

مؤلف کتاب ریاضیات **ریپیٹچ**

طراح ریاضے قلمچے ، گاج و...

مدرس **پروازی** گاما ، یادلاین و فرادرس

عضو انجمن ریاضے ایران

عضو انجمن بیوانفورماتیک ایران

مدرس برنامہ نویسے کامپیوتر

مؤلف جمع بندی

konkur.in



شماره سوال	مبحث	زیر مبحث	سال ۹۸	سال ۹۹	سال ۱۴۰۰	صفحه یا ریز مبحث پرتکرار
۱۰۱	معادله درجه دوم	معادله و مسائل توصیفی	۰	۱	۰	۱۸۵۹
۱۰۲	معادله درجه دوم	حل معادله درجه ۲ و کاربردها	۱	۱	۱	۳۲۵۱۹
۱۰۳	معادله درجه دوم	معادله شامل عبارت های گویا	۰	۰	۱	۳۸۵۳۳
۱۰۴	تابع	مفهوم تابع و ضابطه جبری تابع	۲	۱	۲	۵۵۵۳۹
۱۰۵	تابع	نمودار تابع خطی و تابع درجه ۲	۰	۱	۱	۷۰۵۵۶
۱۰۶	کاربا داده های آماری	گردآوری داده ها	۱	۰	۱	۸۴۵۷۱
۱۰۷	کاربا داده های آماری	معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی	۱	۱	۱	۹۸۵۸۵
۱۰۸	نمایش داده ها	نمودارهای یک متغیره و چندمتغیره	۰	۲	۱	۱۱۶۵۹۹
۱۰۹	آشنایی با منطق و استدلال ریاضی	آشنایی با منطق و استدلال ریاضی	۱	۱	۱	۲۰۵۱
۱۱۰	تابع	انواع توابع	۲	۱	۲	۴۴۵۲۱
۱۱۱	تابع	اعمال بر روی توابع	۲	۱	۱	۵۴۵۴۵
۱۱۲	آمار	شاخص های آماری	۲	۳	۱	۶۲۵۵۵
۱۱۳	آمار و احتمال	شمارش	۱	۱	۱	۱۱۵۲
۱۱۴	آمار و احتمال	احتمال	۲	۲	۱	۲۷۵۱۲
۱۱۵	آمار و احتمال	چرخه آمار در حل مسائل	۰	۰	۰	۴۴۵۲۸
۱۱۶	الگوهای خطی	مدل سازی و دنباله	۱	۱	۰	۶۰۵۴۵
۱۱۷	الگوهای خطی	دنباله های حسابی	۱	۱	۲	۷۲۵۶۱
۱۱۸	الگوهای غیرخطی	دنباله هندسی	۱	۱	۲	۸۶۵۷۳
۱۱۹	الگوهای غیرخطی	توان گویا و ریشه نام	۱	۱	۱	۹۵۵۸۷
۱۲۰	الگوهای غیرخطی	تابع نمایی	۱	۰	۰	۱۰۵۵۹۶

۱۰۱. در معادله درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ ، اگر مجموع دو ریشه حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه مثبت آن کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۰۲. دامنه تعریف تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ کدام است؟

- ۱) $\{1\}$ ۲) $\{\}$ ۳) $\{0, 1\}$ ۴) $\{1, -1, 0\}$

۱۰۳. اگر $B = \{x | x \in \mathbb{R}, [\frac{x+1}{2}] = 4\}$ باشد، محدوده x در مجموعه B کدام است؟ (نماد جزء صحیح است.)

- ۱) $6 \leq x < 8$ ۲) $7 \leq x \leq 8$ ۳) $7 \leq x < 9$ ۴) $6 \leq x < 7$

۱۰۴. یک کیک را بین چند نفر به طور مساوی تقسیم کردیم، سپس دو نفر دیگر به این جمع ضافه شدند. در تقسیم مجدد کیک به هریک به اندازه $\frac{1}{4}$ کمتر رسید. پس از اضافه شدن دو نفر کیک بین چند نفر تقسیم شده است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۵. در گلدانی نقره‌ای نسبت وزن نقره به مس آن برابر ۸ است، این گلدان را ذوب و ۱۰۰ گرم مس به آن اضافه می‌کنیم. گلدانی جدید می‌سازیم که $\frac{4}{5}$ آن نقره است. وزن گلدان قبل از ذوب شدن چقدر است؟

- ۱) ۱۰۰ ۲) ۶۰۰ ۳) ۹۰۰ ۴) ۱۰۰۰

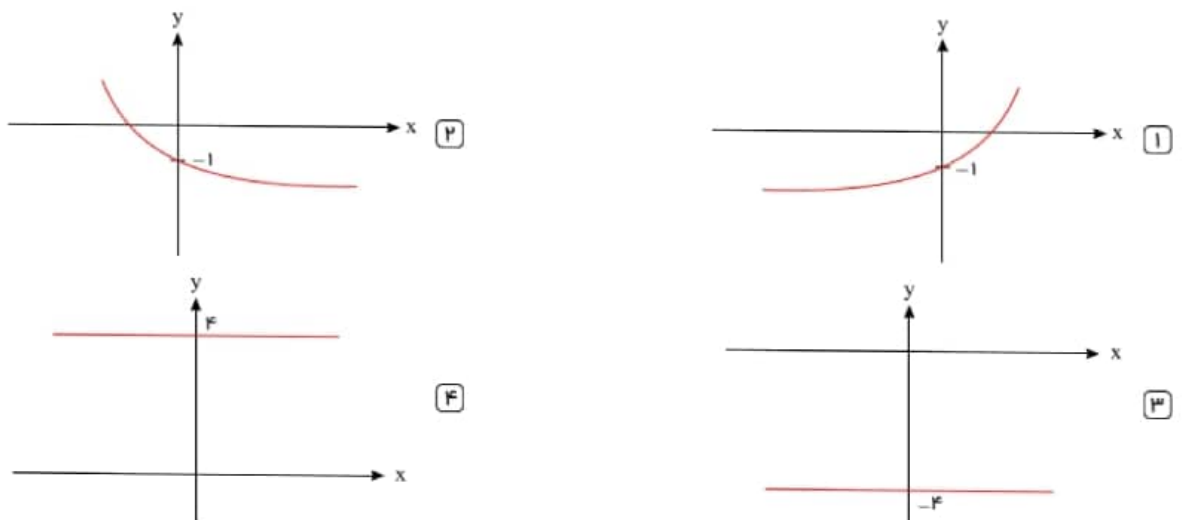
۱۰۶. نمودار سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ در نقطه به طول ۱- بر محور x مماس است و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند. حاصل $2a + b + 2c$ کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) ۳۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۰۷. رابطه $R = \{(2, 5), (-\frac{2}{3}, 2), (a, 1), (2, a), (4, 1), (3, 4)\}$ به‌ازای کدام مقدار a یک تابع است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۳

۱۰۸. اگر $f(x) = 2^x - 3$ و $g(x) = \frac{1}{2^{-x}} + 1$ باشد. نمودار $(f-g)(x)$ کدام گزینه است؟



۱۰۹. در یک دنباله هندسی افزایشی جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است. جمله اول کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

۱۱۰. در یک دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ مجموع سه جمله اول کدام است؟

$$\frac{26}{81} \quad \text{۴}$$

$$\frac{2}{3} \quad \text{۳}$$

$$\frac{26}{27} \quad \text{۲}$$

$$\frac{3}{5} \quad \text{۱}$$

۱۱۱. در یک دنباله حسابی مجموع شش جمله اول، نصف مجموع شش جمله دوم است، اگر جمله چهارم برابر ۸ باشد، اختلاف مشترک دنباله چقدر است؟

$$\frac{2}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{5} \quad \text{۳}$$

$$\frac{7}{2} \quad \text{۲}$$

$$\frac{16}{13} \quad \text{۱}$$

۱۱۲. در مثلث خیام ضابطه بازگشتی مربوط به مجموع سطرهای این مثلث کدام است؟

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n \quad \text{۴}$$

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n \quad \text{۳}$$

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2 \quad \text{۲}$$

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2 \quad \text{۱}$$

۱۱۳. به جای A و B به ترتیب از راست به چپ چه ارزش‌هایی را باید قرار دهیم؟

$p \wedge q$	$p \Rightarrow r$	$p \wedge r$	$\sim(p \Rightarrow q) \vee (\sim r \vee \sim q)$
T	F	A	B

$$T-F \quad \text{۴}$$

$$F-T \quad \text{۳}$$

$$F-F \quad \text{۲}$$

$$T-T \quad \text{۱}$$

۱۱۴. اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌های $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge \sim q)$ و $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \wedge \sim p)$ به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

$$T-F \quad \text{۴}$$

$$F-T \quad \text{۳}$$

$$F-F \quad \text{۲}$$

$$T-T \quad \text{۱}$$

۱۱۵. در مجموعه $\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ اگر A پیشامد اعداد مضرب ۴ و B پیشامد اعداد مضرب ۳ باشد، در این صورت پیشامد $A \cup B$ چند عضو دارد؟

$$11 \quad \text{۴}$$

$$10 \quad \text{۳}$$

$$9 \quad \text{۲}$$

$$8 \quad \text{۱}$$

۱۱۶. کتاب متمایز پایه دهم تجربی شامل ریاضی و فیزیک را در یک ردیف قرار می‌دهیم. با کدام احتمال دو کتاب ریاضی و فیزیک از این کتاب‌ها کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

$$\frac{2}{3} \quad \text{۴}$$

$$\frac{3}{4} \quad \text{۳}$$

$$\frac{3}{5} \quad \text{۲}$$

$$\frac{2}{5} \quad \text{۱}$$

۱۱۷. برای اندازه‌گیری داده‌هایی که قابل مرتب کردن بوده و فقط اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معناست، از کدام مقیاس اندازه‌گیری استفاده می‌شود؟

$$\text{فاصله‌ای} \quad \text{۴}$$

$$\text{ترتیبی} \quad \text{۳}$$

$$\text{نسبتی} \quad \text{۲}$$

$$\text{اسمی} \quad \text{۱}$$

۱۱۸. واریانس داده‌های آماری ۹ و ۱۲ و ۱۰ و ۹ و ۱۱ و ۱۰ و ۷ و ۱۲ کدام است؟

$$2,5 \quad \text{۴}$$

$$2,25 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$1,25 \quad \text{۱}$$

۱۱۹. در نمودار نقطه‌ای مقابل، مجموع مد، میانه و میانگین کدام است؟

					•		
					•		
	•			•	•		
•	•	•		•	•	•	•
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

$$25 \quad \text{۴}$$

$$24,25 \quad \text{۳}$$

$$22,25 \quad \text{۲}$$

$$23 \quad \text{۱}$$

۱۲۰. معادله خط برون‌یابی برای داده‌های جدول زیر کدام است؟

۸	۱۰	۱۲	۱۴	x
۲۵۰	۳۵۰	۲۰۰	۲۰۰	y

$$y = -\frac{25}{3}x - \frac{550}{3} \quad \text{۴}$$

$$y = \frac{25}{3}x - \frac{550}{3} \quad \text{۳}$$

$$y = -\frac{25}{3}x + \frac{550}{3} \quad \text{۲}$$

$$y = \frac{25}{3}x + \frac{550}{3} \quad \text{۱}$$

۱۰۱. گزینه ۲

$$6x^r + (k+1)x + k = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} = -\frac{k+1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow k+1 = -1 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow \text{معادله: } 6x^r - x - 2 = 0$$

$$\Delta = b^r - 4ac = (-1)^r - 4 \times 6 \times (-2) = 1 + 48 = 49 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \times 6}$$

$$\Rightarrow \text{ریشه مثبت} = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

۱۰۲. گزینه ۱

$$\begin{cases} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{1-x^r} \end{cases}$$

تنها عدد طبیعی که می‌تواند در ضابطه تعریف شود $x=1$ است. زیرا:

$$1 - x^r \geq 0 \Rightarrow -x^r \geq -1 \Rightarrow x^r \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} D_f = \{1\}$$

۱۰۳. گزینه ۲ محدوده x در مجموعه B را با توجه به تعریف جزء صحیح مشخص می‌کنیم.

$$B = \{x | x \in \mathbb{R}, \lfloor \frac{x+1}{r} \rfloor = 4\} \Rightarrow \lfloor \frac{x+1}{r} \rfloor = 4 \Rightarrow 4 \leq \frac{x+1}{r} < 5 \xrightarrow{\times r} 8 \leq x+1 < 10 \xrightarrow{-1} 7 \leq x < 9$$

۱۰۴. گزینه ۲ در ابتدا فرض می‌کنیم تعداد نفرات n نفر بوده‌اند، بنابراین به هر نفر $\frac{1}{n}$ یک می‌رسد.

در مرحله بعد به تعداد نفرات ۲ نفر دیگر اضافه می‌شوند بنابراین در این مرحله به هر نفر $\frac{1}{n+2}$ یک می‌رسد.

در مرحله دوم به هر نفر $\frac{1}{4}$ یک کمتر رسیده است. پس:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{4}$$

حال به حل معادله می‌پردازیم:

کدام مخرج‌ها ضرب $4n(n+2)$ می‌باشد که این مقدار را در کل معادله ضرب می‌کنیم:

$$4n(n+2) \times \frac{1}{n} - 4n(n+2) \times \frac{1}{n+2} = 4n(n+2) \times \frac{1}{4} \Rightarrow 4(n+2) - 4n = n(n+2) \Rightarrow 8 + 8 - 4n = n^2 + 2n \Rightarrow 8 = n^2 + 2n$$

$$\rightarrow n^2 + 2n - 8 = 0 \xrightarrow{\text{یک جمله مشترک}} (n+4)(n-2) = 0 \rightarrow n = -4 \text{ و } n = 2$$

تعداد نفرات منفی نخواهد بود پس $n = -4$ غیرقابل قبول است.

بنابراین در ابتدا تعداد نفرات ۲ نفر بوده و پس از اضافه شدن ۲ نفر تعداد کل ۴ نفر شده است.

۱۰۵. گزینه ۲ نسبت وزن نقره به وزن مس برابر ۸ است یعنی: $\frac{\text{نقره}}{\text{مس}} = 8$

اگر وزن مس را x در نظر بگیریم $\frac{\text{نقره}}{x} = 8$ پس وزن نقره برابر $8x$ است نتیجه اینکه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر $8x + x = 9x$ است.

۱۰۰ گرم مس به گلدان اول اضافه شده پس وزن گلدان جدید برابر $9x + 100$ خواهد بود.

چون $\frac{4}{5}$ گلدان جدید نقره است، پس:

$$\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{8x}{9x+100} = \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 5(8x) = 4(9x+100) \rightarrow 40x = 36x + 400 \rightarrow 40x - 36x = 400 \rightarrow 4x = 400 \rightarrow x = 100$$

وزن مس در گلدان اول

$$9x = 9(100) = 900$$

۱۰۶. گزینه ۴

جن سهمی در نقطه به طول -۱ بر محور xها مماس است، پس رأس سهمی نقطه (-۱, ۰) است.

$$\frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow -b = -2a \Rightarrow b = 2a, f(0) = c \Rightarrow c = 4$$

$$f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + 4 = 0 \Rightarrow a - 2a + 4 = 0 \Rightarrow a = +4, b = +8, c = 4$$

$$\Rightarrow 2a + b + 2c = 24$$

۱۰۷. گزینه ۳ برای این که رابطه تابع باشد، باید دو زوج مرتب (۲, ۵) و (۲, a) که دارای مؤلفه‌های اول یکسان هستند، مؤلفه‌های دومشان هم یکسان باشد. در نتیجه:

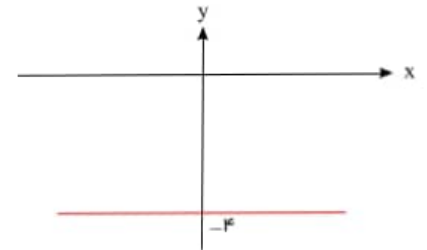
$$a = 5$$

۱۰۸. گزینه ۳ کافی است $(f - g)(x)$ را تشکیل دهیم:

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(x) = 2^x - 3 \\ g(x) = \frac{1}{2^{-x}} + 1 = 2^x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x) = 2^x - 3 - 2^x - 1 = -4$$



۱۰۹. گزینه ۱ با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ خواهیم داشت:

$$a_r = a_1 r^r = 10 \quad a_y = a_1 r^9 = 40$$

طرفین دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_1 r^r}{a_1 r^9} = \frac{10}{40} \Rightarrow \frac{1}{r^8} = \frac{1}{4} \Rightarrow r^8 = 4 \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \pm \sqrt{2} \xrightarrow{\text{مثبتی}} r = \sqrt{2} a_1 r^r = 10 \xrightarrow{r=\sqrt{2}} a_1 (\sqrt{2})^2 = 10 \Rightarrow a_1 \times 2 = 10 \Rightarrow a_1 = 5$$

گزینه ۲. ۱۱۰

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ a_r &= 2 \left(\frac{1}{3}\right)^r = 2 \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \frac{a_r}{a_1} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow S_r = \frac{\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^r\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^r\right) = \frac{26}{27}$$

$$S_{1r} - S_r$$

$$S_{1r} - S_r = 2S_r \Rightarrow S_{1r} = 3S_r$$

۱۱۱. گزینه ۱ مجموع شش جمله دوم برابر است با:

با توجه به صورت سوال داریم:

مجموع جملات دنباله حسابی $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ است بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{12}{3} (2a_1 + (12-1)d) &= 3 \left[\frac{6}{3} (2a_1 + (6-1)d) \right] \\ \Rightarrow 12a_1 + 66d &= 18a_1 + 45d \Rightarrow 18a_1 - 12a_1 = 66d - 45d \\ \Rightarrow 6a_1 &= 21d \Rightarrow a_1 = \frac{21}{6}d \Rightarrow a_1 = \frac{7}{2}d \end{aligned}$$

جمله چهارم برابر ۸ است یعنی داریم:

$$a_r = 8 \Rightarrow a_1 + 3d = 8$$

$$\frac{7}{2}d + 3d = 8 \Rightarrow \frac{7d + 6d}{2} = 8 \Rightarrow \frac{13d}{2} = 8 \Rightarrow d = \frac{16}{13}$$

۱۱۲. گزینه ۳ با توجه به مثلث خیار داریم:

	1				→ 1
	1	1			→ 2
	1	2	1		→ 4
	1	3	3	1	→ 8
1	4	6	4	1	→ 16

اعضا دنباله مجموع سطرها به صورت $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ است، یعنی جمله اول $a_1 = 1$ است و هر جمله از ضرب جمله قبل در عدد 2 به دست می آید بنابراین:

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$$

۱۱۳. گزینه ۴

$p \wedge q$	$p \Rightarrow r$	$p \wedge r$	$\overbrace{\sim(p \Rightarrow q)}^F \vee \overbrace{(\sim r \vee \sim q)}^T$
T ↓ $p \equiv T$ $q \equiv T$	F ↓ $r \equiv F$	F ↓ A	T ↓ B

۱۱۴. گزینه ۱

$$p \equiv T, q \equiv F, r \equiv T \vee F$$

$$\underbrace{(\sim p \wedge q)}_F \Rightarrow \underbrace{(r \wedge \sim q)}_{F \vee T} \equiv T$$

$$\underbrace{(p \Leftrightarrow q)}_F \Rightarrow \underbrace{(r \wedge \sim p)}_F \equiv T$$

۱۱۵. گزینه ۳

$$A = \{4, 8, 12, 16, 20\}, B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$(A \cap B) = \{12\}, n(A) = 5, n(B) = 6 \rightarrow n(A \cup B) = 5 + 6 - 1 = 10 \text{ عضو}$$

ابتدا $n(A), n(B)$ و $n(A \cap B)$ را محاسبه کرده و سپس در فرمول قرار می دهیم.

۱۱۶. گزینه ۴: A' متمم پیشامد A یعنی دو کتاب فیزیک و ریاضی کنار هم باشند:

$$n(S) = 6! \rightarrow \text{جاگنت 6 کتاب}$$

$$n(A) = 2 \times 5!$$

$$\Rightarrow P'(A) = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{2 \times 5!}{6!}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P'(A) = 1 - \frac{2 \times 5!}{6!} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

۱۱۷. گزینه ۴ طبق تعریف متغیر کمی با مقیاس فاصله ای برای داده هایی است که قابل مرتب کردن هستند، همچنین اختلاف بین مقادیر داده ها با معناست.

تذکر: داده هایی که قابل مرتب کردن هستند نباید ذهن را منحرف کرده و به سمت متغیر ترتیبی ببرد چراکه ادامه سؤال به متغیر فاصله ای اشاره دارد.

۱۱۸. گزینه ۴ ابتدا میانگین را حساب می کنیم:

$$\bar{x} = \frac{12 + 7 + 10 + 11 + 9 + 10 + 12 + 9}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

حال واریانس را به دست می آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{(12-10)^2 + (7-10)^2 + (10-10)^2 + (11-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (12-10)^2 + (9-10)^2}{8}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{4 + 9 + 0 + 1 + 1 + 0 + 4 + 1}{8} = \frac{20}{8} = 2,5$$

۱۱۹. گزینه ۲ مد داده با بیش ترین فراوانی یعنی برابر ۸ است. چون داده ۸ چهار بار تکرار شده است. حال میانگین را محاسبه می کنیم. داریم:

$$\bar{x} = \frac{3 + (2 \times 4) + 5 + (2 \times 7) + (4 \times 8) + 9 + 10}{1 + 2 + 1 + 2 + 4 + 1 + 1} = \frac{81}{12} = 6,75$$

$$\text{میانه} \Rightarrow 3, 4, 4, 5, 7, \underbrace{7, 8, 8, 8, 8, 9, 10}$$

$$Q_7 = \frac{7+8}{2} = 7,5 \text{ میانه}$$

$$\text{مد} + \text{میانه} + \text{میانگین} = 8 + 7,5 + 6,75 = 22,25$$

۱۲۰. گزینه ۱ ابتدا میانگین داده های z و y را مشخص می کنیم.

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 12 + 14}{4} = 11$$

۱۰۱. کدام یک از معادلات زیر ریشه مضاعف دارد؟

$x^2 = 2x + 1$ (۱)
 $x^2 - 2x = x - 1$ (۲)
 $x^2 + 6x = 2x - 4$ (۳)
 $x^2 = 4x + 4$ (۴)

۱۰۲. تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ را در دامنه $\{-99, -98, \dots, 0, 1, \dots, 99, 100\}$ در نظر بگیرید. میانگین مقادیر برد تابع f ، کدام است؟

$3,75$ (۱)
 4 (۳)
 $4,25$ (۴)

۱۰۳. به ازای کدام مقادیر زیر تساوی $[x] = 2x - 1$ همواره برقرار است؟

صفر و ۱ (۱)
 1 و $\frac{1}{2}$ (۲)
 1 و $-\frac{1}{2}$ (۳)
 -1 و $-\frac{1}{2}$ (۴)

۱۰۴. اگر $x = 2$ و $x = b$ جوابهای معادله $\frac{2}{x} - \frac{a}{x-3} = 3$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

2 (۱)
 3 (۲)
 4 (۳)
 6 (۴)

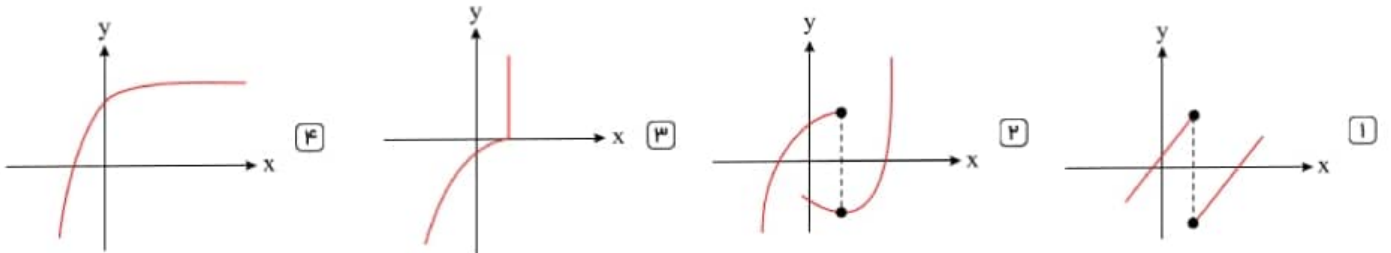
۱۰۵. معادله $\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}$ چند جواب دارد؟

1 (۱)
 2 (۲)
 3 (۳)
 صفر (۴)

۱۰۶. به ازای کدام مقدار a رأس دو منحنی $y = 2x^2 - x + 2a$ و $y = -2x^2 - x + a$ روی خطی موازی محور طولها می افتند؟

$\frac{1}{4}$ (۱)
 $-\frac{2}{a}$ (۲)
 $\frac{3}{8}$ (۳)
 $\frac{2}{5}$ (۴)

۱۰۷. کدام نمودار، نمایش یک تابع $y = f(x)$ است؟



۱۰۸. نمودار نمایی $f(x) = (k-2)x + k^x$ محور عرضها را در چه نقطه‌ای قطع می کند؟

$(1, 0)$ (۱)
 $(0, 2)$ (۲)
 $(0, 1)$ (۳)
 $(2, 0)$ (۴)

۱۰۹. در یک دنباله هندسی $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ و $S_5 = \frac{422}{81}$ است. جمله اول کدام است؟

2 (۱)
 $\frac{1}{4}$ (۲)
 3 (۳)
 -2 (۴)

۱۱۰. در یک دنباله هندسی $a_5 a_7 = m$ می باشد. حاصل $a_3 a_{11} - a_7^2$ کدام است؟

صفر (۱)
 1 (۲)
 2 (۳)
 3 (۴)

۱۱۱. $11, m, n, 11$ چهار جمله دوم یک دنباله حسابی اند، مجموع 20 جمله اول این دنباله چند است؟

440 (۱)
 370 (۲)
 -430 (۳)
 340 (۴)

۱۱۲. در مثلث خیام، مجموع ارقام سطر ششم کدام است؟

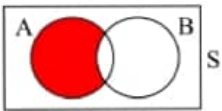
6 (۱)
 32 (۲)
 16 (۳)
 64 (۴)

۱۱۳. کدام یک از هم ارزی‌های زیر نادرست است؟

$\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$ (۱)
 $p \Rightarrow \sim q \equiv \sim(p \vee q)$ (۲)
 $\sim p \Rightarrow q \equiv p \vee q$ (۳)
 $\sim p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow p$ (۴)

۱۱۴. اگر درست p ، نادرست q و دلخواه r باشند، ارزش کدام گزینه وابسته به ارزش r است؟

$(p \vee q) \vee r$ (۱)
 $(p \Rightarrow q) \wedge r$ (۲)
 $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ (۳)
 $(q \Rightarrow p) \wedge r$ (۴)



$B - A$ (۴)

$A \cap B$ (۳)

$A - B$ (۲)

$A \cup B$ (۱)

۱۱۵. در شکل زیر کدام پیشامد هاشور زده شده است؟

۱۱۶. از ظرفی شامل ۶ مهره آبی و ۷ مهره سیاه دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل یکی از آن‌ها آبی است؟

$\frac{28}{41}$ (۴)

$\frac{14}{39}$ (۳)

$\frac{19}{26}$ (۲)

$\frac{18}{41}$ (۱)

۱۱۷. مقیاس متغیر در دو موضوع «مدت زمان امتحان» و «ساعت شروع امتحان» به ترتیب کدام است؟

فاصله‌ای - فاصله‌ای (۴)

فاصله‌ای - نسبتی (۳)

نسبتی - فاصله‌ای (۲)

نسبتی - نسبتی (۱)

۱۱۸. در داده‌های آماری ۱۱، ۶، ۵، ۱۳، ۸، ۷، ۱۰، ۱۳، ۷، ۱۳ داده‌های کمتر از میانه را حذف می‌کنیم. واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

$4,5$ (۴)

$3,6$ (۳)

$3,2$ (۲)

$2,8$ (۱)

۱۱۹. در نمودار دایره‌ای متناظر با جدول زیر، زاویه مرکزی مربوط به افراد ۲۰ تا ۳۰ ساله برابر ۶۸ درجه است. تقریباً چند درصد افراد، حداکثر ۳۰ سال سن دارند؟

سن افراد	کمتر از ۲۰	۲۰ تا ۳۰	۳۰ تا ۴۰	۴۰ تا ۵۰
فراوانی	۲۵	k	۱۸	۳۰

52 (۴)

43 (۳)

29 (۲)

47 (۱)

۱۲۰. تعداد کالای فروخته‌شده توسط یک فروشگاه در هفته‌های اول تا هفتم به صورت جدول زیر است:

هفته	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تعداد کالاهای فروخته‌شده	۸	x	۵	y	۱۵	۱۰	۱۲

پیش‌بینی‌ها به کمک برون‌یابی خطی نشان می‌دهد که تعداد کالایی که در هفته نهم به فروش می‌رسد ۸ کالا است. مقدار $x + y$ کدام است؟

76 (۴)

50 (۳)

36 (۲)

26 (۱)

۱۰۱. گزینه ۳ معادلات را به شکل استاندارد $ax^2 + bx + c = 0$ می‌نویسیم.

بررسی گزینه‌ها:

در گزینه (۱) چون a و c مختلف‌العلامه هستند، $\Delta > 0$ و معادله دو ریشه متمایز دارد. $x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow$

در گزینه (۲) داریم:

$$x^2 - 2x - x + 1 = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - (4)(1)(1) = 9 - 4 > 0$$

بنابراین در گزینه (۲) معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

در گزینه (۳) داریم:

$$x^2 + 6x - 2x + 4 = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow \Delta = (4)^2 - (4)(1)(4) = 16 - 16 = 0$$

بنابراین در گزینه (۳) Δ برابر صفر شده، پس معادله دارای ریشه مضاعف است.

در گزینه (۴) چون a و c مختلف‌العلامه هستند، پس $\Delta > 0$ و معادله دارای دو ریشه متمایز است.

$$x^2 - 4x - 4 = 0$$

۱۰۲. گزینه ۲ برای حل سؤال کفایت به ازای مقادیر دامنه برد تابع را به دست آورد و میانگین مقادیر برد را محاسبه کنیم ولی نکته قابل توجه این است که اعداد دامنه به جز صفر و ۱۰۰ قرینه بوده و به

صورت زیر قابل ساده شدن هستند.

$$f(-99) = -\frac{1}{2}(-99) + 4, f(99) = -\frac{1}{2}(99) + 4 \Rightarrow f(99) + f(-99) = \frac{99}{2} + 4 - \frac{99}{2} + 4 = 8$$

به همین ترتیب دو به دو حاصل جمع تمام $f(x)$ هایی که x های قرینه دارند برابر با ۸ می‌شود.

$$\left. \begin{array}{l} f(99) + f(-99) = 8 \\ f(98) + f(-98) = 8 \\ \vdots \\ f(1) + f(-1) = 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع کل برابر است با}} 99 \times 8 = 792$$

محاسبه دو مقدار $f(0)$ و $f(100)$ را نیز انجام می‌دهیم:

$$f(0) = 0 + 4 = 4$$

$$f(100) = -\frac{1}{2}(100) + 4 = -46 \quad \text{میانگین اعضای برد تابع} = \frac{\text{مجموع } f(x) \text{ هایی که } x \text{ های قرینه دارند} + f(0) + f(100)}{200} = \frac{792 + 4 - 46}{200} = 3,75$$

۱۰۳. گزینه ۲ با قرار دادن مقادیر گزینه‌ها در معادله داریم:

گزینه ۱:

$$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow \begin{cases} [x] = 0 \\ 2 \times 0 - 1 = -1 \quad \times \end{cases} \\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} [1] = 1 \\ 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark \end{cases} \end{array} \right.$$

گزینه ۲:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} [\frac{1}{2}] = 0 \\ 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \checkmark \end{cases} \\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} [1] = 1 \\ 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark \end{cases} \end{array} \right.$$

گزینه ۳:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} [-\frac{1}{2}] = -1 \\ 2 \times (-\frac{1}{2}) - 1 = -1 - 1 = -2 \quad \times \end{cases} \\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} [1] = 1 \\ 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark \end{cases} \end{array} \right.$$

گزینه ۴:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow a_5 a_7 = a_1 r^5 \times a_1 r^7 = m \Rightarrow a_1^2 r^{12} = m \quad (1)$$

حال عبارت مورد سوال را با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی اینگونه می‌نویسیم:

$$a_7 a_{11} - a_5^2 = a_1 r^7 \times a_1 r^{10} - (a_1 r^5)^2 = a_1^2 r^{17} - a_1^2 r^{10} = 0$$

پس اصلا جواب رابطه به عبارت (1) بستگی ندارد و همواره برابر صفر است.

۱۱۱. گزینه ۲ اعداد روبه‌رو چهار جمله دوم یک دنباله حسابی‌اند، یعنی داریم:

$$r, m, n, 11$$

$$a_5 = r, \quad a_7 = m, \quad a_9 = n, \quad a_{11} = 11$$

پس اگر جمله عمومی دنباله برابر $a_n = a_1 + (n-1)d$ باشد، داریم:

$$\left. \begin{aligned} a_5 &= a_1 + (5-1)d = r \\ a_{11} &= a_1 + (11-1)d = 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4d = r \\ a_{11} &= a_1 + 10d = 11 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$a_{11} - a_5 = a_1 + 10d - (a_1 + 4d) = 11 - r \Rightarrow 6d = 11 - r \Rightarrow 3d = \frac{11-r}{2} \Rightarrow d = \frac{11-r}{6}$$

برای به دست آوردن جمله اول داریم:

$$a_5 = a_1 + 4d = r \xrightarrow{d=r} a_1 + 4 \times \left(\frac{r}{3}\right) = r \Rightarrow a_1 = r - \frac{4r}{3} = -\frac{r}{3}$$

بنابراین برای به دست آوردن مجموع جملات داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(ra_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(r \times (-\frac{r}{3}) + (n-1)\frac{r}{3}) = \frac{n}{2}(-\frac{r^2}{3} + (n-1)\frac{r}{3}) \xrightarrow{n=r}$$

$$S_{r_5} = \frac{r}{2}(-\frac{r^2}{3} + (r-1)\frac{r}{3}) = \frac{r}{2}(-\frac{r^2}{3} + \frac{(19) \times r}{3}) = \frac{r}{2}(-\frac{r^2}{3} + \frac{57r}{3})$$

$$S_{r_5} = \frac{r}{2} \times (37r) = 37 \times \frac{r^2}{2}$$

۱۱۲. گزینه ۲ در مثلث خیام یا پاسکال مجموع اعداد هر سطر با دنباله $a_n = 2^{n-1}$ مشخص می‌شود، بنابراین مجموع جملات سطر ششم برابر است با:

$$a_n = 2^{n-1} \xrightarrow{n=6} a_6 = 2^{6-1} = 2^5 = 32$$

۱۱۳. گزینه ۲ نکته:

$$\left\{ \begin{aligned} p \Rightarrow q &\equiv q \Rightarrow p \quad \text{قاعده‌ی عکس نقیض گزاره شرطی} \\ \sim(p \vee q) &\equiv \sim p \wedge \sim q, \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{قوانین دمورگان} \\ p \Rightarrow q &\equiv \sim p \vee q \quad \text{تبدیل ترکیب شرطی به فصلی} \\ \sim(p \wedge q) &\equiv \sim p \vee \sim q \end{aligned} \right.$$

گزینه‌ی (1) طبق قانون دمورگان صحیح است.

گزینه‌ی (3) طبق قاعده تبدیل ترکیب شرطی به فصلی صحیح است.

گزینه‌ی (4) طبق قاعده‌ی عکس نقیض

$$p \Rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q) \quad \text{گزینه‌ی (2)}$$

$$r \equiv \text{درست} \quad , \quad q \equiv \text{نادرست} \quad , \quad p \equiv \text{درست} \quad \text{گزینه 4}$$

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (1) در ترکیب فصلی چند گزاره کافی است یکی از آنها درست باشد، آن‌گاه ترکیب فصلی دارای ارزش درست است.

$$(p \vee q) \equiv (\text{درست} \vee \text{نادرست}) \equiv \text{درست} \rightarrow \text{درست} \vee r \equiv \text{درست} \vee \text{درست} \equiv \text{درست}$$

گزینه (2) تنها وقتی ترکیب شرطی نادرست است، که مقدم درست و تالی نادرست باشد و در ترکیب عطفی کافی است که یکی از دو گزاره نادرست باشد تا ترکیب عطفی نادرست باشد.

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\text{درست} \Rightarrow \text{نادرست}) \equiv \text{نادرست} \rightarrow \text{نادرست} \wedge r \equiv \text{نادرست} \wedge \text{درست} \equiv \text{نادرست}$$

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\text{درست} \Rightarrow \text{درست}) \equiv \text{درست} \rightarrow \text{نادرست} \Rightarrow r \equiv \text{نادرست} \Rightarrow \text{درست} \equiv \text{درست}$$

گزینه (3) ترکیب شرطی به انتهای مقدم درست است.

گزینه (4)

به ارزش r بستگی دارد. $r \wedge \text{درست} \rightarrow \text{درست} \equiv \text{درست} \equiv (\text{درست} \Rightarrow \text{نادرست}) \equiv (q \Rightarrow p)$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{درست} \wedge \text{درست} &\equiv \text{درست} \\ \text{نادرست} \wedge \text{نادرست} &\equiv \text{نادرست} \end{aligned} \right.$$

۱۱۵. گزینه ۲ در شکل A هاشور زده ولی B هاشور نخورده است. پس $A - B$ هاشور زده شده.

۱۱۶. گزینه ۲ با استفاده از اصل ششم داریم: (در پیشامد A' فرض می‌کنیم که هیچ مهره‌ی آبی انتخاب نشده باشد).

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{13}{2}} = \frac{7 \times 6}{13 \times 12} = \frac{7}{26}$$

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{r} \Rightarrow \begin{cases} [-\frac{1}{r}] = -1 \\ r \times (-\frac{1}{r}) - 1 = -1 - 1 = -2 \end{cases} \times \\ x = -1 \Rightarrow \begin{cases} [-1] = -1 \\ r \times (-1) - 1 = -r - 1 = -3 \end{cases} \times \end{cases}$$

این تساوی فقط به ازای $x = \frac{1}{r}$ و $x = 1$ برقرار است.

۱۰۴. گزینه ۲ یک جواب معادله $x = 2$ است. پس در معادله صدق می‌کند.

$$\frac{2}{2} - \frac{a}{2-2} = 2 \rightarrow 1 + a = 2 \rightarrow a = 1$$

بنابراین معادله به صورت $\frac{2}{x} - \frac{2}{x-2} = 2$ است. دو طرف معادله را در $x(x-2)$ ضرب می‌کنیم:

$$2x - 2 - 2x = 2x^2 - 2x \rightarrow 2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \rightarrow x = 1, x = 2$$

بنابراین $b = 1$ و در نتیجه: $a + b = 2$

۱۰۵. گزینه ۴ سمت راست معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{\cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} + 1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x^4-1}$$

بنابراین معادله به شکل $\frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$ است. پس:

$$\cancel{x}(x^2-1) = \cancel{x}(x^2-1) \rightarrow \cancel{x} - x = \cancel{x} - 1 \rightarrow x = 1$$

چون $x = 1$ باعث صفر شدن مخرج دو کسر می‌شود، پس قابل قبول نیست و معادله جواب ندارد.

۱۰۶. گزینه ۱ در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ عرض رأس سهمی برابر $\frac{-\Delta}{4a}$ است.

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{1+4a}{4} \\ y_2 = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1+4a}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1+4a}{4} = \frac{-1+4a}{4} \Rightarrow 1+4a = -1+4a \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۱۰۷. گزینه ۴ گزینه «۴» صحیح است، زیرا در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» خطی موازی محور y ها می‌توان رسم کرد که نمودار تابع را در بیشتر از یک نقطه قطع می‌کنند.

۱۰۸. گزینه ۲ اولاً تابع نمایی به صورت $f(x) = a^x$ است. بنابراین ضرب x نباید وجود داشته باشد، داریم:

$$k - 2 = 0 \rightarrow k = 2 \Rightarrow f(x) = 2^x$$

حال بررسی می‌کنیم $f(x)$ محور عرض‌ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند، کافی است x را برابر صفر قرار دهیم.

$$\rightarrow f(0) = 2^0 = 1$$

$$\Rightarrow (0, 1)$$

بنابراین تابع $f(x)$ محور عرض‌ها را در نقطه $(0, 1)$ قطع می‌کند.

۱۰۹. گزینه ۱ از رابطه $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ به این نکته پی می‌بریم که در این دنباله هندسی هر جمله، $\frac{2}{3}$ برابر جمله قبلی است. پس نسبت مشترک $r = \frac{2}{3}$ است و با توجه به فرمول مجموع جملات خواهیم داشت:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = a_1 \times \frac{1-r^5}{1-r}, S_5 = \frac{422}{81}$$

$$\Rightarrow \frac{422}{81} = a_1 \times \frac{1 - (\frac{2}{3})^5}{1 - \frac{2}{3}} = a_1 \times \frac{\frac{211}{243}}{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{422}{81} = a_1 \times \frac{211}{243} \times \cancel{3} \Rightarrow a_1 = 2$$

۱۱۰. گزینه ۱ با توجه به جمله عمومی $a_n = a_1 r^{n-1}$ دنباله هندسی خواهیم داشت:

$$P(A) = 1 - \frac{7}{26} = \frac{19}{26}$$

۱۱۷. گزینه ۲ در رابطه با مدت زمان امتحان، نسبت داده‌های آماری با معناست. (مثلاً مدت زمان یک امتحان، دو برابر مدت زمان امتحانی دیگر است.) اما در رابطه با ساعت شروع امتحان، نسبت داده‌های آماری بی‌معناست و مقیاس آن فاصله‌ای است.

۱۱۸. گزینه ۳ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم تا میانه مشخص شود:

۵, ۶, ۷, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۳

$\underbrace{\hspace{2cm}}$
 میانه

پس از حذف داده‌های کوچکتر از میانه سایر داده‌ها را به‌صورت روبه‌رو داریم: ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۳, ۱۳
 واریانس داده‌های باقی‌مانده را حساب می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{8 + 10 + 11 + 13 + 13}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(8-11)^2 + (10-11)^2 + (11-11)^2 + (13-11)^2 + (13-11)^2}{5}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{9 + 1 + 0 + 4 + 4}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$$

۱۱۹. گزینه ۱ زاویه مرکزی مربوط به افراد ۳۰ تا ۳۰ ساله را برحسب k به‌دست می‌آوریم:
 تعداد کل داده‌ها:

$$n = 25 + k + 18 + 30 = 73 + k$$

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 68^\circ = \frac{k}{73 + k} \times 360^\circ \Rightarrow 68(73 + k) = 360k$$

$$\Rightarrow 360k - 68k = 4964 \Rightarrow 292k = 4964 \Rightarrow k = 17$$

$$\text{درصد افراد حداکثر ۳۰ ساله: } \frac{f}{n} \times 100 = \frac{25 + 17}{90} \times 100 = \frac{140}{9} \approx 47$$

۱۲۰. گزینه ۴ پیش‌بینی از برون‌یابی استفاده شده است و اکنون کفایت میانگین نقاط را به دست آوریم تا به کمک نقطه میانگین و نقطه پایانی شیب خط و معادله خط حاصل می‌شود.

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{7} = \frac{28}{7} = 4, \quad \bar{y} = \frac{8 + x + 5 + y + 15 + 10 + 12}{7} = \frac{50 + x + y}{7}$$

نقطه پایانی را نقطه $(x_1, y_1) = (7, 12)$ در نظر می‌گیریم.

$$x = \frac{y_1 - \bar{y}}{x_1 - \bar{x}} = \frac{12 - \frac{50 + x + y}{7}}{7 - 4}$$

معادله خط برابر است با:

$$y - 12 = m(x - 7) \Rightarrow y = mx - 7m + 12 \xrightarrow{\text{نقطه (۹,۸) در معادله صدق می‌کند.}} 8 = 9m - 7m + 12 \Rightarrow m = -2$$

با جایگذاری در رابطه‌ای که برای شیب خط به‌دست آمده داریم:

$$\frac{12 - \frac{50 + x + y}{7}}{3} = -2 \Rightarrow 12 - \frac{50 + x + y}{7} = -6 \Rightarrow 50 + x + y = (12 + 6) \times 7 = 126$$

$$x + y = 126 - 50 = 76$$

۱۰۱. اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $mx^2 + 4x - 3m - 2 = 0$ عکس یکدیگر باشند، مقدار m کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{2}{3}$

۱۰۲. تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ را در دامنه $\{-99, -98, \dots, 0, 1, \dots, 99, 100\}$ در نظر بگیرید. میانگین مقادیر برد تابع f ، کدام است؟

- ۱ ۳٫۵ ۲ ۳٫۷۵ ۳ ۴ ۴ ۴٫۲۵

۱۰۳. اگر برد تابع $f(x) = [3x - 1]$ برابر $\{-1\}$ باشد، دامنه تابع f کدام می‌تواند باشد؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- ۱ $-1 < x < \frac{1}{3}$ ۲ $0 < x \leq \frac{1}{3}$ ۳ $0 \leq x < \frac{1}{3}$ ۴ $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$

۱۰۴. جواب معادله $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$ کدام است؟

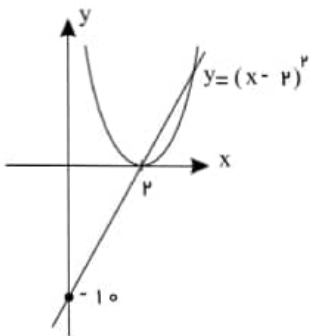
- ۱ $-\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ ۲ ۴ -۲

۱۰۵. مجموع ریشه‌های معادله $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{2}{3}$ ، کدام است؟

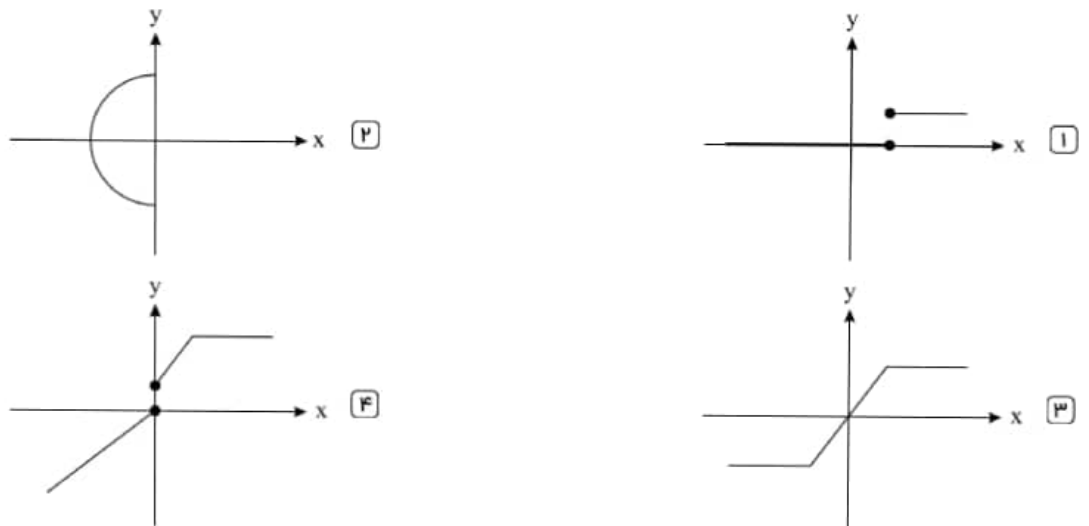
- ۱ -۴ ۲ ۴ ۳ ۶ ۴ ۱۲

۱۰۶. مجموع عرض نقاط برخورد سهمی و خط در شکل روبه‌رو کدام است؟

- ۱ ۲۵
۲ ۲۲
۳ ۲۱
۴ ۳۵



۱۰۷. کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نشان می‌دهند؟



۱۰۸. نمودار تابع با ضابطه $f(x) = a\left(\frac{1}{3}\right)^x + b$ محور x ها را با طول ۱- و محور y ها را با عرض ۲ قطع می‌کند. مقدار تابع f در $x = 1$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۱۰۹. اگر حاصل ضرب پنج جمله اول یک دنباله هندسی ۱۰۲۴ باشد جمله سوم آن کدام است؟

- ۱ -۴ ۲ ۴ ۳ ۱۶ ۴ -۱۶

۱۱۰. در یک دنباله هندسی با جمله عمومی $a_n = -2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$ حاصل تقسیم جمله سوم به مکعب نسبت مشترک کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۱۱. در یک دنباله حسابی، مجموع ۹ جمله اول برابر ۹۰ و جمله هفتم آن ۱۳ است. اختلاف جملات متوالی، کدام است؟

- ۱) ۱٫۵ ۲) ۲ ۳) ۲٫۵ ۴) ۳

۱۱۲. در دنباله بازگشتی $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = 2a_n + 1$ ، جمله دهم، کدام است؟

- ۱) ۹۷۹ ۲) ۹۸۷ ۳) ۱۰۱۵ ۴) ۱۰۲۳

۱۱۳. گزاره $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)$ همواره هم ارز کدام است؟

- ۱) p ۲) q ۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

۱۱۴. گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q)$ با کدام گزینه هم ارز است؟

- ۱) p ۲) $\sim p$ ۳) q ۴) ارزش این گزاره همواره درست است.

۱۱۵. دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. کدام پیشامد تعداد عضوهای بیش‌تری دارد؟

- ۱) مجموع دو تاس ۷ باشد. ۲) مجموع دو تاس ۸ باشد. ۳) مجموع دو تاس ۹ باشد. ۴) مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

۱۱۶. از بین ۳ دانش‌آموز پایه دهم، ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم و ۲ دانش‌آموز پایه دوازدهم ۴ نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل ۲ نفر از آن‌ها پایه یازدهم باشند، چقدر است؟

- ۱) $\frac{9}{14}$ ۲) $\frac{31}{42}$ ۳) $\frac{13}{21}$ ۴) $\frac{10}{21}$

۱۱۷. تعداد دانش‌آموزان یک کلاس کدام کمیت و با کدام مقیاس اندازه‌گیری است؟

- ۱) کیفی اسمی ۲) کیفی ترتیبی ۳) کمی فاصله‌ای ۴) کمی نسبتی

۱۱۸. در داده‌های زیر مجموع چارک اول و سوم کدام است؟

۵ و ۱۱ و ۱۳ و ۱۷ و ۲۱ و ۲۵ و ۲۹ و ۳۱ و ۳۵ و ۳۹ و ۴۱ و ۴۵ و ۴۹ و ۵۱ و ۵۵

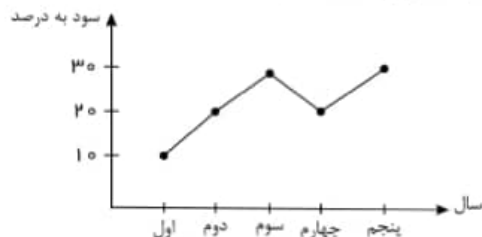
- ۱) ۱۸٫۵ ۲) ۲۵٫۵ ۳) ۷ ۴) ۱۰٫۵

۱۱۹. در نمودار دایره‌ای متناظر با جدول زیر، زاویه مرکزی مربوط به افراد ۲۰ تا ۳۰ ساله برابر ۶۸ درجه است. تقریباً چند درصد افراد، حداکثر ۳۰ سال سن دارند؟

سن افراد	کمتر از ۲۰	۲۰ تا ۳۰	۳۰ تا ۴۰	۴۰ تا ۵۰
فراوانی	۲۵	k	۱۸	۳۰

- ۱) ۴۷ ۲) ۲۹ ۳) ۴۳ ۴) ۵۲

۱۲۰. میزان سود خالص یک شرکت در پنج سال گذشته به شکل زیر است. سود این شرکت به روش بیرون‌یابی خطی در سال ششم برابر کدام گزینه است؟



- ۱) ۳۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

$$mx^2 + 4x - 3m - 2 = 0 \xrightarrow{\text{فرم استاندارد}} \begin{cases} a = m \\ b = 4 \\ c = -3m - 2 \end{cases}$$

$$P = \frac{c}{a} = 1 \rightarrow \frac{-3m - 2}{m} = 1$$

$$\rightarrow -3m - 2 = m \rightarrow -2 = 4m \rightarrow m = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

۱۰۲. گزینه ۲ برای حل سؤال کافیت به ازای مقادیر دامنه برد تابع را به دست آورد و میانگین مقادیر برد را محاسبه کنیم ولی نکته قابل توجه این است که اعداد دامنه به جز صفر و ۱۰۰ قرینه بوده و به صورت زیر قابل ساده شدن هستند.

$$f(-99) = -\frac{1}{2}(-99) + 4, f(99) = -\frac{1}{2}(99) + 4 \Rightarrow f(99) + f(-99) = \frac{99}{2} + 4 - \frac{99}{2} + 4 = 8$$

به همین ترتیب دو به دو حاصل جمع تمام $f(x)$ هایی که x های قرینه دارند برابر با ۸ می شود.

$$\left. \begin{array}{l} f(99) + f(-99) = 8 \\ f(98) + f(-98) = 8 \\ \vdots \\ f(1) + f(-1) = 8 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع کل برابر است با}} 99 \times 8 = 792$$

محاسبه دو مقدار $f(0)$ و $f(100)$ را نیز انجام می دهیم:

$$f(0) = 0 + 4 = 4$$

$$f(100) = -\frac{1}{2}(100) + 4 = -46$$

$$\text{میانگین اعضای برد تابع} = \frac{f(0) + f(100) + \text{مجموع } f(x) \text{ هایی که } x \text{ های قرینه دارند}}{200} = \frac{792 + 4 - 46}{200} = \frac{750}{200} = 3,75$$

۱۰۳. گزینه ۳ برای اینکه برد تابع $f(x) = |3x - 1|$ به صورت $\{-1\}$ باشد، باید $3x - 1$ بزرگتر یا مساوی -1 و کوچکتر از 0 باشد. با توجه به خواص نامساوی ها داریم:

$$-1 \leq 3x - 1 < 0 \Rightarrow 0 \leq 3x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{3}$$

بنابراین دامنه تابع این محدوده یا زیرمجموعه ای از آن است.

۱۰۴. گزینه ۲ معادله را با استفاده از طرفین وسطین کردن حل می کنیم، داریم:

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} \Rightarrow (x-2)(x+3) = (x+1)(x-4)$$

$$\Rightarrow x^2 + (-2+3)x + (-2) \times (3) = x^2 + (1-4)x + (1) \times (-4)$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = x^2 - 3x - 4$$

$$\Rightarrow x^2 + x - x^2 + 3x - 6 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۰۵. گزینه ۴

$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3(x-2)(x+2)} 3(2x-1)(x-2) - 3(x-3)(x+2) = 2(x-2)(x+2) \rightarrow 6x^2 - 15x + 6 - 3x^2 + 3x + 18 = 2x^2 - 8$$

$$\rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$$

$$\text{جمع ریشه‌ها} = \frac{-b}{a} = 12$$

تذکر: شرط $\Delta > 0$ برقرار است و ریشه‌ها هیچکدام ریشهٔ مخرج کسرها نیستند.

۱۰۶. گزینه ۱

ابتدا معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطه $(0, -10)$ و $(2, 0)$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{-10 - 0}{0 - 2} = 5 \Rightarrow y = 5x - 10$$

سپس ضابطهٔ سهمی و خط را برابر قرار می‌دهیم.

$$5x - 10 = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = 7 \Rightarrow y = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 25 + 0 = 25$$

۱۰۷. گزینه ۳ نمودار رابطه‌ای تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) می‌توان خط قائمی یافت که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، پس تابع نیستند.

۱۰۸. گزینه ۳ براساس صورت سؤال هنگامی که محور t ها را با طول -1 قطع می‌کنند، یعنی: $f(-1) = 0$ و وقتی محور y ها را با عرض 2 قطع می‌کنند، یعنی: $f(0) = 2$ بنابراین داریم:

$$f(x) = a\left(\frac{1}{2}\right)^x + b \xrightarrow{f(-1)=0} a\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0$$

$$\xrightarrow{f(0)=2} a\left(\frac{1}{2}\right)^0 + b = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

$$\left. \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2a - a = -2 \Rightarrow a = -2 \right\} \Rightarrow f(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 4 \Rightarrow f(1) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4 = -1 + 4 = 3$$

$$a + b = 2 \xrightarrow{a=-2} -2 + b = 2 \Rightarrow b = 4$$

۱۰۹. گزینه ۲ با توجه به جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی خواهیم داشت:

$$a_1 a_r a_p a_q a_s = 1024 \Rightarrow a_1 \times a_1 r \times a_1 r^2 \times a_1 r^3 \times a_1 r^4 = 1024 \Rightarrow a_1^5 r^{10} = 1024$$

$$\Rightarrow (a_1 r^2)^5 = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5 \Rightarrow (a_1 r^2)^5 = 4^5$$

$$\Rightarrow a_1 r^2 = 4 \xrightarrow{\text{همان جمله سوم است}} a_r = 4$$

۱۱۰. گزینه ۳ با توجه به جملهٔ عمومی برای به دست آوردن نسبت مشترک، کافی است جملات اول و دوم را به دست آورده و بر هم تقسیم کنیم.

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = -2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{1-1} = -2 \times -\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{نسبت مشترک} = \frac{a_r}{a_1} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{27} \times \frac{3}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{9}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = -2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{2-1} = -2 \times -\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

سپس جملهٔ سوم را نیز به دست می‌آوریم:

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = -2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{3-1} = -2 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = -2 \times -\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

خواستۀ سؤال برابر است با:

$$\frac{a_r}{r^3} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{27}} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{27}} = \frac{2}{1} \times \frac{27}{1} = 2 \times 27 = 54$$

۱۱۱. گزینه ۱ اختلاف جملات متوالی همان d است.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_1 = 90 \Rightarrow \frac{1}{2}(2a_1 + 1d) = 90 \Rightarrow 9a_1 + 36d = 90 \quad (1)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_9 = 13 = a_1 + 8d \quad (2)$$

در نتیجه بنابر (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} 9a_1 + 36d = 90 \\ a_1 + 8d = 13 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} 9a_1 + 36d = 90 \\ -9a_1 - 54d = -117 \end{cases} \Rightarrow -18d = -27$$

۱۱۲. گزینه ۴ با توجه به رابطهٔ بازگشتی دنباله داریم:

$$a_1 = 1 = 2^1 - 1$$

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 = 2^2 - 1$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 = 2^3 - 1$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1}) + 1 = 2^n - 1 \xrightarrow{\text{بنابراین میتوان}} a_n = 2^n - 1$$

بنابراین جمله دهم، برابر $2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$ است.

۱۱۳. گزینه ۲ با توجه به هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ گزاره صورت سوال برابر $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$ می‌شود.

با توجه به توزیع پذیری ترکیب فصلی روی ترکیب عطفی داریم:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

نتیجه می‌گیریم:

$$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \equiv q \vee \underbrace{(p \wedge \sim p)}_{\text{نادرست}} \Rightarrow q \vee \text{نادرست} \equiv q$$

۱۱۴. گزینه ۴ اگر p و q را دو گزاره دلخواه در نظر بگیریم، داریم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge q)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	F	T

ارزش گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \vee (p \wedge \sim q)$ همواره درست است.

۱۱۵. گزینه ۱

گزینه ۱: $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} \Rightarrow n(A) = 6$

گزینه ۲: $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\} \Rightarrow n(A) = 5$

گزینه ۳: $A = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} \Rightarrow n(A) = 4$

گزینه ۴: $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\} \Rightarrow n(A) = 3$

پس گزینه ۱ تعداد عضوهای بیشتری دارد.

مجموع دو تایی	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

۱۱۶. گزینه ۱ در کل ۹ دانش‌آموز داریم که ۴ نفر از آن‌ها انتخاب می‌شود، پس:

$$n(S) = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 126$$

حداقل ۲ نفر یازدهم باشند، یعنی ۲ نفر یا ۳ نفر یا ۴ نفر یازدهم باشند، به عبارت دیگر ۲ نفر یازدهم و ۲ نفر غیر یازدهم یا ۳ نفر یازدهم و ۱ نفر غیر یازدهم یا ۴ نفر یازدهم باشند:

$$n(A) = \binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{4} \binom{5}{0} = 6 \times 10 + 4 \times 5 + 1 = 81$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{81}{126} = \frac{9}{14}$$

۱۱۷. گزینه ۴ تعداد دانش‌آموزان متغیری کمی با مقیاس نسبی است.

۱۱۸. گزینه ۲

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم، چون تعداد داده‌ها زوج است میانه (Q_p) برابر میانگین دو داده وسط است. به همین ترتیب Q_1 و Q_3 را محاسبه می‌کنیم:

$$5 \text{ و } 5 \quad \underbrace{6 \text{ و } 8}_{Q_1 = \frac{6+8}{2} = 7} \quad \underbrace{9 \text{ و } 10 \text{ و } 11 \text{ و } 13}_{Q_p = 10.5} \quad \underbrace{17 \text{ و } 20}_{Q_3 = \frac{17+20}{2} = 18.5} \quad 21 \text{ و } 21$$

پس:

$$\Rightarrow Q_1 + Q_3 = 18.5 + 7 = 25.5$$

۱۱۹. گزینه ۱ زاویه مرکزی مربوط به افراد ۲۰ تا ۳۰ ساله را برحسب k به دست می‌آوریم:

تعداد کل داده‌ها:

$$n = 25 + k + 18 + 30 = 73 + k$$

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 68^\circ = \frac{k}{73+k} \times 360^\circ \Rightarrow 68(73+k) = 360k$$

$$\Rightarrow 360k - 68k = 4964 \Rightarrow 292k = 4964 \Rightarrow k = 17$$

$$\text{درصد افراد حداکثر 30 ساله: } \frac{f}{n} \times 100 = \frac{25 + 17}{90} \times 100 = \frac{140}{9} \approx 15.56$$

۱۲۰. گزینه ۲ ابتدا نقطه میانگین داده‌ها را مشخص می‌کنیم.

$$\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3$$

$$\frac{10 + 20 + 30 + 20 + 30}{5} = 22$$

$$\text{شیب خط} = \frac{30 - 22}{5 - 3} = 4$$

سپس معادله خط گذرنده از دو نقطه (3, 22) و (5, 30) را مشخص می‌کنیم.

$$y = 4x + b \Rightarrow 30 = 4 \times 5 + b \Rightarrow b = 10$$

سپس با قرار دادن نقطه (5, 30) در معادله کلی خط با شیب 4 داریم:

$$y = 4x + 10 \Rightarrow y = 4 \times 6 + 10 = 34$$

معادله خط به صورت $y = 4x + 10$ است. حال با قرار دادن $x = 6$ سود این شرکت در سال ششم را برون‌یابی می‌کنیم.

۱۰۱. کدام یک از مقادیر زیر ریشه معادله $150x^2 - 2x - 148 = 0$ است؟

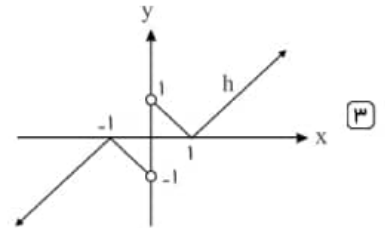
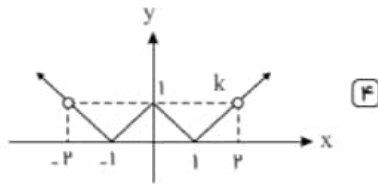
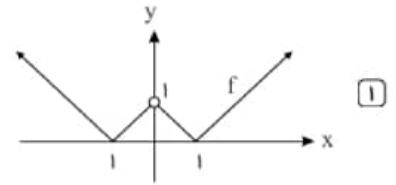
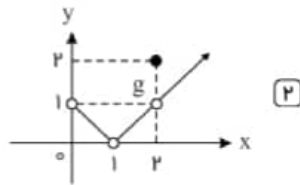
$\frac{148}{150}$ (ف)

$\frac{2}{150}$ (ب)

$-\frac{148}{150}$ (د)

$-\frac{2}{150}$ (ا)

۱۰۲. در کدام گزینه زیر، دامنه و برد تابع نشان داده شده با هم برابرند؟



۱۰۳. ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

(الف) $y = x$ تابع همانی است و برد تابع ثابت تنها یک عضو دارد.

(ب) $[-3, 2] = -3$ و $2^3 + 3 = 11$ عددی فرد است. (علامت جزء صحیح است.)

(ج) برد تابع علامت $sign(x)$ سه عضوی است یا $\sqrt{9}$ گنگ است.

صفر (ف)

۳ (ب)

۲ (د)

۱ (ا)

۱۰۴. معادله $\frac{x}{x^4 - x^2 - 2x - 1} - \frac{1}{x^3 - 1} = 0$ چند جواب دارد؟

صفر (ف)

۳ (ب)

۲ (د)

۱ (ا)

۱۰۵. یک کیک را بین چند نفر به‌طور مساوی تقسیم کردیم، سپس دو نفر دیگر به این جمع ضافه شدند. در تقسیم مجدد کیک به هریک به اندازه $\frac{1}{4}$ کمتر رسید. پس از اضافه شدن دو نفر کیک بین چند نفر تقسیم شده است؟

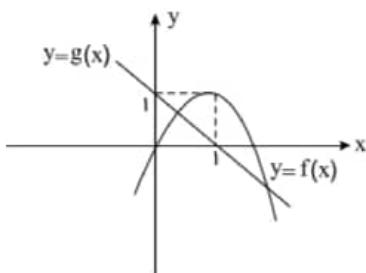
۶ (ف)

۵ (ب)

۴ (د)

۳ (ا)

۱۰۶. نمودار سهمی $y = f(x)$ و خط راست $y = g(x)$ در صفحه‌های مختصات مطابق شکل زیر داده شده است. مجموع جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ کدام است؟



-۲ (ا)

$-\frac{1}{2}$ (ب)

$\frac{1}{2}$ (د)

۲ (ا)

۱۰۷. کدام یک از روابط زیر تابع است؟

$f_1 = \{(1, 2), (2, 6), (1, 5)\}$ (ا) $f_2 = \{(1, 3), (5, 6), (1, \sqrt{9})\}$ (ب) $f_3 = \{(5, 4), (\sqrt{25}, 7), (2, 3)\}$ (د) $f_4 = \{(1, 2), (7, 8), (1, 3)\}$ (ف)

۱۰۸. در تابع نمایی $f(x) = (k+2)x^2 + (k+4)x^k$ حاصل $f(4)$ را بدست آورید.

۳۲ (ف)

۱۶ (ب)

۸ (د)

۴ (ا)

۱۰۹. جملات پنجم و هفتم یک دنباله هندسی ۸ و ۱۶ هستند، جمله بیست و یکم کدام است؟

- ۱) 2^{10} ۲) 2^{11} ۳) 2^{12} ۴) 2^{14}

۱۱۰. اگر در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله ششم ۸ برابر جمله سوم باشد و جمله اول ۲ باشد، آنگاه مجموع شش جمله اول کدام است؟

- ۱) ۱۲۸ ۲) ۱۵۲ ۳) ۱۸۹ ۴) ۱۳۸

۱۱۱. در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم، پنجم و سیزدهم برابر ۷۵ است، جمله هفتم، کدام است؟

- ۱) ۲۲ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

۱۱۲. در دنباله $1, 4, 7, 10, \dots$ مجموع جملات m ام و $m+1$ ام کدام است؟

- ۱) $6m$ ۲) $3m+1$ ۳) $3m-2$ ۴) $6m-1$

۱۱۳. اگر گزاره مرکب $(q \wedge r) \Rightarrow (r \Leftrightarrow p)$ همواره نادرست باشد، آنگاه کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- ۱) هر سه گزاره p و q درست هستند. ۲) هر سه گزاره p و q نادرست هستند. ۳) q و r درست هستند و p نادرست است. ۴) q و p درست هستند و r نادرست است.

۱۱۴. گزاره $p \sim (p \wedge \sim q) \vee \sim p$ با گزاره کدام گزینه هم‌ارزش است؟

- ۱) $\sim (p \wedge q)$ ۲) $p \wedge q$ ۳) $\sim (p \vee q)$ ۴) $p \vee q$

۱۱۵. در مجموعه $\{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ اگر A پیشامد اعداد مضرب ۴ و B پیشامد اعداد مضرب ۳ باشد، در این صورت پیشامد $A \cup B$ چند عضو دارد؟

- ۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۱۱۶. ۶ کتاب متمایز پایه دهم تجربی شامل ریاضی و فیزیک را در یک ردیف قرار می‌دهیم. با کدام احتمال دو کتاب ریاضی و فیزیک از این کتاب‌ها کنار هم قرار نمی‌گیرند؟

- ۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{2}{3}$

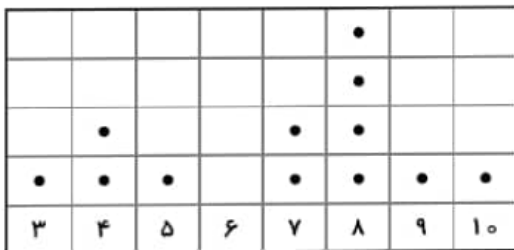
۱۱۷. غذای مورد علاقه و طول ضلع یک مستطیل به ترتیب چه نوع متغیری هستند؟

- ۱) کیفی ترتیبی - کمی نسبی ۲) کیفی اسمی - کمی نسبی ۳) کیفی ترتیبی - کمی فاصله‌ای ۴) کیفی اسمی - کمی فاصله‌ای

۱۱۸. اگر تمامی داده‌ها با هم برابر باشند، در این صورت واریانس داده‌ها چقدر است؟

- ۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۲ ۴) صفر

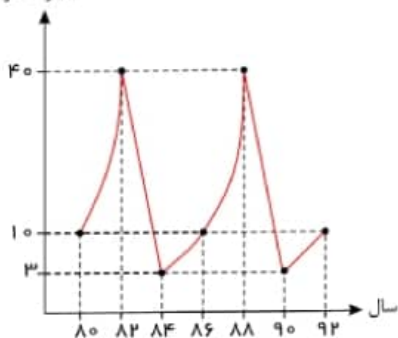
۱۱۹. در نمودار نقطه‌ای مقابل، مجموع مد، میانه و میانگین کدام است؟



- ۱) ۲۳ ۲) ۲۲٫۲۵ ۳) ۲۴٫۲۵ ۴) ۲۵

۱۲۰. با توجه به نمودار سری زمانی زیر که از یک الگو پیروی می‌کند، صادرات در سال‌های متوالی را نشان می‌دهد. میزان صادرات در سال ۹۴ از میزان صادرات در سال ۷۴ چند میلیارد دلار بیشتر است؟

میزان صادرات بر حسب میلیارد دلار



- ۱) ۷ ۲) ۳۷ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۱۰۱. گزینه ۲ مجموع ضرایب معادله $150x^2 - 2x - 148 = 0$ برابر صفر است. یعنی $(150 - 2 - 148 = 0)$ بنابراین خواهیم داشت:

$$x' = 1, \quad x'' = \frac{c}{a} = -\frac{148}{150}$$

هرگاه $a + b + c = 0$ یکی از ریشه‌ها $x = 1$ خواهد بود.

۱۰۲. گزینه ۲ دامنه و برد هر یک از نمودار را می‌یابیم، داریم:

$$۱) D_f = R - \{0\}, \quad R_f = y \geq 0$$

$$۲) D_g = \{x > 0\} - \{1\}$$

$$R_g = \{y > 0\} - \{1\}$$

$$۳) D_h = R - \{0\}, \quad R_h = R$$

$$۴) D_k = R - \{-2, 2\}, \quad R_k = y \geq 0$$

۱۰۳. گزینه ۲

الف) $y = x$ تابع همانی است و برد تابع ثابت تنها یک عضو دارد $\underbrace{\quad}_T$ \boxed{T}

ب) $[-3/2] = -3$ و $\underbrace{2^3 + 3}_T$ عددی فرد است $\underbrace{\quad}_F$ \boxed{F}

ج) برد تابع علامت $sign(x)$ سه عضوی است یا $\underbrace{\sqrt{9}}_F$ گنگ است $\underbrace{\quad}_T$ \boxed{T}

۱۰۴. گزینه ۴ معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\frac{x}{x^2 - x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\cancel{x^r} - x^r - 2x - 1 = \cancel{x^r} - x \rightarrow x^r + x + 1 = 0$$

در معادله اخیر $\Delta = -3$ و در نتیجه جواب حقیقی ندارد.

۱۰۵. گزینه ۲ در ابتدا فرض می‌کنیم تعداد نفرات n نفر بوده‌اند، بنابراین به هر نفر $\frac{1}{n}$ کیک می‌رسد.

در مرحله بعد به تعداد نفرات ۲ نفر دیگر اضافه می‌شوند بنابراین در این مرحله به هر نفر $\frac{1}{n+2}$ کیک می‌رسد.

در مرحله دوم به هر نفر $\frac{1}{4}$ کیک کمتر رسیده است. پس:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{4}$$

حال به حل معادله می‌پردازیم:

کدام مخارجها ضرب $4n(n+2)$ می‌باشد که این مقدار را در کل معادله ضرب می‌کنیم:

$$4\cancel{n}(n+2) \times \frac{1}{\cancel{n}} - 4n(\cancel{n+2}) \times \frac{1}{\cancel{n+2}} = \cancel{n}(n+2) \times \frac{1}{\cancel{n}} \rightarrow 4(n+2) - 4n = n(n+2) \rightarrow \cancel{4n} + 8 - \cancel{4n} = n^2 + 2n \rightarrow 8 = n^2 + 2n$$

$$\rightarrow n^2 + 2n - 8 = 0 \xrightarrow{\text{یک جمله مشترک}} (n+4)(n-2) = 0 \rightarrow n = -4 \text{ و } n = 2$$

تعداد نفرات منفی نخواهد بود پس $n = -4$ غیرقابل قبول است.

بنابراین در ابتدا تعداد نفرات ۲ نفر بوده و پس از اضافه شدن ۲ نفر تعداد کل ۴ نفر شده است.

۱۰۶. گزینه ۴ خط $y = g(x)$ از دو نقطه $(0, 1)$ و $(1, 0)$ می‌گذرد، بنابراین معادله خط گذرنده از دو نقطه $(1, 0)$ و $(0, 1)$ برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1 \xrightarrow{\text{معادله خط}} y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{\text{نقطه } (1,0)} y - 0 = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 1 \Rightarrow g(x) = -x + 1 \Rightarrow g^r(x) = (-x + 1)^r = x^r - 2x + 1$$

برای نوشتن معادله $f(x)$ در حالت کلی برای معادله سهمی داریم:

$$f(x) = ax^r + bx + c$$

از آنجایی که عرض از مبدأ این تابع صفر است:

$$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = ax^r + bx$$

$(1, 1)$ مختصات رأس سهمی است، بنابراین برای x و y رأس سهمی داریم:

$$f(x) = ax^r + bx$$

$$\text{طول رأس سهمی: } 1 = \frac{-b}{2a} \Rightarrow -b = 2a \Rightarrow b = -2a$$

$$\text{عرض رأس سهمی: } f(1) = 1 \Rightarrow a + b = 1 \xrightarrow{\text{جایگزینی}} a - 2a = 1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = (-2) \times (-1) = 2$$

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ برابر است با:

$$f(x) = ax^r + bx = -x^r + 2x$$

برای بدست آوردن مجموع جواب‌های معادله $f(x) = g^r(x)$ تساوی زیر را داریم:

$$-x^r + 2x = x^r - 2x + 1 \Rightarrow x^r - 2x + 1 - 2x + x^r = 0 \Rightarrow 2x^r - 4x + 1 = 0$$

به کمک روش کلی (دلتا) داریم:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{16 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{4 + \sqrt{8}}{4} \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{16 - 4(2)(1)}}{4} = \frac{4 - \sqrt{8}}{4} \end{aligned}$$

مجموع جواب‌های معادله برابر:

$$x_1 + x_2 = \frac{4 + \sqrt{8}}{4} + \frac{4 - \sqrt{8}}{4} = \frac{4 + \cancel{\sqrt{8}} + 4 - \cancel{\sqrt{8}}}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

۱۰۷. گزینه ۲ می‌دانیم که مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب را تابع می‌گویند که مؤلفه‌های اول آن‌ها تکرار نباشند، اما اگر مؤلفه‌های اول برابر باشند، برای تابع بودن رابطه حتماً باید مؤلفه‌های دوم نیز باهم برابر باشند.

در گزینه ۲ با توجه به اینکه $\sqrt{9} = 3$ می‌باشد، داریم:

$$f_r = \{(1, 3), (5, 6), (1, \sqrt{9})\} = \{(1, 3), (5, 6), (1, 3)\} \xrightarrow{\text{می‌دانیم که تکرار در مجموعه اثر ندارد}} \{(1, 3), (5, 6)\}$$

تشریح گزینه‌های نادرست:

گزینه «۱» نادرست است زیرا به‌ازای $x = 1$ دو مقدار متفاوت ۲ و ۵ داریم:

$$f_1 = \{(1, 2), (2, 6), (1, 5)\}$$

گزینه «۳»: نادرست است زیرا با توجه به اینکه $\sqrt{25} = 5$ است به ازای $x = 5$ دو مقدار متفاوت y داریم:

$$f_2 = \{(5, 4), (5, 7), (2, 3)\}$$

گزینه «۴»: نادرست است زیرا به ازای $x = 1$ دو مقدار متفاوت y داریم:

$$f_3 = \{(1, 2), (7, 8), (1, 3)\}$$

۱۰۸. گزینه ۳ می‌دانیم در تابع نمایی ضریب x^r باید حذف شود چون تابع نمایی به صورت $f(x) = a^x$ می‌باشد، پس:

$$\begin{aligned} k + 2 &= 0 \rightarrow k = -2 \\ \Rightarrow f(x) &= (-2 + 4)^x = 2^x \\ \Rightarrow f(4) &= 2^4 = 16 \end{aligned}$$

۱۰۹. گزینه ۲ با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی $a_n = a_1 r^{n-1}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_5 &= 8 \rightarrow a_1 r^4 = 8 \quad (1) \\ a_7 &= 16 \rightarrow a_1 r^6 = 16 \quad (2) \end{aligned}$$

طرفین دو رابطه (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{2}$$

سپس با جایگذاری نسبت مشترک در رابطه (۱) a_1 را بدست می‌آوریم.

$$a_1 \times (\pm\sqrt{2})^4 = 8 \Rightarrow a_1 \times 4 = 8 \Rightarrow a_1 = 2$$

جمله بیستویکم برابر است با:

$$a_{21} = a_1 r^{20} \Rightarrow a_{21} = 2 \times (\pm\sqrt{2})^{20} = 2 \times 2^{10} = 2^{11}$$

۱۱۰. گزینه ۳

$$S_7 = \frac{a_1(r^7 - 1)}{r - 1} = \frac{3 \times (2^7 - 1)}{2 - 1} = 3 \times 63 = 189 \frac{a_7}{a_1} = 8 \Rightarrow \frac{a_1 r^6}{a_1 r^1} = 8 \Rightarrow r^5 = 8 \Rightarrow r = \sqrt[5]{8} \Rightarrow r = 2$$

۱۱۱. گزینه ۳ بنابر اطلاعات سؤال داریم:

$$a_7 + a_5 + a_{17} = 75$$

از طرفی می‌دانیم:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

در نتیجه:

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 12d) = 75 \Rightarrow 3a_1 + 18d = 75 \xrightarrow{\div 3} a_1 + 6d = 25 \xrightarrow{a_1 = a_1 + 6d} a_1 = 25$$

۱۱۲. گزینه ۴ با توجه به جملات $1, 4, 7, 10, \dots$ که فاصله آن‌ها ۳ واحد است، می‌توان جمله عمومی را به صورت $a_n = 3n - 2$ نوشت.

جمله n ام دنباله همان $3n - 2$ است و جمله $n + 1$ ام را با جایگذاری n به جای n دست می‌آوریم:

$$a_n = 3n - 2 \rightarrow a_{n+1} = 3(n + 1) - 2 = 3n + 3 - 2 = 3n + 1$$

حال مجموع جمله n ام و $(n + 1)$ ام را به دست می‌آوریم:

$$a_n + a_{n+1} = 3n - 2 + 3n + 1 = 6n - 1$$

۱۱۳. گزینه ۳ یک ترکیب شرطی وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد در نتیجه داریم:

$$\underbrace{(q \wedge r)}_{\text{درست}} \Rightarrow \underbrace{(r \Leftrightarrow p)}_{\text{نادرست}} \equiv \text{نادرست}$$

گزاره عطفی زمانی ارزش درست دارد که هر دو گزاره درست باشند. بنابراین:

$$q \wedge r \equiv \text{درست} \Rightarrow q \equiv r \equiv \text{درست}$$

در ترکیب دو شرطی اگر ارزش گزاره‌های دو طرف یکسان نباشد ترکیب نادرست است. چون $r \equiv T$ پس $p \equiv F$ است.

۱۱۴. گزینه ۱

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \vee \sim p$	$\sim (p \wedge q)$	$p \vee q$
T	T	F	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	F

۱۱۵. گزینه ۳

$$A = \{۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰\} \quad B = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ۱۸\}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$(A \cap B) = \{۱۲\}, \quad n(A) = ۵, n(B) = ۶ \rightarrow n(A \cup B) = ۵ + ۶ - ۱ = ۱۰ \text{ عضو}$$

ابتدا $n(A)$ و $n(B)$ و $n(A \cap B)$ را محاسبه کرده و سپس در فرمول قرار می دهیم.۱۱۶. گزینه ۴ A' : متهم پیشامد A یعنی دو کتاب فیزیک و ریاضی کنار هم باشند:

$$n(S) = ۶! \rightarrow \text{چگنت ۶ کتاب}$$

$$n(A) = ۲ \times ۵!$$

$$\Rightarrow P'(A) = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{۲ \times ۵!}{۶!}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P'(A) = 1 - \frac{۲ \times ۵!}{۶!} = 1 - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

۱۱۷. گزینه ۲ چون غذای مورد علاقه ترتیب ندارد پس کیفی اسمی است و طول مستطیل کمی نسبی است (قابل اندازه گیری است و نسبت طولها با معنا است).

۱۱۸. گزینه ۴ اگر همه دادهها با هم برابر باشند، واریانس دادهها برابر صفر است.

۱۱۹. گزینه ۲ مد داده با بیشترین فراوانی یعنی برابر ۸ است. چون داده ۸ چهار بار تکرار شده است. حال میانگین را محاسبه می کنیم. داریم:

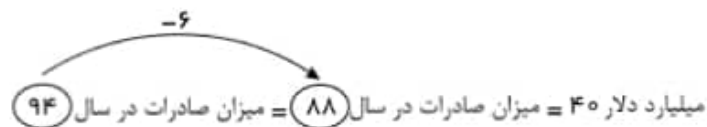
$$\bar{x} = \frac{۳ + (۲ \times ۴) + ۵ + (۲ \times ۷) + (۴ \times ۸) + ۹ + ۱۰}{۱ + ۲ + ۱ + ۲ + ۴ + ۱ + ۱} = \frac{۸۱}{۱۲} = ۶,۷۵$$

میانه $\Rightarrow ۳, ۴, ۴, ۵, ۷, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10$

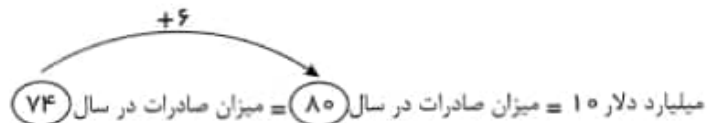
$$Q_p = \frac{۷+8}{۲} = ۷,۵ \text{ میانه}$$

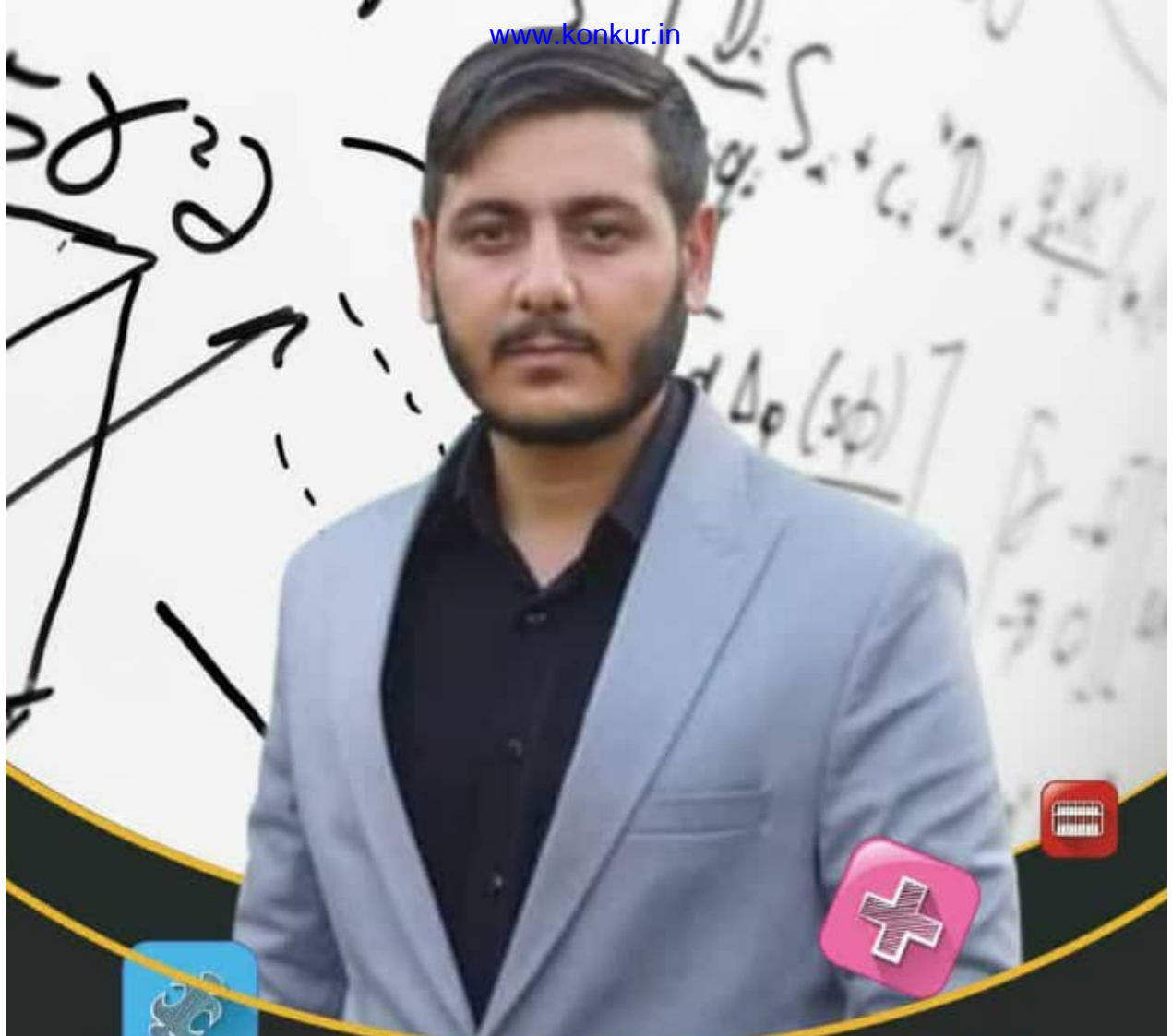
$$\text{مد} + \text{میانه} + \text{میانگین} = ۸ + ۷,۵ + ۶,۷۵ = ۲۲,۲۵$$

۱۲۰. گزینه ۳ نمودار هر ۶ سال یکبار تکرار می شود، پس دوره تناوب آن ۶ سال است. لذا می توان چنین گفت که:



$$\Rightarrow \text{اخلاف مورد نظر} = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰$$





مؤلف کتاب ریاضیات ریپتیج

طراح ریاضی قلمچی، گاج و ...

مدرس پروازی گاما، یادلاین و فرادرس

عضو انجمن ریاضی ایران

عضو انجمن بیوانفورماتیک ایران

مدرس برنامه نویسی کامپیوتر

مؤلف جمع بندی



مهندس محمد حمیدی