگن است $\Leftarrow$ $y = c_1y_1 + c_2y_2$ و $y_2 = uy_1$ برای انتگرال که u مستقل است

تعیین y_1

اگر $f_1 + xf_2 = 0 \Rightarrow y_1 = x$

اگر $1 + f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{x}$

اگر $1 - f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$

$$\alpha^2 + \alpha f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}$$

معادله درجه دو مشخصه زیرا α ثابت است

1- $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2} = 0$

$f_1 + xf_2 = 0 \Rightarrow y_1 = x \quad , y_2 = ux$

$$u = \int \frac{1}{x^2} e^{+\int \frac{2x}{1-x^2}dx}\,dx = \int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

u را می‌توان بدون ثابت انتگرال‌گیری حساب کرد و در $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ می‌گذاریم

$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$ -2

$y_1 = x$

$p' + p\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x-1}\right) = (x-1)e^x$

$p \Rightarrow u \Rightarrow y = u y_1$

-3

$x^2(x^2-1)y'' - x(x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0$ $y_1 = x$

$u = \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx} dx$

$(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0$ -4

$(x-2)\alpha^2 - (4x-7)\alpha + (4x-6) = 0$

$x(\alpha^2 - 4\alpha + 4) - 2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = 0$ بر اساس قوای x مرتب شود

$\alpha = 2$

$y_1 = e^{2x}$ $y_2 = u\,e^{2x}$

$u = \int \frac{1}{e^{4x}} e^{\int \frac{4x - \cancel{7}^{-8+1}}{x-2}dx} dx = \int (x-2)dx$

PAPCO

-5

$y_1 = \sqrt{1-x}$ جواب $\Rightarrow y'' + \frac{1}{4(x-1)^2} y = 0$

جواب دوم کدام است؟
همگن

$\Rightarrow y_2 = u\, y_1 \qquad u = \int \frac{1}{1-x}\, dx$ e^0

حل معادلات با استفاده از سری توانی:

$f(x)$, $x=a$

تابع $f(x)$ در $x=a$ تحلیلی است اگر در $x=a$ دارای بسط تیلور با شعاع همگرایی مثبت باشد

بسط مک لورن $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \dots$

$(x-c) \qquad (x-c)$ تیلور

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$

اگر سه تابع f_1 و f_2 و f در نقطه‌ای تحلیلی باشند می‌توان بسط تیلور را به کار گرفت

1- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شرط اولیه $y_{(0)}=0$ و $y'_{(0)}=1$ باشد مشتق مرتبه سوم در نقطه (0) کدام است

$y_{(0)} = 0 \qquad y'(0) = 1 \qquad y'''(0) = ?$

$e^{-x} y'' + x y' + y = 3 \qquad y''_{(0)} + 0 + 0 = 3 \qquad y''_{(0)} = 3$

$-e^{-x} y'' + e^{-x} y''' + y' + x y'' + y' = 0 \qquad -3 + y'''(0) + 1 + 0 + 1 = 0$

$y'''_{(0)} = 1$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

2- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شروط زیر باشد در بسط تابع $y(x)$ برحسب توانهای صعودی x ضریب x^3 کدام است

$y(0)=-2$ و $y'(0)=2$

$y'' - (x^2+1)y = 0$ $\qquad \frac{y'''}{3!} = ? = \frac{1}{3}$

$y''' = 2xy + (x^2+1)y'$ $\qquad y'''(0) = 2$ مشکوک

3- ضریب x^3 کدام است

$y'' + y'\sin x + ye^x = 0$ $\qquad y(0) = y'(0) = 1$

$y''(0) = -1$ $\qquad y''' + y''\sin x + y'\cos x + y'e^x + ye^x = 0$

$y'''(0) = -1-1-1 = -3$ $\qquad \frac{-3}{3!} = -\frac{1}{2}$

4- هرگاه $y=\sum a_n x^n$ جواب به صورت سری توانی برای معادله $y''-2xy'+8y=0$ و $y'(0)=0$ و $y(0)=12$ باشد آنگاه ضریب a_2 کدام است.

$a_2 = \frac{y''(0)}{2!}$ $\qquad y''(0) = -8\times 12$ $\qquad a_2 = -48$

5- $y''+xy=0$

و $y(0)=y'(0)=1$ ضریب a_3 کدام است

$y''(0)=0$

$y'''(0)+1=0$ $\qquad y'''=-1$ $\qquad a_3 = \frac{-1}{6}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P_1(x)y''+P_2(x)y'+P_3(x)y=0$$

درمعادله فوق که P_1 و P_2 و P_3 سه تابع چندجمله‌ای هستند (cos، sin نیستند) نقطه $x=a$ را یک نقطه معمولی گوییم اگر $P_1(a)\neq 0$ باشد

• درمعادله فوق اگر $x=a$ یک نقطه معمولی باشد آنگاه هر جواب معادله به صورت سری توانی بیان می شود.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$$

$$\Rightarrow y = c\,(\text{یک سری توانی برحسب قوای } x) + c^*\,(\text{یک سری توانی دیگر برحسب قوای } x)$$

1- اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب معادله $y''-xy'=0$ باشد آنگاه

4 $a_{n+3} = -$ 〃   3 $a_{n+3} =$ 〃   2 $a_{n+2} = \frac{-n}{(n+1)(n+2)} a_n$ 1 $a_{n+2} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} a_n$ ✓

آنهایی که در حل مسأله محاسبه نمی شوند پارامترهای مسأله هستند

$$2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$
$$+ \quad -a_1 x + \dots - n a_n x^n$$

رابطه بازگشتی

$a_2=0 \Rightarrow a_4=0 \Rightarrow a_6=0$

a_1 و a_0 دو پارامتر هست

$$y = a_0 \qquad + a_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 \dots\right)$$

اگر $a_2=0$ نبود یک سری هم با a_0 باز می‌شد

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' - xy' + y = 0$ مسأله قبل 2

$2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n \dots$

$-a_1 x \dots - n a_n x^n \dots$

$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \dots$

$a_2 = -\frac{1}{2} a_0 \quad , a_3 = 0$

if $y'' - xy' - y = 0$

" " " "

~ ~ ~ ~ $a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)} a_n$

$-a_0 \quad -a_1 x \quad \dots - a_n x^n$

$a_2 = \frac{1}{2} a_0 \qquad a_3 = \frac{1}{3} a_1$

$y = a_0 (1 + \frac{1}{2} x^2 + \dots) + a_1 (x + \frac{1}{3} x^3 + \dots)$

شعاع همگرایی از رابطه بازگشتی گرفته می شود

$\frac{\text{جمله بعد}}{\text{جمله قبل}} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} = \frac{1}{n+2} = 0 \quad R = \infty$ شعاع همگرایی

جمله بعد از a_n می شود a_{n+2}

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله لژاندر: $(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$ $P_1(a) \neq 0$

نقطه $x=0$ یک نقطه معمولی تلقی می‌شود

رابطه بازگشتی ⇐ جایگذاری $C_{n+2} = -\dfrac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} C_n$

شعاع همگرایی $R=1$ فاصله همگرایی $[-1,1]$

اگر به n صفر داده شود C_2 و اگر یک داده شود C_3 حساب می‌شود که C_0 و C_1 قابل محاسبه نیستند.

$\Rightarrow y = c_0(1 + \square x^2 + \emptyset x^4) + c_1(x + \square x^3 + \emptyset x^5 + \dots)$

$C_6 = 0$ if $m(m+1) = 20 \Rightarrow m=4 \Rightarrow C_6 = C_{n+2} \Rightarrow n=4 \Rightarrow (m-n)=0$

$\Rightarrow C_6 = 0 \Rightarrow C_8 = 0 \Rightarrow \dots$

$m(m+1) = 12$ $m=3$

$y = c_0(1 + \bigcirc x^2 \square x^4 + \dots) + c_1(x + \emptyset x^3)$

یک چند جمله‌ای از درجه m که فقط زوج است یا فقط فرد حتماً در معادله صدق می‌کند.

فرد $ax^5 + bx^3 + cx = 0$

$m=4$ $c_0 + c_2x^2 + c_4x^4$ در معادله صدق می‌کند ✓

$\Rightarrow c_0(1 + \bigcirc x^2 + \square x^4)$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$C_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} C_n \Rightarrow C_n = \frac{\bigcirc}{\square} C_{n+2}$$

$$\Rightarrow C_4 (x^4 + \emptyset x^2 + \square)$$

اگر C_n را مطابق زیر بگیریم

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

چندجمله‌ای لژاندر $\underline{6} + \underline{5 x^2} + \underline{12 x^4}$ جواب مثلاً $\Rightarrow$

چندجمله‌ای لژاندر را با $P_n(x)$ نشان می دهند

$\underline{\text{ضریب}} = 20 \Rightarrow m = 4 \Rightarrow$ جواب $= P_4(x)$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

لازم نیست حفظ شود

یا $\quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ فرمول رودریگز

یا $\quad \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) t^n \Rightarrow P_n(1) = 1$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

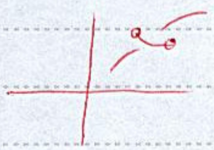
حفظ شوند

شرط تعامد P_n ها

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

اگر تابع f در شرایط قضیه دیریکله صدق کند (نقاط انفصال محدود باشد و در نقاط انفصال حد چپ و راست موجود باشد (تابع پیوسته قطعه ای است) «تابع و مشتق آن به طور قطعه ای پیوسته باشد» در این صورت در نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ را می توان به صورت زیر بسط داد:



$$f(x) = \sum_{0} c_n P_n(x)$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$$

و در نقطه ناپیوستگی میانگین حد چپ و راست می شود

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1- $\int_{-1}^{1} (\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma)\ P_{2n-1}(x) = 0$

زوج ، فرد

2- $P_0(x)=1$ و $P_1=x$ و $-1<x<1$ و $P_2(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

مقادیر α و β و γ چگونه باشند که P_0 و P_1 و P_2 یک مجموعه متعامد باشند

β نباید باشد ← $\beta=0$

$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 dx = \frac{2}{2n+1}$ ، $\int_{-1}^{1} P_0(x)\,P_2(x)$ ، $\int_{-1}^{1} P_1(x)\,P_2(x)$

سه معادله سه مجهول

3- $\int_{-1}^{1} (x^4-2x^2)\,P_{2n+1}(x)dx = 0$

=

4- P_2 و y_1 جواب $(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$ لژاندر با اندیس $n=2$

P_1 و $y_2=$ جواب $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$ لژاندر با اندیس 1

$\int_{-1}^{1} xy_1y_2\,dx=0$

$\int_{-1}^{1} y_1y_2\,dx=0$ ✓

$\int_{-1}^{1} y_1y_2\,dx=\frac{2}{5}$

$\int_{-1}^{1} y_1y_2\,dx=\frac{2}{3}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx = 0$$ 5

$$\int_{-1}^{1} (x+1) P_0 \, dx = \qquad P_0 = 1$$ 6

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$P_1(x) y'' + P_2(x) y' + P_3(x) y = 0$$

P_1 و P_2 و P_3 سه تا ، چند جمله ای

اگر $P_1(a) = 0$ آنگاه a یک نقطه منفرد است.

$$\cancel{P_1(x)} \quad P_1(a) = 0 \Rightarrow P_1(x) = (x-a)(Q(x))$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{g(x)}{(x-a)} y' + \frac{h(x)}{(x-a)^2} y = 0$$

اگر مخرج صفر شود تحلیلی نیست $\qquad g(x) = \frac{\text{چند جمله ای}}{\text{چند جمله ای}}$ گویا =

اگر $g(x)$ و $h(x)$ در $x = a$ تحلیلی باشند آنگاه a را منفرد منظم گویند و اگر لااقل یکی تحلیلی نباشد منفرد نامنظم است.

1- در معادله زیر نوع نقاط تکین (منفرد) را تعیین کنید

$$x^2 (x-1)^3 y'' + x(x-1) y' + y = 0$$

PAPCO

نقاط منفرد

$x=0 \Rightarrow g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ تحلیلی

$\Rightarrow$ منفرد منظم $x=0$

$h(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$ تحلیلی

$x=1 \Rightarrow g(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$ در $x=1$ تحلیلی نیست $\Leftarrow$ منفرد نامنظم $x=1$

در حالت منفرد نامنظم مسأله حل نمی‌شود

2

$x^2(1-x)y'' + y' - y = 0$ نقاط تکین 0 و 1

$x=0 \quad g(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$ تحلیلی نیست $\Rightarrow x=0$ نقطه تکین نامنظم

$x=1 \quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ تحلیلی $\Rightarrow h(x) = -\dfrac{x-1}{x^2}$

$x=1$ منفرد منظم

فرض شود $x=0$ یک نقطه منفرد منظم باشد

$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$

$$y'' + \frac{g(x)}{x}y' + \frac{h(x)}{x^2}y = 0$$

$g(x)$ و $h(x)$ هر دو در $x=0$ تحلیلی باشند،

اگر $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله باشد آنگاه معادله دارای (لااقل) یک جواب به صورت سری توسعه یافته سری توانی است

$$y = x^r \sum a_n x^n, \quad a_0 \neq 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله شاخصی $\Rightarrow r^2 + r(g(0)-1) + h(0) = 0$ ضریب کمترین توان ها در اصلی کدام

1- ریشه های معادله شاخصی معادله زیر کدام است

$$3x(3x+2)y'' - 4y' + 4y = 0$$

ابتدا معادله g و h را تعیین می کنیم

$$g(x) = \frac{-4}{3(3x+2)} \quad , \quad h(x) = \frac{4x}{3(3x+2)}$$

$$r^2 + r\left(-\frac{2}{3} - 1\right) + 0 = 0 \qquad r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{5}{3}$$

2- ریشه های معادله شاخصی کدام است

$$x^2 y'' - 3xy' + (x+4)y = 0$$

$$g(x) = -3 \quad , \quad h(x) = x+4 \qquad \Rightarrow r^2 + r(-3-1) + 4 = 0$$

$$r = 2, 2$$

3- ریشه های معادله شاخصی کدام است

$$xy'' + y' + y = 0 \qquad g(x) = 1 \quad , \quad h(x) = x$$

$$r^2 + r(1-1) + 0 = 0 \qquad r_1 = r_2 = 0$$

PAPCO

حالت های بررسی

1 معادله شاخص دارای دو ریشه متمایز $r_1 \neq r_2$ و تفاضل ریشه ها عدد صحیح نباشد

$y_1 = x^{r_1} \Sigma \dots$

$y_2 = x^{r_2} \Sigma \dots$

$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = x^{r_1 - r_2} (\dots$

$y_1 = x^{r_1} \sum_0 a_n x^n$ و $y_2 = x^{r_2} \sum_0 b_n x^n$

2 $\Delta = 0$ و یک r بدست آید: r را در جای خودش می گذاریم

$y_1 = x^r \sum_0 a_n x^n$

$y_2 = u y_1$ — خارج قسمت تابعی از x

$y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_1 b_n x^n$

حتما جواب شامل تابع log است — اگر بجای 1 صفر بگذاریم باز گزینه درست است ولی درست تر 1 است

3 $r_1 > r_2$ و تفاضل ریشه ها عدد صحیح است — جواب اول با r بزرگتر

$y_1 = x^{r_1} \sum_0 a_n x^n$

در اکثر مواقع $k=0$ می شود

$y_2 = k y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_0 b_n x^n$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱- دو جواب مستقل معادله $3xy''+2y'+y=0$ به چه صورت است

$g(x)=\frac{2}{3}$ $h(x)=\frac{x}{3}$

$r^2+r(\frac{2}{3}-1)+0=0$ $r^2-\frac{1}{3}r=0$ $r_1=0 \;,\; r_2=\frac{1}{3}$

$y_1=x^{\frac{1}{3}}\sum\ldots \;,\; y_2=\sum\ldots$

$y=c_1y_1+c_2y$

2- جوابهای مستقل

$3x(x+1)y''+2(x+1)y'+4y=0$

$g(x)=\frac{2(x+1)}{3(x+1)}=\frac{2}{3}$ $h(x)=\frac{4x}{3(x+1)}$

$r^2+r(\frac{2}{3}-1)+0=0$ $r_1=0$ $r_2=\frac{1}{3}$

مانند بالا

3- جواب مستقل قیدشده $x>0$ $x^2y''+3xy'+(1+x)y=0$

$g(x)=\frac{3x}{x}=3$ $h(x)=\frac{x(1+x)}{\cancel{x}}$

$r^2+2r+1=0$ $r_1=r_2=-1$

$y_1=x^{-1}\sum a_nx^n$ $y_2=y_1\ln x+x^{-1}\sum_1 b_nx^n$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلهٔ بسل

فرم کلی $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

سه چند جمله‌ای که ضریب y در $x=0$ صفر می‌شود (=) $x=0$ صفر است

$x=0 \Rightarrow g(x)=1$ و $h(x) = x^2 - \nu^2$

$r_1 = \nu$

$r_2 = -\nu$

اگر ν صحیح باشد حالت سوم
اگر ν صفر باشد حالت دوم

رابطه بازگشتی معادله بسل $c_{n+2} = \dfrac{c_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}$ شعاع همگرایی سری بینهایت است و همه جا جواب می‌دهد

r_1 را در مسأله می‌گذاریم تا اگر در حالت سوم است ریشه بزرگتر باشد و اگر حالت دوم و ... است فرقی نمی‌کند

$a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}$

ν هر مقداری باشد جواب اول شکل هم است و اختلاف در جواب دوم است

$y_1 = x^{\nu} a_0 (1 + \bigcirc x^2 + \square x^4 + \dots) = J_\nu(x)$ تابع بسل نوع اول

جایگذاری شود

معادله صادق است به ازای جمیع مقادیر a_0

$a_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\, \Gamma(\nu+1)}$

$\nu!$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(\nu+m+1)}\, x^{2m}$$ تابع بسل نوع اول: جواب اول معادله بسل

جدول دارد و تا سه رقم بعد اعشار حساب شده.

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

حتماً حالت 3 است اگر n صحیح باشد و حتما n مخالف صفر می‌شود

$$(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x) \Rightarrow \int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = x^\nu J_\nu(x) + C$$

$$(x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \Rightarrow \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = \underset{\text{منفی}}{-}x^{-\nu} J_\nu(x) + C$$

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$ $\int J_0\,dx =$ غیرقابل ملاحظه

۱- با توجه به فرمول $xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1}$ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^1 x(1-x^2)J_0\,dx = 2J_2(1)$$

$$\int_0^1 x J_0\,dx = xJ_1(x)\Big|_0^1 = J_1(1)$$

اگر به فرمول نخورد باید با جزء به جزء مطابق فرمولهای بالا شود

جزء به جزء

$$\int x^2(x)J_0\,dx = x^2 x J_1 x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x^2 J_1\,dx = J_1(1) - 2x^2 J_2(x)\Big|_0^1$$

$$= 2J_2(1)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2- با توجه به $nJ_n - xJ_{n+1} = -nJ_n + nJ_{n-1}$ انتگرال را حساب کنید

$$\int_0^1 r^2 J_1(r)\,dr = J_2(1)$$

مثال:

$$\int x^2 J_2(x)\,dx = \int x^3 \left(x^{-1} J_2(x)\,dx\right) = -x^3 x^{-1} J_1(x) + 3\int x^2 x^{-1} J_1\,dx$$

$$\int x J_1\,dx = -x J_0 + \int J_0\,dx$$

$\nu = 0$ با

جزء به جزء → بعد → $\nu = 0$ می‌گیریم

جوابهای دوم

برای حالت یک

$$y = A J_\nu(x) + B J_{-\nu}(x)$$

جواب دوم را: $J_{-\nu}(x)$ می‌گیریم

برای حالت دو

اگر y_1 و y_2 مستقل باشند هرکدام با ترکیب خطی هردو مستقل است و ترکیب خطی آنها هم جواب است

$$y_2 = J_0 \ln x + \sum_1 b_n x^n$$

جواب دوم

$$Y_0 = a(J_0 + b y_2)$$

$a = \frac{2}{\pi}$, $b = \gamma - \ln 2$

PAPCO

وقتی تفاضل عدد صحیح باشد که k صفر نیست

$$y_2 = k\, J_n(x) + x^{-n} \sum_0 b_n x^n$$

در حالت 2

$$y = A J_0(x) + B Y_0(x)$$

$Y_n = a\,(J_n + b y_n)$ بعد

$$y = A J_n(x) + B Y_n(x)$$

تابع بسل نوع دوم $Y_\nu(x) = \dfrac{1}{\sin \nu\pi}\left(J_\nu(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)\right)$

به ازای این جواب معادله بسل می‌شود

$$y = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x)$$ تابع بسل نوع دوم

1- اگر جواب معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ برابر $y = c_1 Y_n + c_2 Y_0$

آنگاه جواب معادله زیر کدام است

$$x^2y'' + xy' + (\lambda^2x^2 - n^2)y = 0$$

$$y = A J_\nu(\lambda x) + B Y_\nu(\lambda x)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

2- جواب معادله زیر کدام است

$$x^2y'' + xy' + (25x^2 - \frac{9}{4})y = 0$$

$$z = 5x \rightarrow \frac{dz}{dx} = 5$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 5\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = 5^2 \frac{d^2y}{dz^2}$$

$$z^2 \frac{d^2y}{dz} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - \frac{9}{4})y = 0$$

$$y = A J_{3/2}(5x) + B Y_{3/2}(5x)$$

-3

$$\cancel{4}x^2y'' + \cancel{4}xy' + (\overset{2}{\cancel{8}}x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

$$y = A J_{1/2}(\sqrt{2}x) + B Y_{1/2}(\sqrt{2}x)$$

-4

$$x^2y'' + xy' + (9x^2 - 4)y =$$

5- جواب معادله کدام است

$x y'' - y' + x y = 0$ فرض مسئله $y = u x$ $y' = u + x u'$ و $y'' = 2u' + x u''$

$x^2 u'' + \cancel{2xu'} - u - \cancel{xu'} + x x u = 0 \Rightarrow x^2 u'' + x u' + (x^2 - 1) u = 0$

$u = \underbrace{A J_1(x) + B Y_1(x)}$ $y = x(\quad)$

6- سؤال بالا با کدام یک از تغییر متغیرهای زیر تبدیل به بسل می شود

$y = u x$

$x y'' + (1 + 2\nu) y' + x y = 0$

با تغییر متغیر $y = x^{-\nu} z$ تبدیل به بسل می شود

7- جواب کدام است

$\cancel{9} x^2 y'' + \cancel{9} x y' + 4(9x^4 - \frac{1}{4}) y = 0$

$z = x^2 \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 2x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 2x \frac{dy}{dz}$

$y'' = 2 \frac{dy}{dz} + (2x)^2 \frac{d^2y}{dz^2}$

$\cancel{4} z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + \cancel{4} z \frac{dy}{dz} + \cancel{4}(z^2 - \frac{1}{9}) y = 0$ بسل با اندیس $\frac{1}{3}$

$y = A J_{1/3}(x^2) + B Y_{1/3}(x^2)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله $x^2y'' + xy' + 4(x^4 - \nu^2)y = 0$ با تغییر متغیر $z = x^2$ تبدیل به معادله بسل با پارامتر ν می شود.

تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}^{-1} F(s) = f(t)$$

لاپلاس و لاپلاس معکوس خاصیت خطی دارند

$f(t)$	$F(s)$
k	$\frac{k}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{2}{s^6} = \frac{2}{5!} \mathcal{L}^{-1} \frac{5!}{s^6} = \frac{2}{5!} t^5$$

$$, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha! \quad , \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s^{3/2}} = \frac{1}{\Gamma(3/2)} \mathcal{L}^{-1} \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} t^{1/2}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$$

۱- اگر a یک عدد حقیقی باشد لاپلاس $f(t)=e^{iat}$ کدام است؟

$$=\frac{1}{s-ia}$$

2- $\mathcal{L}^{-1}\frac{8-6s}{16s^2+9}$ کدام است؟

$$\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\frac{8-6s}{s^2+(3/4)^2}=\frac{1}{16}\left(8\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+(3/4)^2}-6\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+(3/4)^2}\right)$$

$$\frac{1}{16}\left[8\times\frac{4}{3}\sin(3/4\,t)-6\cos(\frac{3}{4}t)\right]$$

3- اگر $\mathcal{L}(f(t))=\frac{1}{s^4}$ ، $f(t)=?$

$$f(t)=\frac{t^3}{6}$$

4- a و b را طوری تعیین کنید که تابع $\frac{as+b}{s^2+4}$ تبدیل لاپلاس تابع $2\sin 2t+4\cos 2t$ باشد؟

$a=4\ ,\ b=4$

5- مطلوبست $\mathcal{L}^{-1}\frac{4-5s}{s^{3/2}}$

$$=4\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{3/2}}-5\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{1/2}}=\frac{8}{\sqrt{\pi}}t^{1/2}-\frac{5}{\sqrt{\pi}}t^{-1/2}$$

6- حاصل $\int_0^\infty e^{-2t}\cos t\,dt$ کدام است؟

$$=\mathcal{L}\cos t\Big|_{s=2}=\frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=2}=\frac{2}{5}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

7-

$$\int_0^{\infty} e^{-3t}\sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-3t}\sin 2t\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\Big|_{s=3}$$

اگر عامل e نباشد می‌توان s را صفر گرفت و توصیه می‌شود انتگرال‌های از ۰ تا ∞ را با لاپلاس حل کرد

تبدیل لاپلاس مشتق:

$$\mathcal{L} f'(t) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

$$\mathcal{L} f''(t) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

1. $f(t) = t \Rightarrow f'(t) = 1 \Rightarrow \frac{1}{s} = s\mathcal{L}(t) - 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t) = ?$

2. $f(t) = e^t \Rightarrow f'(t) = e^t \Rightarrow \mathcal{L}(e^t) = s\mathcal{L}(e^t) - 1 \Rightarrow \mathcal{L}(e^t) = ?$

3. $f(t) = t\sin t \Rightarrow f'(t) = \sin t + t\cos t$

$f''(t) = 2\cos t - t\sin t$

$$\Rightarrow \mathcal{L} f'' = \frac{2s}{s^2+1} - \mathcal{L}(t\sin t) = s^2\mathcal{L}(t\sin t) - 0 - 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t\sin t) = ?$$

۱- هرگاه $y''-y'+y=t$ ، $y(0)=y'(0)=0$ آنگاه لاپلاس y کدام است؟

هرگاه معادله شرایط مرزی در نقطه ۰ داشته باشد از لاپلاس حل شود راحت‌تر است.

$$\mathcal{L}y'' - \mathcal{L}y' + \mathcal{L}y = \mathcal{L}t \qquad s^2Y - sY + Y = \frac{1}{s^2} \qquad Y = ?$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضایای انتقال:

ـ انتقال بر محور sها:

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}F(s-a) = e^{at}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}F(s)}_{f(t)}$$

۱ـ تبدیل لاپلاس $2e^{-2t}\sin 2t$ کدام است

$$\mathcal{L}\,2e^{-2t}\sin 2t = 2\times\frac{2}{(s+2)^2+4}$$

2ـ لاپلاس معادله روبرو کدام است $f(t)=e^{3t}(2\cos 5t-3\sin 5t)$

$$\frac{2s}{s^2+25}-\frac{15}{s^2+25} = \frac{2(s-3)}{(s-3)^2+25}-\frac{15}{(s-3)^2+25}$$

3ـ لاپلاس $f(t)=e^{-t}\cos t$ کدام است

$$=\frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

4ـ لاپلاس $f(t)=e^{t}\overbrace{\int_0^t xe^{x}\,dx}^{f_1(t)}$ کدام است

$$F(s) = F_1(s-1)$$
$$F_1(s) = \mathcal{L}\int_0^t xe^{x}\,dx = \frac{1}{s}F_2(s)$$
$$F_2(s) = \mathcal{L}(te^{t}) = F_3(s-1)$$
$$F_3(s) = \mathcal{L}\,t = \frac{1}{s^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

5 - تبدیل معکوس $\frac{1}{\sqrt{9s-1}}$ کدام است ؟

$$\frac{1}{3} L^{-1} \frac{1}{\sqrt{s-\frac{1}{9}}} = \frac{1}{3} e^{\frac{t}{9}} \underbrace{L^{-1} \frac{1}{s^{1/2}}}_{\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}}$$

6 - تبدیل معکوس $\frac{s-1}{s^2-2s+5}$ کدام است ؟ فرض باید مربع کامل شود .

گام بعد در صورت هاشد کامل مخرج را درست می کنیم

$\frac{3s+7}{}$

$$\frac{s-1}{s^2-2s+5} = \frac{(s-1)}{(s-1)^2+4} \Rightarrow L^{-1} = e^t L^{-1} \frac{s}{s^2+4} = e^t \cos 2t$$

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4} \Rightarrow L^{-1} = e^t L^{-1} \frac{3s+10}{s^2-4} = e^t(3\cosh 2t + 5\sinh 2t$$

$$\frac{2s+3}{s^2+4s+4} = \frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2} \Rightarrow L^{-1} = e^{2t} L^{-1} \frac{2s+7}{s^2} = e^{2t}(2+7t)$$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

7-

$$\mathcal{L}\{x^3 e^{4x}\} = \frac{6}{(s-4)^4}$$

$$\frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s}$$

8- جواب معادله دیفرانسیل $y'' + 8y' + 16y = 0$ و $y(0)=2 , y'(0)=1$ را بدست آورید

$$\mathcal{L}y'' + \mathcal{L}8y' + 16\mathcal{L}y = 0 \qquad s^2Y - 2s - 1 + 8sY - 16 + 16Y = 0$$

$$Y(s+4)^2 = 2s+17 \Rightarrow Y = \frac{(2s+17)}{(s+4)^2} = \frac{2(s+4)+9}{(s+4)^2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}Y = e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2s+9}{s^2} = e^{-4t}(2+9t)$$

9-

$$y''-2y'+y = xe^x+4 \quad , y(0)=y'(0)=1$$

$$\mathcal{L}y'' - 2\mathcal{L}y' + \mathcal{L}y = \mathcal{L}(xe^x+4) = \mathcal{L}xe^x + \mathcal{L}4$$

$$s^2\mathcal{L}y - s - 1 - 2sY + 2 + Y = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}$$

$$Y = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2} \Rightarrow \underset{\mathcal{L}^{-1}Y}{y} = e^t\frac{t^3}{3} + e^t + 4\int_0^t te^t\,dt$$

قضیه دوم انتقال: انتقال بر محور t : تابع پله‌ای واحد

$$U_a(t) = U(t-a) = \begin{cases} 1 & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$$

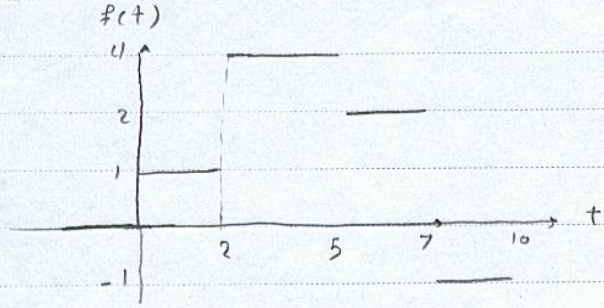
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\int_0^a 0 \times e^{-st}\,dt + \int_a^\infty e^{-st}\,dt$

$$\mathcal{L}(U_a(t)) = \int_a^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s} e^{-as}$$

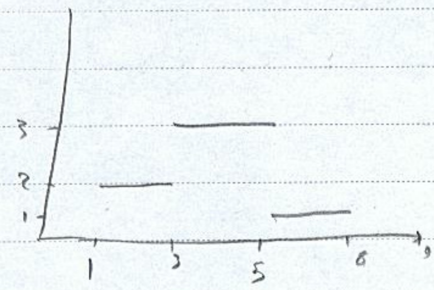
$$\mathcal{L}(U_a(t)) = \frac{1}{s} e^{-as}$$

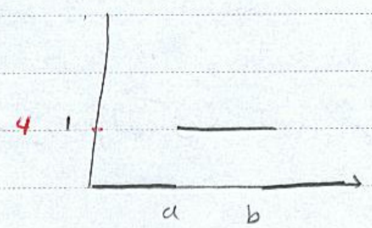


4

$f(t) = U_0(t) + 3U_2(t) - 2U_5(t)$
$- 3U_7(t) + U_{10}(t)$

$2U_1(t) + U_3 - 2U_5 - 3U_8 + 2U_9$

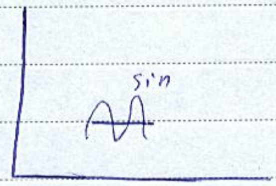




$$U_a(t) - U_b(t) = \begin{cases} 1 & a < t < b \\ 0 & \end{cases}$$

$f(t) = (U_a(t) - U_b(t))\,\underset{4}{1}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$f(t) = (U_a(t) - U_b(t))\sin t$$

$$y'' \ \_\_\_\_ = f = \begin{cases} t & 0 \leq t < \pi \\ \cos t & \pi < t < 2\pi \\ (t^2 - 1) & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = (U_0(t) - U_\pi(t))\, t + (U_\pi(t) - U_{2\pi}(t)) \cos t + (t^2 - 1) U_{2\pi}(t)$$

$$\mathcal{L}(U_a(t) f(t)) = e^{-as} \mathcal{L} f(t+a)$$

$$\mathcal{L} f(t) = e^0 \mathcal{L}(t) - e^{-\pi s} \mathcal{L}(t+\pi) + e^{-\pi s} \mathcal{L} \overset{-\cos t}{\cos(t+\pi)} - e^{-2\pi s} \mathcal{L} \cos_{(t+2\pi)}$$

$$+ e^{-2\pi s} \mathcal{L}((t+2\pi)^2 - 1) = \frac{1}{s^2} - e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{\pi}{s}\right) - e^{-\pi s} \frac{s}{s^2+1}$$

$$- e^{-2\pi s} \frac{s}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\left(\frac{2}{s^3} + 4\pi \frac{1}{s^2} + (4\pi^2 - 1)\frac{1}{s}\right)$$

۱- تبدیل لاپلاس

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 2 \\ 2 & t > 2 \end{cases}$$

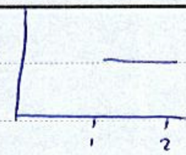
$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 2 \\ t & t > 0 \end{cases}$$

PAPCO

$$f(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t \leq 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

2- تبدیل لاپلاس  کدام است.

حل 1 قسمت الف:

$$f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<2 \\ 2 & t\ge 2 \end{cases} = (U_0-U_2)\,t+2U_2(t)$$

$$\mathcal{L}f(t)=e^{0}\mathcal{L}(t)-e^{-2s}\mathcal{L}(t+2)+2\frac{1}{s}e^{-2s}$$

$$=\frac{1}{s^2}-e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right)+\frac{2}{s}e^{-2s}$$

3- معادله لاپلاس $y'+2y=f(t)$ و $y(0)=1$ و $f(t)=\begin{cases}1 & 1<t<2 \\ 0 & \end{cases}$ را حل کنید $\mathcal{L}y=Y$ کدام است

$$sY-1+2Y=\frac{1}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)$$

جواب سؤال ✓ $$Y=\frac{1}{s+2}+\frac{e^{-s}}{s(s+2)}-\frac{e^{-2s}}{s(s+2)}$$

جواب معادله:

مهم $$\left[\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right)=U_a(t)\,f(t-a)\right] \Leftarrow \mathcal{L}\left(U_a(t)f(t)\right)=e^{-as}\mathcal{L}f(t+a)$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$f(t)=\int_0^t e^{-2t}\,dt=-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^t=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)$$

$$y=e^{-2t}+U_1(t)\,\frac{1}{2}\left(1-e^{-2(t-1)}\right)-U_2(t)\cdot\frac{1}{2}\left(1-e^{-2(t-2)}\right)$$

4- تبدیل معکوس $F_s=\frac{2e^{-2s}}{s^2+4}$ هرگاه حاصل e^{-2s} آمد باید حتماً از این قضیه استفاده شود. (قضیه معادی)

$$U_2(t)\sin 2(t-2)$$

سؤال بعد

$$\frac{e^{-\pi s}}{(1+s)^2+1}=U_\pi(t)\sinh 2(t-2)$$

بعدی

$$\frac{2e^{-2s}}{s^2-4}\qquad F_s=\frac{1}{1+(1+s)^2}\Rightarrow f(t)=e^{-t}\sin t$$

$$\Rightarrow\ =U_2(t)\,e^{(t-\pi)}\sin(t-\pi)$$

مشتق گیری از تبدیل لاپلاس

$$\mathcal{L}f(t)=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$F'(s)=\int_0^\infty e^{-st}(-tf(t))\,dt=\mathcal{L}(-tf(t))$$ مشتق نسبت به s

$$\Rightarrow\mathcal{L}(+tf(t))=-F'(s)$$

مشتق n ام

$$\Rightarrow\mathcal{L}(t^n f(t))=(-1)^n F^{(n)}(s)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱- حاصل انتگرال کدام است

$$\int_0^\infty te^{-4t}\cos 2t\, dt$$

$$= \mathcal{L}(t\cos 2t)\Big|_{s=4} = -\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\Big|_{s=4} = 0.03 = \frac{3}{100}$$

-2

$$\int_0^\infty xe^{-sx}\cos\beta x\, dx = \mathcal{L}(x\cos\beta x) = -\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)' = -\frac{s^2+\beta^2-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$= \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

-3

$$\int_0^\infty te^{-2t}\sin t\, dt = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\Big|_{s=2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2} = \frac{4}{25}$$

-4

$$\mathcal{L}(t^2e^{-3t}) = \left(\frac{1}{s+3}\right)''$$

با انتقال $\frac{2}{s^2} \cdot \frac{2}{(s+3)^3}$

$\mathcal{L}(t\cos at)$ -5

P4PCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

6ـ لاپلاس رابطه زیر کدام است

$f(t) = (t-\pi)\, U_\pi(t)\, e^{2t} \sin 3t$

$= e^{-\pi s} \mathcal{L}\left(t e^{2(t+\pi)} \sin(3t+\pi) \right) = -e^{-\pi s} e^{2\pi} \mathcal{L}\left(e^{2t}\, t \sin 3t\right) \Rightarrow ①$

$\mathcal{L}(t \sin 3t) = -\left(\frac{3}{s^2+9}\right)' = \frac{6s}{(s^2+9)^2}$

$① \Rightarrow \; = -e^{-\pi(s-2)}\, 6\, \frac{s-2}{((s-2)^2+9)^2}$

ادامه درس

$\mathcal{L}(t f(t)) = -F'(s) \quad \Rightarrow \quad f(t) = -\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1} F'(s)$

مورد استفاده در توابع $\ln$ و Arc می‌باشد.

اـ معکوس $F(s)$ کدام است

$F(s) = \ln \frac{s-2}{s+2} = \ln(s-2) - \ln(s+2)$

$F'(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}$ معکوس $\Rightarrow$ $e^{2t} - e^{-2t}$ ضرب در $\frac{1}{t}$

$f(t) = -\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{t}$

2ـ

$\ln \frac{s}{s-1} = \ln s - \ln(s-1) \quad F'(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \Rightarrow$ جواب $= \frac{e^t - 1}{t}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$F(s) = \ln \frac{(s^2+4\alpha^2)^{1/4}}{s^{1/2}} = \frac{1}{4}\ln(s^2+4\alpha^2) - \frac{1}{2}\ln s$$

$$F'(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4\alpha^2} - \frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2t}(\cos 2\alpha - 1)$$

-3

$F(s) = \cot^{-1} s$ $\quad F'(s) = \frac{-1}{s^2+1} \Rightarrow$ جواب : $\frac{\sin t}{t}$

-4

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{s} = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\frac{-1/s^2}{1/s^2+1} = \frac{-1}{s^2+1}$$

5- تبدیل لاپلاس جواب مسأله زیر کدام است.

$$x y'' + (1-x)y' + y = 0 \quad y(0)=1 \;,\; y'(0) = -1$$

معادله با ضرایب متغیر دو قضیه آخر

$$\mathcal{L}\, x y'' + \mathcal{L}(1-x)y' + \mathcal{L}\, y = 0$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$-(s^2Y - s + 1)' + sY - 1 + (sY - 1)' + Y = 0$

$-(2sY + s^2Y' - 1) + sY + \cancel{sY} - 1 + Y + sY' + Y = 0$

$Y'(s - s^2) + Y(2 - s) = 0$

$\frac{Y'}{Y} = \frac{\cancel{+s+2}}{\cancel{s(-1+s)}} - \frac{s-2}{s^2-s} = \frac{-2}{s} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow \ln Y = -2\ln s + \ln(s-1)$

$= \ln \frac{s-1}{s^2}$

$\ln Y = -\frac{1}{2}\ln(s^2 - s) - \frac{3}{2}\ln s + \frac{3}{2}\ln(s-1)$

$Y = \frac{s-1}{s^2}$ $\qquad y = 1 - t$

: 6

$ty'' + 2y' + ty = 0$ $\qquad Y = c - y(0)\, tg^{-1} s$

$L\,ty'' + 2Ly' + L\,ty = 0$

$-(s^2Y - sy(0) - y'(0))' + 2sY - 2y(0) - Y' = 0$

$2sY + s^2Y' - y(0) - 2sY + 2y(0) + Y' = 0$

$Y'(s^2 + 1) = -y(0)$ $\qquad Y' = \frac{-y(0)}{(s^2+1)} \Rightarrow Y = -y(0)\, tg^{-1}(s) + c$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انتگرال‌گیری از تبدیل لاپلاس:

اگر $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد آنگاه

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} F(u)\,du$$

$$\Rightarrow f(t) = t\,\mathcal{L}^{-1} \int_s^{\infty} F(u)\,du$$

$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$ $\quad \int F(s) = -\frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}$ $\quad -\frac{1}{2}\sin t$

$f(t) = -\frac{t}{2}\sin t$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin \alpha x \,/x \; dx = tg^{-1}\alpha$$

$\|$

$$\mathcal{L}(\sin\alpha t)/t = \int_s^{\infty} \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\,ds = tg^{-1}\frac{s}{\alpha}\Big|_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}\frac{s}{\alpha} = tg^{-1}\frac{\alpha}{s}$$

حفظ شود $\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$ $\quad s=0$ $\quad \mathcal{L}\,\frac{\sin t}{t}$

$\mathcal{L}\,\frac{\sin 2t}{t}$

PAPCO

در سوالات یک بار رفته $\frac{\pi}{2} - tg^{-1}\frac{1}{\alpha} = tg^{-1}\alpha$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\mathcal{L}\ \frac{\sin t}{t}$$

$$\ln \frac{e^t}{t}$$ حد ندارد و جواب نمی‌دهد

$$\mathcal{L}\ \frac{e^t-1}{t} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) ds = \ln(s-1) - \ln s \Big|_s^\infty = \ln\frac{s-1}{s}\Big|_s^\infty$$

$$= \ln \frac{s}{s-1}$$

قضیه پیچش : (کانولوشن)

کانولوشن

$$(f * h)(t) = \int_0^t f(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

خاصیت جابجایی دارد

$$\frac{1}{s(s-1)} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{s^3(s^2-1)} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\ F(s)\, H(s) = \int_0^t f(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$F(s)\, H(s) = \mathcal{L} \int_0^t f(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s-1)} = \int_0^t e^{\lambda}\, d\lambda \qquad (1,\ e^t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\lambda)^2 \sinh\lambda \, d\lambda \qquad \left(\frac{t^2}{2},\ \sinh t\right)$$

تبدیل به جمع شوند

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2\lambda \sin(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s^2+1)^2} = \int_0^t \sin\lambda \sin(t-\lambda)\, d\lambda = k(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+1)^3} = \int_0^t k(\lambda)\cos(t-\lambda)\, d\lambda$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s-2)(s+3)^2} = \int_0^t \lambda e^{-3\lambda} e^{2(t-\lambda)}\, d\lambda$$

$e^{2t} \cdot te^{-3t}$

۱. جواب $y'' + y = f(x),\ y(0) = y'(0) = 0$ کدام است؟

$$s^2 Y + Y = F(s)$$

$$Y = \frac{1}{s^2+1}F(s) \Rightarrow y = \int_0^x \sin(x-t) f(t)\, dt$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲ـ جواب معادله $\varphi(t) = 2 + \int_0^t e^{t-u}\varphi(u)\,du$ کدام است؟

جواب $= 1 + e^{2t}$

$\mathcal{L}$ ... $\mathcal{L}$

$$\Phi(s) = \frac{2}{s} + \Phi(s)\frac{1}{s-1}$$

$$\Phi(s)\left(1 - \frac{1}{s-1}\right) = \frac{2}{s} \Rightarrow \Phi(s) = 2\frac{s-1}{s(s-2)}$$

$$\frac{s-2}{s-1}$$

$$\varphi(t) = 1 + e^{2t}$$

۳ـ جواب معادله $y(t) = 1 + \int_0^t y(x)\sin(t-x)\,dx$ کدام است؟

جواب $= 1 + \frac{t^2}{2}$

$$Y = \frac{1}{s} + \frac{Y}{s^2+1} \Rightarrow Y\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s}$$

$$Y = \frac{s^2+1}{s^3} \Rightarrow 1 + \frac{t^2}{2}$$

۴ـ

$$f(t) = te^{-t} + \int_0^t \alpha f(t-\alpha) e^{-\alpha}\,d\alpha \Rightarrow \text{جواب} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

پیچشی

$$F = \frac{1}{(s+1)^2} + F\cdot\frac{1}{(s+1)^2} \qquad F\left((s+1)^2 - 1\right) = 1$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

صدف حاج آقاسی

$$F = \frac{1}{(s+1)^2 - 1} \Rightarrow f = \frac{e^{-t}}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right)$$

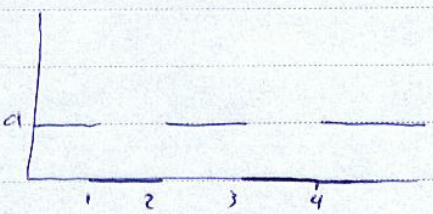
۳- تابع متناوب:

$$f(t+P) = f(P)$$

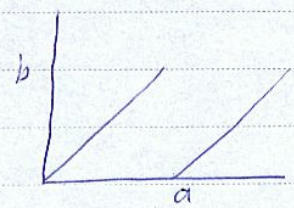
، P کوچکترین عددی باشد که در معادله صدق می کند (دوره تناوب یا بسامد)

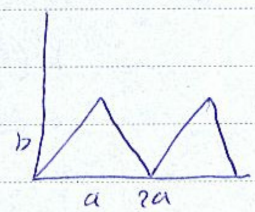
$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt$$

۱-

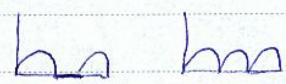


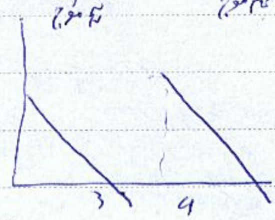
$$\frac{a}{1 - e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st}\, dt = \frac{a}{s(1 - e^{-s})}$$

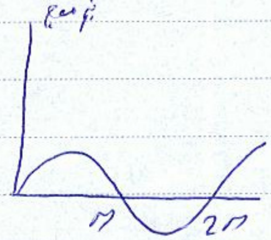




دوره تناوب عوض می شود

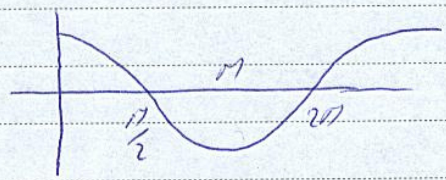


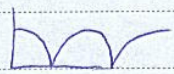




PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )





PAPCO