

دفترچه شماره ۱

آزمون شماره ۱۴

جمعه ۱۴۰۱/۱۰/۲۳



# آزمون‌های سرانسر کنکور

گزینه درستی را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

## سوالات آزمون

پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤال: ۴۵	مدت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

مدت پاسخگویی	شماره سؤال		تعداد سؤال	مواد امتحانی	ردیف
	از	تا			
۷۰ دقیقه	۱	۱۵	۱۵	حسابان ۲	۱ ریاضیات
	۱۶	۳۰	۱۵	ریاضیات گسسته	
	۳۱	۴۵	۱۵	هندسه ۳	

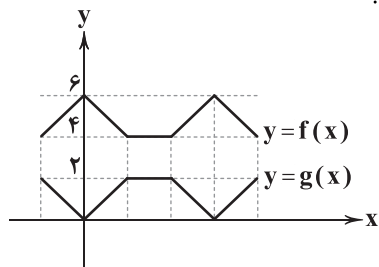


DriQ.com

ریاضیات

## حسابان (۲)

۱- اگر نمودار توابع  $y=f(x)$  و  $y=g(x)$  به شکل زیر باشند، آنگاه ضابطه تابع  $g(x)$  برابر است با:



(۱)  $6 + f(-x)$

(۲)  $-6 + f(x)$

(۳)  $6 - f(x)$

(۴)  $6 - f(-x)$

۲- اگر در مورد تابع  $f$  بدانیم:  $f(3)=0$  و ضمناً  $\forall x_1, x_2 \in D_f$  و  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$  و  $g(x) = x^2 - 7x - 5$  آنگاه مجموعه جواب

نامعادله  $(f \circ g)(x-1) < 0$  کدام است؟

(۴)  $(5, 9)$

(۳)  $(1, 3)$

(۲)  $(5, 7)$

(۱)  $(0, 9)$

۳- معادله  $3 \sin^2 x + \cos^2 x = 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

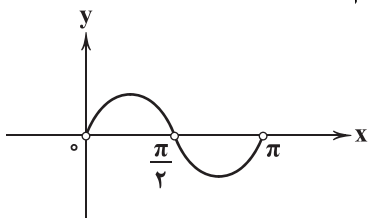
(۴) ۵

(۳) ۶

(۲) ۷

(۱) ۸

۴- اگر قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = \frac{1}{\tan kx + \cot kx}$  به شکل زیر باشد، آنگاه مقدار  $f(\frac{31\pi}{12})$  کدام است؟



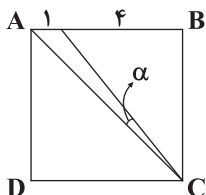
(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲)  $-\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۴)  $-\frac{1}{4}$

۵- در شکل زیر چهارضلعی ABCD مربع می باشد، مقدار  $\tan \alpha$  کدام است؟



(۲)  $\frac{1}{7}$

(۱)  $\frac{1}{5}$

(۴)  $\frac{1}{11}$

(۳)  $\frac{1}{9}$

محل انجام محاسبات



۶- نمودار تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2|x - 1| - 1}$  در اطراف مجانب قائم آن به کدام صورت است؟



۷- فاصله بین مجانب‌های تابع  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 6x + 9} - \sqrt{4x^2 + 9x + 1}$  برابر با کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷/۵ (۳) ۷ (۴) ۶/۵

۸- اگر  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+b}{x^3 - (a+2)x + 2a} = -\infty$  آن‌گاه:

- (۱)  $a = 1 < -b$  (۲)  $a = 1 > -b$  (۳)  $a = -1 < b$  (۴)  $a = -1 > b$

۹- حاصل  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{22x} - \sqrt{88x} - \sqrt{22x} + \sqrt{22x})$  برابر است با:

- (۱) ۱ (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $-\frac{3}{2}$  (۴)  $-\frac{5}{2}$

۱۰- مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم  $x^8 + 1$  بر  $x^3 - 2$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۱- دوره تناوب و مقدار مینیمم تابع  $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$  به ترتیب برابر است با:

- (۱)  $\pi$  و صفر (۲)  $\pi$  و  $\frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{\pi}{2}$  و صفر (۴)  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{\pi}{2}$

۱۲- جواب کلی معادله  $\cos^2 x + \sin^2 2x = \frac{1}{4}$  برابر است با:

- (۱)  $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$  (۲)  $x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}$  (۳)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$  (۴)  $x = k\pi \pm \frac{\pi}{12}$

۱۳- نمودار تابع  $f(x) = \frac{(-1)^{|x|+2}}{\log(4-3x) - \log(2x-1)}$  در اطراف مجانب قائم آن به کدام صورت است؟



محل انجام محاسبات





۲۳- اگر  $x^2 - 4x + 4 = 0$  و  $|x^2 - 4| = 0$  و  $y^2 + 3y - 4 = 0$  چند جواب صحیح برای  $x$  و  $y$  به ترتیب وجود دارد؟

- (۱) ۲ و ۱ (۲) ۱ و بی‌شمار (۳) ۲ و ۱ (۴) بی‌شمار و ۲

۲۴- چند نقطه صحیح روی نمودار  $3xy - 2x + 5y - 4 = 0$  وجود دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۲۵- عدد  $\overline{3a45b}$  مضرب ۹۹ است. باقی‌مانده آن بر ۴ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۶- اگر  $a^3 | 240$  و  $180 | b^2$  کم‌ترین مقدار ممکن برای  $a + b$  کدام است؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۷۰ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰

۲۷- در یک گراف کامل  $q = \Delta^2 - 2\delta$ ، درجه هر رأس کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

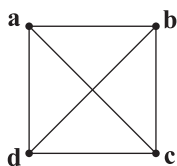
۲۸- چند نوع گراف  $r$  - منتظم مرتبه ۷، غیرکامل وجود دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴) ۳

۲۹- درجه رأسی در گراف  $G$  و  $\bar{G}$  به ترتیب ۳ و ۶ است، حداکثر تعداد یال در گراف  $\bar{G}$  کدام است؟

- (۱) ۳۳ (۲) ۴۲ (۳) ۲۲ (۴) ۳۹

۳۰- گراف شکل زیر چند زیرگراف ۱ - منتظم دارد؟



(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

### هندسه (۲)

۳۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ a & 4 \end{bmatrix}$  و  $A^2 = \begin{bmatrix} b & c \\ 14 & d \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $\frac{b+c+d}{a}$  کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۳۲- اگر  $\bar{O} = A^2 - 5A + 4I$  باشد، وارون ماتریس  $(A - 2I)$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}(A - 3I)$  (۲)  $-\frac{1}{3}(A - 3I)$  (۳)  $A - 3I$  (۴)  $3I - A$

محل انجام محاسبات



۳۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه‌های ماتریس  $(BAB^{-1})^{100}$  کدام است؟

- ۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۳۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2a+1 & 2a-b \\ b-2a-2 & b-2 \end{bmatrix}$  یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های ماتریس  $A^3 + A^2$  کدام است؟

- ۱۹۰ (۱)      ۲۱۰ (۲)      ۲۳۰ (۳)      ۲۵۰ (۴)

۳۵- اگر در دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=-1 \end{cases}$ ، وارون ماتریس ضرایب به صورت  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $bx+cy$  کدام است؟

- ۱۳ (۱)      ۱۷ (۲)      -۱۳ (۳)      -۱۷ (۴)

۳۶- اگر دستگاه  $\begin{cases} (a-2)x+(b-1)y=2 \\ ax+2by=3 \end{cases}$  بی‌شمار جواب داشته باشد،  $a+b$  کدام است؟

- ۳ (۱)      -۳ (۲)      ۶ (۳)      -۶ (۴)

۳۷- معادله  $\begin{vmatrix} 0 & x+1 & x+2 \\ x+6 & 0 & -2 \\ x+7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$  چند جواب دارد؟

- ۱ (۲)      ۲ (۳)      ۳ (۴)      صفر (۱)

۳۸- یک سطح مخروطی با محور  $l$  و مولد  $d$  مفروض است. فصل مشترک صفحه  $P$  با این سطح مخروطی در حالتی که صفحه  $P$  موازی مولد باشد، و از رأس عبور نکند، چه شکلی است؟

- ۱) دایره      ۲) بیضی      ۳) سهمی      ۴) هذلولی

۳۹- دو نقطه  $A$  و  $B$  و خط  $d$  که شامل هیچ‌کدام از این نقاط نیست، مفروض است. چند نقطه در این صفحه وجود دارد که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله باشد و از خط  $d$  به فاصله ۵ باشد؟

- ۱) صفر یا یک یا بی‌شمار      ۲) صفر یا دو یا بی‌شمار      ۳) یک یا دو یا بی‌شمار      ۴) صفر یا یک یا دو

۴۰- چند دایره وجود دارد که از نقطه  $A(1, 3)$  عبور کرده و بر هر دو محور مختصات مماس باشد؟

- ۱) صفر      ۲) ۱      ۳) ۲      ۴) بی‌شمار

۴۱- بیشترین فاصله نقطه  $A(4, 2)$  از محیط دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  کدام است؟

- ۷ (۱)      ۸ (۲)      ۹ (۳)      ۱۰ (۴)

۴۲- به‌ازای کدام مقدار  $m$ ، دو دایره  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$  و  $x^2 + y^2 + 6x + m = 0$  برهم مماس هستند؟

- ۱) ۵۵، -۵      ۲) ۵۵، -۵      ۳) -۱۲، -۱۸      ۴) -۹، -۱۴



۴۳- در یک بیضی فاصله یک کانون از دو رأس کانونی آن برابر ۳ و ۷ است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

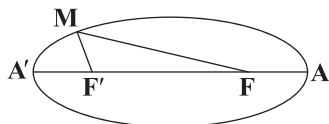
$$۰/۷ \text{ (۴)}$$

$$۰/۶ \text{ (۳)}$$

$$۰/۵ \text{ (۲)}$$

$$۰/۴ \text{ (۱)}$$

۴۴- در بیضی شکل زیر، محیط مثلث  $MF'F$  برابر ۱۶ و فاصله کانون  $F$  تا رأس  $A$  برابر ۲ است. طول قطر کوچک بیضی کدام است؟



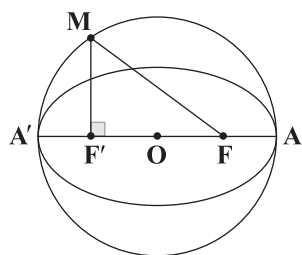
$$۶ \text{ (۱)}$$

$$۷ \text{ (۲)}$$

$$۸ \text{ (۳)}$$

$$۹ \text{ (۴)}$$

۴۵- در شکل زیر، اگر خروج از مرکز بیضی برابر  $\frac{4}{5}$  و طول قطر دایره برابر ۲۰ باشد، طول پاره خط  $MF$  کدام است؟



$$\sqrt{۶۹} \text{ (۱)}$$

$$\sqrt{۷۳} \text{ (۲)}$$

$$۲\sqrt{۶۹} \text{ (۳)}$$

$$۲\sqrt{۷۳} \text{ (۴)}$$



سایت کنکور

دفترچه شماره ۲

آزمون شماره ۱۴

جمعه ۱۴۰۱/۱۰/۲۳



# آزمون‌های سراسر کاج

گزینه‌درست را انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

## سوالات آزمون

پایه دوازدهم ریاضی

دوره دوم متوسطه

شماره داوطلبی:	نام و نام خانوادگی:
مدت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه	تعداد سوال: ۶۰

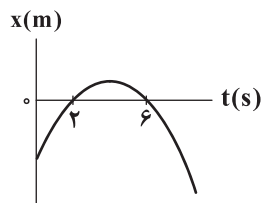
عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سوالات و مدت پاسخگویی

مدت پاسخگویی	شماره سؤال		تعداد سؤال	مواد امتحانی	ردیف
	تا	از			
۴۵ دقیقه	۸۰	۴۶	۳۵	فیزیک ۳	۱
۲۵ دقیقه	۱۰۵	۸۱	۲۵	شیمی ۳	۲





۴۶- نمودار مکان - زمان متحرکی که بر روی محور X با شتاب ثابت حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. تندی این متحرک در لحظه  $t = 6s$



چند برابر تندی آن در لحظه  $t = 1s$  است؟

(۱) ۲

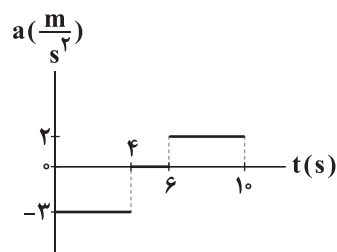
(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) صفر

(۴)  $\frac{2}{3}$

۴۷- نمودار شتاب - زمان متحرکی که با سرعت اولیه  $6 \frac{m}{s}$  در جهت مثبت محور X شروع به حرکت کرده، مطابق شکل زیر است. اگر مدت زمانی

که حرکت متحرک تندشونده بوده است را با  $t_1$  و مدت زمانی که حرکت متحرک کندشونده بوده است را با  $t_2$  نشان دهیم، نسبت  $\frac{t_1}{t_2}$  برابر



کدام گزینه است؟

(۱) ۱

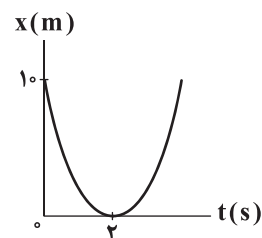
(۲)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{3}{4}$

(۴)  $\frac{3}{5}$

سایت کنکور

۴۸- نمودار مکان - زمان متحرکی که با شتاب ثابت روی محور X حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط این متحرک در دو



ثانیه سوم حرکتش چند متر بر ثانیه است؟

(۱) ۶

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

محل انجام محاسبات



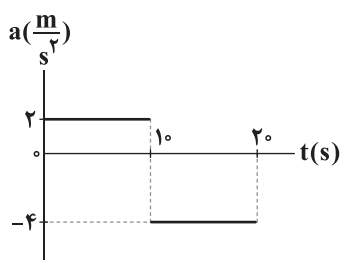
۴۹- متحرکی با شتاب ثابت روی محور  $x$  طی ۵ ثانیه از مکان  $x_0 = -7\text{m}$  تا مکان  $x = +9\text{m}$  جابه‌جا می‌شود. اگر بیشترین فاصله متحرک تا مبدأ مختصات  $11\text{m}$  بوده باشد، تندی متوسط متحرک در این حرکت چند متر بر ثانیه است؟ (سرعت متحرک تنها یک بار و از مثبت به منفی تغییر کرده است.)

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳)  $1/6$  (۴)  $3/2$

۵۰- متحرکی با شتاب ثابت، روی خط راست با سرعت  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  شروع به حرکت کرده و پس از ۸ ثانیه،  $40$  متر در جهت مثبت محور  $x$  جابه‌جا می‌شود. اگر متحرک به همین شکل به حرکت خود ادامه دهد، سرعت متوسطش در ۴ ثانیه بعدی حرکتش چند متر بر ثانیه می‌شود؟

- (۱)  $\frac{5}{2}$  (۲)  $-\frac{5}{2}$  (۳)  $\frac{5}{4}$  (۴)  $-\frac{5}{4}$

۵۱- نمودار شتاب - زمان متحرکی که روی محور  $x$  از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اندازه سرعت متوسط این متحرک در ۴ ثانیه سوم حرکتش چند متر بر ثانیه است؟



- (۱) ۱۸ (۲) ۱۶ (۳) ۱۲ (۴) ۱۷

۵۲- معادله مکان - زمان متحرکی در SI به صورت  $x = 2t^2 - 4t + 5$  است. جهت بردار مکان و جهت حرکت متحرک به ترتیب از راست به چپ، چند بار تغییر می‌کند؟

- (۱) صفر - ۱ (۲) ۱ - صفر (۳) ۱ - ۱ (۴) صفر - صفر

۵۳- اتومبیلی با تندی ثابت  $108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  روی خط راست در حال حرکت است. ناگهان راننده مانعی را در فاصله  $150$  متری خود می‌بیند. اگر  $0.5$  ثانیه طول بکشد تا راننده ترمز کند، حداقل اندازه شتاب ترمز چند متر بر مربع ثانیه باشد تا راننده به مانع برخورد نکند؟

- (۱) ۳ (۲)  $\frac{10}{3}$  (۳)  $\frac{7}{2}$  (۴)  $\frac{9}{4}$

۵۴- در ساختمانی که ارتفاع هر طبقه آن  $4\text{m}$  است، آسانسوری فاصله بین طبقات ۱- تا ۵ را در مدت زمان  $4/8\text{s}$  طی می‌کند، بعد  $2\text{s}$  توقف کرده و در مدت زمان  $3/2\text{s}$  به طبقه سوم برمی‌گردد. اندازه سرعت متوسط آسانسور در کل مسیر چند متر بر ثانیه است؟

- (۱)  $3/2$  (۲)  $1/6$  (۳) ۲ (۴) ۴

۵۵- اتومبیل A با سرعت ثابت  $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  بر روی محور  $x$  در حال حرکت است. از لحظه‌ای که راننده اتومبیل A، اتومبیل B را در فاصله  $1500\text{m}$  خود می‌بیند،  $100\text{s}$  طول می‌کشد تا دو اتومبیل به هم برسند. سرعت اتومبیل B چند متر بر ثانیه بوده و چگونه حرکت می‌کند؟

- (۱) ۱۰ - خلاف جهت اتومبیل A (۲) ۱۰ - هم جهت با اتومبیل A (۳) ۴۰ - خلاف جهت اتومبیل A (۴) ۴۰ - هم جهت با اتومبیل A



۵۶- مطابق شکل زیر، متحرک‌های (۱) و (۲) هم‌زمان در ساعت ۱۲ از نقاط A و B به ترتیب با سرعت‌های  $3v$  و  $v$  به سمت هم حرکت می‌کنند و



در ساعت ۱۵ به هم می‌رسند. متحرک (۲) در چه ساعتی به نقطه A می‌رسد؟

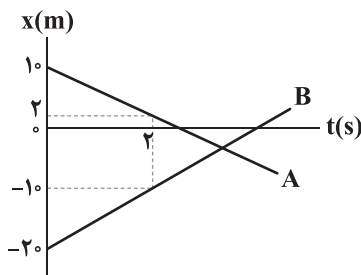
۴ (۱)

۶ (۲)

۹ (۳)

۲۴ (۴)

۵۷- نمودار مکان-زمان دو متحرک A و B که بر روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در لحظه‌ای که  $x_A = -2x_B$  است، فاصله دو



متحرک از یکدیگر چند متر است؟

۱۰ (۱)

۵ (۲)

۱۵ (۳)

۲۰ (۴)

۵۸- چه تعداد از عبارتهای زیر درست هستند؟

(الف) نیروهای عمل و عکس‌العمل، حتماً باید به دو جسم وارد شوند و لزوماً هم‌نوع نیستند.

(ب) به خاصیتی که اجسام میل دارند وضعیت حرکت خود را حفظ کنند تا هنگامی که نیروی خالص بر آن‌ها وارد نشود را اصطکاک می‌نامیم.

(ج) حداقل نیروی لازم برای به حرکت درآوردن یک جسم ساکن روی سطح همان  $f_{s,max}$  است.

(د) نیرو، حاصل برهم‌کنش دو جسم با یکدیگر است.

(ه) همواره ضریب اصطکاک جنبشی میان دو سطح بیشتر از ضریب اصطکاک ایستایی میان آن دو سطح است، زیرا جسم در حال حرکت می‌باشد.

(و) در سقوط یک چتر باز از ارتفاع معین، هرچه تندی حرکت آن بیشتر شود، نیروی مقاومت هوا در برابر حرکت آن نیز بیشتر می‌شود.

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

۵۹- نیرویی به بزرگی  $F$ ، به جسمی به جرم  $m_1$ ، شتاب  $\frac{m}{s^2}$  و نیرویی به بزرگی  $2F$  به جسمی به جرم  $m_2$ ، شتاب  $12\frac{m}{s^2}$  می‌دهد. نیرویی به

بزرگی  $4F$  به جسمی به جرم  $\frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{4}$ ، چه شتابی در واحد SI خواهد داد؟

۱۲ (۴)

۲۴ (۳)

۳۶ (۲)

۴۸ (۱)

محل انجام محاسبات



۶۰- جسمی به جرم  $400$  گرم، تنها تحت تأثیر سه نیرو به اندازه‌های  $F_1 = 5\text{N}$  و  $F_2 = 8\text{N}$  و  $F_3 = 12\text{N}$  قرار دارد و هر سه نیرو متوازن هستند. اگر اندازه

هر سه نیرو دو برابر شده و جهت نیروی  $\vec{F}_1$  عکس شود، جسم تحت تأثیر نیروهای جدید، چه شتابی در واحد SI و با چه جهتی خواهد گرفت؟

(۱)  $100$  - در خلاف جهت اولیه نیروی  $\vec{F}_1$

(۲)  $50$  - در خلاف جهت اولیه نیروی  $\vec{F}_1$

(۳)  $100$  - هم‌جهت با نیروی اولیه  $\vec{F}_1$

(۴)  $50$  - هم‌جهت با نیروی اولیه  $\vec{F}_1$

۶۱- نیروسنجی به سقف یک آسانسور متصل است. یک جسم به جرم  $7\text{kg}$  را به آن آویزان کرده‌ایم. آسانسور از طبقه همکف به راه می‌افتد و در

طبقه چهارم متوقف می‌شود. اگر اندازه شتاب در حرکت درآمدن در طبقه همکف و اندازه شتاب توقف در طبقه چهارم برابر

با  $\frac{3}{5}\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  باشد، اختلاف بیشترین و کم‌ترین عددی که نیروسنج نشان می‌دهد، چند نیوتون است؟ ( $g = 10\frac{\text{N}}{\text{kg}}$ )

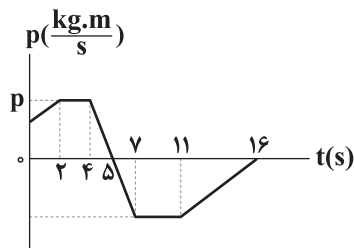
(۱)  $45/5$

(۲)  $49$

(۳)  $94/5$

(۴)  $99$

۶۲- نمودار تکانه - زمان برای یک متحرک به جرم  $4\text{kg}$ ، مطابق شکل زیر است. این جسم در کل مدت حرکتش چند ثانیه حرکت کندشونده



داشته است؟

(۱)  $4$

(۲)  $5$

(۳)  $6$

(۴)  $11$

۶۳- مطابق شکل زیر، بر جسمی به جرم  $4\text{kg}$ ، نیروی  $\vec{F}$  به بزرگی  $32\text{N}$  وارد می‌شود. اگر ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین سطح افقی و

جسم به ترتیب برابر با  $0/5$  و  $0/3$  باشند، اندازه نیرویی که سطح بر جسم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ( $g = 10\frac{\text{N}}{\text{kg}}$ )



(۱)  $8\sqrt{41}$

(۲)  $4\sqrt{109}$

(۳)  $20\sqrt{5}$

(۴)  $12$

۶۴- دو گلوله A و B با حجم یکسان از ارتفاع بسیار بلندی در هوا هم‌زمان رها می‌شوند. اگر  $\rho_A > \rho_B$  و تندی حدى گلوله‌های A و B به ترتیب

برابر  $s_A$  و  $s_B$  باشد، کدام مقایسه در مورد تندی این دو گلوله صحیح است؟

(۱)  $s_A < s_B$

(۲)  $s_A > s_B$

(۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

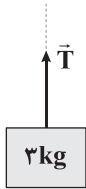
(۳)  $s_A = s_B$

محل انجام محاسبات



۶۵- مطابق شکل زیر، با طناب سبک و محکمی، جعبه‌ای ساکن به جرم  $3 \text{ kg}$  را با شتاب ثابت  $\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  رو به بالا به حرکت درمی‌آوریم و در میانهٔ

مسیر، با شتاب ثابت  $\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  به حال سکون می‌رسانیم. اندازهٔ اختلاف نیروی کشش طناب در این دو حالت چند نیوتون است؟ ( $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ )



۷ (۱)

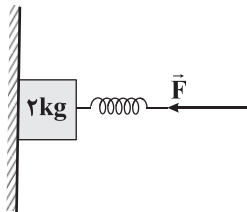
۶ (۲)

۳ (۳)

صفر (۴)

۶۶- در شکل زیر، با اعمال نیروی افقی  $\vec{F}$  به فنر سبکی که طول عادی آن  $13 \text{ cm}$  است، جسمی به جرم  $2 \text{ kg}$  را طوری به دیوار قائم می‌فشاریم که

جسم در آستانهٔ حرکت رو به پایین قرار گیرد. طول فنر در این حالت، به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ ( $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ ,  $\mu_s = 0.4$ ,  $k_{\text{فنر}} = 1000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ )



۵ (۱)

۸ (۲)

۱۸ (۳)

۱۳ (۴)

۶۷- یک ماهواره، در مداری که فاصله‌اش از سطح زمین برابر با شعاع کرهٔ زمین است، در حال حرکت به دور زمین می‌باشد. جسمی به جرم  $4 \text{ kg}$

را روی ترازویی درون این ماهواره قرار می‌دهیم. نیروی وزن جسم در آن نقطه و عددی که ترازو نشان می‌دهد، به ترتیب از راست به چپ

برحسب نیوتون در کدام گزینه به درستی آمده‌اند؟ (شتاب جاذبه در سطح زمین را  $10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$  در نظر بگیرید.)

۴ و صفر (۴)

۴۰ و ۴۰ (۳)

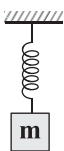
۱۰ و صفر (۲)

۱۰ و ۱۰ (۱)

۶۸- وزنه‌ای به جرم  $m$  به فنری با جرم ناچیز و ثابت  $k$  در راستای قائم متصل است و مجموعه در حالت تعادل قرار دارد. وزنه را از حالت تعادل

به سمت پایین می‌کشیم و رها می‌کنیم تا مجموعه نوسان هماهنگ ساده انجام دهد. اگر بیشینه و کمینهٔ طول فنر در این حالت به

ترتیب  $12 \text{ cm}$  و  $8 \text{ cm}$  باشد، بیشینهٔ تندی وزنه چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟ (طول فنر در حالت عادی  $9 \text{ cm}$  است و  $g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$ )



۲۰√۱۰ (۱)

۵√۱۰ (۲)

۱۰√۱۰ (۳)

۲۰√۱۰ (۴)

محل انجام محاسبات



۶۹- دو ماهواره A و B با جرم برابر در مدارهایی دایره‌ای شکلی به دور زمین می‌چرخند. اگر اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره A، ۴ برابر اندازه نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره B باشد، انرژی جنبشی ماهواره A چند برابر انرژی جنبشی ماهواره B است؟

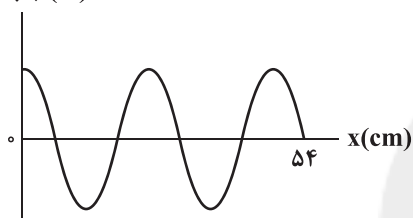
- (۱) ۴ (۲)  $\frac{1}{4}$  (۳) ۲ (۴)  $\frac{1}{2}$

۷۰- یک سکه روی صفحه گردان، ساکن است و همراه آن می‌گردد. اگر حداکثر اندازه شتاب مرکزگرای دوران برای آن که سکه نلغزد، برابر  $3 \frac{m}{s^2}$  باشد، ضریب اصطکاک سکه با سطح برابر کدام گزینه است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳)  $\frac{1}{4}$  (۴) داده‌ها کافی نیست.

۷۱- شکل زیر، نمودار جابه‌جایی مکان موج عرضی عبوری از یک ریسمان کشیده شده را نشان می‌دهد. هر نقطه از ریسمان در مدت یک دوره تناوب مسافت ۱۶ cm را طی می‌کند. نسبت بیشینه سرعت نوسان هر کدام از نقاط ریسمان به سرعت انتشار موج در ریسمان برابر

کدام گزینه است؟



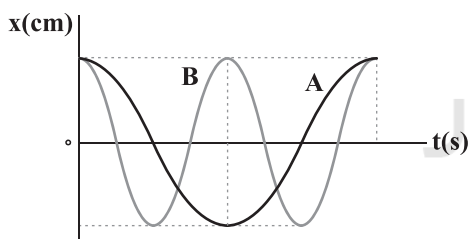
(۱)  $\frac{\pi}{9}$

(۲)  $\frac{\pi}{6}$

(۳)  $\frac{\pi}{4}$

(۴)  $\frac{\pi}{3}$

۷۲- نمودار مکان - زمان دو نوسانگر هماهنگ ساده A و B به صورت زیر است. اگر بیشینه انرژی جنبشی این دو نوسانگر، یکسان باشد، جرم نوسانگر A چند برابر جرم نوسانگر B می‌باشد؟



(۱)  $\frac{1}{4}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳) ۲

(۴) ۴

۷۳- طول موج برای موج عرضی ایجاد شده توسط یک دیپازون در یک تار برابر ۳ m است. اندازه نیروی کشش این تار را چند درصد و چگونه

تغییر دهیم تا طول موج ایجاد شده در آن توسط همان دیپازون، به اندازه ۳۰ cm افزایش یابد؟

- (۱) ۲۱ - افزایش (۲) ۱۰ - افزایش (۳) ۱۰ - کاهش (۴) ۲۱ - کاهش

محل انجام محاسبات



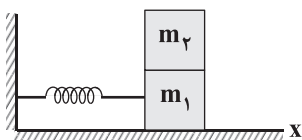
۷۴- معادله مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به صورت  $x = 3a \cos(\omega t)$  می‌باشد. در لحظه‌ای که انرژی جنبشی نوسانگر،  $\pi$  برابر بیشینه انرژی پتانسیل آن است، تندی نوسانگر  $v$  است. بیشینه شتاب این نوسانگر برابر کدام گزینه است؟

(۱)  $(\frac{v}{3an})^2$  (۲)  $\frac{v^2}{3an}$  (۳)  $\frac{v^2}{an}$  (۴)  $(\frac{v}{an})^2$

۷۵- نوسانگری روی پاره‌خطی به طول  $d$ ، حرکت هماهنگ ساده با بسامد ۲۵ هرتز انجام می‌دهد. کم‌ترین مدتی که نوسانگر می‌تواند مسافت  $\frac{\sqrt{3}d}{4}$  را طی کند، چند ثانیه است؟

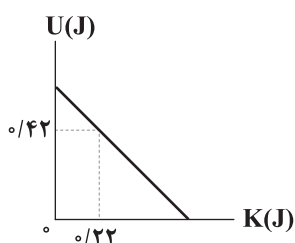
(۱)  $\frac{1}{30}$  (۲)  $\frac{1}{45}$  (۳)  $\frac{1}{60}$  (۴)  $\frac{1}{75}$

۷۶- مطابق شکل زیر، مجموعه دو جسم، با هم روی سطح افقی بدون اصطکاک، نوسان هماهنگ ساده انجام می‌دهند. هنگامی که به یک نقطه بازگشتی می‌رسند، جسم با جرم  $m_2$  از روی جسم با جرم  $m_1$  برداشته می‌شود. در این صورت بیشینه انرژی جنبشی  $m_1$  در حالت دوم، چند برابر بیشینه انرژی جنبشی مجموعه در حالت اول است؟ ( $m_1 = m_2 = 300g$ )



(۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴) ۱

۷۷- نمودار تغییرات انرژی پتانسیل کشسانی بر حسب انرژی جنبشی یک نوسانگر که بر روی پاره‌خطی به طول ۸ سانتی‌متر، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، مطابق شکل زیر است. اگر جرم این نوسانگر برابر با  $600g$  باشد، فرکانس نوسان آن چند هرتز است؟ ( $\pi = 3$ )



(۱)  $\frac{9\sqrt{30}}{10}$  (۲)  $\frac{10\sqrt{30}}{9}$  (۳)  $\frac{20\sqrt{3}}{9}$  (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{9}$

۷۸- اندازه بیشینه شتاب گلوله یک آونگ ساده در حال نوسان برابر با  $70 \frac{m}{s^2}$  و بیشینه تندی آن برابر با  $14 \frac{m}{s}$  است. طول این آونگ چند

سانتی‌متر است؟ ( $g = 10 \frac{N}{kg}$ )

(۱) ۴ (۲) ۴۰ (۳) ۲۵ (۴) ۵

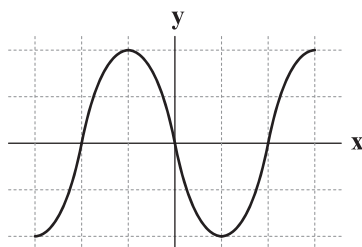
محل انجام محاسبات



۷۹- دو سامانه جرم - فنر دارای حرکت هماهنگ ساده با دامنه نوسان‌های برابر می‌باشند. اگر نسبت اندازه بیشینه تکانه سامانه (۲) به اندازه بیشینه تکانه سامانه (۱) برابر با ۳ و بیشینه انرژی جنبشی آنها با هم برابر باشد، نسبت دوره سامانه (۱) به دوره سامانه (۲) برابر کدام گزینه است؟

- (۱)  $\frac{1}{3}$       (۲) ۳      (۳) ۹      (۴)  $\frac{1}{9}$

۸۰- شکل زیر، موجی عرضی را نشان می‌دهد که با تندی ۷ در یک طناب پیش می‌رود. در این موج، بیشینه تندی ذرات طناب چند برابر تندی



انتشار موج در طناب است؟ (مقیاس‌های روی محور را هم اندازه فرض کنید).

- (۱)  $\frac{1}{\pi}$       (۲)  $\frac{2}{\pi}$       (۳)  $\frac{\pi}{2}$       (۴)  $\pi$



۸۱- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- با اضافه کردن نمک پتاسیم اسید چرب به آب، غلظت یون هیدروکسید افزایش می‌یابد.
- در سامانه‌های تعادلی، واکنش‌ها تا حدی پیش می‌روند و پس از آن، مقدار مواد شرکت‌کننده در واکنش، ثابت می‌شود.
- اگر یک لیتر از هر کدام از اسیدهای  $\text{HCOOH}$  و  $\text{CH}_3\text{COOH}$  را با هم مخلوط کنیم، درجه یونش هر کدام از اسیدها ثابت می‌ماند.
- نمک‌های فسفات با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت واکنش داده و از تشکیل رسوب و ایجاد لکه جلوگیری می‌کنند.

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۳      (۴) ۴

۸۲- صابون A فاقد عنصر فلزی بوده و درصد جرمی اکسیژن در آن برابر با  $11/30$  است. درصد جرمی هیدروژن در این صابون به تقریب کدام است؟ (زنجیر هیدروکربنی در صابون A دارای ۲ پیوند دوگانه بوده و سایر پیوندها یگانه است.)

( $\text{C}=12, \text{H}=1, \text{N}=14, \text{O}=16: \text{g.mol}^{-1}$ )

- (۱)  $10/24$       (۲)  $11/66$       (۳)  $12/22$       (۴)  $13/96$





۸۳- ۳۲/۲۴ گرم از یک استر سه عاملی که اسیدهای چرب یکسانی در ساختار آن وجود دارد با چهار دسی لیتر محلول سه دسی مولار سود واکنش داده و طی آن، صابون تولید می‌شود. مجموع شمار اتم‌های موجود در هر مولکول استر کدام است؟ (زنجیر هیدروکربنی صابون، سیر شده

است.) ( $C=۱۲, H=۱, O=۱۶: g.mol^{-1}$ )

۱۴۹ (۴)

۱۵۸ (۳)

۱۶۴ (۲)

۱۵۵ (۱)

۸۴- در ساختار یک پاک‌کننده غیرصابونی با گروه  $SO_3^-$ ، ۴ پیوند  $C=C$  و ۳۱ اتم هیدروژن وجود دارد. نسبت درصد جرمی کربن به درصد

جرمی اکسیژن در این پاک‌کننده کدام است؟ ( $C=۱۲, O=۱۶: g.mol^{-1}$ )

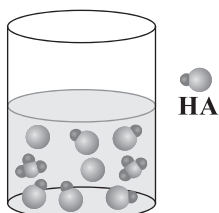
۷/۵ (۴)

۵/۷۵ (۳)

۴/۷۵ (۲)

۵ (۱)

۸۵- با توجه به شکل زیر درجه یونش اسید HA کدام است؟



۰/۴۰۰ (۱)

۰/۲۸۵ (۲)

۰/۲۲۲ (۳)

۰/۴۴۴ (۴)

( $O=۱۶, C=۱۲, H=۱: g.mol^{-1}$ )

۸۶- چه تعداد از عبارتهای زیر در ارتباط با اوره و اتیلن گلیکول درست است؟

- نیروی بین مولکولی در هر دو ترکیب از نوع پیوند هیدروژنی است.
- جرم مولی ترکیبی بیشتر است که شمار جفت الکترون‌های پیوندی مولکول آن بیشتر است.
- شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی مولکول دو ترکیب با هم برابر است.
- مخلوط هر کدام از آن‌ها با آب، همانند مخلوط آب و مس (II) سولفات، جزو مخلوط‌های پایدار است.

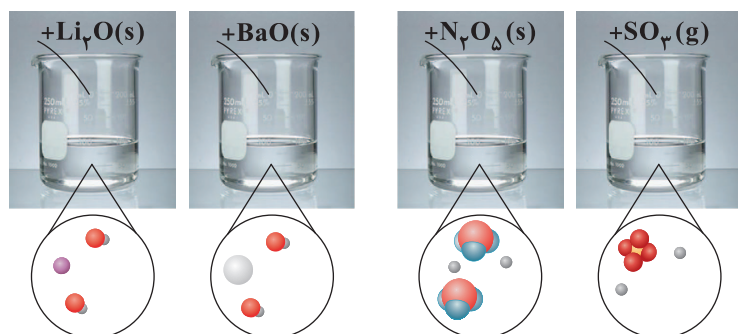
۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

۸۷- هر کدام از شکل‌های زیر نمای ذره‌ای محلول یک اکسید در آب را نشان می‌دهد. چه تعداد از آن‌ها نادرست رسم شده‌اند؟ (مولکول‌های آب



نمایش داده نشده‌اند.)

صفر (۱)

۱ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

محل انجام محاسبات



۸۸- غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول ۳۰ درصد جرمی اسید HA،  $\frac{2}{5}$  برابر غلظت مولی این یون در محلول  $\frac{1}{8}$  مولار اسید HX است.

چگالی محلول اسید HA چند گرم بر میلی لیتر است؟ ( $K_a(HX) = \frac{1}{4}$ ,  $K_a(HA) = \frac{1}{2}$ ,  $HA = 60 \text{ g.mol}^{-1}$ )

- ۱/۵۰ (۴)                      ۱/۴۰ (۳)                      ۱/۲۵ (۲)                      ۱/۲۰ (۱)

۸۹- غلظت یون هیدرونیوم در محلولی از فورمیک اسید برابر  $8 \times 10^{-4}$  مول بر لیتر است. برای خنثی کردن کامل  $\frac{1}{2}$  لیتر از این محلول به چند

میلی گرم پتاس نیاز است؟ ( $K_a = 2 \times 10^{-4}$ ,  $KOH = 56 \text{ g.mol}^{-1}$ )

- ۲۶۸/۸ (۴)                      ۲۶/۸۸ (۳)                      ۲۱۵/۰۴ (۲)                      ۲۱/۵۰۴ (۱)

۹۰- ۸ گرم جوش شیرین ناخالص، چهار دسی لیتر محلول جوهرنمک با  $pH = \frac{1}{11}$  را به طور کامل خنثی می کند. درصد خلوص جوش شیرین کدام

است؟ (فرض کنید ناخالصی ها با جوهر نمک واکنش نمی دهند). ( $Na = 23$ ,  $C = 12$ ,  $H = 1$ ,  $O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$ )

- ۶۱/۷ (۴)                      ۵۴/۲ (۳)                      ۳۳/۶ (۲)                      ۴۰ (۱)

۹۱- ۴۳۲ میلی گرم دی نیتروژن پنتاکسید را در مقداری آب  $25^\circ C$  حل کرده و حجم محلول را به ۸ لیتر می رسانیم. اگر به این محلول  $48^\circ$

میلی گرم سدیم هیدروکسید اضافه کنیم، پس از واکنش،  $pH$  محلول نهایی کدام است؟ ( $Na = 23$ ,  $O = 16$ ,  $N = 14$ ,  $H = 1 \text{ g.mol}^{-1}$ )

- ۱۰ (۱)                      ۹/۷ (۲)                      ۱۱ (۳)                      ۱۰/۷ (۴)

۹۲- در دمای  $25^\circ C$  مقدار  $pH$  محلول مولار اسید ضعیف HX برابر با  $\frac{1}{7}$  است. اگر در همین دما نمونه ای از این اسید که درجه یونش

آن  $\frac{1}{33}$  است با  $40$  میلی لیتر محلول  $\frac{1}{3}$  مولار باریوم هیدروکسید به طور کامل واکنش دهد، حجم اسید مصرف شده چند میلی لیتر است؟

- ۸۰ (۱)                      ۲۰ (۲)                      ۲۴۰ (۳)                      ۱۲۰ (۴)

۹۳- چه تعداد از عبارتهای زیر در ارتباط با مدل آرنیوس درست است؟

• مطابق این مدل، آمونیاک و آهک، جزو بازها به شمار می آیند.

• این مدل نمی تواند کم تر بودن غلظت هیدرونیوم در محلول آبی شامل  $K_2O$  را در مقایسه با محلول آبی شامل  $SO_2$  توجیه کند.

• براساس مفاهیم این مدل، اتانول و اتیلن گلیکول، جزو اسیدها و بازها طبقه بندی نمی شوند.

• با ارائه این مدل توسط آرنیوس بود که دانشمندان با برخی واکنش های اسیدها و بازها آشنا شدند.

- ۴ (۱)                      ۳ (۲)                      ۲ (۳)                      ۱ (۴)

۹۴- کدام یک از واکنش های زیر به فرایند خوردگی الکتروشیمیایی حلی در محل خراش ایجاد شده بر آن مربوط است؟



محل انجام محاسبات



۹۵- در سلول گالوانی منیزیم - مس، پس از مدت زمان مشخصی، ۰/۴۸ گرم از جرم الکتروود آندی کم می‌شود. اگر الکتروود منیزیم را با نقره جایگزین

کنیم، به ازای مبادله همان مقدار الکترون، چند گرم از جرم الکتروود آندی کم می‌شود؟ ( $Mg = 24, Cu = 64, Ag = 108: g.mol^{-1}$ )

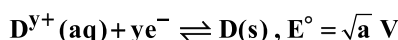
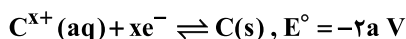
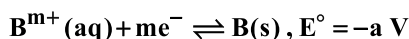
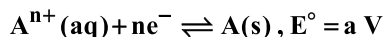
۴/۳۲ (۴)

۲/۱۶ (۳)

۰/۶۴ (۲)

۱/۲۸ (۱)

۹۶- با توجه به نیم‌واکنش‌های داده شده چه تعداد از عبارات‌های زیر درست است؟ ( $a < 1, m, y \neq 2$ )



• مجموع ضرایب اجزای واکنش موازنه شده میان فلز B و سولفات فلز D برابر  $3(m+y)$  است.

• در بین تمامی گونه‌ها، D ضعیف‌ترین کاهنده و  $C^{x+}$  ضعیف‌ترین اکسنده است.

• اگر تیغه فلز D را درون محلول نیترات A قرار دهیم، پس از مدتی دمای مخلوط واکنش افزایش می‌یابد.

• سلول گالوانی حاصل از نیم‌سلول‌های A و C در مقایسه با سلول حاصل از سایر نیم‌سلول‌ها،  $E^{\circ}$  بیشتری خواهد داشت.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۷- چه تعداد از عبارات‌های زیر درست است؟

• برخی از فلزها مانند آلومینیم و مس اکسایش می‌یابند، اما خورده نمی‌شوند.

• با ایجاد خراش در آهن سفید، در سطح آهن، الکترون‌ها توسط عوامل اکسنده مصرف می‌شوند.

• اگر دو فلز در یک محیط الکترولیت در تماس با هم باشند، فلزی که  $E^{\circ}$  بزرگ‌تری دارد در نقش کاتد ظاهر شده و نه اکسایش و نه کاهش می‌یابد.

• قدرت اکسندگی گاز اکسیژن در محیط‌های اسیدی بیشتر از محیط خنثی است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۸- در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن که با غشای مبادله‌کننده یون هیدرونیوم کار می‌کند، در یک بازه زمانی معین، ۹۰ گرم گاز خالص وارد

قسمت بالایی کاتد شده و ۹۴ گرم گاز از قسمت پایینی کاتد خارج می‌شود. چند لیتر سوخت (در شرایط STP) مصرف شده است؟ (تمام

اجزای واکنش انجام شده، گازی شکل هستند.) ( $H = 1, O = 16: g.mol^{-1}$ )

۱۰۰/۸ (۴)

۸۹/۶ (۳)

۴۴/۸ (۲)

۲۲/۴ (۱)

محل انجام محاسبات



۹۹- در چه تعداد از واکنش‌های اکسایش-کاهش زیر عدد اکسایش فقط ۲ عنصر تغییر کرده است؟

- $\text{Cl}_2 + \text{NaOH} \rightarrow \text{NaCl} + \text{NaClO}_2 + \text{H}_2\text{O}$
- $\text{As}_2\text{S}_3 + \text{HNO}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_3\text{AsO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{NO}$
- $\text{UF}_6^- + \text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{H}^+ \rightarrow \text{HF} + \text{UO}_2^{2+}$
- $\text{NH}_3 + \text{O}_2 + \text{CH}_4 \rightarrow \text{HCN} + \text{H}_2\text{O}$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۰۰- در سلول برقکافت آب به‌ازای اکسایش ۵۴ گرم آب، چند مول گاز در آند تولید و چند مول الکترون مبادله می‌شود؟ ( $\text{H}=1, \text{O}=16: \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

(۱) ۳, ۳ (۲) ۳, ۱/۵ (۳) ۶, ۳ (۴) ۶, ۱/۵

۱۰۱- در کدام گزینه گستره تغییرات عدد اکسایش دو عنصر با هم برابر است؟

(۱)  $\text{F}, \text{H}$  (۲)  $\text{Mn}, \text{Cl}$  (۳)  $\text{Ti}, \text{O}$  (۴)  $\text{Cr}, \text{S}$

۱۰۲- چه تعداد از عبارات زیر در ارتباط با برقکافت سدیم کلرید مذاب درست است؟

- یون‌های  $\text{Na}^+(\text{l})$  با گرفتن الکترون، کاهش یافته و فلز سدیم ( $\text{Na}(\text{s})$ ) تولید می‌شود.
- برای کاهش دمای ذوب سدیم کلرید و صرفه‌جویی در هزینه‌ها از مقداری کلسیم کلرید استفاده می‌شود.
- مشابه سلول‌های گالوانی، آنیون‌ها به سمت آند حرکت می‌کنند.
- جهت جریان‌های الکترون در مدار بیرونی از سوی الکترودی است که به قطب مثبت باتری متصل است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۰۳- چه تعداد از عبارات زیر در ارتباط با استخراج صنعتی آلومینیم به روش مارتین‌هال درست است؟

- $E^\circ$  فرایند انجام‌شده کوچک‌تر از صفر بوده و واکنش کلی سلول با افزایش آنتالپی همراه است.
- یک گرم از فراورده کاتدی سلول در مقایسه با یک گرم از الکترولیت سلول، حجم بیشتری دارد.
- جرم الکترودی که به قطب منفی منبع جریان برق متصل است، در طول فرایند ثابت می‌ماند.
- به‌ازای تولید ۸۹۶ L گاز گلخانه‌ای در شرایط استاندارد، ۸۰ مول الکترون در مدار بیرونی مبادله می‌شود.

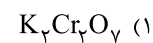
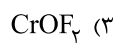
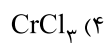
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات



۱۰۴- زمان لازم برای پوشش دادن یک گلدان فولادی با  $2/6$  گرم کروم در محلولی شامل این فلز با عبور جریان  $12$  آمپری برابر با  $40$  دقیقه است. کدام یک از

ترکیب‌های زیر می‌تواند به عنوان الکترولیت سلول آبکاری باشد؟ (هر مول الکترون معادل  $96500$  کولن بار الکتریکی و  $\text{Cr} = 52 \text{g.mol}^{-1}$ )



۱۰۵- چه تعداد از عبارتهای زیر درست است؟

- سلول نور الکتروشیمیایی نوعی سلول گالوانی بوده و در آن انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.
- در باتری‌های روی - نقره یک واکنش شیمیایی انجام می‌شود که روی اکسید و فلز نقره فراورده‌های آن هستند.
- فرایند هال به علت مصرف زیاد انرژی الکتریکی هزینه بالایی دارد.
- باتری‌های لیتیومی در مقایسه با باتری‌های قدیمی، سبک‌تر و کوچک‌تر بوده و توانایی ذخیره بیشتر انرژی را دارند.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)





# آزمون‌های سراسر کاج

گزینه‌درسورا انتخاب کنید.

سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱

دفترچه شماره ۳

آزمون شماره ۱۴

جمعه ۱۴۰۱/۱۰/۲۳

## پاسخ‌های تشریحی

### پایه دوازدهم ریاضی

#### دوره دوم متوسطه

نام و نام خانوادگی:	شماره داوطلبی:
تعداد سؤال: ۱۰۵	مدت پاسخگویی: ۱۴۰ دقیقه

عناوین مواد امتحانی آزمون گروه آزمایشی علوم ریاضی، تعداد سؤالات و مدت پاسخگویی

مدت پاسخگویی	شماره سؤال		تعداد سؤال	مواد امتحانی	ردیف
	تا	از			
۷۰ دقیقه	۱۵	۱	۱۵	حسابان ۲	۱
	۳۰	۱۶	۱۵	ریاضیات گسسته	
	۴۵	۳۱	۱۵	هندسه ۳	
۴۵ دقیقه	۸۰	۴۶	۳۵	فیزیک ۳	۲
۲۵ دقیقه	۱۰۵	۸۱	۲۵	شیمی ۳	۳

# آزمون‌های سراسر گاج

دروس	طراحان	ویراستاران علمی
ریاضیات	حسابان (۲)	سیروس نصیری حسین نادری
	گسسته	علی ایمانی
	هندسه (۲)	مجید فرهمندپور
فیزیک	ارسلان رحمانی امیررضا خوینی‌ها رضا کریم‌زاده - حسین شهبازی مسعود قره‌خانی - شهاب نصیری	مروارید شاه‌حسینی سارا دانایی کجانی حمیدرضا شیخ‌حسینی
		شیمی
		ایمان زارعی - میلاد عزیزی رضیه قربانی



فروشگاه مرکزی گاج: تهران - خیابان انقلاب  
نیش بازارچه کتاب

اطلاع‌رسانی و ثبت نام: ۰۲۱-۶۴۲۰

نشانی اینترنتی: www.gaj.ir

## آماده‌سازی آزمون

مدیریت آزمون: ابوالفضل مزرعتی

بازبینی و نظارت نهایی: سارا نظری

برنامه‌ریزی و هماهنگی: سارا نظری - مینا نظری

بازبینی دفترچه: بهاره سلیمی - عطیه خادمی

ویراستاران فنی: ساناز فلاحی - مروارید شاه‌حسینی - مریم پارسائیان - سپیده‌سادات شریفی - عاطفه دستخوش

سرپرست واحد فنی: سعیده قاسمی

صفحه‌آرا: فرهاد عبدی

طراح شکل: آرزو گلفر

حروف‌نگاران: مینا عباسی - مهناز کاظمی - فرزانه رجبی - ربابه الطافی - حدیث فیض‌الهی



به نام خدا

## حقوق دانش‌آموزان در آزمون‌های سراسری گاج

داوطلب گرامی؛ با سلام در اینجا شما را با بخشی از حقوق خود در آزمون‌های سراسری گاج آشنا می‌نمایم:

۱- اطلاعات شناسنامه‌ای و آموزشی شما مانند نام، نام خانوادگی، جنسیت و گروه آزمایشی بایستی به صورت صحیح در بالای پاسخ‌برگ درج شده باشد.

۲- آزمون‌های سراسری گاج باید راس ساعت اعلام شده در دفترچه، شروع و خاتمه یابد.

۳- محل برگزاری آزمون باید از لحاظ سرمایش و گرمایش، نور کافی، نظافت و سایر موارد در حد مطلوب و استاندارد باشد.

۴- سؤالات آزمون‌های سراسری گاج بایستی نزدیک‌ترین سؤالات به کنکور سراسری باشد و عاری از هرگونه اشکال علمی و تایپی باشد.

۵- بعد از هر آزمون و به هنگام خروج از جلسه آزمون بایستی پاسخ‌نامه‌ی تشریحی هر آزمون را دریافت نمایید.

۶- کارنامه‌ی هر آزمون بایستی در همان روز آزمون به روش‌های ذیل تحویل شما گردد:

• مراجعه به سایت گاج به نشانی [www.gaj.ir](http://www.gaj.ir)

• مراجعه به نمایندگی.

۷- خدمات مشاوره‌ای رایگانی که در طی ۱ مرحله آزمون (ویژه داوطلبان آزاد) ارائه می‌گردد شامل:

• برگزاری جلسه مشاوره حداقل یکبار در طی هر آزمون توسط رابط تحصیلی.

• تماس تلفنی حداقل ۱ بار در طی هر آزمون توسط رابط تحصیلی.

• تماس تلفنی با اولیا حداقل یکبار در هر فاز [آزمون‌های سراسری گاج در چهار فاز تابستانه، ترم اول، ترم دوم و جامع برگزار می‌گردد].

• بررسی کارنامه آزمون توسط رابط تحصیلی در هر آزمون.

چنانچه در هر یک از موارد فوق کمبود و یا نقصی مشاهده نمودید لطفاً بلافاصله با تلفن ۰۲۱-۶۴۲۰ تماس حاصل نموده و مراتب را اطلاع دهید.



در گاج، بهترین صدا،

صدای دانش‌آموز است.





۶ ابتدا سعی می‌کنیم قدرمطلق را حذف کنیم:

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$x < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x+1}{x+3} & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{4x^2 - 6x + 9} - \sqrt{4x^2 + 9x + 1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - 6x + 9 - 4x^2 - 9x - 1}{\sqrt{4x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 + 9x + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-15x + 8}{\sqrt{4x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 + 9x + 1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-15x}{\sqrt{4x^2} + \sqrt{4x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-15x}{4|x|} \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty, y = -\frac{15}{4} \\ x \rightarrow -\infty, y = \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بین دو خط} = \frac{15}{4} = 7/5$$

۸  $x = 1$  باید ریشهٔ مخرج باشد، پس:

$$(1)^3 - (a+2)(1) + 2a = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+b}{x^3 - 3x + 2} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+b}{(x-1)^2(x+2)} = -\infty$$

$$\Rightarrow \frac{1+b}{(0^+)^2} = -\infty \Rightarrow 1+b < 0 \Rightarrow -b > 1 \Rightarrow a = 1 < -b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{22x} - \sqrt{88x} - \sqrt{22x} + \sqrt{22x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{22x - \sqrt{88x} - 22x - \sqrt{22x}}{\sqrt{22x} - \sqrt{88x} + \sqrt{22x} + \sqrt{22x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3\sqrt{22x}}{\sqrt{22x} + \sqrt{22x}} = -\frac{3}{2}$$

۱۰ ابتدا باقی ماندهٔ تقسیم  $x^3 - 2$  بر  $x^3 + 1$  را محاسبه

می‌کنیم. بدین منظور در چندجمله‌ای  $x^3 + 1$  به جای  $x^3$  ها عدد ۲ را قرار می‌دهیم یعنی:

$$P(x) = x^3 + 1 = (x^3) + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow \text{باقی مانده} = (2)^2 \times x^2 + 1 = 4x^2 + 1$$

اکنون طبق تعریف تقسیم داریم:

$$x^3 + 1 = (x^3 - 2)Q(x) + 4x^2 + 1$$

حال برای یافتن مجموع ضرایب خارج قسمت، باید  $Q(1)$  را حساب کنیم، بنابراین:

$$(1)^3 + 1 = ((1)^3 - 2)Q(1) + 4(1)^2 + 1 \Rightarrow Q(1) = 3$$

## ریاضیات

۱ ابتدا نمودار  $f$  نسبت به محور  $X$ ها قرینه شده است و سپس ۶

واحد به بالا انتقال یافته است.

۲

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f$  تابعی اکیداً صعودی

$$g(x) = x^2 - 7x - 5 \Rightarrow g(x-1) = (x-1)^2 - 7(x-1) - 5$$

$$= x^2 - 9x + 3$$

$$(f \circ g)(x-1) < 0 \Rightarrow f(g(x-1)) < 0 \Rightarrow f(x^2 - 9x + 3) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} f(x^2 - 9x + 3) < f(3) \xrightarrow{\text{چون } f \text{ اکیداً صعودی}} f(3) = 0$$

$$x^2 - 9x + 3 < 3 \Rightarrow x^2 - 9x < 0 \Rightarrow 0 < x < 9$$

۳

$$3 \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 3 \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 3 \sin^2 x = (1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)$$

$$\Rightarrow 3 \sin^2 x = \sin^2 x (1 + \cos^2 x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ 3 \sin^2 x = 1 + \cos^2 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3 \sin^2 x = 1 + 1 - \sin^2 x \Rightarrow 4 \sin^2 x = 2 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}, \pi - \frac{\pi}{4}, \pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

۴ می‌دانیم  $\tan u + \cot u = \frac{2}{\sin 2u}$  بنابراین:

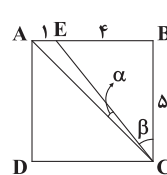
$$f(x) = \frac{1}{\tan kx + \cot kx} = \frac{1}{\frac{\sin^2 kx + \cos^2 kx}{\sin 2kx}} = \frac{1}{2} \sin 2kx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{دوره تناوب تابع از روی شکل} \\ \text{دوره تناوب تابع از روی ضابطه} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2\pi}{|2k|} = \pi \Rightarrow |k| = 1$$

$$-k > 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow f\left(\frac{3\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

۵



$$\Delta EBC: \tan \beta = \frac{4}{5}$$

$$\Delta ABC: \tan(\alpha + \beta) = 1$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5} \tan \alpha} = 1 \Rightarrow \tan \alpha + \frac{4}{5} = 1 - \frac{4}{5} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{9}{5} \tan \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{9}$$



۲ ۱۷

$$\begin{cases} n^3 + \delta | 2n + 4 \xrightarrow{\times(-n)^2} \begin{cases} n^3 + \delta | -2n^3 - 4n^2 \\ n^3 + \delta | n^3 + \delta \end{cases} \\ n^3 + \delta | n^3 + \delta \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} n^3 + \delta | 2n^3 + 2\delta \\ n^3 + \delta | n^3 + \delta \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n^3 + \delta | -4n^2 + 1\delta \\ n^3 + \delta | 2n + 4 \xrightarrow{\times 2n} \begin{cases} n^3 + \delta | -4n^2 + 1\delta \\ n^3 + \delta | 4n^2 + 8n \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^3 + \delta | 8n + 1\delta$$

$$\begin{cases} n^3 + \delta | 8n + 1\delta \\ n^3 + \delta | 8n + 1\delta \end{cases} \begin{cases} n^3 + \delta | 8n + 1\delta \\ n^3 + \delta | -8n - 1\delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^3 + \delta | -6$$

$$n^3 + \delta \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n^3 + \delta = 6$$

$$n^3 = 1 \Rightarrow n = 1$$

تنها ۱ عدد در رابطه صدق می‌کند.

۳ ۱۸

$$x^2 - 5x - 7 \equiv 13 \pmod{0} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 \equiv 13 \pmod{0}$$

$$(x-2)(x-3) \equiv 13 \pmod{0} \Rightarrow \begin{cases} x-2 \equiv 13 \pmod{0} \\ x-3 \equiv 13 \pmod{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 15 \pmod{0} \\ x \equiv 16 \pmod{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 13k + 2 \\ x = 13k + 3 \end{cases} \xrightarrow{k=8} \begin{cases} x = 106 \\ x = 107 \end{cases} \Rightarrow x_{\min} = 106 \Rightarrow \text{یکان} = 6$$

اگر n تعداد تخم‌مرغ‌ها باشد.

۴ ۱۹

$$n \equiv 2, n \equiv 4, n \equiv 5, n \equiv 6$$

$$\Rightarrow n \equiv [2, 4, 5, 6] \pmod{2} \Rightarrow n \equiv 6 \pmod{2}$$

$$\Rightarrow n = 60k + 2 \xrightarrow{k=2} n = 122$$

$$\Rightarrow \text{جمع ارقام} = 1 + 2 + 2 = 5$$

ابتدا روز اول اسفند را پیدا می‌کنیم.

۱ ۲۰

$$24 + 31 + 31 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 1 \equiv 3 + 2(3) + 5(2) + 1$$

$$\equiv 20 \pmod{7} \Rightarrow \text{اول اسفند دوشنبه است.}$$

پس اولین سه‌شنبه اسفند ماه، دوم اسفند است.

اگر ۲۱ روز آینده را حساب کنیم که همان ۲۳ اسفند است، باز هم سه‌شنبه و در حقیقت چهارشنبه‌سوری ۲۳ اسفند است.

۲ ۲۱

$$65 | 6^n (2^n - 1) \xrightarrow{(65, 6)=1} 65 | 2^n - 1$$

$$\Rightarrow 2^6 + 1 | 2^n - 1 \Rightarrow \frac{n}{6} = 2k \Rightarrow n = 12k$$

$$k \in \{1, \dots, 8\} \Rightarrow \text{هشت حالت وجود دارد.}$$

۴ ۱۱

$$f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\gamma}{\lambda} \cos 4x$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \min f(x) = -|\frac{\gamma}{\lambda}| + \frac{\delta}{\lambda} = \frac{1}{4}$$

۱ ۱۲

$$\cos 4x + \sin^2 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 2x + \sin^2 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin^2 2x = \sin^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$$

۳ ۱۳

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \log(4-3x) - \log(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

می‌دانیم تابع  $g(x) = \log(4-3x) - \log(2x-1)$  تابعی اکیداً نزولی است، پس:

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow (\log(4-3x) - \log(2x-1)) \rightarrow 0^+$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow (\log(4-3x) - \log(2x-1)) \rightarrow 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{(-1)^x}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{(-1)^x}{0^-} = +\infty$$

۳ ۱۴

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x)^x + (2x)^x + (3x)^x + \dots + (nx)^x}{(x)(x^x) + (2x)(x^x) + (3x)(x^x) + \dots + (nx)(x^x)} = 10.5$$

$$\Rightarrow \frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{1 + 2 + \dots + n} = 10.5 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 10.5$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 14 \times 15 \Rightarrow n = 14$$

چون مجانب افقی تابع  $y = 1$  می‌باشد، پس  $a = 1$  وچون  $x = -1$  مجانب قائم و  $x = 3$  حفره در نمودار است، پس  $m = -2$ و  $n = -3$  و  $b = -4$  می‌باشند، زیرا:الف)  $x = -1$  و  $x = 3$  ریشه‌های مخرج‌اند.ب)  $x = 3$  باید ریشه صورت باشد.بنابراین  $\frac{a+b}{m+n}$  برابر  $\frac{1-4}{-2-3}$  یعنی  $\frac{3}{5}$  خواهد بود.

۳ ۱۶

$$ab + a + b + 4 = a(b+1) + b + 1 + 3 = (b+1)(a+1) + 3$$

بررسی گزینه‌ها:

$$۱) (a+1)(b+1) + 3 = 98 \Rightarrow (a+1)(b+1) = 95$$

چنین اعدادی یافت می‌شود.

$$۲) (a+1)(b+1) = 96$$

چنین اعدادی یافت می‌شود.

$$۳) (a+1)(b+1) = 97$$

هیچ دو عدد طبیعی یافت نمی‌شود.

$$۴) (a+1)(b+1) = 98$$

چنین اعدادی یافت می‌شود.



۰ - منتظم مرتبه ۷:  $\bar{K}_p$  یک نوع

۲ - منتظم مرتبه ۷:  $C_p, C_q, C_r$  دو نوع

۴ - منتظم مرتبه ۷: چون مکمل ۲- منتظم مرتبه ۷ است، دو نوع داریم پس در نهایت ۵ نوع گراف با چنین مشخصاتی وجود دارد.

$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p-1 \Rightarrow 2+6 = p-1 \Rightarrow p=1 \quad \text{۲} \quad \text{۲۹}$$

حداکثر یال در  $\bar{G}$  زمانی رخ می‌دهد که در  $G$  حداقل یال رخ دهد که  $q_{\min}(G) = 3$  پس:

$$q_{\min}(G) + q_{\max}(\bar{G}) = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$3 + q_{\max}(\bar{G}) = \frac{1 \cdot (9)}{2} = 4.5 \Rightarrow q_{\max}(\bar{G}) = 42$$

۴ ۳۰

تعداد زیرگراف‌های ۱ - منتظم مرتبه ۲: ۶ حالت

تعداد زیرگراف‌های ۱ - منتظم مرتبه ۴: ۳ حالت  
در مجموع تعداد زیرگراف‌های ۱ - منتظم برابر ۹ است.

۳ ۳۱

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ a & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ a & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-a & -7 \\ 7a & -a+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ 14 & d \end{bmatrix}$$

$$7a = 14 \Rightarrow a = 2$$

$$9-a = b \xrightarrow{a=2} b = 7$$

$$c = -7$$

$$-a+16 = d \xrightarrow{a=2} d = 14$$

$$\frac{b+c+d}{a} = \frac{7-7+14}{2} = 7$$

$$A^2 - 5A + 4I = \bar{O} \Rightarrow A^2 - 5A + 6I = 2I$$

۱ ۳۲

$$\Rightarrow (A-2I)(A-3I) = 2I \Rightarrow (A-2I)\left(\frac{1}{2}(A-3I)\right) = I$$

$$(A-2I)^{-1} = \frac{1}{2}(A-3I) \quad \text{می‌دانیم } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$(BAB^{-1})^n = BA^n B^{-1} \quad \text{می‌دانیم:} \quad \text{۲} \quad \text{۳۳}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = I \Rightarrow A^{1^{\circ}} = I$$

$$(BAB^{-1})^{1^{\circ}} = BA^{1^{\circ}} B^{-1} = BIB^{-1} = BB^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها برابر ۲ است.

۳ ۳۴ یک ماتریس مربعی زمانی قطری است که درایه‌های غیرواقعی بر

قطر اصلی آن صفر باشد، پس:

$$3a - b = 0 \Rightarrow b = 3a$$

$$b - 2a - 2 = 0 \Rightarrow 3a - 2a = 2 \Rightarrow a = 2 \text{ و } b = 6$$

بنابراین ماتریس  $A$  به صورت  $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  است.

$$A^3 + A^2 = \begin{bmatrix} 125 & 0 \\ 0 & 64 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها = ۲۳۰

۴ ۲۲

$$3x + 5y = 181 \Rightarrow 5y \equiv 181 \Rightarrow -y \equiv 1 \Rightarrow y \equiv -1$$

$$y = 3k - 1 \Rightarrow 3x + 15k - 5 = 181$$

$$\Rightarrow 3x = 186 - 15k \Rightarrow x = 62 - 5k$$

$$\begin{cases} 62 - 5k \geq 0 \\ 3k - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \leq 12.4 \\ k \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow k = 1, 2, \dots, 12$$

$$x + y \leq 41 \Rightarrow 61 - 2k \leq 41 \Rightarrow (k \geq 10)$$

$$10 \leq k \leq 12 \Rightarrow k = 10, 11, 12$$

۲ ۲۳

$$0 | a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$a | 0, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 + 3y - 4 | 0. \quad \text{همواره برقرار است.}$$

۳ ۲۴

$$y(3x+5) = 2x+4 \Rightarrow y = \frac{2x+4}{3x+5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+5 | 2x+4 \\ 3x+5 | 3x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+5 | -6x-12 \\ 3x+5 | 6x+10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x+5 | -2 \Rightarrow 3x+5 \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

$$\Rightarrow 3x \in \{-4, -6, -3, -7\} \Rightarrow x = -2, -1$$

۲ نقطه وجود دارد.

۱ ۲۵

$$\overline{3a45b}^{99} \equiv 0 \Rightarrow \overline{5b+a4+3}^{99} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \overline{ab+54+3}^{99} \equiv 0 \Rightarrow \overline{ab}^{99} \equiv -57 \equiv 42$$

$$\Rightarrow a = 4, b = 2$$

$$34452 \equiv 52 \equiv 0$$

۴ ۲۶

$$240 | a^3 \Rightarrow 2^4 \times 3 \times 5 | a^3 \Rightarrow a^3 = 2^4 \times 3 \times 5k$$

$$\Rightarrow a_{\min} = 4 \times 3 \times 5 = 60$$

$$180 | b^2 \Rightarrow 3^2 \times 2^2 \times 5 | b^2 \Rightarrow b^2 = 3^2 \times 2^2 \times 5k$$

$$\Rightarrow b_{\min} = 3 \times 2 \times 5 = 30 \Rightarrow a + b = 90$$

۲ ۲۷

$$\frac{p(p-1)}{2} = (p-1)^2 - 2(p-1)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{2} = p - 1 - 2 \Rightarrow p = 2p - 6 \Rightarrow p = 6$$

$$\text{از طرفی گراف هر رأس } = p - 1 = 5$$

$$r < 7 \Rightarrow r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

۳ ۲۸

از طرفی گراف فرد منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

$$r = 0, 2, 4, 6$$

$$r = 0, 2, 4$$

همچنین گراف غیرکامل است، پس  $r \neq 6$  در نتیجه داریم:



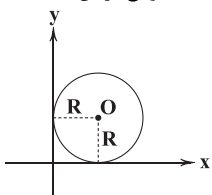
حالت (۲):  $L$  با  $\Delta$  و  $\Delta'$  موازی باشد، مسئله جواب ندارد.

$L$  \_\_\_\_\_  
 $\Delta$  \_\_\_\_\_  
 $\Delta'$  \_\_\_\_\_

حالت (۳):  $L$  با یکی از دو خط  $\Delta$  یا  $\Delta'$  منطبق شود، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

$\Delta$   $L$  \_\_\_\_\_  
 $\Delta'$  \_\_\_\_\_

۴۰ ۳ چون نقطه  $A$  در ربع اول است و دایره بر هر دو محور مماس است، پس معادله دایره در صورت وجود به صورت  $(x-R)^2 + (y-R)^2 = R^2$  است که نقطه  $A(1, 3)$  واقع بر آن است.



$$(1-R)^2 + (3-R)^2 = R^2 \Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 9 - 6R + R^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 8R + 10 = 0$$

چون  $\Delta > 0$  است و  $P = \frac{c}{a} = 10$  و  $S = \frac{-b}{a} = 8$  باشد، پس معادله ۲ ریشه مثبت دارد که هر دو قابل قبول هستند، بنابراین دو دایره با این شرایط وجود دارد.

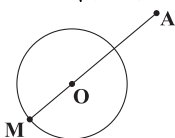
۲ ۴۱

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 9$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

$O(1, -2)$  و  $R=3$

$$AO = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$



بیشترین فاصله  $A$  تا محیط دایره  $AM = AO + R = 5 + 3 = 8$

۲ ۴۲

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 9$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$O(1, 3)$  و  $R=3$

$$x^2 + y^2 + 6x + m = 0 \Rightarrow (x^2 + 6x + 9) + y^2 = 9 - m$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + y^2 = 9 - m$$

$O'(-3, 0)$  و  $R' = \sqrt{9-m}$

$$OO' = \sqrt{(1+3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} \Rightarrow OO' = 5$$

اگر دو دایره مماس داخلی باشند:

$$OO' = |R' - R| \Rightarrow |\sqrt{9-m} - 3| = 5 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{9-m} = 8 \Rightarrow m = -55 \\ \sqrt{9-m} = -2 \end{cases}$$

اگر دو دایره مماس خارجی باشند:

$$OO' = R + R' \Rightarrow \sqrt{9-m} + 3 = 5 \Rightarrow \sqrt{9-m} = 2 \Rightarrow m = 5$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = 6 - 5 = 1$$

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -5 \end{cases}$$

$$A \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$bx + cy = -2 - 15 = -17$$

شرط آن که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد:

۱ ۳۶

$$\frac{a-2}{a} = \frac{b-1}{2b} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a-2}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3a - 6 = 2a \Rightarrow a = 6$$

$$\frac{b-1}{2b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3b = 4b - 3 \Rightarrow b = -3$$

$$a + b = 6 - 3 = 3$$

۱ ۳۷

$$\begin{vmatrix} 0 & x+1 & x+2 \\ x+6 & 0 & -2 \\ x+7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -(x+1) \begin{vmatrix} x+6 & -2 \\ x+7 & 0 \end{vmatrix} + (x+2) \begin{vmatrix} x+6 & 0 \\ x+7 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -2(x+1)(x+7) + 3(x+2)(x+6) = 0$$

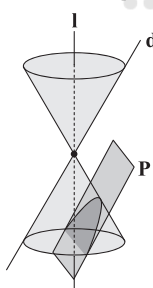
$$\Rightarrow -2x^2 - 16x - 14 + 3x^2 + 24x + 36 = 0 \Rightarrow x^2 + 8x + 22 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 88 = -24 < 0$$

معادله جواب ندارد.

در این حالت سطح مقطع به وجود آمده، سهمی است.

۳ ۳۸



۳۹ ۲ مکان هندسی نقاطی که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله باشند، خط

عمودمنصف پاره خط  $AB$  است که آن را  $L$  می‌نامیم و مکان هندسی نقاطی که از خط  $d$  به فاصله  $5$  باشد، ۲ خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  است که موازی  $d$  هستند و هر کدام از  $d$  فاصله  $5$  دارند.

محل برخورد خط  $L$  با خطوط  $\Delta$  و  $\Delta'$  جواب مسئله است که ۳ حالت داریم: حالت (۱):  $L$  خطوط  $\Delta$  و  $\Delta'$  را قطع کند، مسئله ۲ جواب دارد.





با توجه به نمودار از  $t = 4s$  تا  $t = 10s$  و همچنین از  $t = 10s$  تا  $t = 16s$  حرکت متحرک  
تندشونده و از  $t = 0$  تا  $t = 4s$  و از  $t = 6s$  تا  $t = 10s$  حرکت متحرک کندشونده است.  
در مرحله بعد باید مقادیر  $t'$  و  $t''$  را محاسبه کنیم:

$$t = 4s \text{ تا } t = 10s \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \frac{m}{s^2} \xrightarrow{t=10s} -3 = \frac{-6}{t} \Rightarrow t' = 2s$$

$$t = 10s \text{ تا } t = 6s \Rightarrow a = \frac{2}{2} \frac{m}{s^2} \xrightarrow{t=10s \text{ تا } t=6s} 2 = \frac{2}{10-t''}$$

$$\Rightarrow 20 - 2t'' = 2 \Rightarrow t'' = 9s$$

بنابراین از  $t = 4s$  تا  $t = 2s$  و همچنین از  $t = 9s$  تا  $t = 10s$  حرکت  
تندشونده است، بنابراین:  $t_1 = 3s$

همچنین از  $t = 0$  تا  $t = 2s$  و از  $t = 6s$  تا  $t = 9s$  حرکت کندشونده است،  
بنابراین:  $t_2 = 5s$

در نتیجه نسبت خواسته شده برابر است با:  $\frac{t_1}{t_2} = \frac{3}{5}$

۴۸ ۴ ابتدا به کمک تکنیک حرکت معکوس از  $t = 0$  تا  $t = 2s$  اندازه  
شتاب حرکت را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t \Rightarrow 10 = \frac{1}{2} a \times 2^2 \Rightarrow a = 5 \frac{m}{s^2}$$

حال می‌توانیم سرعت اولیه متحرک را به دست آوریم:

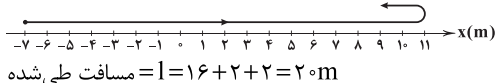
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{v_0 - 0}{2} \Rightarrow v_0 = 10 \frac{m}{s}$$

دو ثانیه سوم، یعنی بازه زمانی  $t = 4s$  تا  $t = 6s$ ، بنابراین:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{2} \times 5 \times 4^2 - 10 \times 4 + 10 \Rightarrow x_4 = 10m \\ x_6 = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x_6 = \frac{1}{2} \times 5 \times 6^2 - 10 \times 6 + 10 \Rightarrow x_6 = 40m \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{x_6 - x_4}{2} = \frac{40 - 10}{2} = 15 \frac{m}{s}$$

۴۹ ابتدا باید با توجه به اطلاعات سؤال، مسیر حرکت متحرک را  
مشخص کنیم. از آن جا که متحرک از مکان  $x_0 = -7m$  تا مکان  $x = +9m$   
رفته و بیشترین فاصله از مبدأ نیز به ۱۱ متر رسیده داریم:



تندی متوسط متحرک در این بازه برابر است با:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{9}{2} = 4.5 \frac{m}{s}$$

۵۰ ابتدا به کمک معادله مستقل از شتاب، سرعت متحرک را در  
لحظه  $t = 8s$  به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} v_{av} = \frac{v_1 + v_0}{2} \\ v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{v_1 + 0}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_1 + 0}{2} = \frac{40}{8} \Rightarrow v_1 + 0 = 10 \Rightarrow v_1 = 10$$

شتاب حرکت متحرک برابر است با:

$$a_{av} = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{8} = 1.25 \frac{m}{s^2}$$

۴۳ فاصله کانون از دو رأس کانونی  $a+c$  و  $a-c$  است.

$$\begin{cases} a+c=7 \\ a-c=3 \end{cases} \Rightarrow a=5 \text{ و } c=2$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$MF + MF' + FF' = 16 \Rightarrow 2a + 2c = 16 \Rightarrow a + c = 8 \quad 3 \quad 44$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+c=8 \\ a-c=2 \end{cases} \Rightarrow a=5 \text{ و } c=3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

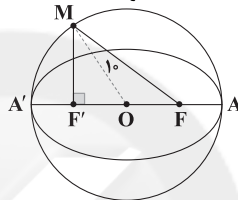
$$2b = 8 = \text{قطر کوچک}$$

۴۵  $2a = 2R = 20 \Rightarrow a = 10$  قطر دایره = قطر بزرگ بیضی

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{f}{10} = \frac{c}{10} \Rightarrow c = 8$$

$$OM = R = 10$$

$$OF' = c = 8 \text{ و } FF' = 2c = 16$$



$$\Delta OMF': OM^2 = MF'^2 + F'O^2 \Rightarrow 100 = MF'^2 + 64 \Rightarrow MF' = 6$$

$$\Delta MFF': MF^2 = MF'^2 + FF'^2 \Rightarrow MF^2 = 36 + 256 = 292$$

$$\Rightarrow MF = 2\sqrt{73}$$

## فیزیک

۴۶ با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده در سؤال، سرعت  
متحرک در لحظه  $t = 4s$  صفر شده است و سرعت آن نیز در هر ثانیه به اندازه  
 $a$  تغییر می‌کند. در لحظه  $t = 6s$  سرعت متحرک معادل  $-2a$  و در  
لحظه  $t = 1s$  سرعت متحرک معادل  $2a$  است، بنابراین با توجه به این که تندی  
در سؤال خواسته شده است، داریم:

$$\frac{|v_6|}{|v_1|} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$$

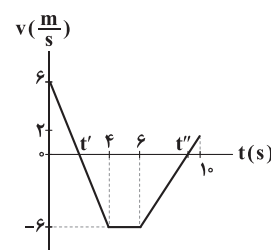
**دقت کنید:** برای به دست آوردن سرعت در لحظات  $t = 1s$  و  $t = 6s$ ، مبدأ را  
لحظه  $t = 4s$  در نظر گرفتیم چرا که در آن سرعت برابر صفر است.

۴۷ ابتدا به کمک نمودار شتاب - زمان، نمودار سرعت - زمان

حرکت متحرک را رسم می‌کنیم. سرعت اولیه متحرک برابر با  $v_0 = +6 \frac{m}{s}$  است

و در ۴ ثانیه اول که شتاب  $-3 \frac{m}{s^2}$  است، به اندازه  $12 \frac{m}{s}$  از سرعت اولیه کم  
می‌شود. سپس سرعت برای ۲ ثانیه ثابت می‌ماند و در ۴ ثانیه آخر که

شتاب  $+2 \frac{m}{s^2}$  است، به اندازه  $8 \frac{m}{s}$  به سرعت اضافه می‌شود:





همچنین راننده  $5^\circ$  ثانیه در واکنش خود تأخیر داشته و در این  $5^\circ$  ثانیه اتومبیل به اندازه  $15m$  به سمت مانع حرکت کرده است و پس از آن شروع به ترمز کرده است، یعنی فاصله بین اتومبیل و مانع در واقع  $135$  متر است. به کمک معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت داریم: (سرعت نهایی اتومبیل صفر خواهد بود).

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - (30)^2 = 2 \times a \times 135 \Rightarrow a = -\frac{10}{3} \Rightarrow |a| = \frac{10}{3} \frac{m}{s^2}$$

۵۴ ۲ در جابه‌جایی از طبقه ۱- تا طبقه ۵، آسانسور ۶ طبقه را طی کرده است، از طرفی ارتفاع هر طبقه برابر با ۴ متر است، بنابراین:

$$\Delta x_1 = 6 \times 4 = 24m$$

جابه‌جایی آسانسور از طبقه ۵ به طبقه ۳ نیز معادل ۲ طبقه و برابر است با:

$$|\Delta x_3| = 2 \times 4 = 8m$$

ولی چون خلاف جهت قبلی و رو به پایین برمی‌گردد، جابه‌جایی آن منفی است:

$$\Delta x_3 = -8m$$

مدت زمانی که آسانسور توقف داشته جابه‌جایی آن صفر بوده ( $\Delta x_2 = 0$ )، ولی  $\Delta t_2 = 2s$  است.

سرعت متوسط در کل مسیر برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{24m + 0 + (-8m)}{4/10s + 2s + 3/2s} = \frac{16}{10} = 1.6 \frac{m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{24 + 0 + (-8)}{4/10 + 2 + 3/2} = \frac{16}{10} = 1.6 \frac{m}{s}$$

۵۵ ۲ ابتدا با توجه به فاصله و زمان داده‌شده در سؤال، سرعت نسبی دو اتومبیل را از  $\Delta x = v_{نسبی} \times \Delta t$  به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = v_{نسبی} \times \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta x = 1500m}{\Delta t = 100s} \rightarrow 1500 = v_{نسبی} \times 100$$

$$\Rightarrow v_{نسبی} = 15 \frac{m}{s}$$

با توجه به آن‌که سرعت نسبی کم‌تر از سرعت اتومبیل A است ( $v_A < v_{نسبی}$ )، پس دو متحرک هم‌جهت حرکت کرده‌اند و سرعت‌هایشان از هم کم شده است، بنابراین  $v_B$  برابر است با:

$$v_{نسبی} = v_A - v_B \Rightarrow 15 = 25 - v_B \Rightarrow v_B = 10 \frac{m}{s}$$

۵۶ ۴ چون دو متحرک خلاف جهت هم حرکت می‌کنند، سرعت نسبی آن‌ها برابر با حاصل جمع سرعت‌های آن‌ها است:

$$v_{نسبی} = v_A + v_B = 3v + v = 4v$$

چون دو متحرک ساعت ۱۲ به راه افتاده‌اند و ساعت ۱۵ به هم رسیده‌اند، پس ۳ ساعت طول کشیده است تا دو متحرک به یکدیگر برسند.

بنابراین به کمک رابطه  $\Delta x = v_{نسبی} \times \Delta t$  فاصله دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{AB} = v_{نسبی} \times \Delta t = 4v \times 3 = 12v$$

با توجه به آن‌که  $v_1 = v$  است، حساب می‌کنیم چه مدت طول می‌کشد، متحرک (۲) کل مسیر را از B تا A طی کند:

$$\Delta x_{AB} = v_2 \times \Delta t \Rightarrow 12v = v \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = 12h$$

متحرک (۲) ساعت ۱۲ شروع به حرکت کرده و پس از ۱۲h به نقطه A می‌رسد، پس متحرک (۲) ساعت ۲۴ به نقطه A می‌رسد.

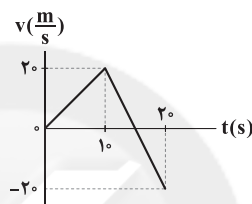
حال به کمک معادله سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متحرک را در لحظه  $t = 12s$  به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v_1 = -\frac{5}{4} \times 12 + 10 = -5 \frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی  $t = 8s$  تا  $t = 12s$  برابر است با:

$$\Rightarrow v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0 + (-5)}{2} = -\frac{5}{2} \frac{m}{s}$$

۵۱ ۴ ابتدا به کمک نمودار شتاب - زمان، نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می‌کنیم. متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده ( $v_0 = 0$ ) و ابتدا  $10^\circ$  ثانیه با شتاب  $2 \frac{m}{s^2}$  حرکت می‌کند و سرعتش  $20 \frac{m}{s}$  افزایش می‌یابد، سپس با شتاب  $-4 \frac{m}{s^2}$  به مدت  $10^\circ$  ثانیه حرکت می‌کند و سرعتش  $40 \frac{m}{s}$  کاهش می‌یابد.



می‌توانیم ابتدا جابه‌جایی متحرکی در بازه زمانی  $t = 8s$  تا  $t = 10s$  و سپس جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی  $t = 10s$  تا  $t = 12s$  را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} t = 8s \text{ تا } t = 0: \Delta x = \frac{1}{2} \times 2 \times 8^2 = 64m \\ t = 10s \text{ تا } t = 0: \Delta x = \frac{1}{2} \times 2 \times (10)^2 = 100m \end{cases}$$

$$t = 10s \text{ تا } t = 8s \rightarrow \Delta x_1 = 100 - 64 = 36m$$

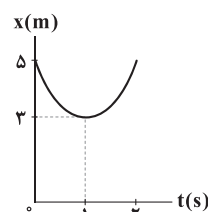
$$t = 12s \text{ تا } t = 10s: \Delta x_2 = \frac{1}{2} \times (-4) \times 2^2 + 20 \times 2 = 32m$$

حال می‌توان به راحتی سرعت متوسط را پیدا کرد:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t} = \frac{36 + 32}{4} = 17 \frac{m}{s}$$

۵۲ ۱ برای پاسخ به این سؤال باید نمودار مکان - زمان متحرک را رسم کنیم. معادله مکان - زمان داده‌شده یک معادله درجه ۲ است، بنابراین شکل آن به صورت یک سهمی است، بنابراین:

$$\begin{cases} t_1 = -\frac{b}{2a} = +\frac{4}{4} = 1 \Rightarrow x_1 = 3m \\ t_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 + 0 + 5 \Rightarrow x_2 = 5m \end{cases}$$



همان‌طور که مشاهده می‌شود جهت بردار مکان (برداري که مبدأ را به مکان جسم وصل می‌کند) همواره مثبت است و تغییر جهت نمی‌دهد. اما جهت حرکت متحرک یک بار در لحظه  $t = 1s$  از منفی به مثبت تغییر جهت می‌دهد.

۵۳ ۲ ابتدا سرعت را به متر بر ثانیه تبدیل می‌کنیم:

$$108 \div 3.6 = 30 \frac{m}{s}$$



بنابراین طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$4F = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{4}\right)a \xrightarrow{(1), (2)} 4F = \left(\frac{F}{24} + \frac{F}{24}\right)a \Rightarrow a = \frac{4F}{24}$$

$$\Rightarrow a = 48 \frac{m}{s^2}$$

۶۰ اگر نیروی متوازن به جسمی وارد شوند، با حذف یکی از آن‌ها، برآیند بقیه نیروها، هم‌اندازه با نیروی حذف‌شده ولی در جهت عکس آن خواهد بود. پس با قرینه شدن یکی از نیروها، برآیند بقیه نیروها، دو برابر نیروی قرینه‌شده و در جهت عکس آن خواهد شد.

چون در این سؤال ابتدا اندازه نیروها نیز دو برابر شده بود، پس برآیند نیروها، چهار برابر اندازه نیروی  $\vec{F}_1$  خواهد شد و داریم:

$$F_{net} = 4F_1 = 4 \times 5 = 20 \text{ N}$$

با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{20}{4} = 5 \frac{m}{s^2}$$

جسم تحت تأثیر نیروی خالص وارد بر آن و در جهت برآیند نیروهای واردشده شتاب می‌گیرد؛ پس با توجه به این‌که جهت نیروی برآیند، عکس نیروی  $\vec{F}_1$  است، شتاب نیز در خلاف جهت اولیه نیروی  $\vec{F}_1$  خواهد بود.

۶۱ در هنگام شروع حرکت آسانسور رو به بالا، شتاب داخل آسانسور  $g'_1 = g + a$  می‌باشد، پس عددی که نیروسنج در این حالت نشان می‌دهد، برابر است با:

$$W'_1 = mg'_1 = m(g+a) = 7 \times (10 + 3/5) = 7 \times 13/5 = 94/5 \text{ N}$$

در هنگام توقف آسانسور در طبقه چهارم، شتاب داخل آسانسور  $g'_2 = g - a$  خواهد بود، پس عددی که نیروسنج در این حالت نشان می‌دهد، برابر است با:

$$W'_2 = mg'_2 = m(g-a) = 7 \times (10 - 3/5) = 7 \times 6/5 = 45/5 \text{ N}$$

بنابراین اختلاف بیشترین و کم‌ترین عدد نشان داده‌شده توسط نیروسنج برابر است با:

$$\Delta W' = W'_1 - W'_2 = 94/5 - 45/5 = 49 \Rightarrow \Delta W' = 49 \text{ N}$$

۶۲ می‌دانیم رابطه تکانه به صورت  $\vec{p} = m\vec{v}$  است. بنابراین نمودار تکانه - زمان، ضربی از نمودار سرعت - زمان است، در نتیجه می‌توان به سادگی بدون توجه به تکانه - زمان بودن نمودار، نوع حرکت را مشخص کرد. هرگاه نمودار سرعت - زمان یا تکانه - زمان یک متحرک، به محور  $t$  نزدیک شود، حرکت آن کندشونده و هرگاه نمودار سرعت - زمان یا تکانه - زمان یک متحرک از محور  $t$  دور شود، حرکت آن تندشونده خواهد بود، بنابراین:

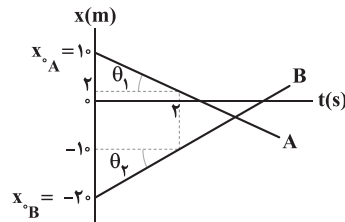
از  $t=0$  تا  $t=2s$ ، حرکت تندشونده، از  $t=2s$  تا  $t=4s$ ، حرکت یکنواخت، از  $t=4s$  تا  $t=5s$ ، حرکت کندشونده، از  $t=5s$  تا  $t=7s$ ، حرکت تندشونده، از  $t=7s$  تا  $t=11s$ ، حرکت یکنواخت و از  $t=11s$  تا  $t=16s$ ، حرکت کندشونده است. پس در مجموع، متحرک در کل حرکتش به مدت ۶ ثانیه حرکت کندشونده داشته است.

۶۳ با مقایسه بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی ( $f_{s, \max}$ ) با اندازه نیروی اعمال شده بر جسم، حرکت جسم را بررسی می‌کنیم.

$$f_{s, \max} = \mu_s F_N \xrightarrow{F_N = mg} \mu_s mg \xrightarrow{\mu_s = 0/5} \frac{m = 4 \text{ kg}}{\mu_s = 0/5}$$

$$f_{s, \max} = 0/5 \times 4 \times 10 = 20 \text{ N}$$

۵۷ ابتدا به کمک شیب نمودار مکان - زمان، سرعت هر متحرک را به دست می‌آوریم:



چون نمودار A نزولی است و شیب آن منفی است، بنابراین:

$$v_A = \tan \theta_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 4 \Rightarrow v_A = -4 \frac{m}{s}$$

نمودار B صعودی است و شیب آن مثبت است، بنابراین:

$$v_B = \tan \theta_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 5 \Rightarrow v_B = +5 \frac{m}{s}$$

با توجه به نمودار مکان - زمان داده‌شده متوجه می‌شویم که هر دو متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، در نتیجه معادله مکان - زمان هر متحرک را به صورت  $x = vt + x_0$  می‌نویسیم:

$$x_A = v_A t + x_{A0} \xrightarrow{v_A = -4 \frac{m}{s}, x_{A0} = 10 \text{ m}} x_A = -4t + 10$$

$$x_B = v_B t + x_{B0} \xrightarrow{v_B = 5 \frac{m}{s}, x_{B0} = -20 \text{ m}} x_B = 5t - 20$$

معادلات به دست‌آمده را در رابطه  $x_A = -2x_B$  قرار می‌دهیم و زمان را به دست می‌آوریم:

$$x_A = -2x_B \Rightarrow -4t + 10 = -2(5t - 20)$$

$$\Rightarrow -4t + 10 = -10t + 40 \Rightarrow 6t = 30 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

برای محاسبه فاصله دو متحرک باید لحظه به دست‌آمده را در معادلات مکان - زمان هر یک قرار داده و مکان هر کدام را به دست آوریم و از هم کم کنیم تا فاصله آن‌ها به دست آید:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A = -4t + 10 \xrightarrow{t=5s} x_A = -4 \times 5 + 10 = -10 \text{ m} \\ x_B = 5t - 20 \xrightarrow{t=5s} x_B = 5 \times 5 - 20 = 5 \text{ m} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{فاصله} = |x_A - x_B| = |-10 - 5| = 15 \text{ m}$$

۵۸ عبارت‌های «ج»، «د» و «و» درست هستند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

الف) نیروهای عمل و عکس‌العمل به دو جسم مختلف وارد می‌شوند و باید هم‌نوع باشند.

ب) این خاصیت، خاصیت لختی نامیده می‌شود.

ه) همواره ضریب اصطکاک ایستایی میان دو سطح بیشتر از ضریب اصطکاک جنبشی بین همان دو سطح است ( $\mu_s > \mu_k$ ) و ارتباطی به در حرکت بودن جسم ندارد.

۵۹ طبق قانون دوم نیوتون، برای جسم  $m_1$  می‌توان نوشت:

$$F = ma \Rightarrow F = m_1 \times 8 \Rightarrow m_1 = \frac{F}{8} \quad (1)$$

طبق قانون دوم نیوتون، برای جسم  $m_2$  داریم:

$$2F = m_2 \times 12 \Rightarrow m_2 = \frac{F}{6} \quad (2)$$



با استفاده از رابطه (۲) می‌توان نوشت:

$$f_{s,\max} = W \Rightarrow \mu_s F_N = mg \xrightarrow{F_N = F_e} \mu_s F_e = mg$$

$$\Rightarrow 0.4 \times F_e = 20 \Rightarrow F_e = \frac{20}{0.4} = 50 \text{ N} \Rightarrow F_e = 50 \text{ N}$$

با توجه به رابطه  $F_e = kx$  می‌توان نوشت:

$$F_e = kx \xrightarrow{F_e = 50 \text{ N}} 50 = x \times 1000 \Rightarrow x = \frac{50}{1000} = 0.05 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

x در رابطه  $F_e = kx$ ، جابه‌جایی فنر از حالت عادی است که چون فنر فشرده

شده است، پس طول ثانویه فنر برابر خواهد بود با:

$$\text{طول ثانویه فنر} = 13 - 5 = 8 \text{ cm}$$

ماهوره و تمام اجزای آن، تحت اثر نیروی وزن خود حرکت

می‌کنند و تنها نیروی وارد بر آن‌ها، نیروی وزن می‌باشد. هر جسمی هم که فقط تحت تأثیر نیروی وزن حرکت کند، حرکتی سقوط آزاد خواهد داشت و در نتیجه به تکیه‌گاه خود نیرو وارد نمی‌کند. در نتیجه ترازو عدد صفر را نشان خواهد داد.

وزن جسم در نقطه مورد نظر برابر است با:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_h = mgh \\ W_o = mg_o \end{array} \right. \Rightarrow \frac{W_h}{W_o} = \frac{g_h}{g_o}$$

$$\frac{g \propto \frac{1}{r^2}}{r} \rightarrow \left( \frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 = \left( \frac{R_e}{R_e + R_e} \right)^2 = \left( \frac{R_e}{2R_e} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{W_h}{W_o} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow W_h = \frac{1}{4} W_o = \frac{1}{4} mg_o \xrightarrow{m=4 \text{ kg}} W_h = \frac{1}{4} \times 4 \times 10 = 10 \text{ N}$$

ابتدا طول فنر را در حالتی که جسم در حالت تعادل قرار دارد،

به دست می‌آوریم:

$$L = \frac{\lambda + 12}{2} = 10 \text{ cm}$$

مطابق قانون هوک و تعادل نیروها داریم:

$$W = F_e \xrightarrow{W=mg} \xrightarrow{F_e=kx} mg = kx \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{x} \xrightarrow{\text{از طرفین جذر بگیریم}} \omega = \sqrt{\frac{g}{x}}$$

$$\frac{x=L-L_o=10-9=1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}}{g=10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{10}{0.01}} = 10 \sqrt{1} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

دامنه حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$A = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{2} = \frac{12 - 8}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$$

با داشتن مقدار دامنه و بسامد زاویه‌ای، مقدار بیشینه تندى حرکت را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{\max} = A\omega \xrightarrow{A=2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}} \xrightarrow{\omega=10 \sqrt{1} \frac{\text{rad}}{\text{s}}} v_{\max} = 0.02 \times 10 \sqrt{1}$$

$$\Rightarrow v_{\max} = 0.2 \sqrt{1} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \sqrt{1} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

چون  $F > f_{s,\max}$  شد، پس جسم حرکت می‌کند و اصطکاک از نوع جنبشی

خواهد بود، پس می‌توان نوشت:

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow{F_N = mg} \mu_k mg \xrightarrow{\mu_k = 0.3} \xrightarrow{m=4 \text{ kg}}$$

$$f_k = 0.3 \times 4 \times 10 = 12 \text{ N}$$

سطح بر جسم دو نیروی عمودی سطح و اصطکاک جنبشی وارد می‌کند که برآیند آن‌ها برابر است با:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow{F_N = mg = 4 \times 10 = 40 \text{ N}} \xrightarrow{f_k = 12 \text{ N}} R = \sqrt{(40)^2 + (12)^2}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{4^2 ((10)^2 + 3^2)} = 4 \sqrt{109} \text{ N}$$

با توجه به یکسان بودن حجم دو گلوله، برای مقایسه جرم

آن‌ها با استفاده از رابطه چگالی می‌توان نوشت:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V \xrightarrow{\frac{V_A = V_B}{\rho_A > \rho_B}} m_A > m_B$$

همان‌طور که می‌دانیم، هنگامی که گلوله‌ها به تندی حدى خود می‌رسند، نیروی مقاومت هوا برابر نیروی وزن آن‌ها خواهد شد، بنابراین نیروی مقاومت هوا در برابر گلوله A بیشتر خواهد بود. (چون جرم گلوله A از جرم گلوله B بیشتر است.)

$$mg = f_D \xrightarrow{m_A > m_B} f_{D_A} > f_{D_B}$$

با توجه به این‌که نیروی مقاومت هوا، به تندی حرکت جسم بستگی دارد و همچنین حجم دو جسم نیز برابر است، بنابراین تندی حدى گلوله A بیشتر است.

در حالت اول که جعبه را از حال سکون به حرکت درآورده‌ایم،

حرکت تندشونده و رو به بالاست و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$T_1 = m(g+a) \xrightarrow{m=3 \text{ kg}} \xrightarrow{a=1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} T_1 = 3(10+1) = 3 \times 11 = 33 \text{ N}$$

در حالت دوم، چون جعبه در حال متوقف شدن است، پس حرکت کندشونده و رو به بالاست و در نتیجه می‌توان نوشت:

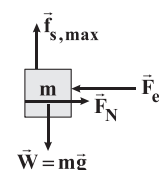
$$T_2 = m(g-a) \xrightarrow{m=3 \text{ kg}} \xrightarrow{a=1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} T_2 = 3 \times (10-1) = 3 \times 9 = 27 \text{ N}$$

اختلاف اندازه نیروی کشش طناب در هر دو حالت برابر است با:

$$T_1 - T_2 = 33 - 27 = 6 \text{ N}$$

با توجه به این‌که جسم در آستانه حرکت به سمت پایین قرار

دارد، نیروی خالص وارد بر جسم در راستاهای افقی و قائم، صفر است و می‌توان نوشت:



$$\left\{ \begin{array}{l} F_{\text{net},x} = 0 \Rightarrow F_N = F_e \quad (1) \\ F_{\text{net},y} \Rightarrow f_{s,\max} = W \quad (2) \end{array} \right.$$





۷۳ ۱ طول موج ایجاد شده در حالت دوم برابر است با:

$$\lambda_p = \lambda_1 + \Delta\lambda = 3 + 0.3 = 3.3 \text{ m}$$

با توجه به این که از همان دیپازون استفاده کرده ایم، بنابراین بسامد، ثابت است، در نتیجه داریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \xrightarrow{\text{ثابت: } f} \frac{\lambda_p}{\lambda_1} = \frac{v_p}{v_1} \xrightarrow{v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}} \rightarrow$$

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{F_p}{F_1}} \xrightarrow{\lambda_p = 3.3 \text{ m}, \lambda_1 = 3 \text{ m}} \frac{3.3}{3} = \sqrt{\frac{F_p}{F_1}} \Rightarrow \frac{F_p}{F_1} = 1.21$$

بنابراین:

$$\frac{F_p - F_1}{F_1} \times 100 = \frac{1.21 F_1 - F_1}{F_1} \times 100 = 21\%$$

در نتیجه نیروی کششی تار باید ۲۱ درصد افزایش یابد.

۷۴ ۲ با توجه به این که بیشینه انرژی پتانسیل نوسانگر برابر با

بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر است، خواهیم داشت:

$$\frac{K}{U_{\max}} = \frac{K}{K_{\max}} \Rightarrow \frac{K}{U_{\max}} = \left( \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv_{\max}^2} \right) = \left( \frac{v}{v_{\max}} \right)^2$$

$$\frac{K}{U_{\max}} = n \rightarrow n = \left( \frac{v}{v_{\max}} \right)^2 \Rightarrow v_{\max}^2 = \frac{v^2}{n}$$

اگر دامنه نوسان را با A نشان دهیم، با توجه به معادله مکان - زمان داده شده داریم:

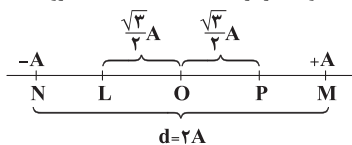
$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t) \\ x = \frac{1}{3} A \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{3} A$$

بیشینه شتاب نوسانگر برابر است با:

$$a_{\max} = \frac{v_{\max}^2}{A} \xrightarrow{v_{\max}^2 = \frac{v^2}{n}, A = \frac{1}{3} A} \rightarrow a_{\max} = \frac{v^2}{\frac{1}{3} A} = \frac{3v^2}{A}$$

۷۵ ۴ با توجه به این که مسافت مورد نظر مقدار معینی است، در نتیجه هرچه تندی حرکت جسم در آن ناحیه بیشتر باشد، مدت زمان کمتری طول خواهد کشید تا مسیر را طی کند.

هرچه نوسانگر به مرکز نوسان، نزدیک تر باشد، تندی آن بیشتر است، بنابراین باید مسافت  $\frac{\sqrt{3}d}{2}$  را در اطراف مرکز نوسان در نظر بگیریم. با توجه به تقارن تندی در دو طرف مرکز نوسان، می توان به راحتی نتیجه گرفت که  $\frac{\sqrt{3}d}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} A$  در یک طرف و  $\frac{\sqrt{3}d}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} A$  در طرف دیگر مرکز نوسان خواهد بود. یعنی در شکل باید نوسانگر از نقطه P به نقطه L برود.



مدت زمان سپری شده برای طی کردن این مسافت برابر است با:

$$\Delta t_{PL} = 2\Delta t_{OP} = \frac{2T}{6} = \frac{T}{3} \xrightarrow{T = \frac{1}{f}} \Delta t_{PL} = \frac{1}{3f} = \frac{1}{3 \times 25} = \frac{1}{75} \text{ s}$$

۶۹ ۳ نیروی مرکزگرای وارد بر ماهواره همان نیروی وزن است، بنابراین:

$$F_A = \frac{4}{3} F_B \Rightarrow mg_A = \frac{4}{3} mg_B \Rightarrow g_A = \frac{4}{3} g_B \xrightarrow{g = \frac{GM}{r^2}} \rightarrow r_B = 2r_A$$

با توجه به رابطه نیروی مرکزگرا  $(F = m \frac{v^2}{r})$  داریم:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \left( \frac{v_A}{v_B} \right)^2 \times \frac{r_B}{r_A} \Rightarrow \frac{4}{3} = 1 \times \left( \frac{v_A}{v_B} \right)^2 \times 2 \Rightarrow \left( \frac{v_A}{v_B} \right)^2 = \frac{2}{3}$$

در آخر نسبت  $\frac{K_A}{K_B}$  را محاسبه می کنیم:

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{m_A}{m_B} \times \left( \frac{v_A}{v_B} \right)^2 = 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

۷۰ ۱ به کمک قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow \mu_s mg = ma \Rightarrow a = \mu_s g \Rightarrow 3 = \mu_s \times 10 \Rightarrow \mu_s = 0.3$$

۷۱ ۴ ابتدا نسبت بیشینه سرعت نوسان ذرات ریسمان به سرعت

انتشار موج را تعیین می کنیم. برای تمایز این دو، سرعت انتشار موج را با  $v'$  نشان داده ایم:

$$\frac{v_{\max}}{v'} = \frac{A\omega}{v'} = \frac{\omega = \frac{2\pi}{T}}{v'} \frac{A \frac{2\pi}{T}}{v'} = \frac{2\pi A}{v' T} \xrightarrow{\lambda = v' T} \frac{2\pi A}{\lambda}$$

در حرکت هماهنگ ساده، مسافت طی شده در هر دوره تناوب برابر  $4A$  است. پس داریم:

$$4A = 16 \text{ cm} \Rightarrow A = 4 \text{ cm} = 0.04 \text{ m}$$

با توجه به نمودار داده شده در سؤال می توان نوشت:

$$\frac{9\lambda}{4} = 54 \Rightarrow \lambda = \frac{54 \times 4}{9} = 24 \text{ cm}$$

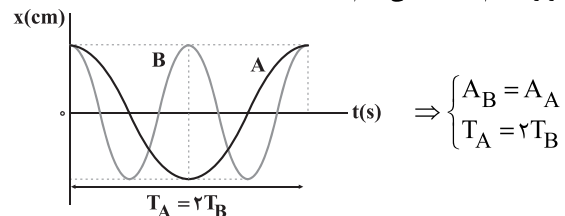
نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{v_{\max}}{v'} = \frac{2\pi A}{\lambda} \xrightarrow{A = 0.04 \text{ m}, \lambda = 0.24 \text{ m}} \frac{v_{\max}}{v'} = \frac{2\pi(0.04)}{0.24} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{\max}}{v'} = \frac{\pi}{3}$$

۷۲ ۴ با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، دامنه و دوره تناوب

دو نوسانگر را با هم مقایسه می کنیم:



با توجه به رابطه  $E = K_{\max} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$  می توان نوشت:

$$\frac{K_{\max A}}{K_{\max B}} = \frac{m_A}{m_B} \times \left( \frac{A_A}{A_B} \right)^2 \times \left( \frac{\omega_A}{\omega_B} \right)^2 \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{T}} \rightarrow$$

$$1 = \frac{m_A}{m_B} \times (1)^2 \times \left( \frac{T_B}{T_A} \right)^2 \Rightarrow 1 = \frac{m_A}{m_B} \times (1)^2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{m_A}{m_B} \times \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = 4$$



با استفاده از رابطه انرژی جنبشی  $K = \frac{1}{2}mv^2$  و با توجه به این که  $K_{\max_1} = K_{\max_2}$  است، می توان نوشت:

$$K_{\max_1} = K_{\max_2} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_{\max_1}^2 = \frac{1}{2}m_2v_{\max_2}^2$$

$$\frac{v_{\max_1} = A\omega}{m_1 = 9m_2} \Rightarrow 9m_1 \times A_1^2 \omega_1^2 = m_2 \times A_2^2 \omega_2^2$$

$$\frac{A_1 = A_2}{\omega_1 = \omega_2} \Rightarrow 9\omega_1^2 = \omega_2^2 \xrightarrow{\text{از طرفین جذر می گیریم}} 3\omega_1 = \omega_2$$

با توجه به رابطه  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  داریم:

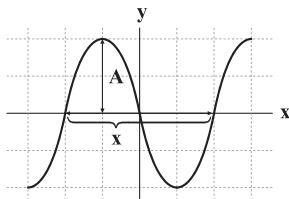
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ 3\omega_1 = \omega_2 \end{array} \right. \Rightarrow 3 \times \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow \frac{3}{T_1} = \frac{1}{T_2} \Rightarrow T_2 = 3T_1 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = 3$$

۸۰ مطابق شکل زیر، فاصله هر قله تا محور X، برابر با ۲ واحد است، پس:

$$A = 2 \text{ واحد}$$

مطابق شکل زیر، نقش موج هر ۴ واحد یک بار تکرار می شود، پس:

$$\lambda = 4 \text{ واحد}$$



رابطه تندی انتشار موج در طناب و بیشینه تندی ذرات طناب را تعیین می کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow v = \lambda f \\ v_{\max} = A\omega = A(2\pi f) \end{array} \right. \Rightarrow \frac{v_{\max}}{v} = \frac{A(2\pi f)}{\lambda f} = \frac{2\pi A}{\lambda}$$

$$\frac{A=2 \text{ واحد}}{\lambda=4 \text{ واحد}} \rightarrow \frac{v_{\max}}{v} = \frac{2 \times \pi \times 2}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$$

### شیمی

۸۱ به جز عبارت سوم، سایر عبارات درست هستند.

درجه یونش اسیدهای ضعیف  $\text{HCOOH}$  و  $\text{CH}_3\text{COOH}$  به غلظت محلول آن ها بستگی دارد. با مخلوط کردن این دو اسید، غلظت هر کدام از آن ها تغییر کرده و در نتیجه، درجه یونش اسیدها تغییر می کند.

۸۲ مطابق داده های سؤال صابون A، نمک آمونیوم اسیدچرب بوده و فرمول کلی آن به صورت  $\text{C}_n\text{H}_{2n-3}\text{COONH}_4$  است.

$$100 = \frac{\text{جرم اکسیژن}}{\text{جرم مولی صابون}} \times 100$$

$$\Rightarrow 11/30 = \frac{2(16)}{\text{جرم مولی صابون}} \times 100 \Rightarrow = 283 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$12n + (2n - 3) + 12 + 2(16) + 14 + 4 = 283 \Rightarrow n = 16$$

$$\text{درصد جرمی هیدروژن} = \frac{2(16) + 4 - 3}{283} \times 100 = 11/66$$

۷۶ هنگامی که در نقطه بازگشتی، وزنه ای افزوده و یا کاسته شود، دامنه نوسان تغییری نمی کند.

در حرکت هماهنگ ساده، بیشینه انرژی جنبشی با انرژی مکانیکی دستگاه برابر است و از طرفی در حرکت هماهنگ ساده دستگاه جرم و فنر، انرژی مکانیکی دستگاه از رابطه  $K = \frac{1}{2}kA^2$  محاسبه می شود.

چون دامنه نوسان و ثابت فنر تغییر نکرده، بنابراین انرژی مکانیکی دستگاه مستقل از جرم نوسانگر است. در نتیجه بیشینه انرژی جنبشی نوسانگر تغییری نمی کند.

۷۷ طبق رابطه انرژی مکانیکی بر حسب انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل کشسانی داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} K = 0/22 \text{ J} \\ U = 0/42 \text{ J} \end{array} \right. \Rightarrow E = K + U = 0/22 + 0/42 = 0/64 \text{ J}$$

می دانیم انرژی مکانیکی برابر با بیشینه انرژی جنبشی است، بنابراین:

$$E = K_{\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

$$\frac{E=0/64 \text{ J}}{m=0/6 \text{ kg}} \rightarrow 0/64 = \frac{1}{2} \times 0/6 \times v_{\max}^2$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{0/64}{0/3}} = \sqrt{\frac{32}{15}} = \frac{4\sqrt{30}}{15} \text{ m/s}$$

طبق رابطه بیشینه تندی نوسانگر داریم:

$$v_{\max} = A\omega$$

$$\frac{A=\frac{\lambda}{2}=4 \text{ cm}}{\omega=2\pi f, v_{\max}=\frac{4\sqrt{30}}{15} \text{ m/s}} \rightarrow \frac{4\sqrt{30}}{15} = 4 \times 10^{-2} \times 2 \times \pi \times f$$

$$\frac{\pi=3}{15} \rightarrow \frac{4\sqrt{30}}{15} = 4 \times 10^{-2} \times 2 \times 3 \times f \Rightarrow f = \frac{10\sqrt{30}}{9} \text{ Hz}$$

۷۸ می دانیم اندازه بیشینه شتاب نوسانگر از رابطه  $a_{\max} = A\omega^2$  به دست می آید و بیشینه تندی آن نیز از رابطه  $v_{\max} = A\omega$  قابل محاسبه است، بنابراین می توان نوشت:

$$\frac{a_{\max} = 70 \text{ m/s}^2}{v_{\max} = 14 \text{ m/s}} = \frac{A\omega^2}{A\omega} = \omega \Rightarrow \frac{70}{14} = \omega$$

$$\Rightarrow \omega = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

با داشتن مقدار  $\omega$ ، برای به دست آوردن طول آونگ می توان نوشت:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow{\text{طرفین را به توان (2) می رسانیم}} \omega^2 = \frac{g}{L} \Rightarrow L = \frac{g}{\omega^2} = \frac{10}{25} = \frac{10}{25} \text{ m}$$

$$\Rightarrow L = \frac{10}{25} = 0/4 \text{ m} \Rightarrow L = 40 \text{ cm}$$

۷۹ می دانیم رابطه انرژی جنبشی با تکانه به صورت  $K = \frac{p^2}{2m}$  تعریف می شود، بنابراین با توجه به این که بیشینه انرژی جنبشی نوسانگرها با هم برابر است، می توان نوشت:

$$\Rightarrow K_{\max_1} = K_{\max_2} \Rightarrow \frac{p_{\max_1}^2}{2m_1} = \frac{p_{\max_2}^2}{2m_2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p_{\max_2}}{p_{\max_1}}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1} \xrightarrow{p_{\max_2}=3} 3^2 \Rightarrow m_2 = 9m_1$$



۱ ۸۸

$$HX:K_a = \frac{[H^+][X^-]}{M-[H^+]} \Rightarrow 0.4 = \frac{[H^+]^2}{0.8-[H^+]}$$

$$\Rightarrow [H^+]^2 = 0.32 - 0.4[H^+] \Rightarrow [H^+]^2 + 0.4[H^+] - 0.32 = 0$$

$$\Rightarrow [H^+] = \frac{-0.4 \pm \sqrt{(0.4)^2 + 4(0.32)}}{2} \Rightarrow [H^+] = \begin{cases} 0.4 \checkmark \\ -0.8 \text{ غلط} \end{cases}$$

$$[H^+]_{HA} = 2/5 \times 0.4 = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$HA:K_a = \frac{[H^+][A^-]}{M-[H^+]} \Rightarrow 0.2 = \frac{1 \times 1}{M-1} \Rightarrow M = 6 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[HA] = \frac{10(\text{جگالی محلول})(\text{درصد جرمی})}{\text{جرم مولی حل شونده}} \Rightarrow 6 = \frac{10 \times 20 \times d}{60}$$

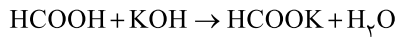
$$\Rightarrow d = 1/2 \text{ g.mL}^{-1}$$

۴ ۸۹

$$K_a = \frac{\alpha^2 M}{1-\alpha} \Rightarrow K_a = \frac{\alpha(\alpha M)}{1-\alpha} \Rightarrow 2 \times 10^{-4} = \frac{\alpha(8 \times 10^{-4})}{1-\alpha}$$

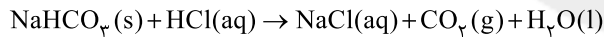
$$\Rightarrow 4\alpha = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0.2$$

$$[H^+] = \alpha M \Rightarrow 8 \times 10^{-4} = 0.2M \Rightarrow M = 4 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$



$$\frac{0.004 \times 1/2}{1} = \frac{x}{1 \times 56} \Rightarrow x = 0.2688 \text{ g} \equiv 268.8 \text{ mg KOH}$$

۲ ۹۰

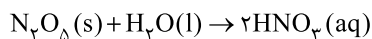


$$HCl: pH = 1/1 \Rightarrow [H^+] = 10^{-1/1} = 10^{-1} = (10^{1/3})^3 \times 10^{-2}$$

$$= 8 \times 10^{-2} M \Rightarrow [HCl] = 8 \times 10^{-2} M$$

$$\frac{0.4 L \times 8 \times 10^{-2} M HCl}{1} = \frac{1 \text{ g } NaHCO_3 \times \frac{P}{100}}{1 \times 84} \Rightarrow \%P = 7.33/6$$

۴ ۹۱



$$\frac{432 \times 10^{-3} \text{ g } N_2O_5}{1 \times 108} = \frac{x \text{ mol } HNO_3}{2} \Rightarrow x = 8 \times 10^{-3} \text{ mol } HNO_3$$

$$? \text{ mol } NaOH = 480 \times 10^{-3} \text{ g} \times \frac{1 \text{ mol}}{40 \text{ g}} = 0.012 \text{ mol } NaOH$$

هر مول NaOH، یک مول HNO<sub>3</sub> را خنثی می‌کند.

$$NaOH = 0.012 - 0.008 = 0.004 \text{ mol } NaOH$$

$$[NaOH] = \frac{0.004 \text{ mol}}{1 L} = 4 \times 10^{-4} \Rightarrow [OH^-] = 4 \times 10^{-4} M$$

$$[H^+] = \frac{10^{-14}}{4 \times 10^{-4}} = \frac{1}{4} \times 10^{-10} = 2.5 \times 10^{-11}$$

$$pH = -\log(2.5 \times 10^{-11}) = -[\log 2 + \log 10^{-11}] = -[0.3 - 11] = 10.7$$

۱ ۸۳

هر مول استر سه عاملی با ۳ مول سود واکنش می‌دهد.

$$? \text{ mol استر} = 0.4 L NaOH(aq) \times \frac{0.3 \text{ mol } NaOH}{1 L NaOH(aq)}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol استر}}{3 \text{ mol } NaOH} = 0.04 \text{ mol استر}$$

$$\text{جرم مولی استر} = \frac{32/24 \text{ g}}{0.04 \text{ mol}} = 806 \text{ g.mol}^{-1}$$

فرمول عمومی استرهای سه عاملی که زنجیرهای هیدروکربنی آن یکسان و سیرشده است به صورت  $C_n H_{2n-4} O_2$  می‌باشد:

$$806 = 12n + (2n-4) + 6(16) \Rightarrow n = 51$$

$$806 = 12n + (2n-4) + 6(16) \Rightarrow n = 51$$

۱ ۸۴ مطابق داده‌های سؤال در زنجیر هیدروکربنی پاک‌کننده

غیرصابونی مورد نظر یک پیوند  $C=C$  وجود دارد. سه پیوند  $C=C$  دیگر در حلقه بنزنی است. به این ترتیب فرمول کلی پاک‌کننده مورد نظر به صورت  $C_n H_{2n-1} C_6 H_4 SO_3 Na$  خواهد بود.

$$(2n-1) + 4 = 31 \Rightarrow n = 14$$

$$\frac{\%C}{\%O} = \frac{\text{جرم کربن}}{\text{جرم اکسیژن}} = \frac{12(n+6)}{16(3)} = \frac{12(14+6)}{16(3)} = 5$$

۲ ۸۵ شمار هر کدام از یون‌های هیدرونیوم ( $H_3O^+$ ) و آنیون

حاصل از یونش اسید ( $A^-$ ) برابر با ۲ و شمار مولکول‌های یونیده‌نشده HA برابر با ۵ است.

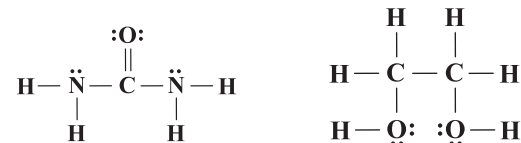
$$\alpha = \frac{2}{5+2} = 0.285$$

۱ ۸۶ هر چهار عبارت پیشنهادشده در ارتباط با اوره

و اتیلن گلیکول ( $C_2H_4(OH)_2$ ) درست هستند.

### بررسی عبارت‌ها:

- در اوره پیوند  $N-H$  و در اتیلن گلیکول وجود پیوند  $O-H$  باعث شده تا نیروی بین مولکولی هر دو ترکیب از نوع پیوند هیدروژنی باشد.
- جرم مولی اوره و اتیلن گلیکول به ترتیب ۶۰ و ۶۲ گرم بر مول است. شمار جفت الکترون‌های پیوندی اوره و اتیلن گلیکول به ترتیب برابر با ۸ و ۹ است.
- هر کدام از این دو مولکول دارای ۴ جفت الکترون ناپیوندی هستند:



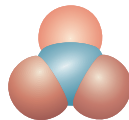
- هر کدام از ترکیب‌های اوره، اتیلن گلیکول و مس ( $II$ ) سولفات در آب محلول بوده و محلول‌ها جزو مخلوط‌های پایدار هستند.

۳ ۸۷

شکل‌های مربوط به  $N_2O_5$  و  $Li_2O$  نادرست رسم شده‌اند.

- با حل شدن  $Li_2O$  در آب، یون‌های  $Li^+$  و  $OH^-$  به تعداد برابر تولید می‌شود.

- با حل شدن  $N_2O_5$  در آب، یون‌های  $H^+$  و  $NO_3^-$  به تعداد برابر تولید می‌شود، اما مدل فضا پرکن یون  $NO_3^-$  به صورت زیر است:



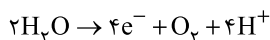


۱ ۹۲

## ۳ ۹۹ بررسی واکنش‌ها:

- واکنش اول: فقط عدد اکسایش Cl تغییر کرده است.
- واکنش دوم: عدد اکسایش سه عنصر S، As و N تغییر کرده است.
- واکنش سوم: عدد اکسایش دو عنصر O و U تغییر کرده است.
- واکنش چهارم: عدد اکسایش دو عنصر O و C تغییر کرده است.

۴ ۱۰۰



$$\frac{54g H_2O}{2 \times 18} = \frac{x \text{ mole}^-}{4} = \frac{y \text{ mol } O_2}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \text{ mole}^- \\ y = 1/5 \text{ mol } O_2 \end{cases}$$

## ۳ ۱۰۱ بررسی گزینه‌ها:

- ۱) H: -۱ تا +۱ [۲ واحد] ، F: -۱ تا +۱ [۲ واحد]
- ۲) Mn: -۲ تا +۷ [۸ واحد] ، Cl: -۱ تا +۷ [۸ واحد]
- ۳) O: -۲ تا +۲ [۴ واحد] ، Ti: -۲ تا +۴ [۴ واحد]
- ۴) S: -۲ تا +۶ [۸ واحد] ، Cr: -۲ تا +۶ [۸ واحد]

عبارت‌های سوم و چهارم درست هستند. ۲ ۱۰۲

## بررسی عبارت‌های نادرست:

- فلز سدیم به حالت مذاب تولید می‌شود.
- کمک ذوب این فرایند، کلسیم کلرید (CaCl<sub>2</sub>) است.

عبارت‌های اول و سوم درست هستند. ۲ ۱۰۳

## بررسی عبارت‌های نادرست:

- چگالی فراورده کاتدی سلول (آلومینیم مذاب) بیشتر از الکترولیت سلول است. بنابراین ۱g از Al مذاب در مقایسه با یک گرم از الکترولیت سلول، حجم کمتری دارد.
- گاز گلخانه‌ای همان CO<sub>2</sub> است.



$$\frac{x \text{ mol } e^-}{4} = \frac{1.96 \text{ L}}{1 \times 22.4} \Rightarrow x = 1.6 \text{ mole}^-$$

از رابطه زیر مقدار q را به دست می‌آوریم: ۱ ۱۰۴

$$q = It \Rightarrow q = 12 A \times (40 \times 60) s = 28800 C$$

$$? \text{ mole}^- = 28800 C \times \frac{1 \text{ mole}^-}{96500 C} = 0.3 \text{ mole}^-$$

$$? \text{ mol Cr} = 2/6 g \times \frac{1 \text{ mol Cr}}{52 g} = 0.05 \text{ mol Cr}$$

شمار الکترون‌های مبادله‌شده با ازای یک مول Cr برابر است با:

$$\frac{0.3 \text{ mole}^-}{0.05 \text{ mol Cr}} = 6 \text{ mole}^-$$

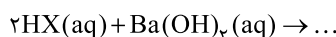
فقط در تبدیل  $Cr_2O_7^{2-}$  به Cr به ازای هر مول Cr، ۶ مول الکترون مبادله شده است.

هر چهار عبارت پیشنهادشده درست هستند. ۴ ۱۰۵

$$pH = 0.7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-0.7} = 10^{0.3-1} = 0.2M$$

$$K_a = \frac{[H^+][X^-]}{[HX]-[H^+]} = \frac{0.2 \times 0.2}{1-0.2} = 0.05$$

$$K_a = \frac{\alpha^2 \cdot M}{1-\alpha} \Rightarrow 0.05 = \frac{(\frac{1}{3})^2 \times M}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow M = 0.3 \text{ mol.L}^{-1}$$



$$\frac{0.3M \times x \text{ mL}}{2} = \frac{0.3M \times 40 \text{ mL}}{1} \Rightarrow x = 80 \text{ mL HX(aq)}$$

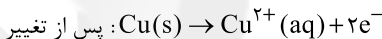
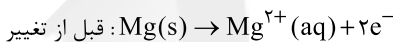
عبارت‌های اول و سوم درست هستند. ۳ ۹۳

## بررسی عبارت‌های نادرست:

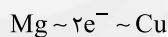
- مطابق مفاهیم مدل آرنیوس  $K_2O$  و  $SO_3$  به ترتیب باز و اسید آرنیوس هستند. غلظت یون هیدرونیوم در محلول‌های بازی کمتر از محلول‌های اسیدی است.
- قبل از مدل آرنیوس دانشمندان با برخی واکنش‌های اسیدها و بازها آشنا بودند.

با ایجاد خراش در حلبی، آهن خورده‌شده و تبدیل به هیدروکسید آن می‌شود. ۳ ۹۴

نیم‌واکنش‌های آندی در دو حالت مختلف به صورت زیر است: ۱ ۹۵



مطابق فرض سؤال مقدار الکترون مبادله‌شده در دو حالت یکسان در نظر گرفته شده است:



$$\frac{0.48}{1 \times 24} = \frac{x \text{ g}}{1 \times 64} \Rightarrow x = 1.28 \text{ g Cu}$$

با توجه به این که  $a < 1$  و قطعاً به خاطر وجود  $\sqrt{a}$  مقدار a ۲ ۹۶مثبت است، مقایسه میان  $E^\circ$  کاهش کاتیون‌ها به صورت  $D > A > B > C$  است. به این ترتیب فقط عبارت‌های اول و دوم درست هستند.

## بررسی عبارت‌ها:

- معادله موازنه‌شده واکنش میان فلز B و سولفات D به صورت زیر است:  
 $2yB(s) + mD_y(SO_4)_y(aq) \rightarrow 2mD(s) + yB_y(SO_4)_m(aq)$
- D و  $C^{X+}$  به ترتیب ضعیف‌ترین کاهنده و ضعیف‌ترین اکسنده است.
- فلز D با محلول شامل کاتیون A واکنش نمی‌دهد.
- سلول گالوانی حاصل از D و C بیشترین  $E^\circ$  را خواهد داشت.

به جز عبارت نخست، سایر عبارت‌ها درست هستند. ۳ ۹۷

فلز مس خورده می‌شود. زنگار سبز بر سطح مس نمونه‌ای از خوردگی است.

تفاوت جرم گاز خارج‌شده از قسمت پایینی کاتد ۲ ۹۸

 $(O_2, H_2O)$  و گاز واردشده به قسمت بالایی کاتد ( $O_2$ ) برابر با جرم سوخت مصرف شده است.

$$? g H_2 = 94 - 90 = 4 g H_2$$

$$? L H_2 = 4 g H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{2 g H_2} \times \frac{22.4 L H_2}{1 \text{ mol } H_2} = 44.8 L H_2$$