www.konkur.in

مهندس محمد حمیدی

مولف کتاب ریاضیات ریپتیچ

طراح ریاضی قلمچی ، گاج و...

مدرس پروازی گاما ، یادلاین و فرادرس

عضو انجمن ریاضی ایران

عضو انجمن بیوانفورماتیک ایران

مدرس برنامه نویسی کامپیوتر

مولف جمع بندی

konkur.in

forum.konkur.in

www.konkur.in

کتاب	مبحث	سال ۹۸	سال ۹۹	سال ۱۴۰۰	صفحه یا ریز مبحث پرتکرار
ریاضی ۱	مجموعه، الگو و دنباله	۲	۱	۲	۱۱ و ۲۰
ریاضی ۱	مثلثات	۳	۴	۳	۳۱
حسابان ۱					۹۹، ۱۰۰، ۱۱۰ تا ۱۱۲
حسابان ۲					۲۴، ۲۷، ۳۲، ۳۵ تا ۴۴
ریاضی ۱	توان های گویا و عبارت های جبری	۱	۰	۰	۶۱ و ۶۲
ریاضی ۱	معادله ها و نامعادله ها	۲	۱	۲	۷۵، ۸۶ تا ۸۸
ریاضی ۱	تابع	۲	۳	۱	۱۱۴
حسابان ۱					۵۷ و ۶۷
حسابان ۲					۱ تا ۱۲، ۱۵ تا ۱۸ و ۱۹
ریاضی ۱	شمارش، بدون شمردن	۰	۰	۰	۱۲۲ و ۱۲۳
حسابان ۱	جبر و معادله	۰	۱	۱	۲ تا ۶، ۹، ۱۳، ۱۸، ۲۴، ۲۶، ۳۰
حسابان ۱	توابع نمایی و لگاریتمی	۱	۲	۵	۷۶، ۸۱، ۸۶ و ۸۷
حسابان ۱	حد و پیوستگی	۳	۲	۱	
حسابان ۲	حدهای نامتناهی – حد در بی نهایت	۱	۱	۳	۵۲، ۵۵، ۶۷
حسابان ۲	مشتق	۳	۳	۳	۸۴ تا ۸۹، ۹۴ تا ۹۷ و ۱۰۲ تا ۱۰۶
حسابان ۲	کاربردهای مشتق	۲	۰	۳	۱۲۱، ۱۲۳، ۱۳۱ و ۱۳۸
هندسه ۱	ترسیم های هندسی و استدلال	۰	۰	۱	۱۰ و ۱۵
هندسه ۱	قضیه تالس، تشابه و کاربردها	۲	۴	۰	۳۴ تا ۳۸، ۴۲، ۴۵
هندسه ۱	چندضلعی ها	۱	۰	۱	۶۰، ۶۱، ۶۳، ۶۵ تا ۶۸
هندسه ۱	تجسم فضایی	۲	۱	۰	۸۰، ۹۲ تا ۹۶
هندسه ۲	دایره	۳	۴	۴	۱۲ تا ۱۵، ۱۸ تا ۲۱، ۲۶، ۲۷ تا ۳۰
هندسه ۲	تبدیل های هندسی و کاربردها	۲	۱	۱	۴۰ و ۴۱
هندسه ۲	روابط طولی در مثلث	۱	۲	۲	۶۷
هندسه ۳	ماتریس و کاربردها	۳	۳	۲	۱۹، ۲۰، ۲۳، ۲۷ تا ۲۹، ۳۱
هندسه ۳	مقاطع مخروطی	۳	۴	۳	۴۰ تا ۴۸، ۵۲،
هندسه ۳	بردارها	۱	۰	۱	۸۱، ۸۳
آمار و احتمال	آشنایی با مبانی ریاضیات	۳	۴	۲	۶ تا ۱۰، ۱۳ تا ۱۵، ۲۰، ۲۸، ۲۹، ۳۵
آمار و احتمال	احتمال	۲	۴	۲	۵۴، ۵۹
آمار و احتمال	آمار توصیفی	۲	۱	۱	۷۵، ۸۵ تا ۸۷، ۹۴، ۹۶ تا ۹۸
آمار و احتمال	آمار استنباطی	۰	۰	۰	
ریاضیات گسسته	نظریه اعداد	۴	۴	۶	۱۰ تا ۱۴، ۱۸ تا ۲۴، ۲۶
ریاضیات گسسته	گراف و مدل سازی	۲	۲	۲	۳۵، ۳۸، ۴۳ تا ۴۶
ریاضیات گسسته	ترکیبیات	۴	۳	۳	۶۱، ۶۴ تا ۶۷، ۷۳، ۷۹

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۰۱. معادلهٔ $(x^۲-۱)^۲+x^۲+a=۰$ دو جواب متمایز دارد. حدود a کدام است؟

۱) $a<-\frac{۳}{۴}$ ۲) $a<-۱$ ۳) $a>-\frac{۳}{۴}$ ۴) $a>-۱$

۱۰۲. اگر مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{|x+۳|}\geq\frac{۱}{|۲x-۱|}$ به‌صورت $(-\infty,a)\cup(a,b]\cup[c,+\infty)$ باشد، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) $-\frac{۲}{۳}$

۱۰۳. اگر $\cos x=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ و انتهای کمان x در ربع اول باشد $\tan ۲x$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) $۸\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

۱۰۴. حاصل $\frac{۱-\sin\frac{\pi}{۱۸}}{\cos\frac{\pi}{۱۸}}$ با تانژانت کدام زاویه برابر است؟

۱) ۲۵° ۲) ۳۰° ۳) ۳۵° ۴) ۴۰°

۱۰۵. معادله‌ی $\cos x+\cos\frac{x}{۲}=-۱$ در بازه‌ی $[۰,۳\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۰۶. اگر $f(x)=\frac{x+\sqrt{۲x}}{x-۱}\cot\frac{\pi}{x}$، حاصل $\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ کدام است؟

۱) $-\pi$ ۲) $-\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

۱۰۷. در یک الگوی خطی جملات چهارم و دهم به‌ترتیب برابر **۱۷** و **۴۱** هستند. اگر دنبالهٔ درجهٔ دوم دیگری به‌صورت $۵, ۱۳, ۲۳, ۰۰۰$ باشد، مجموع جملات ششم این دو دنباله با هم کدام است؟

۱) ۷۰ ۲) ۸۰ ۳) ۷۶ ۴) ۹۰

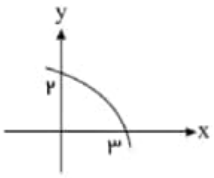
۱۰۸. اگر $f(x)=۱-(\frac{۱}{۲})^x$ باشد، دامنه تابع $y=\sqrt{xf(x)}$، کدام بازه است؟

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $(۰,+\infty)$

۱۰۹. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\log_{۰,۴}^{\log(۳x+۱)}}$ کدام است؟

۱) $(۰,۳]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۰,۳)$ ۴) $(۰,۳)$

۱۱۰. اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد، نقاط برخورد نمودار تابع $y=۲f(-\frac{x}{۲})$ با محورهای مختصات چقدر از هم فاصله دارند؟



۱) ۵ ۲) $۲\sqrt{۱۳}$ ۳) $۲\sqrt{۱۰}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۱۱۱. اگر $f(x)=(\frac{۳}{۲}-[x])|x^۲-۱|$ باشد، آنگاه $f'_+(۱)-f'_-(۱)$ کدام است؟($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) -۳ ۳) ۴ ۴) وجود ندارد.

محل انجام محاسبه

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۱۲. اگر $۰٫۰۰۰۰۰۱ < ۲^{-x}$ و $\log ۲ = ۰٫۳۰۱$، کوچک‌ترین عدد x با دو رقم اعشاری کدام است؟

۱) ۱۹٫۸۹ ۲) ۱۹٫۹۱ ۳) ۱۹٫۹۴ ۴) ۱۹٫۹۷

۱۱۳. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\log_{۴}(x^{۲} - x - ۲)}{\sqrt{x^{۲} - ۱} + ۱}$ کدام است؟

۱) $(-\infty, -۱) \cup (۲, +\infty)$ ۲) $(-۱, ۲)$ ۳) $(-\infty, -۲) \cup (۱, +\infty)$ ۴) $(-۲, ۱)$

۱۱۴. حاصل $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{۶})^{-}} \frac{\cos x}{۲\sin x - ۱}$ کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\infty$ ۴) $+\infty$

۱۱۵. کدام گزینه نمی‌تواند تنها مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x + ۶}{x^{۲} + mx + ۴}$ باشد.

۱) $x = -۲$ ۲) $x = ۴$ ۳) $x = ۲$ ۴) $x = -\frac{۲}{۳}$

۱۱۶. کسر $\frac{nx^{m+۳} - nx + m}{m^{۲}x^{n-۲} + ۲mx + n - ۱}$ وقتی $x \to \infty$ با شرط $n > ۳$ و $m \in \mathbb{Z}$ برابر ۴ است. مقدار $m + n$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵

۱۱۷. اگر حد کسر $\frac{\tan^{۲} x - \sin^{۲} x}{ax^{n}}$ وقتی $x \to ۰$ برابر ۱ باشد حاصل $a + n$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۲

۱۱۸. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار تابع $f(x) = |||x| - ۱| - ۳|$ و محور xها کدام است؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۱۹. تابع $f(x) = (x - ۲)(x + ۱)^{۳}$ در بازهٔ $(a, +\infty)$ صعودی است. حداقل a کدام است؟

۱) ۱٫۲۵ ۲) ۱٫۵ ۳) ۱٫۷۵ ۴) ۲

۱۲۰. تابع پیوسته و مشتق‌پذیر f به‌گونه‌ای است که به ازای هر عدد حقیقی x، علامت f' منفی است. اگر در تابع f، شرط $f(۲a^{۲} - ۱) > f(۳a + ۴)$ برقرار باشد، در این صورت حدود a کدام است؟

۱) $a < -۱$ یا $a > \frac{۵}{۲}$ ۲) $-۱ < a < \frac{۵}{۲}$ ۳) $a > ۱$ یا $a < -\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۵}{۲} < a < ۱$

۱۲۱. اگر مقدار بار الکتریکی که در مدت t ثانیه از مدار می‌گذرد، برابر $q(t) = t^{۳} + t^{۲} + ۴t$ باشد، شدت متوسط جریان در چهار ثانیه‌ی اول و همچنین شدت جریان در لحظه‌ی $t = ۴$ کدام است؟

۱) ۵۸ − ۲۴ ۲) ۶۰ − ۲۴ ۳) ۵۸ − ۲۲ ۴) ۶۰ − ۲۲

۱۲۲. اگر دامنهٔ متغیر مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ جواب برای x در گزاره‌نمای «$[(x - ۳)^{۲}(x^{۲} - ۴) = ۰] \wedge [(x - ۲)^{۲} + (y - ۴)^{۴} = ۰]$» کدام است؟

۱) $\{۲\}$ ۲) $\{۲, ۳\}$ ۳) $\{\}$ ۴) $\{۲, ۳, -۲\}$

۱۲۳. حاصل عبارت $(A \cup B' \cup C') \cap [(B \cap C) \cup A]$ کدام است؟

۱) A ۲) A' ۳) B ۴) B'

۱۲۴. اگر $۱ \times ۱! + ۲ \times ۲! + ۳ \times ۳! + \cdots + n \times n! = ۱۱۹$ باشد، n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

محل انجام محاسبه

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۲۵. اگر میانه داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر با k باشد، میانه داده‌های $-2x_1+3, -2x_2+3, \ldots, -2x_n+3$ بر حسب k چند است؟

۱) k ۲) $-2k+3$ ۳) $-2k$ ۴) $k+3$

۱۲۶. با توجه به نمودار زیر به چند طریق می توان از A به B رفت و برگشت به طوری که مسیر رفت و برگشت دقیقاً یکی نباشد؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۱۳۲ ۳) ۲۵۶ ۴) ۱۲۸

۱۲۷. از بین ۵ کتاب ریاضی، فیزیک، ادبیات، شیمی و زبان ۳ کتاب را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر پیشامد آنکه کتاب ریاضی انتخاب شود را A و پیشامد آنکه کتاب زبان انتخاب نشود را B بنامیم، پیشامد $A \cap B'$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۲۸. با حروف کلمهٔ «شادی» چند کلمهٔ ۴ حرفی می‌توان نوشت به‌طوری که حرف اول یا آخر آن نقطه‌دار باشد؟ (تکرار حروف مجاز نیست.)

۱) ۱۴ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

۱۲۹. عدد $\overline{۴x۲۳y۶}$ بر ۸ تقسیم‌پذیر است. اگر $y > ۳$ آن‌گاه، y کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۴

۱۳۰. در تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۳، باقیمانده $\frac{۱}{۵}$ خارج قسمت می‌باشد. بیشترین مقدار ممکن برای a کدام است؟

۱) ۷۲۶ ۲) ۸۵۸ ۳) ۸۴۴ ۴) ۷۹۲

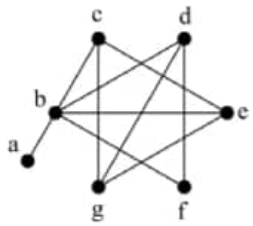
۱۳۱. سه نفر به نام های علی و سعید و محمد در یک مسابقه شرکت کرده اند. اگر احتمال برنده شدن علی دو برابر سعید و احتمال برنده شدن سعید سه برابر محمد باشد، احتمال باختن سعید چه قدر است؟

۱) ۰٫۷ ۲) ۰٫۳ ۳) ۰٫۲ ۴) ۰٫۵

۱۳۲. قرار است از بین افراد a, b, c, d, e, f و g چهار نفر جهت تصدی پست‌های ریاست، معاونت، نظامت و نظافت گزینش شوند. این کار به چند طریق ممکن است به شرطی که b جزء منتخبین باشد؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۰۰

۱۳۳. در گراف شکل زیر چند جفت یال مجاور وجود دارد؟



۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۱۳۴. اگر مربع مقابل یک مربع لاتین از مرتبهٔ ۴ باشد، حاصل مجموع $a+b+c$ کدام است؟

$A =$

۲	۱		c
b		۴	۳
	۳		
a			

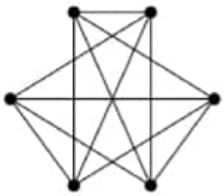
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

محل انجام محاسبه

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۳۵. گراف مقابل دارای چند مجموعه احاطه‌گر مینیمال است؟

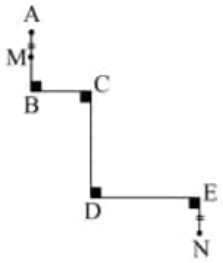


۱) ۱۵
۲) ۱۳
۳) ۱۲
۴) ۱۶

۱۳۶. برای بردار $\vec{u} = \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$، کدام مورد صحیح است؟

۱) موازی صفحهٔ شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$
۲) موازی $\vec{a}$
۳) موازی $\vec{b}$
۴) عمود بر $\vec{b}$

۱۳۷. مطابق شکل $AB = ۲, BC = ۳, DC = ۴, DE = ۵$ است. اگر $AM = EN$ باشد، طول بردار انتقالی که M را بر N منطبق می‌کند کدام است؟



۱) ۱۰
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۸\sqrt{۲}$
۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۱۳۸. اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ واقع در سطر سوم و ستون دوم ماتریس $A^۴$ کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۶
۳) ۳
۴) ۹

۱۳۹. اگر $(A-I)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A(A-I)^{-۱}$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۹ & ۱۶ \end{bmatrix}$

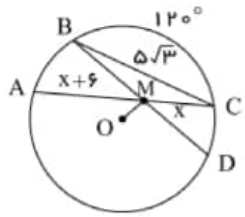
۱۴۰. در مثلث ABC، ضلع BC ثابت و راس A در صفحهٔ مثلث طوری تغییر می‌کند که طول میانهٔ وارد بر ضلع AC همواره مقداری ثابت است. مکان هندسی راس A کدام است؟

۱) دایره‌ای به شعاع دو برابر طول میانهٔ وارد بر ضلع AC
۲) خطی عمود بر ضلع BC
۳) دایره‌ای به شعاع طول میانهٔ وارد بر ضلع AC
۴) خطی موازی ضلع BC

۱۴۱. تمام دایره‌های که مرکز آن روی سهمی به معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۸y - ۴ = ۰$ قرار دارد و بر خط $y = ۳$ مماس هستند، از کدام نقطه می‌گذرند؟

۱) $(۲, -۱)$
۲) $(۲, ۱)$
۳) $(-۲, -۱)$
۴) $(-۱, ۲)$

۱۴۲. در شکل مقابل $\overset{\frown}{BC} = ۱۲۰^\circ$ و $BC = ۵\sqrt{۳}$ و $OM = ۳$ است. مقدار x کدام است؟



۱) ۳
۲) ۲
۳) $\frac{۳}{۲}$
۴) ۱

۱۴۳. در مثلث ABC داریم $\widehat{A} = ۳۰^\circ$ و $BC = ۲$ اگر مساحت این مثلث برابر با $\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ AC کدام می‌تواند باشد؟

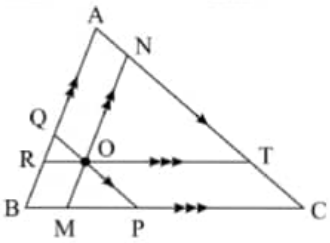
۱) $\sqrt{۳}$
۲) $۲\sqrt{۳}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) $۲\sqrt{۲}$

محل انجام محاسبه

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۴۴. در شکل روبه‌رو، از نقطهٔ دلخواه O ، واقع در داخل مثلث، خط‌هایی به موازات ضلع‌های مثلث رسم شده‌اند. حاصل $\frac{AQ}{AB}+\frac{BM}{BC}+\frac{CT}{CA}$ چقدر است؟

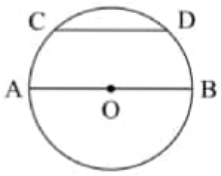


۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۴۵. در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۹ مجموع طول میانه‌ها را با k نمایش می دهیم. k در کدام یک از بازه‌های زیر قرار می‌گیرد؟

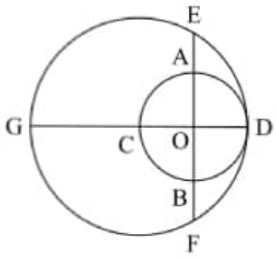
۱) (۲۰ و ۱۵) ۲) (۱۸ و ۱۲) ۳) (۱۵ و ۱۰) ۴) (۱۶ و ۱۲)

۱۴۶. در دایره‌ی $C(O,R)$ اگر $AB \parallel CD$ و $\overset{\frown}{CD}=۲\overset{\frown}{AC}$ آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی $\widehat{DCB}$ کدام است؟



۱) ۳۰ ۲) $\frac{۶۵}{۲}$ ۳) $\frac{۵۵}{۲}$ ۴) ۲۲٫۵

۱۴۷. در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و قطرهای AB و CD از دایره کوچک‌تر بر هم عمودند. اگر $AE=۲$ و $CG=۵$ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۴۸. نسبت مساحت نه‌ضلعی منتظم محاطی دایره‌ای به شعاع ۵ به مساحت نه‌ضلعی منتظم محیطی این دایره کدام است؟

۱) $\cos^{۲}۴۰^{\circ}$ ۲) $۵\cos^{۲}۲۰^{\circ}$ ۳) $۵\cos^{۲}۴۰^{\circ}$ ۴) $\cos^{۲}۲۰^{\circ}$

۱۴۹. بیشترین فاصلهٔ نقاط دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}-۶x+۴y=m$ تا محور yها برابر ۷ است شعاع دایره کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۲

۱۵۰. در مثلثی به اضلاع ۷ و ۶ و ۳ واحد، دایره محاطی خارجی بر بزرگ‌ترین ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. این دایره، نقطه تماس ضلع بزرگ را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

محل انجام محاسبه

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۰۱. گزینه ۲ روش اول: معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۴ - ۲x^۲ + ۱ + x^۲ + a = x^۴ - x^۲ + (a+۱) = ۰$$

معادلهٔ بالا در صورتی جواب حقیقی دارد که معادلهٔ $t^۲ - t + (a+۱) = ۰$ یک جواب دو مثبت و یک جواب منفی داشته باشد. دقت کنید که معادلهٔ اخیر از تغییر متغیر $t = x^۲$ به‌دست آمده است.

درنتیجه کافی است $a+۱$ منفی باشد.

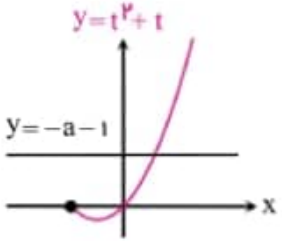
$$a + ۱ < ۰ \Rightarrow a < -۱$$

روش دوم:

$$(x^۲ - ۱)^۲ + (x^۲ - ۱) + (a+۱) = ۰$$

با تغییر متغیر $x^۲ - ۱ = t \geq -۱$ به معادلهٔ $t^۲ + t + (a+۱) = ۰; t \geq -۱$ می‌رسیم. باید این معادله یک جواب داشته باشد؛ یعنی باید خط $y = -a - ۱$ نمودار منحنی $y = t^۲ + t; t \geq -۱$ را در یک نقطه قطع کند.

باتوجه به شکل باید:



$$-a - ۱ > ۰ \Rightarrow a < -۱$$

۱۰۲. گزینه ۲

$$\frac{۱}{|x+۳|} \geq \frac{۱}{|۲x-۱|}$$

چون هر دو طرف نامعادله مثبت هستند. اگر طرفین را معکوس کنیم جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$|x+۳| \leq |۲x-۱| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} |x+۳|^۲ \leq |۲x-۱|^۲ \Rightarrow (x+۳)^۲ - (۲x-۱)^۲ \leq ۰ \Rightarrow (x+۳+۲x-۱)(x+۳-۲x+۱) \leq ۰ \Rightarrow (۳x+۲)(۴-x) \leq ۰$$

$$\rightarrow \text{خارج دو ریشه جواب است} \rightarrow (-\infty, -\frac{۲}{۳}] \cup [۴, +\infty)$$

در نامعادلات $(ax+b)(cx+d) \leq ۰$ علامت $a \cdot c$ را با علامت جهت نامساوی مقایسه کنید اگر یکی باشند خارج دو ریشه جواب است و اگر یکی نباشند بین دو ریشه جواب است.

≥ ۰

< ۰

> ۰

$$\text{مجموعهٔ جواب نامعادله} = (-\infty, -\frac{۲}{۳}] \cup [۴, +\infty)$$

دقت کنید باید ریشه‌های مخرج نامعادلهٔ اصلی از مجموعهٔ جواب نامعادله حذف شوند یعنی باید $x = -۳$ و $x = \frac{۱}{۲}$ را از مجموعهٔ جواب کم کنیم.

$$(-\infty, -۳) \cup (-۳, -\frac{۲}{۳}] \cup [۴, +\infty) \rightarrow a = -۳ \,,\; b = -\frac{۲}{۳} \,,\; c = ۴ \rightarrow a + b + c = \frac{۱}{۳}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۰۳. گزینه ۴

می‌دانیم:

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} \quad , \quad ۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$$

$$\tan^۲ x + ۱ = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۱+\tan^۲ x = \frac{۹}{۵} \Rightarrow \tan^۲ x = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \tan x = \frac{۲}{\sqrt{۵}} \Rightarrow \tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x} \Rightarrow \tan ۲x = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۵}}}{۱-\frac{۴}{۵}} = \frac{\frac{۴}{\sqrt{۵}}}{\frac{۱}{۵}}$$

$$\tan ۲x = \frac{۴\times ۵}{\sqrt{۵}} = ۴\sqrt{۵}$$

۱۰۴. گزینه ۴

می‌دانیم : $۱-\cos\alpha = ۲\sin^۲(\frac{\alpha}{۲})$ ، $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{\pi}{۱۸} = ۱۰^\circ$، پس:

$$\frac{۱-\sin\frac{\pi}{۱۸}}{\cos\frac{\pi}{۱۸}} = \frac{۱-\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} = \frac{۱-\cos ۸۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ} = \frac{۲\sin^۲ ۴۰^\circ}{۲\sin ۴۰^\circ \cos ۴۰^\circ} = \tan ۴۰^\circ$$

۱۰۵. گزینه ۲

$$x = ۲t \Rightarrow \cos ۲t + \cos t = -۱ \Rightarrow ۲\cos^۲ t - ۱ + \cos t = -۱ \Rightarrow \cos t(۲\cos t + ۱) = ۰$$

$$\cos t = ۰ \Rightarrow t = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \pi \ , \ ۳\pi$$

$$\cos t = -\frac{۱}{۲} = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} t = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{x}{۲} = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۴k\pi + \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۴\pi}{۳} \\ t = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{x}{۲} = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۴k\pi - \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۸\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۰۶. گزینه ۴ می‌دانیم: مشتق تابع $f(x) = g(x)h(x)$ در نقطه‌ی $x = a$ که در آن $g(x)$ در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر و $g(a) = ۰$ و h در a پیوسته باشد، به صورت $f'(a) = g'(a)h(a)$ است.

از آنجا که حد مورد نظر سوال، تعریف مشتق تابع f در $x = ۲$ می باشد، پس کافی است $f'(۲)$ را محاسبه کنیم. از طرف دیگر چون $f(۲) = ۰$ می شود، یعنی $x = ۲$ ریشه ی تابع f می باشد، کافی است مقدار مشتق عامل صفر شونده در $x = ۲$ (یعنی $\cot\frac{\pi}{x}$) را محاسبه کرده و در مقدار مابقی تابع به ازای $x = ۲$ ضرب کنیم.

$$(\cot\frac{\pi}{x})' = (\frac{۱}{\tan\frac{\pi}{x}})' = \frac{\frac{\pi}{x^۲}(۱+\tan^۲\frac{\pi}{x})}{\tan^۲\frac{\pi}{x}}$$

برای محاسبهٔ مقدار این عبارت در $x = ۲$ از حد استفاده می‌کنیم:

$$(\cot\frac{\pi}{x})'|_{x=۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{\pi(۱+\tan^۲\frac{\pi}{x})}{x^۲\tan^۲\frac{\pi}{x}} = \frac{\pi}{۴}\lim_{x\to ۲}\frac{۱+\tan^۲\frac{\pi}{x}}{\tan^۲\frac{\pi}{x}}$$

طبق قضیه پرتوان $\lim_{x\to ۲}\frac{۱+\tan^۲\frac{\pi}{x}}{\tan^۲\frac{\pi}{x}} = ۱$ و حاصل مشتق برابر $\frac{\pi}{۴}$ است.

$$\Rightarrow f'(۲) = \frac{۲+\sqrt{۴}}{۲-۱}(\frac{\pi}{۴}) = \pi$$

۱۰۷. گزینه ۴

با استفاده از جملات داده شده برای هر کدام از دنباله‌ها، جمله عمومی هر کدام را پیدا کرده و مجموع جملات ششم را بدست می‌آوریم:

$$a_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} a_۴ = ۴a + b = ۱۷ \\ a_{۱۰} = ۱۰a + b = ۴۱ \end{cases} \Rightarrow ۶a = ۲۴ \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow b = ۱ \Rightarrow a_۶ = ۶a + b = ۲۵$$

$$b_n = an^۲ + bn + c \Rightarrow \begin{cases} b_۱ = a + b + c = ۵ \\ b_۲ = ۴a + ۲b + c = ۱۳ \\ b_۳ = ۹a + ۳b + c = ۲۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۱, b = ۵, c = -۱ \Rightarrow b_۶ = ۱(۳۶) + ۵(۶) - ۱ = ۶۵$$

$$\Rightarrow a_۶ + b_۶ = ۲۵ + ۶۵ = ۹۰$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۰۸ . گزینه ۳

روش اول:

$f(0)=0$ و صعودی اکید است $\Rightarrow (\frac{1}{2})^x$ صعودی اکید $\Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^x$ نزولی اکید $\Rightarrow$

$y=\sqrt{xf(x)}$

$x\geq 0 \xrightarrow{f\ \text{صعودی}} f(x)\geq f(0)=0 \Rightarrow xf(x)\geq 0$

$x<0 \xrightarrow{f\ \text{صعودی}} f(x)<f(0)=0 \Rightarrow xf(x)>0$

بنابراین عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است و در نتیجه دامنهٔ تعریف تابع y ، $(-\infty,+\infty)$ است.

روش دوم:

$$y=\sqrt{xf(x)}=\sqrt{x(1-(\frac{1}{2})^x)} \rightarrow x(1-(\frac{1}{2})^x)\geq 0$$

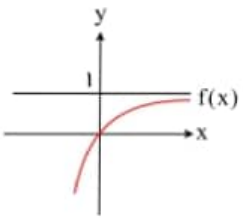
$$\rightarrow \begin{cases} x\geq 0 : (\frac{1}{2})^x\leq 1 \Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^x\geq 0 \Rightarrow x(1-(\frac{1}{2})^x)\geq 0 \Rightarrow D_1=[0,+\infty] \\ \text{یا} \\ x<0 : (\frac{1}{2})^x>1 \Rightarrow -(\frac{1}{2})^x<-1 \Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^x<0 \Rightarrow x(1-(\frac{1}{2})^x)>0 \Rightarrow D_2=(-\infty,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow D=D_1\cup D_2=(-\infty,+\infty)$$

روش سوم:

ناحیه‌ی اول و سوم $\rightarrow xy\geq 0 : xf(x)\geq 0$

با توجه به نمودار $D=\mathbb{R}$



۱۰۹ . گزینه ۱

برای محاسبهٔ دامنهٔ توابع $y=\log_B^A$ باید سه شرط $A>0, B>0, B\neq 1$ را لحاظ کنیم و نیز می‌دانیم:

$$\begin{cases} \log_a^f\geq 0 \xrightarrow{0<a<1} 0<f\leq 1 \\ \log_a^f\geq 0 \xrightarrow{a>1} f\geq 1 \end{cases}$$

$$\log_{0/4}^{\log 3x+1}\geq 0 \Rightarrow 0<\log 3x+1\leq 1 \Rightarrow 1<3x+1\leq 10 \Rightarrow 0<x\leq 3 \quad (1)$$

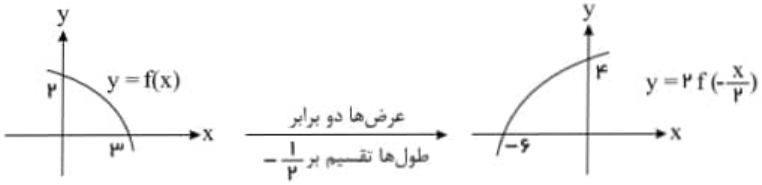
$$\log 3x+1>0 \Rightarrow 3x+1>1 \Rightarrow x>0 \quad (2)$$

$$3x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$(1)\cap(2)\cap(3) \Rightarrow 0<x\leq 3$$

۱۱۰ . گزینه ۲ در نمودار تابع $y=kf(x)$ عرض نقاط روی نمودار $y=f(x)$ را k برابر می‌کنیم.

در نمودار تابع $y=kf(ax)$ طول نقاط روی نمودار $y=f(x)$ را بر a تقسیم می‌کنیم.



و فاصله $A\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$ از $O\left|\begin{matrix}-6\\0\end{matrix}\right.$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \rightarrow AB=\sqrt{26+16}=\sqrt{52}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{13}$$

۱۱۱ . گزینه ۳ تابع در $x=1$ پیوسته است و در یک همسایگی آن داریم:

$$f(x)=\begin{cases} (\frac{3}{2}-1)(x^2-1) & x\geq 1 \\ (\frac{3}{2}-0)(-x^2+1) & x\leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ -3x & x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1)=1 \\ f'_-(1)=-3 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1)-f'_-(1)=4$$

۱۱۲ . گزینه ۳

$$2^{-x}<0/0000001 \rightarrow 2^{-x}<10^{-6}$$

از طرفین رابطه‌ی داده شده در مبنای ۱۰، لگاریتم می‌گیریم.

forum.konkur.in

www.konkur.in

$$\log ۲^{-x} < \log ۱۰^{-۶} \to -x\log ۲ < -۶ \xrightarrow{\text{در منفی ضرب می‌کنیم}} x\log ۲ > ۶ \to x(\frac{۳۰۱}{۱۰۰۰}) > ۶$$

$$\to x > \frac{۶۰۰۰}{۳۰۱} \to x > ۱۹٫۹۳۴$$

پس کوچک‌ترین عدد x با دو رقم اعشار، **۱۹٫۹۴** است.

۱۱۳ . گزینه ۱ روش اول:

$$\text{شرط اول (شرط رادیکالی)} : \Rightarrow x^۲ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow |x| \geq ۱ \Rightarrow x \in (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty) (۱)$$

$$\text{شرط دوم (شرط لگاریتمی)} : \Rightarrow x^۲ - x - ۲ > ۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = ۲ \end{cases}$$

x		-۱		۲	
$x^۲ - x - ۲$	$+$		$-$		$+$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -۱) \cup (۲, +\infty) (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\cap(۲)} x \in (-\infty, -۱) \cup (۲, +\infty)$$

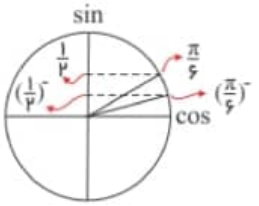
روش دوم: عددگذاری

$$\text{اگر } x = ۲ \Rightarrow \log^{(۲^۲ - ۲ - ۲)} = \log^{۰} \Rightarrow \text{غیرقابل قبول}$$

پس عدد ۲ در دامنهٔ عبارت نیست فقط گزینهٔ ۳ حذف می‌شود.

گزینهٔ ۲ و ۴ نیز حذف می‌شوند. $\Rightarrow$ غیرقابل قبول $\Rightarrow \sqrt{x^۲ - ۱} = \sqrt{-۱}$ اگر $x = ۰$

۱۱۴ . گزینه ۳ با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی داریم:



$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۶})^-} \frac{\cos x}{۲\sin x - ۱} = \frac{\cos \frac{\pi}{۶}}{۲(\frac{۱}{۲} - \varepsilon) - ۱} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱ - ۲\varepsilon - ۱} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-} = -\infty$$

۱۱۵ . گزینه ۲ تابع مقابل در حالات زیر فقط یک مجانب قائم دارد.

$$f(x) = \frac{x + ۶}{x^۲ + mx + ۴}$$

حالت ۱) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد.

$$x^۲ + mx + ۴ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow m^۲ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow m = \pm ۴$$

$$m = ۴ \Rightarrow f(x) = \frac{x + ۶}{(x + ۲)^۲} \quad \text{فقط } x = -۲ \text{ مجانب قائم است}$$

$$m = -۴ \Rightarrow f(x) = \frac{x + ۶}{(x - ۲)^۲} \quad \text{فقط } x = ۲ \text{ مجانب قائم است}$$

حالت ۲) مخرج بر $x + ۶$ بخش پذیر باشد.

$$x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۶ \Rightarrow x^۲ + mx + ۴ = ۰ \Rightarrow ۳۶ - ۶m + ۴ = ۰ \Rightarrow m = \frac{۲۰}{۳}$$

$$f(x) = \frac{x + ۶}{x^۲ + \frac{۲۰}{۳}x + ۴} = \frac{x + ۶}{(x + ۶)(x + \frac{۲}{۳})} = \frac{۱}{x + \frac{۲}{۳}} \quad \text{فقط } x = -\frac{۲}{۳} \text{ مجانب قائم است}$$

۱۱۶ . گزینه ۱ با توجه به اینکه حاصل حد مقدار عددی غیر صفر می‌باشد، پس بزرگترین درجهٔ صورت برابر بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج است. داریم:

$n > ۳ \to n - ۲ > ۱ \to$ $n - ۲$ بزرگترین درجهٔ مخرج بوده که بزرگتر از یک است.

با توجه به این $m + ۳ > ۱$ باید باشد تا بزرگترین درجهٔ صورت و مخرج بتوانند با هم برابر شوند، پس:

forum.konkur.in

www.konkur.in

$m+۳=n-۲\rightarrow n-m=۵$

حال داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{m+۳}-nx+m}{m^۲x^{n-۲}+۲mx+n-۱}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{m+۳}}{m^۲x^{n-۲}}=\frac{n}{m^۲}=۴\rightarrow n=۴m^۲$$

$$\xrightarrow{n-m=۵}۴m^۲-m=۵\rightarrow ۴m^۲-m-۵=۰\begin{cases}m=\frac{۵}{۴}\rightarrow \text{ق ق غ}\ (m\in\mathbb{Z})\\ m=-۱\rightarrow \text{ق ق}\end{cases}$$

$m=-۱\rightarrow n=۴\rightarrow m+n=۳$

۱۱۷ . گزینه ۳

می‌دانیم: $\lim_{u\to۰}\sin^n u\simeq u^n$

$$\lim_{x\to۰}\frac{\tan^۲x-\sin^۲x}{ax^n}=۱\rightarrow\lim_{x\to۰}\frac{\frac{\sin^۲x}{\cos^۲x}-\sin^۲x}{ax^n}=۱$$

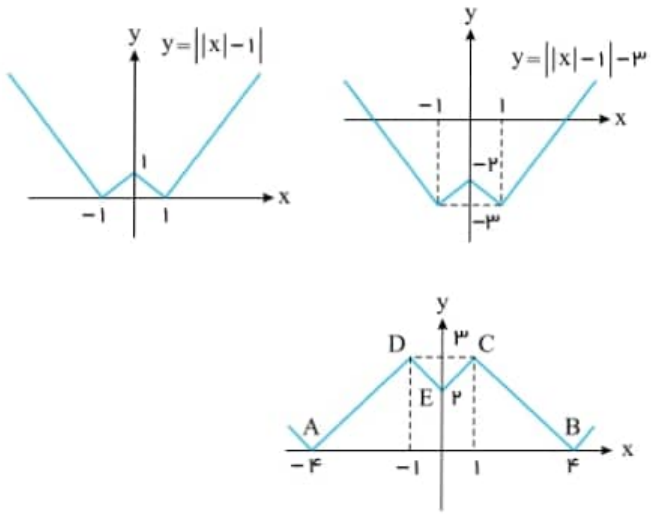
$$\lim_{x\to۰}\frac{\frac{\sin^۲x-\sin^۲x\cdot\cos^۲x}{\cos^۲x}}{ax^n}=۱\rightarrow\lim_{x\to۰}\frac{\sin^۲x\cdot(۱-\cos^۲x)}{\cos^۲x\cdot ax^n}=۱$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{\sin^۲x\cdot\sin^۲x}{\cos^۲x\cdot ax^n}=\lim_{x\to۰}\frac{x^۴}{۱\times ax^n}=۱$$

$$\lim_{x\to۰}ax^n=x^۴\Rightarrow a=۱\Rightarrow n=۴\Rightarrow a+n=۱+۴=۵$$

۱۱۸ . گزینه ۳

برای محاسبهٔ مساحت ناحیهٔ محصور کافی است مساحت مثلث DEC را از مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ کم کنیم. یعنی داریم:



ذوزنقه $S=\frac{(۲+۸)\times ۳}{۲}=۱۵$

مثلث DEC $S=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱=۱\Rightarrow$ مطلوب $S=۱۵-۱=۱۴$

۱۱۹ . گزینه ۱ باید $y'>۰$ را حل کنیم:

$$f'(x)=(x+۱)^۳+۳(x+۱)^۲(x-۲)=(x+۱)^۲(x+۱+۳x-۶)=(x+۱)^۲(۴x-۵)>۰\Rightarrow ۴x-۵>۰\Rightarrow x>\frac{۵}{۴}$$

پس تابع در بازهٔ $(\frac{۵}{۴},+\infty)$ صعودی است.

۱۲۰ . گزینه ۲ چون علامت f' به ازای هر عدد حقیقی x منفی است، پس تابع f در کل $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. طبق تعریف، تابع f را در بازهٔ مفروض I در صورتی اکیداً نزولی گویند که داشته باشیم:

$$\forall x_۱,x_۲\in I: x_۱<x_۲\Leftrightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

بنابراین داریم:

forum.konkur.in

www.konkur.in

$$f(2a^2-1)>f(3a+4) \xrightarrow[f \text{ نزولی بودن}]{\text{به دلیل اکیدا}} 2a^2-1<3a+4 \Rightarrow 2a^2-3a-5<0$$

ریشه‌های معادلهٔ $2a^2-3a-5=0$ اعداد $a=-1$ و $a=\frac{5}{2}$ هستند و بنابراین با تعیین علامت عبارت موردنظر، مجموعه جواب نامعادله به صورت $-1<a<\frac{5}{2}$ خواهد بود.

۱۲۱. گزینه ۲ طبق روابط شدت جریان متوسط $\Delta I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$ و شدت جریان لحظه‌ای $I=\frac{dq}{dt}$ می‌توان نوشت:

$$\text{شدت متوسط جریان} = \Delta I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{q_4-q_0}{4-0}=\frac{[4^3+4^2+4(4)]-0}{4}=24(A)$$

$$\text{شدت جریان لحظه‌ای } I=\frac{dq}{dt}=3t^2+2t+4 \Rightarrow I(4)=3\times 4^2+2(4)+4=60(A)$$

۱۲۲. گزینه ۱

در گزاره نمای $(x-2)^4+(y-4)^4=0$ می‌دانیم اگر مجموع دو عبارت با توانهای زوج صفر شود آنگاه هر یک از آنها صفر خواهد شد، بنابراین ریشه‌های این گزاره نما $x=2$ و $y=4$خواهد بود.

$$[(x=2)\wedge(y=4)]\wedge[(x=3)\vee(x=2)\vee(x=-2)] \Rightarrow x=2$$

۱۲۳. گزینه ۱

A در هر دو مجموعه مشترک است و می‌توانیم پس از استفاده از قانون دمرگان، از A فاکتور بگیریم (برعکس قاعده پخش)

$$(A\cup B'\cup C')\cap[(B\cap C)\cup A]=[A\cup(B\cap C)']\cap[A\cup(B\cap C)]=A\cup[(B\cap C)'\cap(B\cap C)]=A\cup\varnothing=A$$

۱۲۴. گزینه ۲

$$n\times n!=(n+1-1)\times n!=(n+1)!-n!$$

باتوجه به رابطهٔ فوق، هریک از جملات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Rightarrow 1\times 1!=2!-1!$$
$$2\times 2!=3!-2!$$
$$3\times 3!=4!-3!$$
$$\vdots$$
$$n\times n!=(n+1)!-n!$$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم.}]{\text{طرفین را جمع}} 1\times 1!+2\times 2!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$$

$$\Rightarrow 1\times 1!+2\times 2!+\cdots+n\times n!=120 \Rightarrow (n+1)!-1=119$$

$$\Rightarrow (n+1)!=120=5! \Rightarrow n+1=5\to n=4$$

۱۲۵. گزینه ۲ اگر میانه داده‌های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر با k باشد، میانه داده‌های $ax_1+b, ax_2+b, \ldots, ax_n+b$ برابر با $ak+b$ است. پس میانه این داده‌های جدید سؤال برابر با $-2k+3$ می‌باشد.

۱۲۶. گزینه ۲ ابتدا تعداد مسیرهای رفت را می یابیم:

واضح است یکی از ۱۲ مسیر طی خواهد شد.

$$2\times 3\times 2=12$$

مسیر برگشت نباید با مسیر رفت یکی باشد یعنی از بین ۱۲ مسیر برگشت فقط ۱۱ مسیر مجاز داریم:

$$\text{جواب} = 12\times 11=132$$

۱۲۷. گزینه ۳ پیشامد A: انتخاب شدن ریاضی

پیشامد B: انتخاب نشدن زبان $\leftarrow B'$: انتخاب شدن زبان

پیشامد $A\cap B'$: ریاضی و زبان انتخاب شوند.

$$A\cap B'=\{\text{(ادبیات، زبان، ریاضی)، (شیمی، زبان، ریاضی)، (فیزیک، زبان، ریاضی)}\}$$

۱۲۸. گزینه ۲ حرف «ی» در هر جایی غیر از آخر کلمه، نقطه‌دار است! با توجه به رابطهٔ $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ حالت‌ها را حساب می‌کنیم:

$$|A|\to \text{حرف اول نقطه‌دار} \Rightarrow \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ (\text{ش/ب}) = 2\times 3\times 2=12$$

$$|B|\to \text{حرف آخر نقطه‌دار} \Rightarrow \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{1}\ (\text{ش}) = 3\times 2=6$$

$$|A\cap B|\to \text{هم حرف اول و هم حرف آخر نقطه‌دار} \Rightarrow \boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{1}\ (\text{ش}\ \ \text{ب}) = 2$$

پس داریم:

$$|A\cup B|=12+6-2=16$$

۱۲۹. گزینه ۲ برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم یک عدد بر ۸ باید سه رقم سمت راست آن را بر ۸ تقسیم کنیم. پس باید $\overline{3y6}$ بر ۸ بخش‌پذیر باشد.

$$\overline{3y6}\overset{8}{\equiv}6+10y+300\overset{8}{\equiv}-2+2y+4\overset{8}{\equiv}2y+2\overset{8}{\equiv}0 \Rightarrow 2y\overset{8}{\equiv}-2 \xrightarrow[(2,8)=2]{\div 2} y\overset{4}{\equiv}-1\overset{4}{\equiv}3 \Rightarrow y=3 \text{ یا } 7 \xrightarrow{y>3} y=7$$

۱۳۰. گزینه ۴ طبق قضیهٔ تقسیم و مفروضات سؤال داریم:

forum.konkur.in

www.konkur.in

$$a = bq + r \Rightarrow a = ۱۳q + \frac{۱}{۵}q$$

$$r < b \Rightarrow \frac{۱}{۵}q < ۱۳ \Rightarrow q < ۶۵$$

می‌دانیم که باقیمانده عددی طبیعی است، پس q باید مضربی از ۵ باشد. بیشترین مقدار q که مضرب ۵ باشد برابر ۶۰ است و درنتیجه بیشترین مقدار ممکن برای a برابر است با:

$$max(a) = ۱۳ \times ۶۰ + \frac{۱}{۵} \times ۶۰ = ۷۹۲$$

۱۳۱ . گزینه ۱

a : علی ، b : سعید ، c : محمد

$$P(a) = ۲P(b) \ , \ P(b) = ۳P(c)$$

$$P(a) + P(b) + P(c) = ۱ \Rightarrow ۲P(b) + P(b) + \frac{۱}{۳}P(b) = ۱$$

$$\Rightarrow P(b) = \frac{۳}{۱۰} \Rightarrow P(b') = ۱ - P(b) = \frac{۷}{۱۰}$$

۱۳۲ . گزینه ۳

کافی است از بین ۶ نفر دیگر، ۴ نفر را انتخاب کرده و جایگشت‌های ممکن برای شغل‌ها را درنظر بگیریم:

$$\binom{۱}{۱} \times \binom{۶}{۳} \times ۴! = ۴۸۰$$

۱۳۳ . گزینه ۳ نکته: دو یالی که در یک رأس مشترک باشند را دو یال مجاور می‌نامند.

بدیهی است اگر درجهٔ رأس v برابر k باشد $(k > ۱)$ تعداد جفت یال‌های مجاور در رأس v برابر $\binom{k}{۲}$ می‌باشد. پس تعداد جفت یال‌های مجاور برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{رأس } b} + \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{رأس } c} + \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{رأس } d} + \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{رأس } e} + \underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{رأس } f} + \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{رأس } g} = ۱۰ + ۳ + ۳ + ۳ + ۱ + ۳ = ۲۳$$

۱۳۴ . گزینه ۴

ابتدا سطرهای اول و دوم و سپس ستون‌های اول و دوم را به‌طور منحصر به فرد پر می‌کنیم.

۲	۱	۳	۴	
۱	۲	۴	۳	
۴	۳			
۳	۴			

مطابق جدول، $a = ۳$ ، $b = ۱$ و $c = ۴$ است و در نتیجه داریم:

$$a + b + c = ۳ + ۱ + ۴ = ۸$$

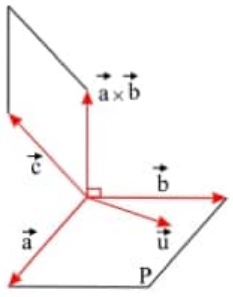
۱۳۵ . گزینه ۱ هیچ رأسی در این گراف با تمام رئوس دیگر مجاور نیست ولی با انتخاب هر دو رأس دلخواه از این گراف، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم به دست می‌آید که لزوماً مینیمال نیز خواهد بود و این گراف نمی‌تواند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمالی با بیش از دو عضو داشته باشد، پس تعداد این مجموعه‌ها برابر است با:

$$\binom{۶}{۲} = \frac{۶ \times ۵}{۲} = ۱۵$$

۱۳۶ . گزینه ۱

مطابق شکل زیر، بردار $\vec{u}$ بر دو بردار $\vec{c}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ عمود است.

$$\vec{u} = \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{c} \\ \vec{u} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) \xrightarrow{p \perp (\vec{a} \times \vec{b})} \vec{u} \parallel p \end{cases}$$



یعنی $\vec{u}$ موازی صفحهٔ شامل دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

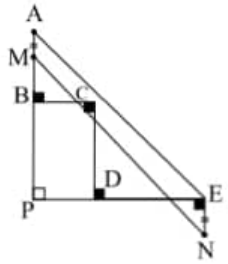
۱۳۷ . گزینه ۱ مطابق شکل داریم:

forum.konkur.in

www.konkur.in

$EN \parallel AM, EN = AM \Rightarrow AMNE$ متوازی الاضلاع

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = \left|\overrightarrow{AE}\right|$$



پس برداری که M را بر N منطبق می‌کند همان بردار $\overrightarrow{AE}$ است. داریم:

$$\begin{cases} AP = AB + BP = ۲ + CD = ۲ + ۴ = ۶ \\ PN = PD + DE = ۳ + ۵ = ۸ \end{cases} \Rightarrow A\hat{P}E = AE^۲ = AP^۲ + PN^۲$$

$$AE^۲ = ۶^۲ + ۸^۲ \Rightarrow AE = ۱۰$$

۱۳۸ . گزینه ۴ ابتدا ماتریس $A^۲$ را یافته و از روی آن درایهٔ سطر سوم و ستون دوم ماتریس $A^۴$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۰ \\ -۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۴ = A^۲ \times A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۰ \\ -۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۰ \\ -۲ & ۳ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & a_{۳۲} & \times \end{bmatrix}$$

$$a_{۳۲} = -۳ + ۹ + ۳ = ۹$$

۱۳۹ . گزینه ۱

می‌دانیم برای ماتریس مربعی و وارون‌پذیر X رابطهٔ $X \cdot X^{-۱} = I$ برقرار است. پس داریم:

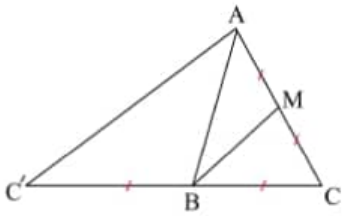
$$(A - I)(A - I)^{-۱} = I \rightarrow A(A - I)^{-۱} - I(A - I)^{-۱} = I$$

$$\rightarrow A(A - I)^{-۱} = I + (A - I)^{-۱}$$

$$\rightarrow A(A - I)^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

۱۴۰ . گزینه ۱ اگر C' قرینهٔ C نسبت به راس B باشد. مطابق شکل، طبق قضیهٔ تالس داریم:

$$BM = \frac{۱}{۲}C'A \Rightarrow C'A = ۲BM$$

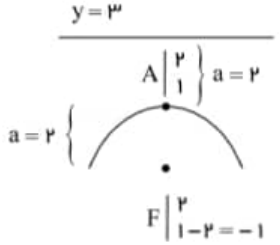


چون C' نقطهٔ ثابت و BM هم اندازهٔ ثابتی دارد پس مکان هندسی A دایره‌ای به مرکز C' و شعاع $۲BM$ است.

۱۴۱ . گزینه ۱ هر دایره‌ای که مرکزش روی سهمی باشد و بر خط هادی مماس باشد همواره از کانون می‌گذرد. بنابراین:

$$x^۲ - ۴x + ۸y - ۴ = ۰ \rightarrow (x - ۲)^۲ - ۴ + ۸y - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۲)^۲ = -۸y + ۸ \rightarrow (x - ۲)^۲ = -۸(y - ۱) \rightarrow A\begin{vmatrix} ۲ \\ ۱ \end{vmatrix} \quad , \quad a = ۲$$



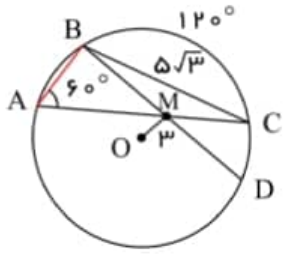
مطابق شکل، $y = ۳$ خط هادی سهمی و نقطهٔ $(۲, -۱)$ کانون این سهمی قائم است که دهانهٔ آن نیز رو به پایین است.

۱۴۲ . گزینه ۲ در مثلث ABC داریم:

forum.konkur.in

www.konkur.in

$$\overset{\Delta}{ABC} : \hat{A} \text{ محاطی} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ \Rightarrow R_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲\sin ۶۰^\circ} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = ۵$$



شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC ، شعاع دایره است. داریم:

$$R^۲ - OM^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۱۶ \Rightarrow AM \times MC = ۱۶ \Rightarrow x(x+۶) = ۱۶ \Rightarrow x = ۲$$

۱۴۳ . گزینه ۲

قضیهٔ کسینوس‌ها : $a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos\hat{A} \Rightarrow ۴ = b^۲ + c^۲ - \sqrt{۳}bc$

مساحت مثلث : $S = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۱}{۲}bc(\frac{۱}{۲}) \Rightarrow bc = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow c = ۴\frac{\sqrt{۳}}{b}$

$$\xrightarrow{(۱)} ۴ = b^۲ + (\frac{۴\sqrt{۳}}{b})^۲ - ۱۲ \Rightarrow b^۴ - ۱۶b^۲ + ۴۸ = ۰ \Rightarrow (b^۲-۴)(b^۲-۱۲) \Rightarrow \begin{cases} b = ۲ \\ b = ۲\sqrt{۳} \end{cases}$$

۱۴۴ . گزینه ۲

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{CP}{BC}$$

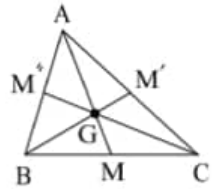
$CTOP$ متوازی‌الاضلاع است. پس $CT = PO$، درنتیجه:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{CT}{CA} = \frac{PO}{CA} \\ \frac{OP}{CN} = \frac{MP}{MC} \\ \frac{CN}{AC} = \frac{MC}{BC} \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} \frac{OP}{AC} = \frac{MP}{BC} \Bigg\} \rightarrow \frac{CT}{CA} = \frac{MP}{BC}$$

$$\frac{AQ}{AB} + \frac{BM}{BC} + \frac{CT}{CA} = \frac{CP}{BC} + \frac{BM}{BC} + \frac{MP}{BC} = \frac{CP+BM+MP}{BC} = \frac{BC}{BC} = ۱$$

۱۴۵ . گزینه ۱ ابتدا ثابت می‌کنیم مجموع میانه‌های هر مثلث از $\frac{۳}{۴}$ محیط بزرگتر و از محیط مثلث کوچکتر است. با توجه به این که میانه‌های هر مثلث یک دیگر را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می کنند، داریم:

$$\frac{AG}{AM} = \frac{۲}{۳} , \frac{BG}{BM'} = \frac{۲}{۳} , \frac{CG}{CM''} = \frac{۲}{۳}$$
$$\Rightarrow AG = \frac{۲}{۳}AM , BG = \frac{۲}{۳}BM' , CG = \frac{۲}{۳}CM''$$



همانطور که قبلاً ثابت کردیم، مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث از رئوس آن از نصف محیط بزرگتر است. لذا خواهیم داشت:

$$\frac{AB+AC+BC}{۲} < AG+BG+CG \Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{۲} < \frac{۲}{۳}AM + \frac{۲}{۳}BM' + \frac{۲}{۳}CM''$$
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}(AB+AC+BC) < AM+BM'+CM''$$

طرف چپ نامساوی اثبات شد. برای اثبات طرف راست نامساوی نیز باید به نکته ی زیر که قبلاً اثبات کردیم، اشاره نمود:

«در هر مثلث، میانه ی نظیر هر ضلع از نصف مجموع ۲ ضلع دیگر کوچکتر است.»

با توجه به نکته ی فوق داریم:

$$\begin{cases} AM < \frac{AB+AC}{۲} \\ BM' < \frac{AB+BC}{۲} \\ CM'' < \frac{AC+BC}{۲} \end{cases} \xrightarrow{+} AM+BM'+CM'' < \frac{۲(AB+AC+BC)}{۲}$$
$$\Rightarrow AM+BM'+CM'' < AB+AC+BC$$

حال با توجه به دو اثبات مذکور داریم:

forum.konkur.in

www.konkur.in

$$\frac{۳}{۴}(AB+AC+BC)<AM+BM'+CM''<AB+AC+BC$$

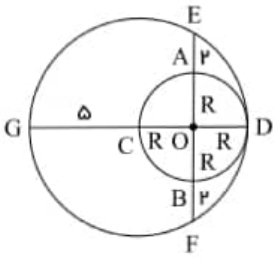
$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}(۵+۶+۹)<AM+BM'+CM''<۵+۶+۹$$

$$\Rightarrow ۱۵<AM+BM'+CM''<۲۰ \Rightarrow ۱۵<k<۲۰$$

۱۴۶ . گزینه ۴ کمانهای بین دو وتر موازی مساویند.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD} \\ \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DB}=۱۸۰ \\ \overset{\frown}{CD}=۲\overset{\frown}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow ۱۴\overset{\frown}{BD}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=۴۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{DBC}=\frac{۴۵}{۲}=۲۲٫۵^\circ$$

۱۴۷ . گزینه ۴



رابطهٔ طولی در دایرهٔ بزرگ‌تر : $OD \times OG = OE \times OF$

$$R(R+۵)=(R+۲)(R+۲)$$

$$R^۲+۵R=R^۲+۴R+۴$$

$$R=۴$$

۱۴۸ . گزینه ۴

طول ضلع نه‌ضلعی منتظم محاطی : $a=۲R\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n} \xrightarrow{n=۹\ ,\ R=۵} a=۱۰\sin ۲۰^\circ$

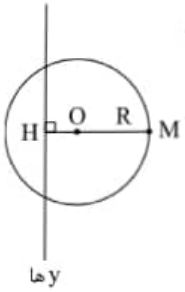
طول ضلع نه‌ضلعی منتظم محیطی : $b=۲R\tan\frac{۱۸۰^\circ}{n} \xrightarrow{n=۹\ ,\ R=۵} b=۱۰\tan ۲۰^\circ$

هر دو نه‌ضلعی منتظم با هم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است، پس داریم:

$$\frac{S}{S'}=(\frac{a}{b})^۲=(\frac{۱۰\sin ۲۰^\circ}{۱۰\tan ۲۰^\circ})^۲=\cos^۲ ۲۰^\circ$$

۱۴۹ . گزینه ۲

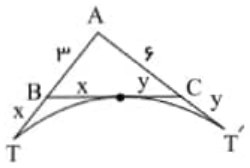
مرکز دایرهٔ $x^۲+y^۲-۶x+۴y=m$ نقطهٔ $O(۳,-۲)$ است و فاصلهٔ مرکز دایره تا محور yها $OH=۳$ است. با توجه به شکل و فرض سؤال، $MH=۷$، در نتیجه شعاع دایره $R=۴$ است.



۱۵۰ . گزینه ۳

می دانیم اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم اندازه ی آن دو مماس برابر خواهند بود. پس با توجه به شکل داریم:

$$BC=۷ \Rightarrow x+y=۷$$



AT' مماس ، $AT \rightarrow ۳+x=y+۶ \Rightarrow x-y=۳$

پس:

$$x=۵\ ,\ y=۲$$

$$?=\frac{y}{x}=\frac{۲}{۵}$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

مؤلف کتاب ریاضیات ریپتیچ

طراح ریاضی قلمچی، گاج و ...

مدرس پروازی گاما، یادلاین و فرادرس

عضو انجمن ریاضی ایران

عضو انجمن بیوانفورماتیک ایران

مدرس برنامه نویسی کامپیوتر

مؤلف جمع بندی

مهندس محمد حمیدی

konkur.in

forum.konkur.in