

کد کنترل

469

A



# آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) - سال ۱۴۰۰

دفترچه شماره (۱)

صبح جمعه

۹۹/۱۲/۱۵



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

رشته آمار - (کد ۲۲۳۲)

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی: - مبانی آنالیز ریاضی - ریاضی عمومی ۱ و ۲ - احتمال ۱ و ۲ - استنباط آماری ۱	۴۵	۱	۴۵

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالات و پائین پاسخنامه را تأیید می‌نمایم.

امضا:

۱- مکان هندسی نقاط  $z = x + iy$  که در نامساوی  $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 2$  صدق می‌کنند، کدام است؟ ( $i^2 = -1$ )

(۱) خارج دایره‌ای به مرکز  $(0, -\frac{5}{3})$  و شعاع  $\frac{4}{3}$

(۲) خارج دایره‌ای به مرکز  $(0, \frac{5}{3})$  و شعاع  $\frac{4}{3}$

(۳) خارج دایره‌ای به مرکز  $(0, -\frac{4}{3})$  و شعاع  $\frac{5}{3}$

(۴) خارج دایره‌ای به مرکز  $(0, \frac{4}{3})$  و شعاع  $\frac{5}{3}$

۲- فرض کنید برای دو تابع چندجمله‌ای  $f$  و  $g$  داشته باشیم:

$$f(x) + g(x) = 5, f(g(x)) = 8 - 4x$$

مجموعه مقادیر ممکن برای  $g(2)$  کدام است؟

(۱)  $\{1, -3\}$

(۲)  $\{-1, 3\}$

(۳)  $\{1, 3\}$

(۴)  $\{-1, -3\}$

۳- ضابطه تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  کدام باشد تا  $f$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد؟ ( $[x]$  جزء صحیح  $x$  است).

(۱)  $f(x) = [x]^2 + (x - [x] + 1)^2$

(۲)  $f(x) = [x]^2 + (x - [x])^2$

(۳)  $f(x) = (x - [x])^2 + (x - [x] + 1)^2$

(۴)  $f(x) = (x - [x])^2 + (x - [x] - 1)^2$

۴- ناحیه درون سهمی  $y = x^2$  و نیمساز ربع اول را حول خط  $y = x$  دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل از این دوران کدام است؟

(۱)  $\frac{2\pi}{15}$

(۲)  $\frac{\sqrt{2}\pi}{30}$

(۳)  $\frac{\pi}{15}$

(۴)  $\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$

۵- تابع  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  را در نظر بگیرید. حاصل  $\nabla^2 f(x, y)$  در مبدأ مختصات کدام است؟

(۳) (۴)

(۳) تعریف نشده

(۲) (۵)

(۱) صفر

۶- حاصل انتگرال  $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(\pi x^3) dx dy$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{2}{3\pi}$

(۲) ۰

(۳)  $\frac{1}{3\pi}$

(۴)  $\frac{2}{3\pi}$

۷- کار انجام شده توسط نیروی  $\vec{F}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \vec{i} - \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \vec{j} + \vec{k}$  روی منحنی بسته

$x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) در صفحه  $z = x$  در جهت مثبت کدام است؟

(۱) صفر

(۲)  $\frac{a^2}{a^2 + 1}$

(۳)  $\frac{-a^2}{a^2 + 1}$

(۴)  $\frac{-2a^2}{a^2 + 1}$

- ۸- نیروی  $\vec{F}(x, y, z) = y^2 \vec{i} - x^2 \vec{j} - 3z^2 \vec{k}$  بر سطح جانبی استوانه‌ای شکل  $S$  با ضابطه  $r = 2(1 + \cos \theta)$  محدود به صفحات  $z = 1$  و  $z = 2$  جریان دارد. شار گذرا از سطح  $S$  کدام است؟
- (۱)  $-3\pi$
  - (۲)  $9\pi$
  - (۳) صفر
  - (۴)  $3\pi$
- ۹- فرض کنید  $\mathbb{R}$  مجموعه اعداد حقیقی با متر قدرمطلق باشد. گوییم  $A \subseteq \mathbb{R}$  عجیب است هرگاه زیرمجموعه بسته  $B$  در  $\mathbb{R}$  و زیرمجموعه باز  $C$  در  $\mathbb{R}$  موجود باشند، به طوری که  $A = B \cap C$  کدام یک از مجموعه‌های زیر عجیب نیست؟
- (۱)  $(0, 1)$  مجموعه اعداد گویا
  - (۲) مجموعه اعداد گویا
  - (۳) یک مجموعه بسته در  $\mathbb{R}$
  - (۴) یک مجموعه باز دلخواه در  $\mathbb{R}$
- ۱۰- فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع مشتق پذیر و برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $f(\frac{1}{n}) = 0$  می‌تواند صفر نباشد. کدام مورد درست است؟
- (۱)  $f(0) = f'(0) = 0$
  - (۲)  $f(0) = 0$  و  $f'(0)$  می‌تواند صفر نباشد.
  - (۳)  $f$  فقط تابع ثابت صفر است.
  - (۴)  $f'$  روی  $[0, 1]$  کراندار است.
- ۱۱- فرض کنید  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته و بر  $(0, 1)$  مشتق پذیر بوده و  $f(1) = 0$ . کدام مورد حتماً درست است؟
- (۱)  $c \in (0, 1)$  موجود است به طوری که  $cf'(c) - f(c) = 0$
  - (۲)  $c \in (0, 1)$  موجود است به طوری که  $f'(c) + f(c) = 0$
  - (۳)  $c \in (0, 1)$  موجود است به طوری که  $cf'(c) + f(c) = 0$
  - (۴)  $c \in (0, 1)$  موجود است به طوری که  $f'(c) - f(c) = 0$
- ۱۲- فرض کنید  $f$  تابع پیوسته و دوبار مشتق پذیر  $f$  در نقطه  $x = 1$ ، به سمت پایین باشد. اگر  $f(1)$  ماکزیمم نسبی تابع  $f$  باشد، وضعیت تابع  $g(x) = f(x) + f(x^2) + f(x^4)$  در  $x = 1$  چگونه است؟
- (۱) می‌نیمم نسبی است.
  - (۲) ماکزیمم نسبی است.
  - (۳) نقطه عطف است.
  - (۴) هیچ نتیجه‌ای حاصل نمی‌شود.
- ۱۳- فرض کنید  $A$  یک زیرمجموعه فضای متریک  $(M, d)$  باشد.  $A$  بی‌نقص نامیده می‌شود، هرگاه بسته و هر عنصر آن یک نقطه حدی باشد. کدام مورد درست است؟
- (۱) مجموعه  $A = [0, 1] \cup \{2\}$  در فضای  $\mathbb{R}$  و متریک معمولی بی‌نقص است.
  - (۲) مجموعه  $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  در فضای  $\mathbb{Q}$  و متریک معمولی بی‌نقص است.
  - (۳) هر مجموعه بسته در فضای  $\mathbb{R}$  بی‌نقص است.
  - (۴) مجموعه‌های بی‌نقص در هر فضای متریک، شمارش ناپذیرند.

۱۴- ۹۰ بلیط بخت آزمایی توسط ۹ نفر و هر کدام ۱۰ بلیط خریداری می‌شود که شامل ۵ بلیط برنده است. احتمال اینکه هر ۵ بلیط برنده را یک نفر دریافت کند، کدام است؟

$$(۱) \frac{۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹}{۸۶ \times ۸۷ \times ۸۸ \times ۸۹}$$

$$(۲) \frac{۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰}{۸۶ \times ۸۷ \times ۸۸ \times ۸۹ \times ۹۰}$$

$$(۳) \frac{۶ \times ۷ \times ۹ \times ۱۰}{۸۶ \times ۸۸ \times ۸۹ \times ۹۰}$$

$$(۴) \frac{۷ \times ۸ \times ۹}{۸۷ \times ۸۸ \times ۸۹}$$

۱۵- فرض کنید  $R$  دامنه تغییرات و  $Q_1$ ،  $Q_2$  و  $Q_3$  به ترتیب چارک‌های اول، دوم و سوم داده‌ها باشند. کدام شاخص جزء شاخص‌های پراکندگی غیر حساس به داده‌های دور افتاده (پرت) است؟

$$(۱) \frac{R}{Q_2}$$

$$(۲) \frac{Q_3 - Q_1}{R}$$

$$(۳) \frac{Q_3 + Q_1}{Q_2}$$

$$(۴) \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$$

۱۶- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  ( $n \geq 2$ ) یک نمونه تصادفی از توزیعی پیوسته با تابع توزیع  $F$  باشد، احتمال اینکه دومین آماره ترتیبی کوچکتر یا مساوی میانه توزیع باشد، چقدر است؟

$$(۱) 1 - \frac{n}{2^n}$$

$$(۲) 1 - \frac{n+1}{2^n}$$

$$(۳) 1 - \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

$$(۴) 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

۱۷- اگر  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت استاندارد باشند  $(X, Y \sim U(0, 1))$ ، آنگاه

$$P[(1-X)(1-Y) > \frac{1}{4}] \text{ برابر است با:}$$

$$\frac{3 + 2 \ln(2)}{4} \quad (1)$$

$$\frac{3 + \ln(2)}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3 - \ln(2)}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3 - 2 \ln(2)}{4} \quad (4)$$

۱۸- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} c(x+y) & x, y \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

$$\frac{1}{n} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2n} \quad (2)$$

$$\frac{n-1}{2n} \quad (3)$$

$$\frac{n-1}{n} \quad (4)$$

۱۹- در ظرفی تعدادی مهره سفید و آبی وجود دارد. نسبت مهره‌های آبی  $(\theta)$  یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال

$$g(\theta) \quad (0 < \theta < 1)$$

است. اگر دو مهره با جایگذاری برداریم و  $E$  و  $F$  به ترتیب پیشامد آبی بودن مهره اول و دوم باشد، آنگاه:

$$P(E \cap F) < P(E)P(F) \quad (1)$$

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) \quad (2)$$

$$P(E \cap F) > P(E)P(F) \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}P(E)P(F) < P(E \cap F) < P(E)P(F) \quad (4)$$

۲۰- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل به ترتیب با تابع توزیع تجمعی  $F(x)$  و  $G(y)$  باشند. اگر

$$A = \int_1^{\infty} (1 - F(y)) dG(y) \text{ و } B = \int_1^{\infty} (1 - G(x)) dF(x), \text{ آنگاه } A + B \text{ کدام است؟}$$

$$P(X > 1, Y > 1) \quad (1)$$

$$P(X > Y > 1) \quad (2)$$

$$P(Y > X > 1) \quad (3)$$

$$P(X > 1) + P(Y > 1) \quad (4)$$

۲۱- فرض کنید تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی  $W$  به صورت  $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^t)^3$  و  $M_W(t) = e^{-3+3e^t}$  باشد، مقدار  $P(W \leq 1)$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲)  $e^{-3}$ (۳)  $\frac{46}{27}e^{-3}$ (۴)  $\frac{44}{27}e^{-3}$ 

۲۲- فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان نمایی با میانگین ۱ باشند. مقدار  $\rho(\max(X, Y), \min(X, Y))$  چقدر است؟

(۱) صفر

(۲)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۳)  $\frac{1}{5}$ 

(۴) ۱

۲۳- فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی مستقل بواسون به ترتیب با پارامترهای  $\lambda$  و  $2\lambda$  باشند. مقدار  $E(X^2 + Y^2 | X + Y = m)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4m^2}{9}$ (۲)  $\frac{5m^2}{9}$ (۳)  $\frac{4m^2 + 5m}{9}$ (۴)  $\frac{5m^2 + 4m}{9}$ 

۲۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک مجموعه از متغیرهای تصادفی پیوسته مستقل و نامنفی و  $I_{p_1}, \dots, I_{p_n}$  نیز یک مجموعه از متغیرهای تصادفی برنولی مستقل از هم و مستقل از  $X_i$  ها باشند که در آن  $E(I_{p_i}) = p_i$  است و  $Y_{n:n} = \max\{X_1 I_{p_1}, \dots, X_n I_{p_n}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) تابع توزیع کدام است؟

(۱)  $\prod_{i=1}^n [1 - p_i \bar{F}_{X_i}(x)]$ (۲)  $\prod_{i=1}^n [1 - (1 - p_i) \bar{F}_{X_i}(x)]$ (۳)  $\prod_{i=1}^n [1 - p_i F_{X_i}(x)]$ (۴)  $\prod_{i=1}^n [1 - (1 - p_i) F_{X_i}(x)]$

۲۵- فرض کنید  $(X_n, Y_n)$  دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\frac{n}{\lambda}$  باشد. در این صورت دنباله  $T_n = \frac{nX_n}{X_n^2 + 2n^2}$  در احتمال

به کدام مقدار میل می کند؟

○ (۱)

$\frac{2}{9}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۳)

۴ (۴)

۲۶- فرض کنید  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال دو متغیره با میانگین‌های یکسان صفر و واریانس‌های یکسان ۱ و کوواریانس  $\theta$  باشد. اگر:

$$T_1 = \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad T_3 = \sum_{i=1}^n X_i^2, \quad T_4 = \sum_{i=1}^n Y_i^2, \quad T_5 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$$

کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $(T_1, T_2)$  آماره فرعی (کمکی) است.

(۲)  $(T_1 T_4, T_2 T_3)$  آماره فرعی است.

(۳)  $T_3$  و  $T_1 T_4$  آماره فرعی هستند ولی  $(T_3, T_1 T_4)$  آماره فرعی نیستند.

(۴)  $T_3$  و  $T_4$  آماره فرعی هستند ولی  $(T_3, T_4)$  آماره فرعی نیست.

۲۷- فرض کنید  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال دو متغیره‌ای با تابع چگالی توام زیر باشد.

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2\pi\theta^2} I_{(\circ, \theta)}(\sqrt{x^2 + y^2})$$

آماره بسنده کامل کدام است؟

(۱)  $X_{(n)}^2 + Y_{(n)}^2$

(۲)  $\max_{i=1, \dots, n} (X_i^2 + Y_i^2)$

(۳)  $\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2)$

(۴)  $\sum_{i=1}^n \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}$



۲۸- فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع  $f(x) = \binom{x+3}{3} \theta^3 (1-\theta)^x, x=0,1,2,\dots$  برآورد گشتاوری  $\theta$

وقتی که مشاهدات برابر  $3, 2, 5, 3, 2$  باشند، کدام است؟

(۱)  $\frac{4}{7}$

(۲)  $\frac{3}{7}$

(۳)  $\frac{3}{4}$

(۴)  $\frac{1}{3}$

۲۹- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت  $U(\theta, \theta+|\theta|)$  باشد. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر  $\theta \in \mathbb{R} - \{0\}$  برای زمانی که  $X_i < 0$  باشند، عبارتست از:

(۱)  $\frac{X_{(1)}}{2}$

(۲)  $X_{(n)}$

(۳)  $X_{(1)}$

(۴)  $\frac{X_{(n)}}{2}$

۳۰- فرض کنید تابع چگالی متغیر تصادفی  $X$  به صورت  $-1 \leq \theta \leq 1, 0 < x < 1, f_\theta(x) = 2\theta^2 x + 1 - \theta^2$  باشند. براساس تک مشاهده  $x$ ، برآوردگر درستنمایی ماکزیمم  $\theta$  کدام است؟

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{2} \\ -1 & x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (۲)$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1, -1 & x > \frac{1}{2} \\ c \in [-1, 1] & x = 0 \\ 0 & x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (۱)$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1, -1 & x < \frac{1}{2} \\ c \in [-1, 1] & x = \frac{1}{2} \\ -1 & x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (۴)$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{2} \\ 0 & x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (۳)$$

۳۱- فرض کنید  $x$  یک تک مشاهده از توزیع با تابع چگالی  $\theta \in \{1, 2, \dots\}$  باشد که

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & [x] = \theta \\ \frac{2}{3} & [x] = \theta + 1 \end{cases}$$

در آن  $\theta$  یک عدد صحیح مثبت است. برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی  $\theta$  کدام است؟

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 1 & 1 \leq x < 2 \\ [x] - 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad (1)$$

(۲)  $\hat{\theta} = a$  که در آن  $a$  عدد صحیحی است که  $x - 1 \leq a < x$

(۳)  $\hat{\theta} = a$  که در آن  $a$  عدد صحیحی است که  $x - 1 < a \leq x$

$$\hat{\theta} = [x] \quad (4)$$

۳۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$ ،  $n$  متغیر تصادفی مستقل باشند به گونه‌ای که  $X_i \sim N(0, \frac{\theta^2}{i})$  در صورت وجود،

بهترین برآوردگر ناآریب  $\theta$  کدام است؟

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^n i X_i^2} \quad (2)$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sum_{i=1}^n i |X_i| \quad (1)$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sqrt{\sum_{i=1}^n i X_i^2} \quad (4)$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\sqrt{2}} \sum_{i=1}^n i |X_i| \quad (3)$$

۳۳- فرض کنید  $X_1, X_2$ ، یک نمونه تصادفی دو تایی از تابع احتمال  $P(X = x) = \frac{\theta^x}{x!(e^{\theta} - 1)}$ ،  $x = 1, 2, \dots$ ،  $\theta > 0$  باشد.

کدام  $h(T)$ ، برآوردگر UMVU برای  $\theta$  است؟

$$\sum_{i=1}^{T-1} \frac{1}{i!(T-i)!} / \sum_{i=1}^{T-2} \frac{1}{i!(T-1-i)!}; T = 3, 4, \dots \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{T-2} \frac{1}{i!(T-1-i)!} / \sum_{i=1}^{T-1} \frac{1}{i!(T-i)!}; T = 3, 4, \dots \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^T \frac{1}{i!(T-i)!} / \sum_{i=1}^T \frac{1}{i!(T-1-i)!}; T = 3, 4, \dots \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^T \frac{1}{i!(T-1-i)!} / \sum_{i=1}^T \frac{1}{i!(T-i)!}; T = 3, 4, \dots \quad (4)$$

۳۴- فرض کنید  $Y_1, \dots, Y_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال یکسان

$$f(y) = \frac{\theta}{\Gamma(\theta+1)(1+|y|)^{\theta+1}}, \theta > 0, y \in \mathbb{R}$$

باشد، برآوردگر UMVU پارامتر  $\theta^{-1}$  کدام است؟

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+|Y_i|} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1+|Y_i|) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1+|Y_i|) \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(|Y_i|) \quad (۴)$$

۳۵- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از توزیع  $N(0, \theta)$  باشند. برآوردگر UMVU پارامتر  $\sqrt{\theta}$

کدام است؟

$$\frac{\sqrt{\Gamma(\frac{n+1}{2})}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (۱)$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\Gamma(\frac{n+1}{2})}} \sqrt{|\sum_{i=1}^n X_i|} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{\Gamma(\frac{n+1}{2})}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \sqrt{|\sum_{i=1}^n X_i|} \quad (۳)$$

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\Gamma(\frac{n+1}{2})}} \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2} \quad (۴)$$

۳۶- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع لگ نرمال با تابع چگالی  $x > 0, \theta > 0$  و

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{1}{2\theta}(\ln x)^2}$$

باشد، اطلاع فیشر پارامتر کدام است؟

$$n\theta^2 \quad (۲) \qquad \frac{n}{2\theta^2} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{n}\theta \quad (۴) \qquad \frac{n}{2\theta} \quad (۳)$$

۳۷- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی باشند، به طوری که:

$$X_i = \ln(Y_i) \sim N(\mu, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$$

همچنین فرض کنید  $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$  بیانگر آماره‌های مرتب متناظر با  $Y_1, \dots, Y_n$  باشند. برآوردگر

$$T = \left\{ \prod_{i=1}^n Y_{(i)} \right\}^{\frac{1}{n}}$$

برای چه کمیتی سازگار است؟

(۱)  $\mu$

(۲)  $e^{\sigma^2}$

(۳)  $e^{\mu}$

(۴)  $\sigma^2$

۳۸- فرض کنید  $X$  دارای توزیع برنولی با پارامتر  $\theta$  باشد. تحت تابع زیان توان دوم خطا، مخاطره برآوردگر تصادفی شده زیر کدام است؟

$$T(X) = \begin{cases} X & \text{با احتمال } X \\ \frac{1}{2} & \text{با احتمال } 1-X \end{cases}$$

(۱)  $\frac{1-\theta}{4}$

(۲)  $\frac{\theta(1-\theta)}{4}$

(۳)  $\theta \left( \theta^2 + \left( \theta - \frac{1}{2} \right)^2 \right)$

(۴)  $(1-\theta) \left( \theta^2 + \left( \theta - \frac{1}{2} \right)^2 \right)$

۳۹- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(0, \theta)$  باشد. اگر توزیع پیشین  $Pa(3, 4)$  و تابع زیان برابر با  $L(\theta, \delta) = \theta(\delta - \theta)^2$  باشد، برآوردگر بیز  $\theta$  کدام است؟

$$(\theta \sim Pa(\alpha, \sigma) \rightarrow \pi(\theta) = \frac{\alpha \sigma^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, \theta \geq \sigma)$$

(۱)  $\frac{n+1}{n+2} \max(4, X_{(n)})$

(۲)  $\frac{n+3}{n+2} \max(3, X_{(n)})$

(۳)  $\frac{n+2}{n+3} \max(3, X_{(n)})$

(۴)  $\frac{n+2}{n+1} \max(4, X_{(n)})$

۴۰- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(0, \theta)$  باشد. اگر تابع چگالی پیشین (ناسره)

$\pi(\theta) = \frac{1}{\theta}, \theta > 0$  و تابع زیان  $L(\theta, \delta) = \theta(\delta - \theta)^2$  باشد، برآوردگر بیز تعمیم یافته کدام است؟

$$\frac{4}{3} X_{(n)} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} X_{(n)} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} X_{(n)} \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} X_{(n)} \quad (4)$$

۴۱- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $P(\lambda)$  باشد. با در نظر گرفتن تابع توان دوم خطا و توزیع

پیشین (ناسره) جفریز، برآوردگر بیز تعمیم یافته کدام است؟

$$\bar{X} \quad (1)$$

$$X + \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\bar{X} + \frac{1}{2n} \quad (3)$$

$$\bar{X} + \frac{1}{n} \quad (4)$$

۴۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین  $\frac{1}{\lambda}$  باشد. با در نظر گرفتن تابع زیان

$L(\lambda, \delta) = \left(\frac{\delta}{\lambda} - 1\right)^2$  و توزیع پیشین مزدوج با شرط  $E(\lambda) = 1$  و  $V(\lambda) = \frac{1}{4}$ ، برآوردگر بیز  $\lambda$  کدام است؟

$$\bar{X} + \frac{2}{n} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\bar{X} + \frac{1}{2n}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\bar{X} + \frac{2}{n}} \quad (3)$$

$$\bar{X} + \frac{1}{2n} \quad (4)$$

۴۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $P(\lambda)$  باشد. با در نظر گرفتن تابع توان دوم خطای وزنی با

$$\text{وزن } w(\lambda) = \frac{1}{\lambda}, \text{ گزینه صحیح کدام است؟}$$

(۱)  $\bar{X}$  نمی‌تواند یک برآوردگر بیز، نسبت به یک توزیع پیشین سره باشد، همچنین مجاز نیست ولی یک برآوردگر مینماکس برای  $\lambda$  است.

(۲)  $\bar{X}$  یک برآوردگر بیز، مینماکس برای  $\lambda$  است، اما مجاز نیست.

(۳)  $\bar{X}$  یک برآوردگر بیز و مجاز برای  $\lambda$  است، اما مینماکس نیست.

(۴)  $\bar{X}$  نمی‌تواند یک برآوردگر بیز، نسبت به یک توزیع پیشین سره باشد، اما یک برآوردگر مینماکس و مجاز برای  $\lambda$  است.

۴۴- با فرض  $R(\theta, \delta)$  نمایانگر مخاطره  $\delta$  و  $r(\pi, \delta)$  نمایانگر تابع مخاطره بیز  $\delta$  باشند و  $\pi$  تابع چگالی احتمال پیشین،  $\delta_\pi$  برآوردگر بیز نسبت به  $\pi$  باشند.  $\psi$  نمایانگر تمام توزیع‌های پیشین (سره) باشد،  $\delta_\pi$  یک برآوردگر مینماکس است، اگر:

$$r(\pi, \delta_\pi) \leq R(\theta, \delta_\pi), \forall \theta \in \Theta \quad (۱)$$

$$R(\theta, \delta_\pi) \leq r(\pi, \delta_\pi), \forall \theta \in \Theta \quad (۲)$$

$$\sup_{\theta} R(\theta, \delta_\pi) \geq \sup_{\pi \in \Psi} r(\pi, \delta) \quad (۳)$$

$$\sup_{\theta} R(\theta, \delta_\pi) \geq \inf_{\pi \in \Psi} r(\pi, \delta) \quad (۴)$$

۴۵- مسأله تصمیم زیر را در نظر بگیرید.

A \ \Theta	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
$\theta_1$	۲	۱	۲	۴
$\theta_2$	۴	۳	۲	۳

X \ \Theta	$x_1$	$x_2$
$\theta_1$	۰/۲	۰/۸
$\theta_2$	۰/۶	۰/۴

کدام یک از قاعده‌های تصمیم‌های ناتصادفی زیر قطعاً و بدون نیاز به محاسبه غیرمجاز (ناپذیرفتنی) هستند؟

D \ X	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_5$	$d_6$	$d_7$	$d_8$	$d_9$	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14}$	$d_{15}$	$d_{16}$
$x_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_1$	$a_1$	$a_2$	$a_2$	$a_2$	$a_3$	$a_3$	$a_3$	$a_4$	$a_4$	$a_4$
$x_2$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_3$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$

$$d_1, d_4, d_7, d_{10}, d_{13}, d_{16} \quad (۱)$$

$$d_1, d_5, d_9, d_{13} \quad (۲)$$

$$d_1, d_5, d_6, d_8, d_{10}, d_{12}, d_{14}, d_{16} \quad (۳)$$

$$d_1, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_{10}, d_{11}, d_{13}, d_{14}, d_{15}, d_{16} \quad (۴)$$



