

۱ شکل مقابل نمودار کدام تابع است؟

(۱) $y = -x^2 + 4x + 3$

(۲) $y = x^2 + 4x + 3$

(۳) $y = x^2 - 4x + 4$

(۴) $y = x^2 - 4x + 3$

۲ مختصات نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم تابع $y = -x^2 + 6x - 4$ کدام است؟

(۱) ماکزیمم (۳, ۵) (۲) ماکزیمم (۶, -۴) (۳) می‌نیمم (۳, ۵) (۴) می‌نیمم (-۳, -۳۱)

۳ اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x \neq 1$ ، ضابطه تابع $(f \circ f)(x)$ برابر کدام است؟

(۴) $\frac{2x}{x-1}$

(۳) $\frac{x-1}{x+1}$

(۲) $-x$

(۱) x

۴ اگر تابع $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ یک به یک باشد، a کدام است؟

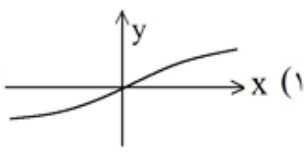
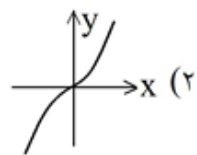
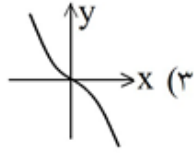
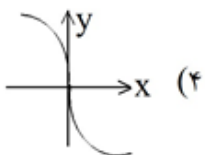
(۴) ۲

(۳) ۱

(۲) -۱

(۱) -۲

۵ اگر f با ضابطه $f(x) = x^3 + x$ باشد، نمودار f^{-1} به کدام صورت است؟



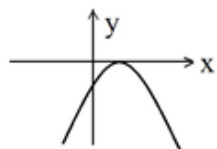
۶ به ازای کدام مقدار a شکل مقابل نمودار تابع $y = -2x^2 + 4x + a$ است؟

(۲) -۱

(۱) -۲

(۴) ۲

(۳) ۱



۷ معادله محور تقارن منحنی نمایش تابع $2x^2 + y - x - \frac{3}{4} = 0$ کدام است؟

(۴) $x = \frac{1}{4}$

(۳) $x = \frac{1}{2}$

(۲) $x = -\frac{1}{4}$

(۱) $x = -\frac{1}{2}$



۸ اگر خط $x = \frac{-1}{4}$ محور تقارن معادله $y = x^2 + ax + 1$ باشد کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۹ مختصات رأس سهمی به معادله $y = x^2 - 2x - 3$ کدام است؟

- (۱) (۱, ۴) (۲) (-۱, -۴) (۳) (۱, -۴) (۴) (-۱, ۴)

۱۰ سهمی $y = ax^2 + bx$ مفروض است. اگر نقطه (۱ و ۱) رأس سهمی باشد، a و b کدام اند؟

- (۱) $a = -2, b = 3$ (۲) $a = -1, b = 2$ (۳) $a = 1, b = 0$ (۴) $a = 2, b = -1$

۱۱ رأس سهمی $y = x^2 - 1$ کدام است؟

- (۱) (-۱ و ۰) (۲) (۰ و -۱) (۳) (۰ و ۱) (۴) (۱ و ۰)

۱۲ محل تلاقی خط $y = x$ و سهمی $y = x^2$ کدام است؟

- (۱) (۰ و ۰) (۲) (-۱ و ۱) (۳) (۱ و ۱) (۴) (۱ و ۱) و (۰ و ۰)

۱۳ فاصله رأس سهمی $y = x^2 + 2x$ تا نقطه A (۱, ۱) کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{8}$ (۴) $\sqrt{10}$

۱۴ در تابع $y = 2x^2 + 4x - 1$ کمترین مقدار y کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) -۷ (۴) ۱

۱۵ فاصله نقطه $(\frac{3}{2}, \frac{-5}{4})$ از رأس سهمی $y = x^2 + x + 1$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۶ اگر رأس سهمی $y = ax^2 + 2ax - 3$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم قرار داشته باشد a چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۷ مختصات رأس نمودار تابع درجه دوم $y = x^2 + x + 1$ کدام است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ (۲) $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ (۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ (۴) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

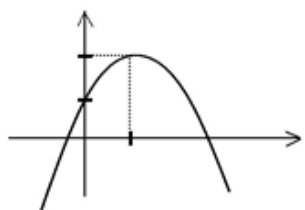


۱۸ رأس سهمی به معادله $y = -x^2 + 3x$ در کدام ناحیه صفحه مختصات قرار دارد؟
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

۱۹ عرض نقطه رأس سهمی به معادله $y = x^2 + 2x + 2$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۲۰ نقطه تلاقی نمودار تابع $y = x^2 - x - 4$ با نیمساز ناحیه دوم کدام است؟
 (۱) (۲ و -۲) (۲) (۲ و -۲) (۳) (-۴ و ۴) (۴) (-۴ و ۴)

۲۱ نمودار تابع f بر نمودار معکوس آن منطبق است $f(x)$ برابر کدام است؟
 (۱) x^3 (۲) x^2 (۳) $|x|$ (۴) $-x$



۲۲ معادله سهمی با نمودار مقابل کدام است؟

(۱) $y = -x^2 + 2x + 1$ (۲) $y = x^2 - 2x + 1$

(۳) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ (۴) $y = x^2 - x + 2$

۲۳ اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌های $f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = x + 3$ باشند، $g \circ f(x)$ کدام است؟
 (۱) x^2 (۲) $x^2 + x$ (۳) $\frac{x+3}{x^2-3}$ (۴) $x^3 + 3x^2 - 3x - 9$

۲۴ تابع معکوس تابع $y = \sqrt{1-x}$ کدام است؟

(۱) $x > 0, y = 1 - x^2$ (۲) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

(۳) $y = \sqrt{1+x}$ (۴) $y = 1 + x^2$

۲۵ وارون تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ کدام است؟
 (۱) $2x + 3$ (۲) $\frac{1}{2}x + 3$ (۳) $2x - 2$ (۴) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$



۲۶ وارون تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & x < 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases} \quad (۲)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & x < 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x + 1) & x < 1 \\ \sqrt{x} & x \geq 1 \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{cases} 2x + 1 & x < 1 \\ \frac{1}{2}x - 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (۳)$$

۲۷ اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 + 1$ در این صورت دامنه تعریف fog کدام است؟

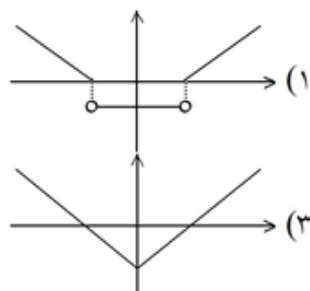
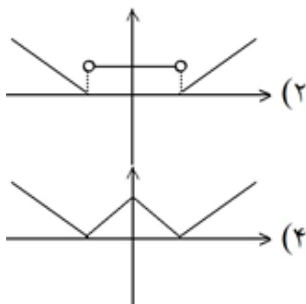
$$(0, 2] \quad (۴)$$

$$[0, 2] \quad (۳)$$

$$\{1\} \quad (۲)$$

$$\{0\} \quad (۱)$$

۲۸ منحنی نمایش تابع $f(x) = ||x| - 2|$ کدام است؟



۲۹ فرض کنیم $f(g(x)) = x^2 + \frac{1}{2} - 4$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ باشند، در این صورت $f(x)$ کدام است؟

$$x^2 + 2 \quad (۴)$$

$$x^2 \quad (۳)$$

$$x^2 - 2 \quad (۲)$$

$$x^2 - 4 \quad (۱)$$

۳۰ وارون تابع $f(x) = 2x + 14$ کدام است؟

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 7 \quad (۴)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x - 7 \quad (۳)$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 7 \quad (۲)$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x - 7 \quad (۱)$$

۳۱ اگر ضابطه تعریف f و g به صورت $f(x) = 3x - 2$ و $g(x) = 2 + x$ باشد، ضابطه تابع معکوس fog کدام است؟

$$y = 3x + 4 \quad (۴)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \quad (۳)$$

$$y = 3x - 4 \quad (۲)$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \quad (۱)$$

۳۲ اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = x - 4$ مقدار $\frac{fog(2)}{gof(-1)}$ چقدر است؟

$$3 \quad (۴)$$

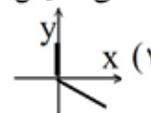
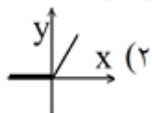
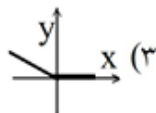
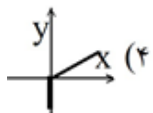
$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (۲)$$

$$-\frac{7}{3} \quad (۱)$$



۳۳ منحنی نمایش معکوس تابع $y = 2x + |2x|$ کدام است؟



۳۴ اگر ضابطه تابع f ، $f(x) = x^3 + x + 1$ باشد، نمودار f^{-1} الزاماً از کدام نقطه می‌گذرد؟

- (۱) $(-1, 0)$ (۲) $(0, -1)$ (۳) $(1, 0)$ (۴) $(0, 1)$

۳۵ نمودار کدام تابع با ضابطه‌های زیر در فاصله‌ی $[1, 3]$ بالای سایرین قرار می‌گیرد؟

- (۱) $y = x^{\frac{1}{3}}$ (۲) $y = x^{\frac{2}{3}}$ (۳) $y = x^2$ (۴) $y = x^3$

۳۶ اگر $f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$ و $g(x) = 2\cos^2 x$ باشد، مقدار $(f \circ g)\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴) ۲

۳۷ اگر $f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(x)$ کدام فاصله است؟

- (۱) $[-1, 0)$ (۲) $[0, 1)$ (۳) $[-1, 1)$ (۴) $[1, +\infty)$

۳۸ اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x - 1$ باشد، ضابطه تعریف $f \circ g^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $2x + 1$ (۲) $2x + 2$ (۳) $2x + 3$ (۴) $2x + 4$

۳۹ اگر $f(x+1) = x^2 - 2x + 1$ باشد، تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $(x-2)^2$ (۲) $(x-1)^2$ (۳) $x^2 - 2x$ (۴) $(x+2)^2$

۴۰ اگر $f(x) = 3x - 1$ و $g(x) = 1 - 2x$ آنگاه $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

- (۱) $2 - 6x$ (۲) $3 - 6x$ (۳) $6 - 2x$ (۴) $6 - 3x$

۴۱ دو تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x+1$ مفروضند، مقدار $(f \circ g)(3)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۴۲ اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، دامنه $(f \circ g)(x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[1, 2]$ (۴) $[1, 3]$



۴۳ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $f(-f(x))$ برابر کدام است؟

- (۱) $x + 1$ (۲) $x^2 + 1$ (۳) $(x^2 + 1)^2 + 1$ (۴) $(x^2 + 1)^2$

۴۴ اگر $f(x) = 3x + a$ ، $g(x) = 2 - x$ ، $f \circ g(x) - g \circ f(x) = 6$ ، چقدر است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۴۵ اگر $f(x) = x^2 + 1$ ، $g(x) = \sqrt{x - 1}$ ، برد تابع $f \circ g$ کدام مجموعه است؟

- (۱) $\{y : y \geq 0\}$ (۲) $\{y : y \geq 1\}$ (۳) $\{y : y \geq -1\}$ (۴) مجموعه اعداد حقیقی

۴۶ معادله‌ی قرینه $y = 2x + 2$ نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم کدام است؟

- (۱) $2y = -x - 2$ (۲) $2y = -x + 2$ (۳) $2y = x - 2$ (۴) $2y = x + 2$

۴۷ خط به معادله $y = \frac{-5}{3}x$ ، محور تقارن تابع با ضابطه $y = \frac{1}{3}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام

- است؟
(۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۴۸ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-x}} & x < 1 \\ 2x - \frac{3}{4} & x \geq 1 \end{cases}$ مفروض است. $f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۴۹ نمودار تابع $y = x^2 - bx + 1$ روی محور OX دارای می‌نیم است، b کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) 3

۵۰ اگر $f(x) = 2x - 2$ ، $g(x) = x^2 - 1$ ، جواب‌های معادله $f \circ g(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $\pm\sqrt{2}$ (۲) ± 2 (۳) $\pm\sqrt{3}$ (۴) ± 3



۵۱ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{2-x}{1+x}$ برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

(۱) $(-1, 2]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $[2, +\infty)$

۵۲ معکوس تابع با ضابطه $f(x) = \cos x$ روی کدام بازه یک تابع است؟

(۱) $[-\pi, 0]$ (۲) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (۳) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ (۴) $[0, 2\pi]$

۵۳ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \operatorname{tg} x$ ضابطه تابع $f \circ g(x)$ در بازه $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ برابر کدام است؟

(۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $-\sin x$ (۴) $-\cos x$

۵۴ اگر $f = \{(1, 2), (-1, 3), (-1, m+1), (n+2, 2)\}$ یک تابع یک به یک باشد، $m+n$ کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۵۵ اگر $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ و $x > 0$ آنگاه ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

(۱) $x - 1$ (۲) $x + 1$ (۳) $x^2 - 1$ (۴) $x^2 + 1$

۵۶ اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ باشد، مقدار $(g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\sqrt{2}$

۵۷ با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$ اگر $f(x) = 2x - 1$ آنگاه $g(0)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۲

۵۸ در بازه $[x, +\infty)$ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ بالاتر از خط به معادله $y = 3(x-1)$ قرار نمی‌گیرد کمترین مقدار $f(x_0)$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹ اگر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $y = 2x + b$ و $y = ax^2 + bx - 3$ روی محور x ها در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع باشند a کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵



۶۰ اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ، دقیقاً ضابطه $f^{-1}(x)$ برابر کدام است؟

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right); x \in \mathbb{R}$ (۲) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right); x \in \mathbb{R}$ (۱)

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right); x > 0$ (۴) $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right); x > 0$ (۳)

۶۱ اگر $\Lambda = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f = \{(x, 2x - 1), x \in \Lambda\}$ تابع $f(f(x))$ چند عضو دوتایی دارد؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

۶۲ اگر $f(x) = |x| - x$ ضابطه تابع $(fof)(x)$ برابر کدام است؟

۰ (۴) $x + |x|$ (۳) $|x|$ (۲) x (۱)

۶۳ اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y = (a - 1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۶ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

۶۴ اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ ، مقدار $g(1)$ کدام است؟

۵ (۴) ۴ (۳) ۳ (۲) ۲ (۱)

۶۵ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$ ، تابع gof^{-1} کدام است؟

$\{(5, 3), (-1, 1)\}$ (۴) $\{(2, 0), (-1, 4)\}$ (۳) $\{(2, 4), (3, 5)\}$ (۲) $\{(1, 3), (0, 0)\}$ (۱)

۶۶ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2(2-x)^2$ ، حاصل $f(1+x) - f(1-x)$ کدام است؟

$4x^2$ (۴) $2x^2$ (۳) $4x$ (۲) صفر (۱)

۶۷ اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد مقدار ورودی کدام است؟

ورودی $\rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow$ خروجی $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{11}{9}$ (۱)
۴ (۴) ۳ (۳)



۶۸ اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، آن‌گاه $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۱

۶۹ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و تابع $g(x) = \operatorname{tg} x : |x| < \frac{\pi}{2}$ باشند. دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

- (۱) $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (۲) $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ (۳) $(0, \frac{\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4}, 0)$ (۴) $(0, 1) \cup (-1, 0)$

۷۰ توابع زیر از \mathbb{R} به \mathbb{R} تعریف شده‌اند. کدام یک از آن‌ها معکوس‌پذیر هستند؟

- (۱) $y = x^4 - 2x^2$ (۲) $y = [x]$ (۳) $y = x^3 - 3x^2$ (۴) $y = x^3 + x + 1$

۷۱ در تابع با ضابطه $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ مقدار $f(-\frac{1}{2})$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) تعریف نشده

۷۲ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول یک و محور y ها را در نقطه‌ای به

عرض ۶ قطع کرده و از نقطه $(-۲, -۶)$ می‌گذرد، $f(-۱)$ کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۷ (۳) -۵ (۴) -۴

۷۳ اگر $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، ضابطه تابع $f(x^2) - 2f(x) + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{1-x^2}$ (۲) $\frac{2x}{x^2-1}$ (۳) $\frac{2x+1}{1-x^2}$ (۴) $\frac{2x-1}{x^2-1}$

۷۴ دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ مفروض‌اند. تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\}$ (۲) $\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\}$ (۳) $\{(2, 2), (1, 1), (4, 4)\}$ (۴) $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$

۷۵ اگر $f(x) = 2 - |x - 2|$ ، ضابطه‌ی تابع $f(f(x))$ برابر کدام است؟

- (۱) x (۲) $4 - x$ (۳) $f(x)$ (۴) $2 - f(x)$

۷۶ اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$ ، مقدار $f(3)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۴



۷۷ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد، عدد a کدام است؟

- ۲ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲) ۱ (۱)

۷۸ اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ ، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور x ها قرار گیرد

برابر کدام بازه است؟

- (-۳, ۲) (۴) (-۲, ۱) (۳) (-۱, ۴) (۲) (-۴, ۱) (۱)

۷۹ ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

- $y = \frac{1-|x|}{x}; |x| > 1$ (۴) $y = \frac{x}{|x|-1}; |x| > 1$ (۳) $y = \frac{|x|-1}{x}; |x| < 1$ (۲) $y = \frac{x}{1-|x|}; |x| < 1$ (۱)

۸۰ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ ، مقدار $f\left(-\frac{1}{2} f(\sqrt{3})\right)$ ، کدام است؟

- ۲/۷۵ (۴) ۲/۵ (۳) ۲/۲۵ (۲) ۱/۷۵ (۱)

۸۱ اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه تابع $f \circ g$ ، کدام است؟

- $4x^2 - 4x + 11$ (۴) $4x^2 - 2x + 13$ (۳) $2x^2 - 3x + 7$ (۲) $2x^2 - 7x + 3$ (۱)

۸۲ اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ، دامنه‌ی تابع $f(3-x)$ ، کدام است؟

- $[1, 3]$ (۴) $[1, 2]$ (۳) $[0, 3]$ (۲) $[0, 2]$ (۱)

۸۳ اگر $f(x) = (2x - 3)^2$ و $g(x) = x + 2$ نمودارهای دو تابع f و $f \circ g$ ، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- $\frac{3}{2}$ (۴) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) -۱ (۱)

۸۴ ضابطه‌ی معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ ، به کدام صورت است؟

- $y = -x^2 + 4x - 5; x < 2$ (۲) $y = x^2 - 4x + 5; x < 2$ (۱)
 $y = -x^2 + 4x - 5; x \geq 1$ (۴) $y = x^2 - 4x + 5; x \geq 1$ (۳)

۸۵ اگر توابع f و g به عنوان ماشین به صورت $2x \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow x$ باشند و $g(x) = 3x + 4$ ، مقدار $f(5)$

کدام است؟

- ۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)



۸۶ اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ ، $g(x) = \frac{1}{4}(x-3)$ ، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار گیرند،

برابر کدام بازه است؟
 (۱) (۱ و ۵) (۲) (۵ و -۱) (۳) (۱ و -۲) (۴) (۵ و ۱)

۸۷ ضابطه وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & , x < 0 \end{cases}$ ، کدام است؟

(۱) $y = x|x|$ ، $x \in \mathbb{R}$ (۲) $y = -x^2$ ، $x < 0$ (۳) $y = \pm x^2$ ، $x \in \mathbb{R}$ (۴) $y = \pm x|x|$ ، $x \in \mathbb{R}$

۸۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2}$ ؛ $x^2 \neq 1$ و $f(0) = 0$ ، ضابطه‌ی تابع وارون آن برابر کدام است؟

(۱) $f(x)$ (۲) $-f(x)$ (۳) $xf(x)$ (۴) $-xf(x)$

۸۹ ضابطه‌ی معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ ، به کدام صورت است؟

(۱) $y = x \sqrt{|x|}$ ؛ $x \in \mathbb{R}$ (۲) $y = x \sqrt{|x|}$ ؛ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

(۳) $y = x|x|$ ؛ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $y = x|x|$ ؛ $x \in \mathbb{R}$

۹۰ تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}x + 1$ ، $x \geq 4$ (۲) $\frac{1}{4}x - 1$ ، $x \leq 4$ (۳) $\frac{1}{4}x - 1$ ، $x \geq 4$ (۴) $\frac{1}{4}x + 1$ ، $x \leq 4$

۹۱ دو تابع با ضابطه‌های $g = \{(2,5), (3,4), (1,6), (4,7), (8,1)\}$ و $f(x) = 2x - 5$ مفروض‌اند. اگر

$(f^{-1} \circ g)(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۲ اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

(۱) $x^2 - 4x + 3$ (۲) $x^2 - 4x + 5$ (۳) $x^2 - 2x + 5$ (۴) $x^2 - 2x + 3$



۹۳ نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{2}x \right| - 2$ را، ۴ واحد به طرف X های منفی و یک واحد به طرف Y های مثبت انتقال می دهیم.

نمودار جدید و نمودار اولیه با کدام طول متقاطع اند؟

- (۱) $-3/5$ (۲) -3 (۳) $-2/5$ (۴) -2

۹۴ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ در بازه (a, b) زیر محور X ها است. بیشترین

مقدار $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۹۵ منحنی به معادله $y = (2x + 1)(x + 8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه‌ی مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است؟

- (۱) $9 < m < 25$ (۲) $15 < m < 23$ (۳) $7 < m < 15$ (۴) $5 < m < 13$

۹۶ در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ ، مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

- (۱) -8 (۲) -5 (۳) -2 (۴) تعریف نشده

۹۷ اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ ، مقدار $f(f(-144))$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۲

۹۸ اگر $f(x) = \frac{x}{2-x}$ و $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$ ، ضابطه‌ی تابع g برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{x}{x+1}$ (۲) $\frac{x-1}{x}$ (۳) $\frac{x}{x-1}$ (۴) $\frac{x+1}{x}$

۹۹ اگر رابطه‌ی $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، دوتایی (a, b) کدام است؟

- (۱) $(-1, 1)$ (۲) $(-1, 3)$ (۳) $(2, 1)$ (۴) $(2, 3)$

۱۰۰ تابع معکوس تابع $y = x^2 - 4x$ با شرط $x < 2$ کدام است؟

(۱) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+4}$ (۲) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4}$

(۳) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-4}$ (۴) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-4}$

۱۰۱ اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 2x^2 + 6x$ ، مقدار $g(-2)$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) -1 (۴) ۲



۱۰۲ اگر $f(x) = [x]$ ، مجموعه‌ی مقادیر $f(x-f(x))$ کدام است؟
 (۱) $\{0\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{-1, 0, 1\}$

۱۰۳ اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ دامنه‌ی تابع $g \circ f$ کدام است؟
 (۱) $(0, 8) \cup (8, +\infty)$ (۲) $R - \{0, 8\}$ (۳) $R - \{0\}$ (۴) $(0, +\infty)$

۱۰۴ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x)) = -2$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟
 (۱) $R - Z$ (۲) Z (۳) R (۴) ϕ

۱۰۵ مقادیر تابع $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ در بازه‌ی (a, b) بزرگ‌تر از $\frac{7}{4}$ می‌باشد. بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟
 (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۵/۵ (۴) ۶

۱۰۶ اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ باشد، حاصل $(f \circ g)(1 - \sqrt{2}) - (g \circ f)(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟
 (۱) $4(1 - \sqrt{2})$ (۲) $4(\sqrt{2} - 1)$ (۳) ۴ (۴) $4\sqrt{2}$

۱۰۷ معکوس تابع $y = x^3 + \sqrt{x}$ از کدام نقطه می‌گذرد؟
 (۱) $(4, 66)$ (۲) $(3, 1)$ (۳) $(66, 4)$ (۴) $(1, 2)$

۱۰۸ در تابع $f(x) = x + 2$ ، حاصل $f(f(f(x)))$ کدام است؟
 (۱) $x + 6$ (۲) $3x + 6$ (۳) $x + 8$ (۴) $3x + 8$

۱۰۹ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x+4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x \leq 3 \end{cases}$ ، مقدار $f(f(5)) + f(f(1))$ کدام است؟
 (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

۱۱۰ اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ ، آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟
 (۱) $x^2 + 1$ (۲) $x^2 + 3$ (۳) $x^2 + 4x + 5$ (۴) $x^2 - 4x + 5$

۱۱۱ تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(4, 1) \in g \circ f$ باشد، دو تایی (a, b) کدام است؟
 (۱) $(3, 4)$ (۲) $(4, 3)$ (۳) $(4, 5)$ (۴) $(5, 4)$



۱۱۲ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف Xهای مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور Xها غیر منفی باشد؟

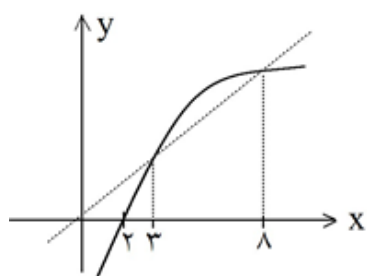
- ۱ (۱) $1/5$ (۱) 2 (۳) 3 (۴)

۱۱۳ به‌ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

- ۱ (۱) -4 (۲) $4, -12$ (۳) $12, -4$ (۴) 12 (۴)

۱۱۴ نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه، اکیداً نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه کدام است؟

- ۱ (۱) $-x + 6; x < -4$ (۲) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 3$ (۳) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 10$ (۴) $-x + 5; x > 2$ (۲)



۱۱۵ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم است.

دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

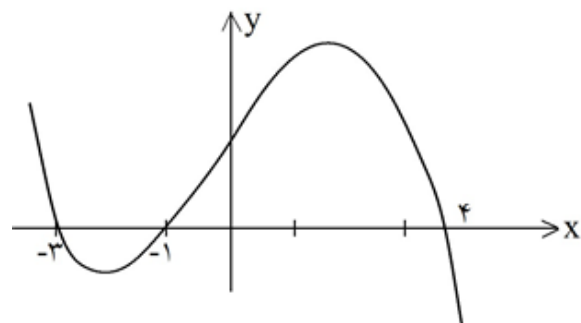
- ۱ (۱) $(0, 2]$ (۲) $[2, 3]$ (۳) $[2, 8]$ (۴) $[3, 8]$

۱۱۶ اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \text{Log}_7(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱ (۱) $[-4, 2]$ (۲) $[0, 2]$ (۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (۴) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

۱۱۷ تابع با ضابطه‌ی $y = x|x-2|$ ، در یک بازه، نزولی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه، کدام است؟

- ۱ (۱) $1 - \sqrt{1+x}; x < 0$ (۲) $1 - \sqrt{1-x}; x < 1$ (۳) $1 + \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$ (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$



۱۱۸ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه‌ی

تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) $[-1, 1] \cup [0, 6]$ (۲) $[-3, 1] \cup [0, 2]$ (۳) $[-5, -3] \cup [-1, 2]$ (۴) $[-5, -3] \cup [0, 2]$



۱۱۹

اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ باشند. دامنه‌ی تابع fog، کدام است؟

- (۱) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۲) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (۳) $(-2, 0)$ (۴) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

۱۲۰ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |2x - 6| - |x + 1|$ ، در یک بازه، صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن، در این بازه، کدام است؟

- (۱) $-x + 7; x > 8$ (۲) $\frac{1}{3}x + 2; x > 3$ (۳) $x + 7; x > -4$ (۴) $\frac{1}{4}x - 1; -4 < x < 8$

۱۲۱ تابع با ضابطه‌ی $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $\frac{1}{4}$ قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{9}$ و ۴ (۲) $\frac{1}{4}$ و ۹ (۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۴) ۴ و ۹

۱۲۲ اگر $f(x) = \sqrt{2 - x}$ و $g(x) = \text{Log}(x^2 - 15x)$ باشند، دامنه‌ی تابع fog، کدام است؟

- (۱) $(0, 5] \cup [20, 25)$ (۲) $[-5, 0) \cup (15, 20]$ (۳) $(15, 20]$ (۴) $[-5, 0)$

۱۲۳ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع f برابر کدام است؟

- (۱) $2x^2 + 3x + 1$ (۲) $2x^2 - 2x + 3$ (۳) $2x^2 - x + 4$ (۴) $2x^2 + x + 3$

۱۲۴ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x^3|$ با دامنه‌ی R، چگونه است؟

- (۱) نزولی (۲) صعودی (۳) وارون‌ناپذیر (۴) یک‌به‌یک

۱۲۵ اگر $f(x) = \frac{1}{4}\left(x + \sqrt{x^2 + 4}\right)$ باشد، حاصل $f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + f^{-1}(x)$ ، کدام است؟

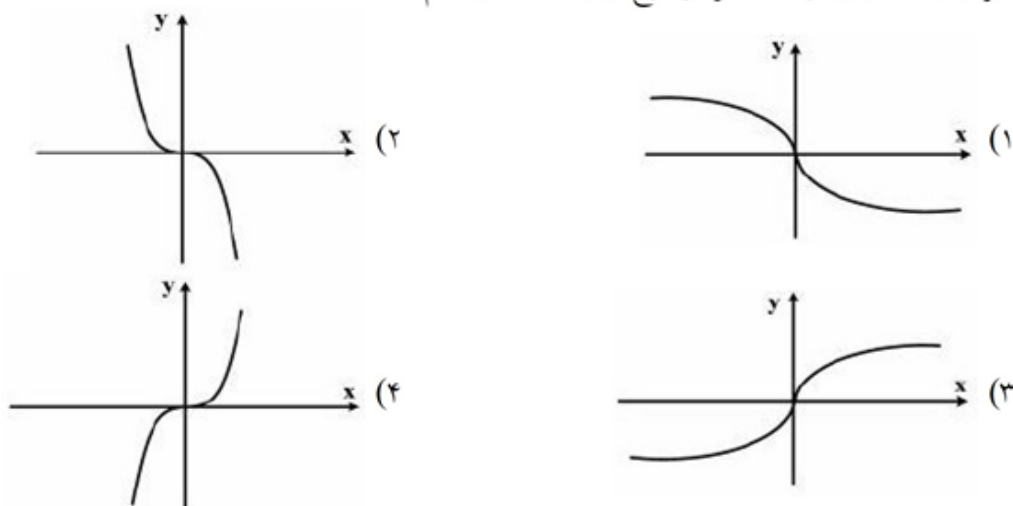
- (۱) $2x$ (۲) $\frac{2}{x}$ (۳) $x^2 - 1$ (۴) صفر

۱۲۶ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x + 1}$ باشند، مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع gof و خط به معادله‌ی

- $y = 3$ کدام است؟
(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) ۶



اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟ (۱۲۷)



اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ کدام است؟ (۱۲۸)

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $\{0\}$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

دو تابع $f = \{(2,5), (6,3), (3,7), (4,1), (1,9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، کدام است؟ (۱۲۹)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟ (۱۳۰)

- (۱) $x-1$ (۲) $x+1$ (۳) x (۴) $2x$

ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ کدام است؟ (۱۳۱)

- (۱) $-x^2$ (۲) x^2 (۳) $x|x|$ (۴) $-x|x|$

به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ همواره بالای محور x ها است؟ (۱۳۲)

- (۱) $a < 1$ (۲) $a < -2$ (۳) $a > 3$ (۴) $-2 < a < 1$



۱۳۳ اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) \mathbb{R} (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

۱۳۴ دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (4, 1), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند.

اگر $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۳۵ اگر $f(x) = \frac{2x+3}{2-x}$ و $g(x) = \frac{1-3x}{x+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- (۱) x (۲) $-x$ (۳) $-x-1$ (۴) $x+1$

۱۳۶ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $-1, -4$ (۲) $-1, 4$ (۳) $1, -4$ (۴) $1, 4$

۱۳۷ قرینه‌ی خط به معادله‌ی $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۱۳۸ در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه‌ی وسط

این بازه کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $-1/5$ (۳) -1 (۴) $-0/5$

۱۳۹ قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس 2 واحد به طرف x های مثبت انتقال

می‌دهیم. نمودار حاصل، نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) -2 (۲) $0/5$ (۳) 1 (۴) $1/5$

۱۴۰ نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را 3 واحد به طرف x های مثبت، سپس 2 واحد به طرف y های منفی انتقال

می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیم‌ساز ربع اول است؟

- (۱) $(3, 4)$ (۲) $(2, 5)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(2, 6)$



۱۴۱ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{\text{gof}^{-1}}$ کدام است؟

(۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$ (۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$ (۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$ (۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$

۱۴۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x+2| + |x-1|$ ، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

(۱) $(-\infty, -2)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, +\infty)$

۱۴۳ اگر $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ؛ $x \geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۱۸ (۴) ۲۱

۱۴۴ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x+1| - |x-2|$ ، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

(۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(-1, +\infty)$ (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

۱۴۵ اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ ، کدام است؟

(۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

۱۴۶ نمودار تابع $y = x^2 - x - 3$ را ۲ واحد به طرف x های منفی سپس ۹ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم.

نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور x ها است؟

(۱) $(-5, 2)$ (۲) $(-5, 3)$ (۳) $(-2, 3)$ (۴) $(-2, 5)$

۱۴۷ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع

$(g^{-1} \circ f) - f$ کدام است؟

(۱) $\{-1, 4\}$ (۲) $\{2, 3\}$ (۳) $\{3, 4\}$ (۴) $\{2, -1\}$

۱۴۸ اگر $f(x) = 2x - [2x]$ و $g(x) = -x^2 + 4x$ باشند، برد تابع gof ، کدام است؟

(۱) $[0, 2)$ (۲) $[0, 3)$ (۳) $[0, 4)$ (۴) $[1, 4)$

۱۴۹ اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد، مقدار $g(6) + g(12)$ ، کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴



۱۵۰ تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x - \frac{2}{x}$ در دامنه‌ی $D_f = (-\infty, 0)$ را در نظر بگیرید. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه‌ی

چهارم را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- ۲ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) ۱ (۲) $\frac{3}{4}$ (۱)

۱۵۱

فرض کنید در دامنه‌ی $[0, +\infty)$ ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ ، مفروض باشد. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

- $\text{Log}_2(2 + \sqrt{3})$ (۴) $\text{Log}_2(1 + \sqrt{3})$ (۳) $\text{Log}_2(\sqrt{3} - 1)$ (۲) $\text{Log}_2(2 - \sqrt{3})$ (۱)

۱۵۲ اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x + 6}{1 - x}$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(20)$ ، کدام است؟

- $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۱)

۱۵۳ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x$; $(x > 1)$ ، قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور x ها را، 16 واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

- $2\sqrt{5}$ (۳) $5\sqrt{2}$ (۳) $6\sqrt{2}$ (۲) $4\sqrt{5}$ (۱)

۱۵۴ در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $y = (x-1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- $\frac{5}{2}$ (۴) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۱)

۱۵۵ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = \frac{1 - 2x}{x + 1}$ باشند، برد تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- $(-\infty, 1]$ (۴) $[1, +\infty)$ (۳) $(-1, 1)$ (۲) $[-1, 1)$ (۱)

۱۵۶ فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x) = x + 2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3) + g(15)$ ، کدام است؟

- ۸ (۴) ۱۰ (۳) ۱۱ (۲) ۱۲ (۱)



۱۵۷ تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ بر دامنه‌ی $(0, +\infty)$ مفروض است. نمودار تابع f^{-1} نیمساز ناحیه‌ی دوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- $-\frac{1}{2}$ (۴) -1 (۳) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

۱۵۸ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ ، کدام است؟

- $\text{Log}_2(3 + \sqrt{5})$ (۴) $\text{Log}_2(2 + \sqrt{5})$ (۳) $\text{Log}_2(1 + \sqrt{5})$ (۲) $\text{Log}_2(-1 + \sqrt{5})$ (۱)

۱۵۹ با فرض $x \geq 2$ و $f(x) = x^2 - 4x + 9$ و $g(x) = \frac{3-x}{2}$ ، حاصل $(f^{-1} \circ g^{-1})(-9)$ ، کدام است؟

- ۶ (۴) ۵ (۳) ۴ (۲) ۳ (۱)

۱۶۰ ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

- $-2, 1$ (۴) $-1, 2$ (۳) $-1, 1$ (۲) $0, 2$ (۱)

۱۶۱ فرض کنید برد تابع $f(x) = 2 \sqrt{9 \cos^2(x) - 1} - 2 \sqrt{1 - 9 \cos^2(x)}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- $\frac{21}{4}$ (۴) $\frac{9}{2}$ (۳) $\frac{15}{4}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۱)

۱۶۲ نمودار تابع $y = 2 |\sin x|$ را ابتدا به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{3}{4}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله‌ی $[0, \pi]$ ، کدام است؟

- ۴ (۴) ۲ (۳) ۱ (۲) صفر (۱)

۱۶۳ قرینه‌ی نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

- -4 (۴) -2 (۳) -3 (۲) 3 (۱)



۱۶۴ فرض کنید $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 1 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = 1 - x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $g \circ f$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۶۵ نمودار منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود

را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدام یک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به دست آمده، قرار دارد؟

- (۱) $(1 - \sqrt{5}, 0)$ (۲) $(-\sqrt{5}, 0)$ (۳) $(0, 1 - \sqrt{5})$ (۴) $(0, -\sqrt{5})$

۱۶۶ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. ماکزیم مقدار تابع $g \circ f - f \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۶۷ فرض کنید M نقطه‌ی تلاقی منحنی $y = \sqrt{x + 3} - 1$ با تابع وارون خود باشد. فاصله‌ی نقطه‌ی M از مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{2}$

۱۶۸ فرض کنید $f(x) = x(1 - x^2)$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(f \circ f) \circ g$ ، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سید علی موسوی

۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

مشهد مقدس



۱ چون منحنی سهمی داده شده دارای می‌نیم می‌باشد (و یا به عبارت دیگر $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty$) ، پس ضریب x^2 باید مثبت باشد. لذا گزینه ۱ نمی‌تواند صحیح باشد. از طرفی در منحنی سهمی $y = ax^2 + bx + c$ طول نقطه می‌نیم (ماکزیمم) از روابط $x = \frac{-b}{2a}$ بدست می‌آید و با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که طول نقطه می‌نیم مثبت است. و گزینه ۲ نیز نمی‌تواند صحیح باشد. بنابراین یکی از دو گزینه ۳ یا ۴ می‌تواند صحیح باشد که در این صورت طول نقطه می‌نیم برابر با $x = \frac{4}{2} = 2$ خواهد شد. مقدار دو منحنی در نقطه می‌نیم به قرار زیر است:

$$\text{گزینه ۳: } x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 4 \times 2 + 4 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{گزینه ۴: } x = 2 \Rightarrow y = (2)^2 - 4 \times 2 + 3 = -1 \Rightarrow y < 0$$

با توجه به شکل مشاهده می‌شود که مقدار منحنی در نقطه می‌نیم کوچکتر از صفر است. لذا گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲ می‌دانیم در منحنی درجه ۲، $y = ax^2 + bx + c$ اگر $a > 0$ می‌نیم و اگر $a < 0$ ماکزیمم باشد، طول نقطه ماکزیمم یا می‌نیم برابر $-\frac{b}{2a}$ می‌باشد پس:

$$\left. \begin{aligned} y = -x^2 + 6x - 4 \Rightarrow x = \frac{-6}{2(-1)} = 3 \\ x = 3 \Rightarrow y = -9 + 18 - 4 \Rightarrow y = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -1 < 0 \Rightarrow \text{این نقطه ماکزیمم است}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{fof}(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = \frac{2x}{2} = x$$

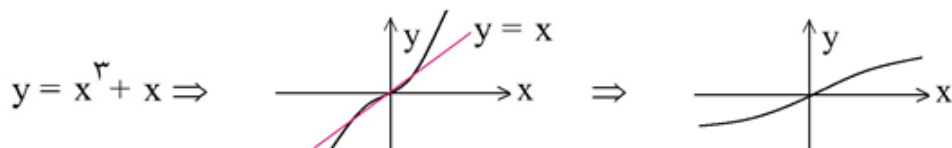
بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در تابع یک به یک داریم:

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f : y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$(m, 3), (-1, 3) \in f \Rightarrow m = -1 \Rightarrow (2m, a) = (-2, a) \in f \Rightarrow a = 2$$

می‌دانیم خط $y = x$ محور تقارن f و f^{-1} می‌باشد پس کافیت قرینه $y = x^3 + x$ را نسبت به خط $y = x$ بدست آوریم:



بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

چون سهمی مماس بر محور x ها است، یک ریشه دارد، یعنی، $\Delta = 0$ ، پس داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 16 + 8a = 0 \Rightarrow 8a = -16 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین گزینه ۱، پاسخ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

معادله محور تقارن عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد. پس:

$$2x^2 + y - x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow y = -2x^2 + x + \frac{3}{4} \Rightarrow \text{خط محور تقارن} : x = \frac{-(-1)}{2(-2)} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در معادله $y = ax^2 + bx + c$ خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن است در این سوال، معادله

منحنی بصورت $y = x^2 + ax + 1$ می‌باشد پس $x = -\frac{a}{2}$ محور تقارن است که با توجه به فرض سوال $a = 1$ درست است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر معادله سهمی به صورت $y = (x - a)^2 + b$ باشد نقطه (a, b) راس سهمی می‌باشد. در این مثال ابتدا صورت مساله را به شکل فوق تبدیل می‌کنیم.

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

نکته: اگر معادله بصورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد، طول راس $x = -\frac{b}{2a}$ می‌باشد و با جایگذاری مقادیر، راس سهمی حاصل می‌شود.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد. از طرفی نقطه $(1, 1)$ رأس سهمی است و در معادله سهمی صدق می‌کند، پس:

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 1 \\ \frac{-b}{2a} = 1 &\Rightarrow -b = 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

معادله سهمی به صورت $x^2 = y + 1$ است پس $S(0, -1)$ می‌باشد و گزینه‌ی ۲ درست است. (۱۰)

معادله دو منحنی را قطع می‌دهیم: (۱۱)

$$\left. \begin{aligned} y &= x \\ y &= x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

بنابراین محل تلاقی دو نقطه $(0, 0)$ و $(1, 1)$ است. پس گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۱۲)

برای سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ طول رأس سهمی از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ حاصل می‌شود. بنابراین برای (۱۳)

سهمی $y = x^2 + 2x$ طول رأس برابر با $x = \frac{-2}{2} = -1$ می‌باشد و در نتیجه عرض آن

$y = (-1)^2 + 2(-1) = -1$ می‌باشد. پس رأس سهمی نقطه $(-1, -1)$ است. فاصله نقطه (x_1, y_1) از

(x_2, y_2) بصورت $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ می‌باشد، پس:

$$d = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

بنابراین گزینه ۳ درست است.

برای بدست آوردن کمترین مقدار، از روش مربع کامل استفاده می‌نماییم: (۱۴)

$$y = 2x^2 + 4x - 1 \Rightarrow y = 2(x + 1)^2 - 3$$

کمترین مقدار $(x + 1)^2$ برابر با صفر می‌باشد، پس کمترین مقدار تابع ۳- بوده و گزینه ۲ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای محاسبه رأس سهمی از فرمول مربع کامل استفاده می‌نماییم. بنابراین: (۱۵)

$$y = x^2 + x + 1 \Rightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

با توجه به این معادله، نقطه $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ رأس سهمی می‌باشد. بنابراین فاصله دو نقطه مذکور برابر است با:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-5}{4} - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{2}$$



۱۶

ابتدا معادله سهمی را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$y = ax^2 + 2ax - 3 = ax^2 + 2ax + a - a - 3 = a(x^2 + 2x + 1) - a - 3 = a(x+1)^2 - a - 3$$

بنابراین رأس سهمی $(-1, -a-3)$ می‌باشد. چون این نقطه روی نیمساز اول و سوم یعنی خط $y = x$ قرار دارد، پس:

$$-1 = -a - 3 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین گزینه ۱ درست است.

۱۷

می‌دانیم که اگر معادله سهمی بصورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد، طول راس سهمی از رابطه $\frac{-b}{2a}$ بدست

می‌آید. بنابراین در این سوال طول راس سهمی برابر با $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$ می‌باشد. با جایگزینی در معادله سهمی، عرض آن محاسبه می‌شود، یعنی:

$$x = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) + 1 = \frac{3}{4}$$

پس مختصات راس سهمی نقطه $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ بوده و گزینه ۳ صحیح است.

۱۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. معادله سهمی را به صورت مربع کامل تبدیل می‌نماییم:

$$y = -x^2 + 3x \Rightarrow y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

پس مختصات طول راس سهمی $x = \frac{3}{2}$ می‌باشد. بنابراین:

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -1\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{2}\right) = -1\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{9}{2} = \frac{-9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{-9}{4} + \frac{18}{4} = \frac{9}{4}$$

چون طول مثبت و عرض نیز مثبت شده است، پس نقطه در ناحیه اول مثلثاتی قرار گرفته و گزینه ۱ صحیح است. روش دوم:

می‌دانیم اگر معادله سهمی بصورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد، راس آن از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ محاسبه می‌شود. با جایگذاری و ادامه محاسبات مقادیر x و y حاصل می‌شود.

۱۹

می‌دانیم در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ طول راس سهمی از رابطه $\frac{-b}{2a}$ محاسبه می‌گردد، بنابراین در

سهمی $y = x^2 + 2x + 2$ طول راس سهمی برابر با $x = \frac{-2}{2} = -1$ می‌باشد. با جایگزین کردن آن در معادله سهمی، عرض آن نیز به دست می‌آید:

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^2 + 2(-1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.



۲۰) می‌دانیم معادله خط نیمساز ناحیه دوم و چهارم $y = -x$ است، پس محل تلاقی دو تابع را بدست می‌آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - x - 4 \\ y = -x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x - 4 = -x \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

چون مسئله نقطه تلاقی در ناحیه دوم را خواسته، پس x باید منفی باشد، بنابراین $x = -2$ قابل قبول می‌باشد و در نتیجه $y = 2$ می‌باشد. بنابراین نقطه تلاقی $(-2, 2)$ بوده و گزینه ۱ صحیح است.

۲۱) برای اینکه نمودار تابع معکوس بر نمودار تابع منطبق باشد، اگر x را به y تبدیل کنیم، نباید نمودار تغییر کند و این خاصیت در گزینه ۴ وجود دارد زیرا:

$$y = -x \Rightarrow x = -y$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۲۲) چون سهمی محور x ها را در دو نقطه مثبت و منفی قطع کرده است، پس معادله سهمی دارای دو ریشه مختلف‌العلامه می‌باشد، یعنی در معادله $y = ax^2 + bx + c$ ، $\frac{c}{a} < 0$ می‌باشد و یا عبارت دیگر a و c مختلف‌العلامه هستند پس گزینه‌های ۲ و ۴ صحیح نمی‌باشند. بنابراین جواب گزینه ۱ یا ۳ می‌باشد راس سهمی در $(1, 2)$ واقع شده است و این نقطه فقط در معادله گزینه ۱ صدق می‌کند، لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3) + 3 = x^2 \quad 23$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۲۴) برای بدست آوردن تابع معکوس، x را برحسب y بدست می‌آوریم:

$$\left. \begin{array}{l} y = \sqrt{1-x} \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y^2 = 1-x \Rightarrow x = 1-y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = y = 1-x^2$$

دامنه تابع معکوس برابر با برد y می‌باشد، پس باید $x \geq 0$ باشد. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۲۵) این تابع یک به یک است پس دارای وارون است و برای یافتن وارون آن باید جای x و y را عوض کنیم و سپس y

$$\text{را برحسب } x \text{ بیابیم: } (y = 2x + 3 \Rightarrow x = 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}) \text{ که } y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \text{ ضابطه تابع وارون}$$

است. و گزینه ۴ جواب صحیح است.



با توجه به تغییرات x و y و جایگزینی x و y بجای هم داریم: ۲۶

$$\begin{cases} y = x^2 & x \geq 1 \Rightarrow y \geq 1; x = \sqrt{y} \\ y = 2x - 1 & x < 1 \Rightarrow y < 1; x = \frac{1}{2}(y + 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{y} & y \geq 1 \\ x = \frac{1}{2}(y + 1) & y < 1 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}(x + 1) & x < 1 \end{cases}$$


یعنی گزینه ۴ جواب صحیح است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ در این سؤال: ۲۷

$$\left. \begin{aligned} D_f &= \{x \mid 0 < x < 1\} \\ D_g &= \{x \mid 0 < x < 2\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \mid 0 < x < 2, 0 < x^2 + 1 < 1\} = \{0\}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که اگر $f(x) = f(-x)$ باشد، تابع زوج است و نسبت به محور y ها قرینه است و کافی است که شکل آن را در بازه $[0, +\infty)$ بررسی نماییم. در این مسئله $f(-x) = f(x)$ می‌باشد، پس تابع زوج است و همانطور که گفته شد رفتار تابع در $[0, +\infty)$ بررسی می‌شود. پس:

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ 2 - x & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

بنابراین شکل تابع در بازه $[0, +\infty)$ به صورت  می‌باشد. بنابراین گزینه ۴ که از تقارن شکل به دست آمده، حاصل می‌شود، پاسخ صحیح می‌باشد.

با توجه به ضابطه داده شده: ۲۹

$$\left. \begin{aligned} f(g(x)) &= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\ g(x) &= x - \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$f(g(x)) = (g(x))^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۳۰) برای یافتن وارون تابع $y = f(x)$ ابتدا x را بر حسب y محاسبه نموده و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y = 2x + 14 \Rightarrow x = \frac{y - 14}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} - 7$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۳۱) گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا $f \circ g$ را حساب کرده و سپس معکوس آن را می‌یابیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2 + x) = 3(2 + x) - 2 = 3x + 4$$

برای محاسبه معکوس باید x را بر حسب y پیدا کنیم و جای x و y را عوض کنیم.

$$y = 3x + 4 \Rightarrow x = \frac{1}{3}y - \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$$

ضابطه تابع معکوس خواهد بود و گزینه ۱ جواب صحیح است.

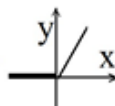
۳۲) طبق تعریف داریم: $f \circ g(x) = f(g(x))$ پس در این سوال داریم:

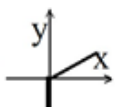
$$\begin{aligned} f \circ g(2) &= f(g(2)) = f(2 - 4) = f(-2) = -1 \\ g \circ f(-1) &= g(f(-1)) = g(-2 + 3) = g(1) = -3 \Rightarrow \text{حاصل کسر} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۳۳) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف قدرمطلق مسئله را ساده می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} 2x + 2x & x \geq 0 \\ 2x - 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

منحنی نمایش تابع فوق بصورت  می‌باشد. چون معکوس یک تابع، تقارن یافته آن نسبت به نیمساز ربع

اول و سوم یعنی $(y = x)$ است. پس معکوس منحنی نمایش تابع بصورت  می‌باشد. بنابراین گزینه ۴

صحیح است.

۳۴) اگر زوج مرتب (a, b) متعلق به f باشد حتماً زوج مرتب (b, a) متعلق به معکوس f است یعنی:

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}$$

با توجه به گزینه‌های داده شده و ضابطه تابع f داریم $f(0) = 1$ ، چون $(0, 1) \in f$ است پس $(1, 0) \in f^{-1}$ می‌باشد با توجه به مطالب فوق گزینه ۳ صحیح است.

۳۵) چون حاصلضرب عدد مثبت A در عدد بزرگتر از یک، عددی است بزرگتر از خود A بنابراین با توجه به

$x \in [1, 3]$ وجود هر چه توان x بیشتر باشد مقدار حاصل بزرگتر می‌شود پس $y = x^3$ یعنی گزینه‌ی ۴ صحیح می‌باشد.



ابتدا $g\left(\frac{\pi}{3}\right)$ را محاسبه می‌کنیم: ۳۶

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

سپس از رابطه کلی مقدار نهایی را بدست می‌آوریم:

$$f \circ g\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1}{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم: ۳۷

$$\left. \begin{aligned} \frac{x-1}{x} = t &\Rightarrow x = \frac{1}{1-t} \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \sqrt{2x-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(t) = \sqrt{2\left(\frac{1}{1-t}\right) - 1} \Rightarrow f(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1$$

ابتدا معکوس تابع g ، یعنی g^{-1} ، را محاسبه می‌کنیم: ۳۸

$$g(x) = x - 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = x + 1$$

با بسط تابع $f \circ g^{-1}$:

$$f \circ g^{-1}(x) = f(g^{-1}(x)) = f(x + 1) = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

اگر $x + 1 = u$ باشد در نتیجه: $x = u - 1$. پس: ۳۹

$$f(x+1) = f(u) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (u-1-1)^2 = (u-2)^2 \Rightarrow F(u) = (u-2)^2$$

که با تغییر متغیر $x \rightarrow u$ داریم: $f(x) = (x-2)^2$. که گزینه ۱ صحیح است.

$$f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = 1 - 2x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - 2x) = 3(1 - 2x) - 1 = 3 - 6x - 1 = 2 - 6x$$

گزینه ۱ صحیح است.

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = \sqrt{4} - 2 = 0$$

بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است. ۴۱



$$(\text{fog})(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-1}) = \sqrt{1-\sqrt{x-1}} \quad (42)$$

در دامنه $g(x)$ باید داشته باشیم $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. همچنین برد $g(x)$ زیرمجموعه‌ای از دامنه $f(x)$ است:
 $1 - \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Rightarrow x \leq 2$
 پس ناحیه مشترک دو شرط بدست آمده بصورت $1 < x < 2$ و یا فاصله بسته $[1, 2]$ می‌باشد. بنابراین گزینه ۳ جواب صحیح است.

باتوجه به تعریف داده شده $f(x)$ همواره مثبت است، پس $f(x)$ - منفی است. بنابراین با توجه به تعریف داده شده $f(-f(x)) = 1$ می‌باشد. پس گزینه ۱ صحیح است. (43)

$$\left. \begin{aligned} \text{fog}(x) &= f(g(x)) = f(2-x) = 3(2-x) + a = -3x + a + 6 \\ \text{gof}(x) &= g(f(x)) = g(3x+a) = 2 - (3x+a) = -3x + 2 - a \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\text{fog}(x) - \text{gof}(x) = 2a + 4 = 6 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین گزینه ۳ جواب صحیح است.

دامنه $f(x) = x^2 + 1$ برابر \mathbb{R} و دامنه $g(x) = \sqrt{x-1}$ بصورت $\{x | x \geq 1\}$ است. پس: (45)

$$\text{fog}(x) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = x + 1 - 1 \Rightarrow \text{fog}(x) = x$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geq 1 | \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = D_{\text{fog}} = \{x | x \geq 1\}$$

با توجه به دامنه fog ، برد آن بصورت $R_{\text{fog}} = \{y | y \geq 1\}$ می‌باشد. پس گزینه ۲ درست است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای یافتن معادله خط نسبت به $y = x$ کافیست جای x و y را عوض کنیم پس داریم: (46)

$$x = 2y + 2 \Rightarrow 2y = x - 2$$

محور تقارن منحنی با استفاده از رابطه $x = -\frac{b}{2a}$ بدست می‌آید که برابر است با: $x = -\frac{-3}{2(\frac{1}{2})} \Rightarrow x = 3$ (47)

پس نقطه تلاقی که باید در مختصات تابع هم صدق کند بصورت $(3, -\frac{5}{2})$ است.

$$\Rightarrow \frac{9}{2} - 9 + a = -\frac{5}{2} \Rightarrow a = 2$$

پس گزینه ۴ درست است.

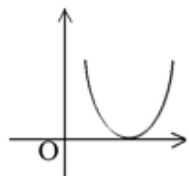


۴۸

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۴۹

چون منحنی دارای مینیمم روی محور OX است، پس بر محور X ها مماس است یعنی منحنی

$$y = x^2 + bx + 1$$

دارای ریشه مضاعف بوده پس دلتای معادله درجه دوم صفر است.

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها $b = 2$ جواب است. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۵۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع مرکب $f \circ g(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) - 2 = 2x^2 - 4 \Rightarrow$$

$$f \circ g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵۱

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ g(x) &= \frac{2-x}{1+x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{gof}(x) = g(f(x)) = \frac{2 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \Rightarrow y = \frac{2 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow y + y\sqrt{x} = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow y\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2 - y \Rightarrow \sqrt{x}(y + 1) = 2 - y$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2-y}{1+y} \xrightarrow{\sqrt{x} > 0} \frac{2-y}{1+y} > 0 \Rightarrow -1 < y < 2 \Rightarrow R_{\text{gof}} = (-1, 2]$$



کافیست مشتق تابع داده شده در بازه های مورد نظر فقط یک علامت داشته باشد. چرا که شرط لازم و کافی برای اینکه یک تابع پیوسته، معکوس پذیر باشد اسم است که اکیداً یکنوا باشد.

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$\text{گزینه ۱: } -\pi \leq x \leq 0 \Rightarrow \sin x \leq 0 \Rightarrow -\sin x \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\text{گزینه ۲: } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{منفی است } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ مثبت و در فاصله } \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \quad \times$$

$$\text{گزینه ۳: } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \text{مثبت است } \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ منفی و در فاصله } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \quad \times$$

$$\text{گزینه ۴: } 0 \leq x \leq 2\pi \Rightarrow \text{منفی و در فاصله } [\pi, 2\pi] \text{ مثبت است.} \quad \times$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \operatorname{tg} x \sqrt{\cos^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot |\cos x| = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot |\cos x| \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow f \circ g(x) = \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} (-\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos x < 0$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در یک تابع یک به یک اگر y ها یکسان باشند، x ها نیز یکسان است و در یک تابع اگر x ها یکسان باشند، y هانیز یکسان است.

$$\Rightarrow \begin{cases} m+1=3 \Rightarrow m=2 \\ n+2=1 \Rightarrow n=-1 \end{cases} \Rightarrow m+n=1$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵۵

$$y = 1 + \sqrt{x} \xrightarrow{\text{وارون}} x = 1 + \sqrt{y} \Rightarrow y = (x-1)^2 = f^{-1}(x) \Rightarrow g^{-1} \text{ of } f^{-1} x = \sqrt{(x-1)^2} = x-1$$

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{وارون}} x = \sqrt{y} \Rightarrow y = \sqrt{x} = g^{-1}(x)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۵۶

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g \circ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵۷

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2}$$

با توجه به ماشین داده شده $g(x)$ همان $f^{-1}(x)$ است لذا:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۵۸

$$\frac{1}{2}x + 2 < 2x - 3 \Rightarrow \frac{\Delta x}{2} > 5 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \min(x, \cdot) = 2 \Rightarrow \min(f(x, \cdot)) = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۵۹

$$\Lambda \Big|_{\cdot}^{-1} \in y = 2x + b \Rightarrow b = 2$$

$$\Lambda \Big|_{\cdot}^{-1} \in y = ax^2 + 2x - 3 \Rightarrow \cdot = a - 2 - 3 \Rightarrow a = 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶۰

$$y - x = \sqrt{x^2 + 1} \quad y > \cdot$$

$$y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1$$

$$y^2 - 2xy - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$f = \{(1, 1)(2, 3)(3, 5)(4, 7)(5, 9)\} \Rightarrow \text{fof} = \{(1, 1)(2, 5)(3, 9)\}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶۱

$$f(x) = \begin{cases} \cdot & x \geq \cdot \\ -2x & x < \cdot \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۶۲

$$\text{اگر } x \geq \cdot \Rightarrow f(x) = \cdot \Rightarrow f(f(x)) = \cdot$$

$$\text{اگر } x < \cdot \Rightarrow f(x) = -2x \Rightarrow f(-2x) = \cdot \Rightarrow \text{fof}(x) = \cdot$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۶۳

$$x = 2 = -\frac{1}{2a-2} \Rightarrow -2a + 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \text{ریشه مثبت} = 6$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۴

$$f(g(x)) = \frac{g(x) + 1}{g(x) - 1} = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{g(1) + 1}{g(1) - 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2g(1) + 2 = 3g(1) - 3 \Rightarrow g(1) = 5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۶۵

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (3, 0), (-1, 4)\}$$

$$g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$$

$$\text{gof}^{-1} = \{(5, 3), (-1, 1)\}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۶

$$f(1+x) - f(1-x) = (1+x)^2(1-x)^2 - (1-x)^2(x+1)^2 = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۷

$$f(2x-2) = \frac{2x-2}{\sqrt{2x-2}+1} = \frac{2}{2} \Rightarrow 2(x-1) = 2(\sqrt{2(x-1)}+1) \xrightarrow{\sqrt{x-1}=t} 2t^2 = 2(t\sqrt{2}+1) \Rightarrow 2t^2 - 2t\sqrt{2} - 2 = 0$$

$$t = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{2} \Rightarrow x = 3$$

تذکر: به کمک گزینه‌ها این تست به راحتی حل می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۸

$$(\text{fog})(\sqrt{2}) = f(g(\sqrt{2})) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right]$$

$$= [-\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)] = [-2-\sqrt{2}] = -2 + [-\sqrt{2}] = -2-2 = -4$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون D_g داده شده پس می توان با تشکیل fog مستقیماً دامنه را از روی ضابطه به دست

$$f \circ g(x) = \frac{\sqrt{1 - \text{tg}^2 x}}{\text{tg} x} \quad \text{آورد.}$$

$$\begin{cases} 1 - \text{tg}^2 x \geq 0 \Rightarrow \text{tg}^2 x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \text{tg} x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] - \{0\}$$

تذکر: به کمک گزینه‌ها هم می توان به این تست جواب داد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (۷۰)

$$\begin{aligned} (1) \quad f \leftarrow f(1) = f(-1) = -1 \quad \text{غیر یک‌به‌یک است.} \\ (2) \quad f \leftarrow f(0) = f(0/5) = 0 \quad \text{غیر یک‌به‌یک است.} \\ (3) \quad f \leftarrow f(0) = f(3) = 0 \quad \text{غیر یک‌به‌یک است.} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه‌ی تعریف $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\text{Sin } \pi x - 1}$ را تعیین می کنیم: (۷۱)

$$\text{Sin } \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \text{Sin } \pi x \geq 1$$

مقدار سینوس نمی تواند بزرگتر از ۱ باشد. پس تنها حالت ممکن این است که $\text{Sin } \pi x = 1$ پس:

$$\text{Sin } \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین Xهای دامنه‌ی f اعداد غیر صحیح هستند و می دانیم در این حالت $[x] + [-x] = -1$ است. پس برای هر x در دامنه‌ی تعریف f:

$$f(x) = \{x\} + \{-x\} + \sqrt{\text{Sin } \pi x - 1} = -1 + 0 = -1$$

$$f\left(-\frac{1}{2} f(x)\right) = f\left(-\frac{1}{2} (-1)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

عدد $\frac{1}{2}$ در دامنه‌ی تعریف f است و طبق توضیحات داده شده $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ می باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بدیهی است نقاط $(1, 0)$ و $(0, -6)$ و $(-2, -6)$ در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ صدق می کنند. (۷۲)

$$(0, -6) \Rightarrow c = -6$$

$$(1, 0) \Rightarrow a + b - 6 = 0$$

$$(-2, -6) \Rightarrow 4a - 2b - 6 = -6 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

پس تابع داده شده به صورت $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ خواهد بود که $f(-1) = 2 - 4 - 6 = -8$ برابر است با:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۳

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1 = \frac{x^2 - 2x(x+1) + x^2 - 1}{x^2-1}$$

$$\frac{x^2 - 2x^2 - 2x + x^2 - 1}{x^2-1} = \frac{-2x-1}{x^2-1} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۴

$$g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$$

پس ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم و سپس آن را معکوس می‌کنیم. برای تشکیل تابع fog از دامنه‌ی تابع g شروع می‌کنیم.

$$x = 2 : f(g(2)) = f(1) = 2 \Rightarrow (2, 2) \in fog$$

$$x = 3 : f(g(3)) = f(2) = 3 \Rightarrow (3, 3) \in fog$$

$$x = 5 : f(g(5)) = f(4) = 5 \Rightarrow (5, 5) \in fog$$

پس تابع fog به صورت زیر است:

$$fog = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$$

$$(fog)^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$$

و در نهایت تابع $(fog)^{-1}$ را می‌یابیم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (*) $f(x) = 2 - |x - 2|$ برای تشکیل $f(f(x))$ به جای هر x در تابع f , $f(x)$ را قرار می‌دهیم: ۷۵

$$(*) \rightarrow f(f(x)) = 2 - |2 - |x - 2|| = 2 - ||x - 2||$$

$$\Rightarrow f(f(x)) = 2 - |x - 2| \stackrel{(*)}{=} f(x) \text{ می‌دانیم } ||u|| = |u|, |-u| = |u| \text{ است بنابراین:}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۶

$$g(x) = 2x - 1, (fog)(x) = \frac{x}{x-3} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{x}{x-3}$$

$$g(x) = 3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$f(g(x)) = \frac{x}{x-3} \xrightarrow{g(x)=3, x=2} f(3) = \frac{2}{2-3} = -2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۷

$$g(f(a)) = 5 \Rightarrow f(a) = 6 \Rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a} = 2 \text{ یا } x = \sqrt{a} = -3 \Rightarrow a = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۸

$$(gof)(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}(x^2 + 3x) + 2 > 0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow (x-1)(x+4) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۹

$$x > 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow y = x(1-y) \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow y = x(1+y) \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & 0 < x < 1 \\ \frac{x}{1+x} & -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|} \quad |x| < 1$$

البته می‌توان این سؤال را با عدد گذاری نیز حل کرد چون $f(1) = \frac{1}{2}$ است. پس $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ تنها گزینه‌ی (۱) صحیح می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۰

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 3 - 2[\sqrt{3}] = 3 - 2 = 1$$

$$-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3})\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - 2\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۱

$$g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 = 2(2x + 3)^2 - (2x + 3) + 5 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

$$fog = f(g(x)) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۲

$$2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2] \Rightarrow 0 \leq 3-x \leq 2 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1 \Rightarrow x \in [1, 3]$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۳

$$fog = f \Rightarrow (2x + 1)^2 = (2x - 3)^2 \Rightarrow 2x + 1 = -(2x - 3) \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۴ چون $\sqrt{x-1}$ مثبت است، پس $-\sqrt{x-1}$ منفی بوده و $y = 2 - \sqrt{x-1}$ هموارهکوچک‌تر مساوی ۲ می‌شود و بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس $x \leq 2$ است.

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (2-y)^2 \Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x^2 - 4x + 5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۵

$$g(f(x)) = 2x \Rightarrow g(f(5)) = 10 \Rightarrow 2f(5) + 4 = 10 \Rightarrow f(5) = 2$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۸۶

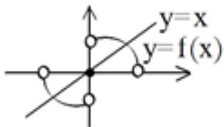
$$f(x) < 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow -2 < x < 1 \Rightarrow -2 < g(x) < 1 \Rightarrow -2 < \frac{1}{2}(x-3) < 1$$

$$\Rightarrow -4 < x-3 < 2 \Rightarrow -1 < x < 5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۷

$$\begin{cases} y = \sqrt{x}, x \geq 0 \Rightarrow x = y^2, y \geq 0 \\ y = -\sqrt{-x}, x < 0 \Rightarrow x = -y^2, y < 0 \end{cases} \quad x = y|y| \Rightarrow f^{-1}(x) = x|x|$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۸

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0 < x < 1 \\ \cdot & x = 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$


$$\Rightarrow f^{-1}(x) = f(x) \text{ نسبت به } y=x \text{ متقارن است.}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۹

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ \cdot & x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x < 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \\ \cdot & x = 0 \end{cases}$$

$$R_f = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2, y < 0 \\ y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = x \Rightarrow x = y^2, y \geq 0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} = x|x|$$



$$f(x) = 2x - |4 - 2x| = \begin{cases} 2x + 4 - 2x & x > 2 \\ 2x - 4 + 2x & x < 2 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۹۰

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ 4x - 4 & x < 2 \end{cases}$$

به ازای $x < 2$ تابع یک به یک و وارون پذیر است.

$$x < 2 \Rightarrow 4x - 4 < 4 \Rightarrow y < 4$$

$$y = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad (x < 4)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۹۱

$$f^{-1}(g(a)) = 6 \Rightarrow g(a) = f(6) \Rightarrow a = g^{-1}(f(6)) = g^{-1}(7) = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. راه اول:

۹۲

$$f(g(x)) = 4 \Rightarrow f(2x - 3) = 4 \Rightarrow f(x^2 - 4x + 5)$$

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow f(t) = 4 \left(\frac{t^2 + 6t + 9}{4} - 4 \left(\frac{t+3}{2} \right) + 5 \right) = t^2 - 2t + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$f(2x - 3) = 4 \xrightarrow{x=2} f(1) = 4$$

راه دوم:

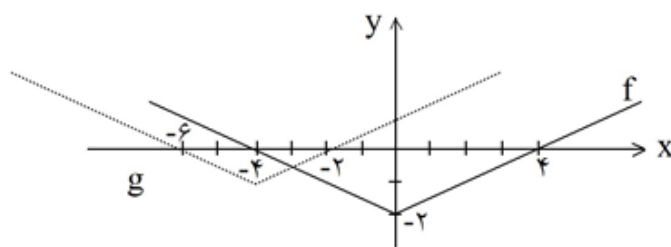
فقط گزینه ۳ به ازای $x = 1$ برابر ۴ می شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۹۳

$$f(x) = \frac{1}{2}|x| - 2$$

| | | | |
|---|----|----|---|
| x | -4 | 0 | 4 |
| y | 0 | -2 | 0 |



$$g(x) = \left(\frac{1}{2}|x+4| - 2 \right) + 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}|x+4| - 1$$

| | | | |
|---|----|----|----|
| x | -6 | -4 | -2 |
| y | 0 | -1 | 0 |

$$\text{نقطه ی برخورد: } \frac{1}{2}(x+4) - 1 = -\frac{1}{2}x - 2 \Rightarrow x+4-2 = -x-4 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۴

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0 \Rightarrow (x^3 - x) - 4(x^2 - 1) < 0$$

$$x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) < 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x - 4) < 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 4) < 0$$

$$\begin{array}{l} x > -1 \\ x + 1 > 0 \end{array} \rightarrow (x - 1)(x - 4) < 0 \Rightarrow x \in (1, 4) \Rightarrow b - a = 4 - 1 = 3$$

| | | | | |
|--|-----------|-----|-----|-----------|
| | $-\infty$ | 1 | 4 | $+\infty$ |
| | | $+$ | $-$ | $+$ |

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۵

$$(2x + 1)(x + 8) = mx \Rightarrow 2x^2 + 16x + x + 8 = mx \Rightarrow 2x^2 + (17 - m)x + 8 = 0$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (17 - m)^2 - 64 < 0 \Rightarrow |m - 17| < 8 \Rightarrow -8 < m - 17 < 8 \Rightarrow 9 < m < 25$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۶

$$A \Big|_f^a \in f \Rightarrow 4 = -x + \sqrt{-2x} \Rightarrow \sqrt{-2x} = x + 4 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2x = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{قابل قبول} \\ x = -8 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نکته: این تست به کمک گزینه‌ها به سادگی حل می‌شود.

$$f(-144) = \sqrt{-144 + 2 \times 144} = \sqrt{144} = 12$$

$$f(12) = \sqrt{12 + 2 \times 12} = \sqrt{36} = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با در نظر گرفتن $t = \frac{x}{2-x}$ داریم: ۹۸

$$\frac{x}{2-x} = t \Rightarrow 2t - xt = x \Rightarrow xt + x = 2t \Rightarrow (t+1)x = 2t \Rightarrow x = \frac{2t}{t+1}$$

حال با در دست داشتن نتیجه‌ی محاسبات فوق می‌توان نوشت:

$$g\left(\frac{x}{2-x}\right) = \frac{1}{2}x \Rightarrow g(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{t+1}\right) \Rightarrow g(t) = \frac{t}{t+1} \xrightarrow{t \rightarrow x} g(x) = \frac{x}{x+1}$$

روش دوم: با استفاده از عددگذاری برای پیدا کردن گزینه‌ی صحیح داریم:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) \Rightarrow g(f(1)) = g(1) = \frac{1}{2}$$

حال در گزینه‌ها $x = 1$ را جایگذاری می‌کنیم که به ترتیب $\frac{1}{2}$ ، 0 ، 0 ، 1 تعریف نشده، 2 به دست می‌آیند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹۹

الف) شرط تابع بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی اول برابر نداشته باشند.

$$(3, 2) = (3, a^2 - a) \Rightarrow a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

ب) شرط یک‌به‌یک بودن: هیچ دو زوج مرتب متمایز، مولفه‌ی دوم برابر نداشته باشند. اما از میان دو مقدار به دست آمده برای a ، باید یکی را به گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایط الف و ب کماکان برقرار بماند. در نتیجه فقط $a = 2$ قابل قبول می‌باشد. زیرا اگر $a = -1$ باشد، دو زوج مرتب $(-1, 4)$ و $(-1, 5)$ در مجموعه دیده می‌شوند که در آن صورت مجموعه‌ی حاصل تابع نخواهد بود. در نتیجه $(a, b) = (2, 3)$ می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید x را بر حسب y به دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم: ۱۰۰

$$y = x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4 \Rightarrow y + 4 = (x - 2)^2 \Rightarrow x - 2 = \pm \sqrt{y + 4}$$

با توجه به فرض $x < 2$ داریم: $x - 2 < 0$ ، بنابراین $x - 2 = -\sqrt{y + 4}$ قابل قبول است.

$$x - 2 = -\sqrt{y + 4} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{y + 4} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y = 2 - \sqrt{x + 4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 4}$$

روش دوم: می‌دانیم اگر $A(\alpha, \beta)$ نقطه‌ای روی f باشد، آن‌گاه $A'(\beta, \alpha)$ روی f^{-1} خواهد بود. حال با فرض $x < 2$ نقطه‌ای روی f می‌یابیم مثلاً $(0, 0) \in f$ باید $(0, 0) \in f^{-1}$ باشد که فقط در گزینه ۱ این چنین است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 6x$ است. برای تعیین مقدار $g(-2)$ ۱۰۱

ابتدا خودمان با داشتن ضابطه‌ی f ضابطه‌ی $f(g(x))$ را ساخته و برابر $4x^2 + 6x$ قرار می‌دهیم و آن‌گاه با جایگذاری $x = -2$ مقدار $g(-2)$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 4 \Rightarrow f(g(x)) = 2g^2(x) + 4 \Rightarrow 2g^2(x) + 4 = 4x^2 + 6x \Rightarrow g^2(x) = 2x^2 + 3x - 2 \\ f(g(x)) = 4x^2 + 6x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=-2} g^2(-2) = 2(-2)^2 + 3(-2) - 2 = 0 \Rightarrow g(-2) = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $f(x) = [x]$ است. برای تعیین مقادیر تابع $f(x - f(x))$ یا همان $f(x - [x])$ ۱۰۲

کافی است به این نکته توجه کنیم که تابع داخلی، یعنی $x - [x]$ همواره در فاصله‌ی $(0, 1)$ تغییر می‌کند، پس داریم:

$$f(x) = [x] \Rightarrow f(x - f(x)) = f(x - [x]) = [x - [x]] = 0$$



۱۰۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین دامنه‌ی تابع $g \circ f$ ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \sqrt{x+|x|} \xrightarrow{D_f} x+|x| > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 : 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 0 \\ x < 0 : x - x > 0 \Rightarrow 0 > 0 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{همواره برقرار} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x < 0$$

$$\xrightarrow{\text{اجتماع}} x \in \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

حال با توجه به دامنه‌ی تعریف تابع مرکب، می‌نویسیم:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+|x|} \in (\mathbb{R} - \{0, 4\})\}$$

باید مقادیری از x که به ازای آن‌ها $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ برابر 0 یا 4 می‌شوند را از \mathbb{R} کنار بگذاریم. داریم:

$$\sqrt{x+|x|} = 0 \Rightarrow x+|x| = 0 \mid x| = -x \Rightarrow x < 0$$

$$\sqrt{x+|x|} = 4 \Rightarrow x+|x| = 16 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 : 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \\ x < 0 : x - x = 16 \Rightarrow 0 = 16 \text{ غ ق} \end{cases}$$

بنابراین اگر از \mathbb{R} ، $x < 0$ و $x = 8$ را کنار بگذاریم، دامنه‌ی $g \circ f$ به دست می‌آید:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq 8\} = \mathbb{R} - \{0, 8\} = (\mathbb{R} - \{0, 8\}) \cup (\mathbb{R} - \{0, 8\})$$

۱۰۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} g(0) & x \in \mathbb{Z} \\ g(-1) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ -2 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} = -2$$

پس $g(f(x))$ همواره برابر -2 است.

۱۰۵

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 > \frac{7}{2} \Rightarrow -x^2 + 4x + 12 > 7 \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 > 0$$

$$\Rightarrow (-x+5)(x+1) > 0 \Rightarrow -1 < x < 5 \Rightarrow b-a=6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۰۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = (x+1)^2 \Rightarrow g(1-\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2})^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(1-\sqrt{2}) = 6 - 4\sqrt{2} \Rightarrow f(1-\sqrt{2}) = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(1-\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\text{جواب} = 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1-\sqrt{2})$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر f یک تابع معکوس پذیر باشد و نقطه‌ی (α, β) روی تابع f باشد، یعنی داشته باشیم $f(\alpha) = \beta$ ، آن گاه $f^{-1}(\beta) = \alpha$ بوده و نقطه‌ی (β, α) بر روی تابع معکوس f قرار دارد. بنابراین با توجه به گزینه‌ها داریم:

$$f(x) = x^3 + \sqrt{x} \Rightarrow f(4) = 4^3 + \sqrt{4} = 64 + 2 = 66 \Rightarrow f^{-1}(66) = 4 \Rightarrow (66, 4) \in f^{-1}$$

گزینه ۱) یعنی نقطه‌ی $(4, 66)$ بر روی خود تابع f قرار دارد، گزینه ۳) یعنی $(66, 4)$ بر روی معکوس تابع f قرار دارد. به همین ترتیب نقطه‌ی $(1, 2)$ روی تابع f و نقطه‌ی $(2, 1)$ روی تابع f^{-1} می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
روش اول:

$$f(x) = x + 2 \Rightarrow f(f(x)) = f(x) + 2 = (x + 2) + 2 = x + 4 \Rightarrow f(f(x)) = x + 4 \\ \Rightarrow f(f(f(x))) = f(f(x)) + 2 = (x + 4) + 2 = x + 6$$

روش دوم:

$$f(f(f(x))) = f(f(x + 2)) = f((x + 2) + 2) = f(x + 4) = (x + 4) + 2 = x + 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(f(5)) + f(f(1)) = f(2) + f(5) = 7 + 2 = 9$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \rightarrow -x + 4 \Rightarrow f(1 - x) = (-x + 4)^2 - 2(-x + 4) + 5 = x^2 - 4x + 5$$

راه دوم:

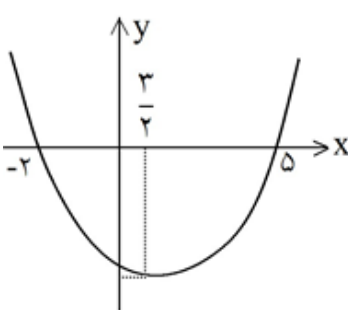
$$f(x - 3) = (x - 2)^2 + 1 \xrightarrow{x - 3 = t} f(t) = (t + 3 - 2)^2 + 1 = (t + 1)^2 + 1 \Rightarrow f(1 - x) = (1 - x + 1)^2 + 1 = \\ 4 - 4x + x^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا fog و gof را تشکیل می‌دهیم:

$$fog = \{(1, 1), (3, 7), (a, 2), (b, 7)\} \quad (4, 2) \in fog \Rightarrow a = 4$$

$$g(f(4)) = 1 \Rightarrow g(5) = 1 \Rightarrow b = 5$$

با توجه به این که gof در $(4, 1)$ است پس:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ یک سهمی قائم است که محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

$$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -2$$

به آن که سهمی محور x ها را در نقطه‌ای به طول -2 قطع کرده است. اگر سهمی را 2 واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، سهمی از مبدأ خواهد گذشت و دیگر طول تلاقی‌اش با محور x ها منفی نیست. به نمودار روبه‌رو دقت کنید.



۱۱۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید معادله‌ی تلاقی نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ با نیم‌ساز ناحیه‌ی اول ($y = x$) ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2 - 4(2)(m+6) = 0$$

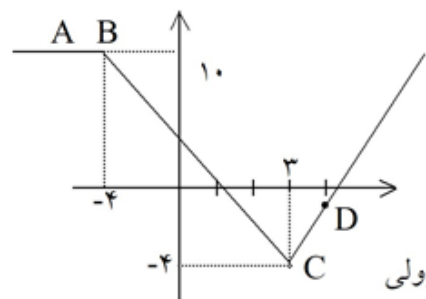
$$\Rightarrow m^2 - 8m - 24 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

چون تأکید شده نمودار بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول مماس است. ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی تلاقی (طول نقطه‌ی تماس) باید مثبت باشد.

$$m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

پس $m = -4$ صحیح است. نمودار بر نیم‌ساز ربع اول مماس است.



$$f(x) = |2x - 6| - |x + 4| + x$$

| | | | | |
|---|----|----|----|----|
| x | -5 | -4 | 3 | 4 |
| y | 10 | 10 | -4 | -2 |
| | A | B | C | D |

$$x \in [-4, 3], y \in [-4, 10] \Rightarrow D_{f^{-1}} = [-4, 10]$$

برای رسیدن به ضابطه معادله‌ی خطی که از B' و C' نقطه‌ی متناظر B و C می‌گذرد را می‌نویسیم:

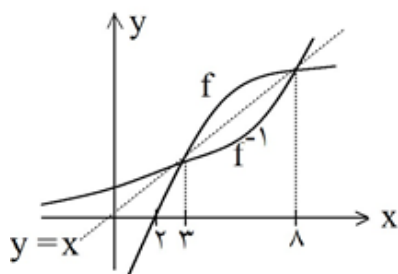
$$B'(10, -4) \Rightarrow m = \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 4)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 = f^{-1}(x)$$

تذکر: با گزینه‌ها هم این تست به راحتی حل می‌شود.

۱۱۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$x - f^{-1}(x) > 0 \Rightarrow x > f^{-1}(x)$$

$$\xrightarrow{\text{f اکیدا صعودی}} f(x) > f(f^{-1}(x))$$

$$\Rightarrow f(x) > x \Rightarrow x \in [3, 8]$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی $f(g(x))$ را بدون ساده کردن می‌یابیم.

$$f(g(x)) = f(\text{Log}_r(x^2 + 2x)) = \sqrt{3 - \text{Log}_r(x^2 + 2x)}$$

حالا دامنه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{Log}_r(x^2 + 2x) : x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0 \quad (1)$$

$$\sqrt{3 - \text{Log}_r(x^2 + 2x)} : 3 - \text{Log}_r(x^2 + 2x) > 0 \Rightarrow \text{Log}_r x^2 + 2x < 3 \Rightarrow x^2 + 2x < 2^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) < 0$$

$$\Rightarrow -4 < x < 2 \quad (2)$$

$$D_{f \circ g} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

از اشتراک (۱) و (۲) داریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا با حذف قدر مطلق با کمک تعیین علامت، تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x & , x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & , x < 2 \end{cases}$$

حالا برای تعیین فاصله‌ی نزولی بودن تابع، مشتق می‌گیریم و کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = \begin{cases} 2x - 2 < 0 & , x \geq 2 \\ -2x + 2 < 0 & , x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 & , x \geq 2 \\ x > 1 & , x < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

بنابراین تابع در فاصله‌ی $(1, 2)$ نزولی است. در این فاصله:

$$y = x(-x - 2) = -(x^2 - 2x) = -(x^2 - 2x) = -((x-1)^2 - 1) = -(x-1)^2 + 1$$

حالا برای یافتن ضابطه‌ی معکوس، x را بر حسب y می‌یابیم:

$$y = -(x-1)^2 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 - y \Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{1 - y}$$

چون $1 < x < 2$ ، پس طرف چپ مقداری مثبت است، پس باید طرف راست هم مثبت باشد:

$$x - 1 = \sqrt{1 - y} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 - x}$$

تا همین جا به جواب رسیدیم. اما دامنه‌ی f^{-1} که همان برد f است را محاسبه می‌کنیم. چون تابع در این فاصله، نزولی است. بنابراین برد تابع از قرار دادن مقادیر ابتدا و انتهای بازه‌ی دامنه در تابع حاصل می‌شود:

$$f(x) = -(x^2 - 2), 1 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow f_{\text{برد}} = (0, 1) = D_{f^{-1}}$$

$$y = -(x^2 - 2), 1 < x < 2$$

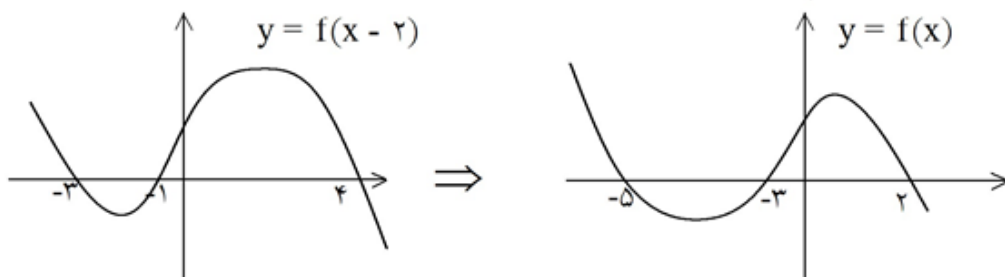
می‌توانیم بعد از یافتن ضابطه‌ی f ، از عددگذاری استفاده کنیم:

$$\text{نقطه‌ی } x = \frac{3}{4} \text{ در دامنه قرار دارد. بنابراین } \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \in f \text{ پس باید } \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \in f^{-1} \text{ باشد که تنها در گزینه‌ی «۳» این اتفاق رخ می‌دهد.}$$

تذکر: وقتی وارون تابع f را در فاصله‌ی $1 < x < 2$ می‌خواهیم، پس برد تابع وارون $1 < f^{-1}(x) < 2$ خواهد بود. هر سه گزینه‌ی ۱ و ۲ و ۴ از یک کوچک‌ترند پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که نمودار $y = f(x - 2)$ داریم برای رسم $y = f(x)$ باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم.



$$\sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \xrightarrow{\substack{\text{باید } x \text{ و } f(x) \\ \text{هم علامت باشند}}} \begin{cases} x \geq 0 \text{ و } f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2] \\ x \leq 0 \text{ و } f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, -3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = [-5, -3] \cup [0, 2]$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

| x | $-\infty$ | -1 | 2 | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|----|---|-----------|
| $-x^2 + x + 2$ | - | • | + | • |
| $-x^2 + x + 2 > 0$ | | | ج | |

$$D_f = (-1, 2)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\right\}$$

$$\xrightarrow{\substack{\left(\frac{1}{4}\right)^x \\ \text{مثبت است}}} \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{1}{4}\right)^x < 2\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{-2x} < 2^1\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -2x < 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\right\} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۲۰)

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 1| = \begin{cases} (2x - 6) - (x + 1) & x \geq 3 \\ -2x + 6 - (x + 1) & -1 < x < 3 \\ -2x + 6 - (-x - 1) & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 7 & x \geq 3 \\ -3x + 5 & -1 < x < 3 \\ -x + 7 & x < -1 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ها مشخص است که ضابطه‌ی $y = x - 7$ برای $x \geq 3$ صعودی است.

$$x \geq 3 \xrightarrow{-7} x - 7 \geq -4 \Rightarrow y \geq -4$$

$$y = x - 7 \Rightarrow y + 7 = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = x + 7$$

نکته: در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود. بنابراین $y \geq -4$ برای تابع معکوس محدوددهی دامنه می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۲۱)

$$g(x) = x - \sqrt{x}, f(6) = 0, f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$f \circ g(x) = 0 \Rightarrow f(g(x)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = 6 \\ g(x) = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$g(x) = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \\ \sqrt{x} = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$g(x) = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

بنابراین ریشه‌ها ۹ و $\frac{1}{4}$ می‌باشند.

$$D_g: x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x > 15 \text{ یا } x < 0$$

$$D_f: 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۲۲)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x > 15 \text{ یا } x < 0 \mid \text{Log}(x^2 - 15x) \leq 2\}$$

$$\Rightarrow x^2 - 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 20 \quad (2)$$

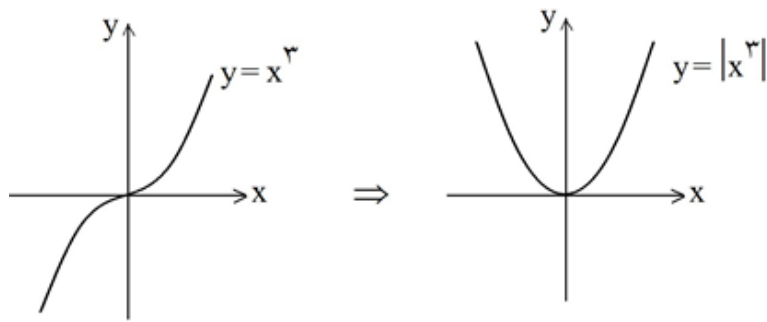
$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_{f \circ g} = [-5, 0) \cup (15, 20]$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۲۳)

$$f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 = 2(2x + 1)^2 - (2x + 1) + 4 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۴



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۵

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \sqrt{x^2 + 2} \right) \Rightarrow 2y - x = \sqrt{x^2 + 2} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{طرفین به توان ۲}} 4y^2 - 4yx + x^2 = x^2 + 2$$

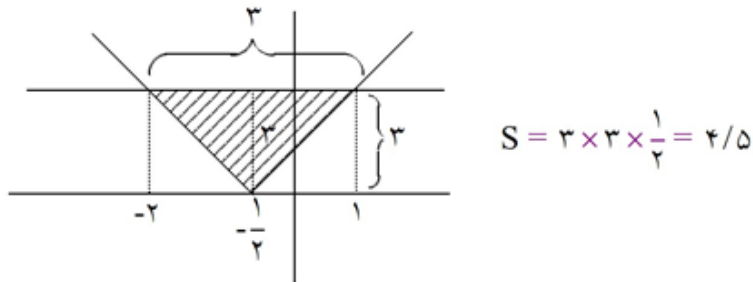
$$\xrightarrow{\div 2} y^2 - yx = 1 \Rightarrow yx = y^2 - 1 \Rightarrow x = y - \frac{1}{y} \xrightarrow[\text{را عوض می کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y} f^{-1}(x) = x - \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - x = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۶

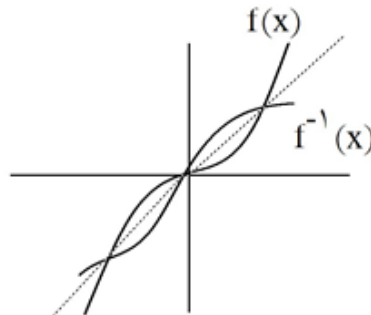
$$g(f(x)) = \sqrt{2(x^2 + x) + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1|$$

$$|2x + 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \\ 2x + 1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۷

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲۸

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$\Rightarrow D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$= \left\{ x \neq \pm 1 \mid 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \right\}$$

$$\begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \xrightarrow{1+x^2 > 0} 1-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1 & (۲) \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} < 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \\ \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 1 \text{ یا } x = 0 & (۳) \end{cases}$$

$$(۱) \cap (۲) \cap (۳) \xrightarrow{\quad} D_{\text{gof}} = \{0\}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲۹

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \Rightarrow f(6) = g(2a) \Rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \Rightarrow 6a-3 = 2a \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۰

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \\ g(x) = \frac{2x+2}{2-x} \end{cases} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}} = \frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳۱

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = x \Rightarrow y = x^2$$

$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{-x} > 0 \Rightarrow -\sqrt{-x} < 0 \Rightarrow y_2 < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{-x} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} y^2 = -x \Rightarrow y = -x^2$$

$$\Rightarrow y = x|x|$$

$$y_1 \cup y_2 = \mathbb{R} \xrightarrow[\text{تابع معکوس است}]{\text{برد تابع دامنه ی}} D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad (\text{البته در این سؤال بررسی دامنه لزومی نداشت})$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۲

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \text{ ضریب} > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 & (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 + 4a(1-a) < 0 \Rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a+2)(a-3) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a < -2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۳

$$1 + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \text{غ ق ق} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g : [0, 1]$$

$$D_{\text{gof}} : \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \right\}$$

$$\begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow 1-x^2 \leq 1+x^2 \Rightarrow 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} & (1) \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} -1 \leq x \leq 1$$

$D_{\text{gof}} = [-1, 1]$ کاملاً مشخص است که اگر $-1 \leq x \leq 1$ باشد، رابطه $0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1$ برقرار است. بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۴

$$f^{-1} = \{(2, 5), (3, 7), (1, 4), (6, 3), (1, 9)\} \Rightarrow f^{-1}(3) = 6$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x^2 - 9}{5}$$

$$\begin{array}{c} 3 \xrightarrow{f^{-1}} 7 \xrightarrow{g^{-1}} 8 \Rightarrow f(g(8)) = 3 \Rightarrow a = 3 \\ 3 \xleftarrow{f} 7 \xleftarrow{g} 8 \end{array}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (۱۳۵)

$$g(f(x)) = g\left(\frac{2x+3}{2-x}\right) = -x-1 \text{ or } 1 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. (۱۳۶)

$$y = \frac{x+4}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = x+4 \Rightarrow xy - x = 2y+4 \Rightarrow x(y-1) = 2y+4$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y+4}{y-1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{2x+4}{x-1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-1}, x \neq 1$$

برای یافتن محل برخورد دو نمودار باید برابر یکدیگر قرار دهیم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{x+4}{x-2} = \frac{2x+4}{x-1} \Rightarrow 2x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 3x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$$

این دو تابع در دو نقطه متقاطع هستند.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای یافتن قرینه‌ی هر منحنی نسبت به خط $y = x$ کافی است جای متغیرهای y و x عوض شود. زیرا قرینه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم همان تابع وارون است. پس:

$$3x - 2y = 4 \Rightarrow 3x - 4 = 2y \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 2 \Rightarrow \text{عرض از مبدا} = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون تابع اول بالاتر از تابع دوم قرار دارد، بنابراین ضابطه‌ی آن را بزرگ‌تر از ضابطه دوم قرار می‌دهیم. (۱۳۸)

$$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + |x| \xrightarrow{\times 2} -2x^2 - x + 9 > 4x + 2|x|$$

$$2x^2 + 5x + 2|x| - 9 < 0$$

$$x \geq 0 \Rightarrow 2x^2 + 7x - 9 < 0 \Rightarrow (2x+9)(x-1) < 0 \Rightarrow -\frac{9}{2} < x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 \leq x < 1 \quad (1)$$

$$x < 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 9 < 0 \Rightarrow (2x-3)(x+3) < 0 \Rightarrow -3 < x < \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک}} -3 < x < 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cup (2)} -3 < x < 1 \xrightarrow{\text{وسط بازه}} \frac{-3+1}{2} = -1$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳۹

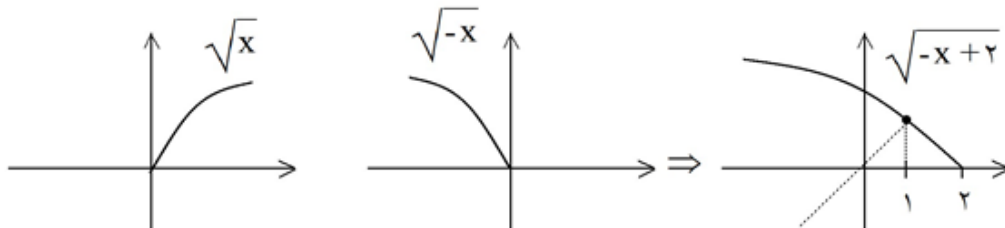
$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{انتقال}} f(2-x) = \sqrt{-x+2}$$

$$y = x \text{ محل برخورد با } \sqrt{-x+2} = x \Rightarrow x^2 = -x+2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$x=1 \Rightarrow \sqrt{-1+2} = 1 \checkmark \quad x=-2 \Rightarrow \sqrt{-(-2)+2} = -2 \times$$

روش دوم:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۰

$$\text{تابع جدید: } y = (-(x-3)^2 + 2(x-3) + 5) - 2 \Rightarrow y = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3$$

$$\Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12 > x \Rightarrow -x^2 + 7x - 12 > 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

$x=3, x=4$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۱

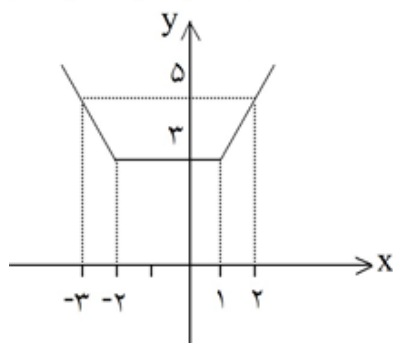
$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\} \Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\} \Rightarrow \frac{g}{\text{gof}^{-1}} = \left\{ \left(5, \frac{6}{3}\right), \left(4, \frac{2}{1}\right) \right\} = \{(5, 2), (4, 2)\}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم. ۱۴۲

$$y = |x + 2| + |x - 1|$$



نقاط شکست

| | | | | |
|---|----|----|---|---|
| x | -3 | -2 | 1 | 2 |
| y | 5 | 3 | 3 | 5 |

پس تابع در فاصله‌ی $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است عرض محل برخورد f با وارون g^{-1} را به دست آوریم: ۱۴۳

$$g(x) = \frac{x-9}{2} = y \Rightarrow x-9 = 2y \Rightarrow x = 2y+9 \Rightarrow g^{-1}(x) = 2x+9$$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3, x \geq 1$$

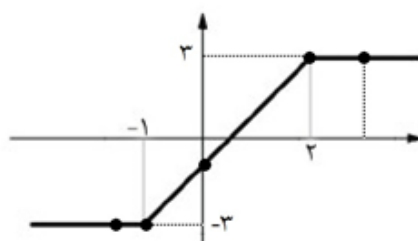
$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 2x + 9 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{ق ق} \\ x = -2 & \text{ق غ} \end{cases} \Rightarrow y = 2(6) + 9 = 21$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک نقطه‌یابی نمودار f را رسم می‌کنیم. ۱۴۴

$$f(x) = |x + 1| - |x - 2|$$

نقاط شکست

| | | | | |
|---|----|----|---|---|
| x | -2 | -1 | 2 | 3 |
| y | -3 | -3 | 3 | 3 |



پس f در بازه‌ی $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۵

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(\lambda) = g^{-1}(f^{-1}(\lambda))$$

$$f(x) = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x - 4 = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x = \lambda + 4 \Rightarrow x = \frac{5}{2}(\lambda + 4) \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = \frac{5}{2}(\lambda + 4) \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(\lambda)) = g^{-1}\left(\frac{5}{2}(\lambda + 4)\right)$$

$$g(x) = \frac{5}{2}(\lambda + 4) \Rightarrow x^2 + x = \frac{5}{2}(\lambda + 4) \Rightarrow x = \frac{5}{2}(\lambda + 4) \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{5}{2}(\lambda + 4)\right) = \frac{5}{2}(\lambda + 4)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۶

$$y = (x+2)^2 - (x+2) - 9 = x^2 + 3x - 10 < 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-2) < 0 \Rightarrow -5 < x < 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۷

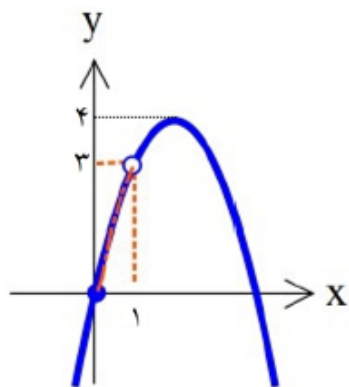
$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\} \quad g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

$$\Rightarrow (g^{-1} \circ f) - f = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

$$R = \{2, -1\}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۸



$$R_{f(x)} = D_{g(x)} \quad \text{باید صدق کند}$$

$$R_{f(x)} = 0 \leq 2x - [2x] < 1 \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = -1 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow R_f = [0, 3)$$

g در این بازه صعودی است



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. X و y آن با g(x) معکوس است.

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow g(6) \Rightarrow f(x) = 6 \Rightarrow x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 6) \in f \Rightarrow g(6) = 4$$

$$g(12) \Rightarrow f(x) = 12 \Rightarrow x + \sqrt{x} = 12 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow (9, 12) \in f \Rightarrow g(12) = 9$$

$$g(6) + g(12) = 13$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$-x + \frac{2}{x} = x \Rightarrow \frac{2}{x} = 2x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

نیمساز ناحیه چهارم $y = -x$ است.دامنه $x < 0$ است پس $x = -1$ قابل قبول است.

$$(-1, 1) \in f \Rightarrow (1, -1) \in f^{-1}$$

پس طول تقاطع $x = 1$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2 \Rightarrow 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 + 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2 \left(2 + \sqrt{3} \right) \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{t = 2^x} \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2 \left(2 + \sqrt{3} \right) \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} < 0 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$f^{-1}(20) = ?$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 20 - x \Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$(x - 25)(x - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \text{ ق ق} \\ x = 25 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$g^{-1}(16) = ?$$

$$\frac{9x + 6}{1 - x} = 16 \Rightarrow 16 - 16x = 9x + 6 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۵۳

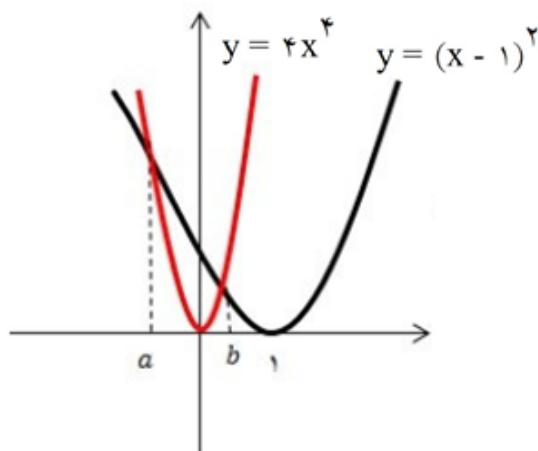
$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه محور } x \text{ ها}} f(x) = -x^2 + 2x \xrightarrow{+16 \text{ محور } y \text{ ها}}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 16 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 16 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ ق ق} \\ x = 4 \text{ ق ق } (x > 1) \end{cases} \Rightarrow \Delta \Big|_8^4$$

$$OA = \sqrt{4^2 + 16^2} = \sqrt{16 + 256} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۴



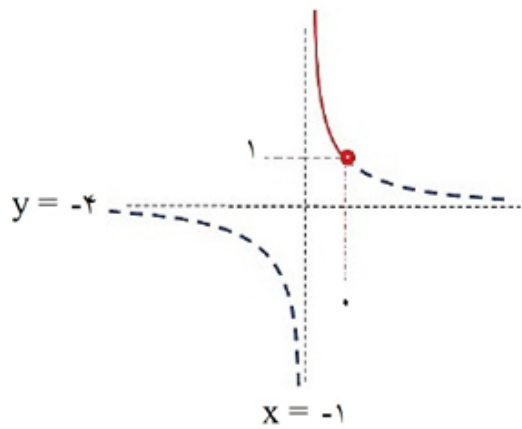
$$(x-1)^2 > 4x^2 \Rightarrow |x-1| > 2x^2$$

$$x \geq 1 \Rightarrow 2x^2 < x-1 \Rightarrow 2x^2 - x + 1 < 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 > 0 \Rightarrow \text{عبارت همواره مثبت است} \\ \Delta = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow \text{و نمی تواند منفی باشد.} \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$x \leq 1 \Rightarrow 2x^2 < -x+1 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b - a = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۵



$$\begin{aligned} 0 \leq x - [x] < 1 &\xrightarrow{\times(-1)} -1 < [x] - x \leq 0 \\ R &\xrightarrow{f} (-1, 0], \quad x \neq -1 \xrightarrow{g} R - \{-2\} \\ \text{اشتراک} &(-1, 0] \xrightarrow{g} [1, +\infty) \\ g(x) &= \frac{-2x+1}{x+1} \end{aligned}$$

$$x + 2\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$x + 2\sqrt{x} = 15 \Rightarrow x = 9$$

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵۷

روش اول: نیمساز ناحیه دوم $y = -x$ است بنابراین نقطه موردنظر در تابع وارون برابر است با: (چون در ربع دوم است باید a منفی باشد)

$$(a, -a) \in f^{-1} \Rightarrow (-a, a) \in f \Rightarrow f(-a) = a$$

$$\Rightarrow -a + \frac{1}{2a} = a \Rightarrow \frac{1}{2a} = 2a \Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} & \text{غ ق} \\ a = -\frac{1}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

| | | | | |
|--------------------|---|---|---|----------|
| $x = -2$ بد | } | $f^{-1}(x) = -x$ | $f(x) = x - \frac{1}{2x}$ | روش دوم: |
| $x = -\frac{1}{2}$ | } | $f^{-1}(-1) = 1$ | $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1$ | |
| | } | $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ | $\text{خوب} = -\frac{1}{2}$ | |



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۸

$$f^{-1}(2) = x \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \xrightarrow{2^x = A} \frac{A - \frac{1}{A}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{A^2 - 1}{A} = 2$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A - 1 = 0$$

$$A = 2 + \sqrt{5} \text{ ق ق } \Rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \text{Log}_2(2 + \sqrt{5}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \text{Log}_2(2 + \sqrt{5})$$

$$A = 2 - \sqrt{5} \text{ غ ق ق}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به ترکیب توابع و مفهوم وارون یک تابع داریم: ۱۵۹

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$$

$$g^{-1}(-9) = b \Rightarrow g(b) = -9 \Rightarrow \frac{3-b}{2} = -9 \Rightarrow b = 21$$

$$f^{-1}(21) = a \Rightarrow f(a) = 21 \Rightarrow a^2 - 4a + 9 = 21 \xrightarrow{x \geq 2} a = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با کمک ترسیم قرینه نسبت به مبدأ مختصات و انتقال روی محور عرض‌ها داریم: ۱۶۰

$$y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y = -(-x-1)^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} y = -(-x-1)^2 + 4$$

$$-(-x-1)^2 + 4 = (x-1)^2 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow -2x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(x) = 2 \frac{\sqrt{9 \cos^2(x) - 1}}{-2} \sqrt{1 - 9 \cos^2(x)}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۱

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9 \cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9 \cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{9 \cos^2 x - 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{9 \cos^2 x - 1} = t \quad -1 \leq t \leq 2$$

$$f(t) = 2^t - 2^{-t} \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

تابع 2^t اکیداً صعودی است.تابع 2^{-t} اکیداً نزولی است.تابع $2^{-t} - 2^t$ اکیداً صعودی است.یعنی $2^t - 2^{-t}$ اکیداً صعودی است.

$$-1 \leq t \leq 2 \Rightarrow f(-1) = 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

$$f(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{15}{4}$$

$$b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4} + \frac{6}{4} = \frac{21}{4}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $f(x) = \sqrt{2} |\sin x|$ را $\frac{\pi}{4}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم:

$$y = \sqrt{2} \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right| \Rightarrow y = \sqrt{2} |-\cos x| \Rightarrow y = \sqrt{2} |\cos x|$$

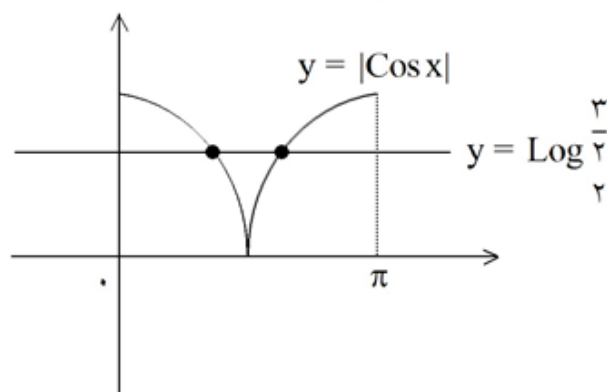
سپس $\frac{3}{4}$ در جهت محور y های منفی منتقل می‌کنیم.

$$y = \sqrt{2} |\cos x| - \frac{3}{4}$$

برای یافتن محل تلاقی با محور طول‌ها برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{2} |\cos x| - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \sqrt{2} |\cos x| = \frac{3}{4} \Rightarrow |\cos x| = \text{Log} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون $\frac{3}{4} < 2$ است و $\text{Log} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ بنابراین $0 < \text{Log} \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ است.



دو نمودار در بازه $[0, \pi]$ دو نقطه تلاقی دارند بنابراین معادله دو جواب دارد.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قرینه $y = 2 + \sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y = x$ تابع وارون آن است. ۱۶۳

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان ۲ میرسانیم}} y^2 - 4y + 4 = x - 1$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{واحد در جهت } x \text{ مثبت}} y = (x-2-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد در جهت } y \text{ منفی}} g(x) = (x-4)^2 + 1 - 3$$

$$\Rightarrow g(x) = (x-4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = (4-4)^2 - 2 = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باید ضابطه تابع $(g \circ f)(x)$ را حساب کنیم. بنابراین ضابطه g به شرط $1 - x^2$ مثبت باشد ۱۶۴

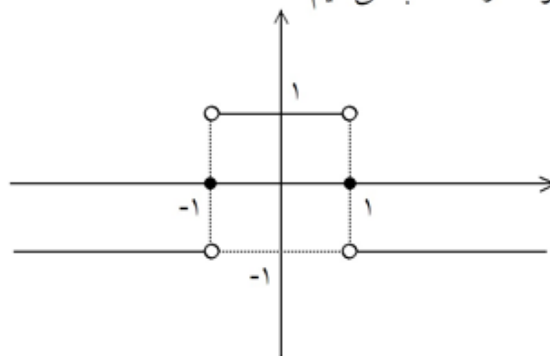
برابر ۱ و اگر $1 - x^2$ منفی باشد، حاصل y برابر -1 و اگر $1 - x^2$ برابر صفر باشد، حاصل y برابر صفر است.

$$\begin{cases} 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow g(f(x)) = 1 \\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \\ 1 - x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \Rightarrow g(f(x)) = -1 \end{cases}$$

با توجه به حاصل $g(f(x))$ و حدود x ضابطه و $(g \circ f)(x)$ برابر است با:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & ; -1 < x < 1 \\ 0 & ; x = \pm 1 \\ -1 & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

یا رسم نمودار تابع تعداد نقاط ناپیوسته را حساب می‌کنیم.



در شکل مشخص است که تابع در $x = -1$ و $x = 1$ ناپیوسته است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. منحنی اولیه را k واحد در راستای قائم جابه‌جا می‌کنیم و نمودار تابع $y = \sqrt{\sqrt{x+3}+k}$ حاصل می‌شود. اگر این نمودار، نمودار وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند، یعنی

خط $y = x$ را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کرده است، پس نقطه‌ی تقاطع به صورت $(1, 1)$ است که مختصات این نقطه در ضابطه‌ی جدید صدق می‌کند:

$$\frac{x=1}{y=1} \rightarrow 1 = \sqrt{\sqrt{1+3}+k} = 2+k \Rightarrow k = -1$$

پس ضابطه‌ی تابع جدید $y = \sqrt{\sqrt{x+3}-1}$ است. حال داریم:

$$\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}]{\text{واحد به سمت چپ}} y = -\sqrt{\sqrt{x+3}+1} \rightarrow y = 1 - \sqrt{\sqrt{x+3}+1}$$

مختصات نقطه‌ی $(0, 1 - \sqrt{5})$ در ضابطه‌ی این تابع صدق می‌کند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌های fog و gof را به دست می‌آوریم:

$$\text{fog} = \begin{cases} -1 & ; x < -\sqrt{2} \text{ یا } x > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & ; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{gof} = \begin{cases} 0 & ; x < -1 \\ 1 - x^2 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$(\text{gof} - \text{fog})(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; -\sqrt{2} \leq x \leq -1 \text{ یا } 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{پس داریم:}$$

بیش‌ترین مقدار این تابع به ازای $x = \pm\sqrt{2}$ و برابر ۱ به دست می‌آید.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع اکیداً صعودی است، پس وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می‌کند.

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+1$$

بنابراین:

$$\xrightarrow[\text{به توان ۲ می‌رسانیم}]{\text{ق ق}} x^2 + 2x + 1 = x + 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 1 \\ \text{غ ق ق } x = -2 \end{cases}$$

$$M(1, 1) \Rightarrow MO = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} \Rightarrow MO = \sqrt{2}$$



$$f \circ f(x) = x(1-x^2)(1-(x(1-x^2))^2)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(f \circ f) \circ g(x) = \begin{cases} 1(1-1)(1-(1(1-1)^2)) \\ 0(1-0)(1-(0(1-0)^2)) \\ -1(1-1)(1-(-1(1-1)^2)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x = 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

همواره پیوسته

سید علی موسوی

۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴

مشهد مقدس

