کد کنترل

706

A

706A

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

صبح جمعه
۹۷/۱۲/۳
دفترچهٔ شمارهٔ (۱)

آزمون ورودی دورهٔ دکتری (نیمه‌متمرکز) ــ سال ۱۳۹۸

رشتهٔ مهندسی مکانیک ــ دینامیک، کنترل و ارتعاشات
کد (۲۳۲۳)

تعداد سؤال: ۴۵

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	مجموعه دروس تخصصی: ریاضیات مهندسی ــ دینامیک پیشرفته ــ ارتعاشات پیشرفته ــ کنترل پیشرفته	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

۱۳۹۸

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به‌منزلهٔ عدم حضور شما در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب .... با شمارهٔ داوطلبی .... در جلسهٔ این آزمون شرکت می‌نمایم. امضا:

۱- اگر $u(x,t)$ جواب مسئله موج

$$\begin{cases} u_{tt} - ۹u_{xx} = ۰ \quad , \quad ۰ < x < ۲, t > ۰ \\ u(x,۰) = ۲x + ۱ \\ u_t(x,۰) = x \quad , \quad ۰ \leq x \leq ۲ \\ u(۰,t) = u(۲,t) = ۰ \quad , \quad t \geq ۰ \end{cases}$$

باشد، مقدار تقریبی $u(۰/۴, ۱/۳)$ کدام است؟

۱) ۱/۲۴

۲) ۱/۷۹

۳) ۱/۹۶

۴) ۲/۱۵

۲- فرض کنید $z = x + iy$ باشد. مقدار ماکزیمم $|\sin z|$ در دامنهٔ مربعی شکل $D = \{(x,y), ۰ \leq x,y \leq ۲\pi\}$، کدام است؟

۱) ۱

۲) $e^{۲\pi}$

۳) $\sinh ۲\pi$

۴) $\cosh ۲\pi$

۳- جواب مسئلهٔ پواسن روبه‌رو کدام است؟

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{2}\omega}{\partial r^{2}}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r}+\dfrac{1}{r^{2}}\dfrac{\partial^{2}\omega}{\partial\theta^{2}}=\dfrac{\sin\theta}{r^{2}}, & 0<r<2 \quad , \quad 0<\theta<2\pi \\ \omega(r,0)=0 \\ \omega(2,\theta)=\sin 3\theta \end{cases}$$

۱) $\omega(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} r^{n}\sin 3n\theta$

۲) $\omega(r,\theta)=\frac{1}{2}r\sin\theta+\frac{1}{8}r^{3}\sin\theta$

۳) $\omega(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(r^{n}+r^{-n})\sin 3n\theta$

۴) $\omega(r,\theta)=(\frac{1}{2}r-1)\sin\theta+\frac{1}{8}r^{3}\sin 3\theta$

۴- انتگرال فوریهٔ تابع $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|\le\pi \\ 0, & |x|>\pi\end{cases}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^{2}}\cos(\omega x)d\omega$

۲) $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^{2}}\omega\cos(\omega x)d\omega$

۳) $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^{2}}\cos(\omega x)d\omega$

۴) $\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1+\cos(\omega\pi)}{1-\omega^{2}}\omega\cos(\omega x)d\omega$

۵- اگر C مرز نیم‌دایرهٔ فوقانی $|z|=r$ در جهت مثبت و $I(r)=\int_{C}\frac{e^{iz}}{z}dz$ باشد، $\lim_{r\to\infty}I(r)$ کدام است؟

۱) 0

۲) 1

۳) π

۴) ∞

۶- مسئلهٔ گرمای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - ۴u_{xx}(x,t) = ۳u(x,t)\ , & x > ۰, t > ۰ \\ u(x,۰) = -e^{-x} & ,\quad x > ۰ \\ u(۰,t) = ۰ & ,\quad t \geq ۰ \end{cases}$$

اگر $v(x,s)$ تبدیل لاپلاس $u(x,t)$ باشد، آنگاه $v(x,s)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

۱) $۴v''(x,s) + (۳-s)v(x,s) = e^{-x}$

۲) $v''(x,s) + (۴s-۳)v(x,s) = e^{-x}$

۳) $۴v''(x,s) + (s-۳)v(x,s) = se^{-x}$

۴) $v''(x,s) + (۳-۴s)v(x,s) = se^{-x}$

۷- معادلهٔ دیفرانسیل جزئی ناهمگن زیر با تغییر متغیر $u(x,t) = v(x,t) + r(x)$ به یک معادلهٔ همگن با شرایط مرزی همگن تبدیل می‌شود. $v(x,۰)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t + x - ۱ & , ۰ < x < ۲\ ,\quad t > ۰ \\ u(۰,t) = ۳ & ,\quad u(۲,t) = -۱\ ,\quad t > ۰ \\ u(x,۰) = ۱ - x^۳ & ,\quad ۰ < x < ۲ \end{cases}$$

۱) $-\frac{۷}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۵}{۳}x - ۲$

۲) $-\frac{۷}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۵}{۳}x - ۲$

۳) $-\frac{۷}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۵}{۳}x + ۳$

۴) $-\frac{۷}{۶}x^۳ + \frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۵}{۳}x + ۳$

۸- اگر $v(x,y)$ مزدوج همساز تابع $u(x,y) = (x^۲ - y^۲ + ۱)^۲ - ۴x^۲y^۲$ با شرط $v(۰,۰) = ۰$ باشد، مقدار $v(۱,۱)$ کدام است؟

۱) ۱

۲) -۱

۳) ۴

۴) -۴

۹- اگر $F_s\{f(x)\}=\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\,dx$ تبدیل فوریهٔ سینوسی تابع $f(x)$ باشد، تبدیل فوریهٔ سینوسی تابع $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}e^{-2\omega}$

۲) $\frac{\pi}{2}e^{2\omega}$

۳) $\pi e^{-2\omega}$

۴) $e^{2\omega}$

۱۰- سری نیم‌دامنهٔ سینوسی تابع $f(x)=x(\pi-x)$ در فاصلهٔ $0<x<\pi$ کدام است؟

۱) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2m+1)\pi}\sin(2m+1)x$

۲) $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8}{(2m+1)^3\pi}\sin(2m+1)x$

۳) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m\pi}\sin 2mx$

۴) $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^3\pi}\sin 2mx$

۱۱- اگر $F(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)e^{-i\omega x}dx$ تبدیل فوریهٔ $f(x)$ باشد، تبدیل فوریهٔ جواب مسئلهٔ زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=f(x,t) & ,t>0\ ,x\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=0 & ,x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

۱) $\int_0^t F(\omega,\tau)e^{a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۲) $\int_0^t F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۳) $\int_0^\infty F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۴) $\int_{-\infty}^\infty F(\omega,\tau)e^{-a^2\omega^2(t-\tau)}d\tau$

۱۲- فرض کنید تابع تحلیلی $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ بـرای هـر $z\in\mathbb{C}$ در نامسـاوی $\left|f(z)-۲z^{۲}-iz\right|\leq\sqrt{۲}$ صـدق کنـد. در این‌صورت مقدار $\oint_{|z|=۱} f\left(\frac{۱}{z}\right)dz$ کدام است؟

۱) $۲\pi i$

۲) $-۲\pi i$

۳) ۲π

۴) -۲π

۱۳- تصویر خط راست $۲x+۳y=۵$ تحت نگاشت $w=u+iv=\frac{۱}{z}$، کدام است؟

۱) $(u-\frac{۱}{۵})^{۲}+(v+\frac{۳}{۱۰})^{۲}=\frac{۱۳}{۱۰۰}$

۲) $(u-\frac{۱}{۵})^{۲}+(v-\frac{۳}{۱۰})^{۲}=\frac{۱۳}{۱۰۰}$

۳) $(u+\frac{۱}{۵})^{۲}+(v-\frac{۳}{۱۰})^{۲}=\frac{۱۳}{۱۰۰}$

۴) $(u+\frac{۱}{۵})^{۲}+(v+\frac{۳}{۱۰})^{۲}=\frac{۱۳}{۱۰۰}$

۱۴- فرم کلی جواب مسئلهٔ موج زیر کدام است؟

$$\begin{cases} u_{tt}(x,y,t)-۹\nabla^{۲}u(x,y,t)=\begin{cases} te^{-|x+y|} & ۰<x<۱ \\ ۰ & x>۱ \end{cases} & ,y\in\mathbb{R},\ t>۰ \\ u(x,y,۰)\ \ =\begin{cases} x+y & ۰<x<۱\ \ ,\ -۲<y<۲ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases} \\ u_t(x,y,۰)=۰\ \ ,\ x>۰,y\in\mathbb{R} \\ u(۰,y,t)=۰\ ,\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

۱) $u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{۰}^{۱}(A_\omega\cos ۳\omega t+B_\omega\sin ۳\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۲) $u(x,y,t)=\int_{-۲}^{۲}\int_{۰}^{۱}(A_\omega\cos ۳\omega t+B_\omega\sin ۳\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۳) $u(x,y,t)=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}(A_\omega\cos ۳\omega t+B_\omega\sin ۳\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۴) $u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{۰}^{\infty}(A_\omega\cos ۳\omega t+B_\omega\sin ۳\omega t+C_\omega t+D_\omega)e^{i\omega y}\sin(\omega x)dxdy$

۱۵- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل $y''-4y'+3y=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ با شرط $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to\infty} y'(x)=0$ باشد، تبدیل فوریهٔ $y(x)$ کدام است؟

(راهنمایی: $F\{y(x)\}=\int_{-\infty}^{\infty} y(x)e^{-i\omega x}dx$)

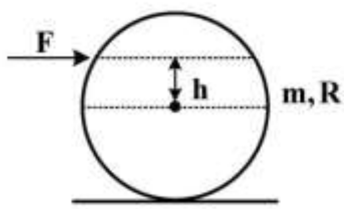
۱) $\dfrac{\sin 2\omega}{\omega^2+4i\omega-3}$

۲) $\dfrac{\sin\omega}{\omega^2+4i\omega-3}$

۳) $\dfrac{-2\sin\omega}{\omega(\omega^2+4i\omega-3)}$

۴) $\dfrac{2\sin\omega}{\omega(\omega^2+4i\omega-3)}$

۱۶- یک توپ کروی توپر همگن به جرم m و شعاع R مطابق شکل زیر بر روی سطح افقی قرار دارد. اگر نیروی افقی F به فاصلهٔ h از مرکز کره وارد شود، h چقدر باید باشد تا نیروی اصطکاک بین توپ و سطح صفر شود؟ (فرض کنید توپ غلتش بدون لغزش می‌کند)



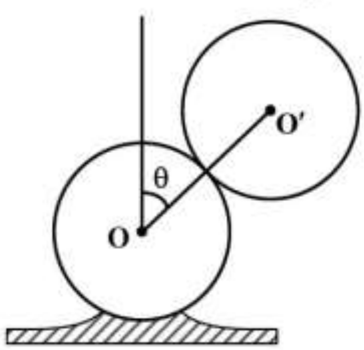
۱) $h=R$

۲) $h=0/4R$

۳) $h=0/2R$

۴) $h=0$

۱۷- کرهٔ توپر همگنی به جرم m و شعاع R بر روی کرهٔ ثابتی به شعاع R در موقعیت تعادل $(\theta=0)$ قرار دارد. اگر کرهٔ بالایی را اندکی از موقعیت تعادل خارج کنیم و کره شروع به غلت بدون لغزش بر روی کرهٔ ثابت پایینی کند، تابع لاگرانژین کرهٔ متحرک کدام است؟ (فرض شده دو کره تماس خود را از دست نمی‌دهند.)



۱) $\dfrac{14}{5}mR^2\dot{\theta}^2-2mgR\cos\theta$

۲) $\dfrac{7}{10}mR^2\dot{\theta}^2-2mgR\cos\theta$

۳) $\dfrac{7}{10}mR^2\dot{\theta}^2-2mgR(1-\cos\theta)$

۴) $\dfrac{7}{5}mR^2\dot{\theta}^2-2mgR\cos\theta$

۱۸- **یک حلقهٔ دایره‌ای‌شکل متقارن با توزیع جرم یکنواخت به هوا پرتاب می‌شود. در لحظهٔ پرتاب، حلقه دارای سرعت زاویه‌ای و مرکزش دارای سرعت است. اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر شود و بردار شدت جاذبه ثابت باشد، کدام گزینه نادرست است؟ ($\vec{H}_G$ بردار اندازه حرکت زاویه‌ای حلقه حول مرکزش است.)**

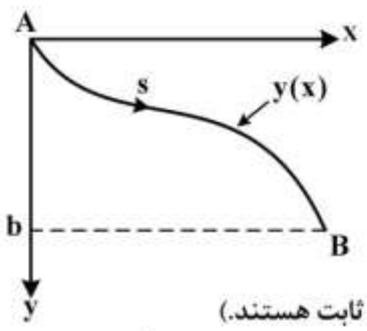
۱) مرکز حلقه بر روی یک سهمی حرکت می‌کند.

۲) زاویهٔ بین محور تقارن حلقه و بردار سرعت زاویه‌ای آن در طول حرکت ثابت است.

۳) زاویهٔ بین محور تقارن حلقه و $\vec{H}_G$ در طول حرکت ثابت است.

۴) بردار سرعت زاویه‌ای حلقه همواره در راستای $\vec{H}_G$ است.

۱۹- **ذره‌ای به جرم m مسیر شکل زیر را که در صفحهٔ قائم xy قرار دارد، تحت نیروی گرانش، بدون اصطکاک در کوتاه‌ترین زمان از نقطهٔ A تا B طی می‌کند. گرانش در امتداد y فرض شود. معادلهٔ پارامتری مسیر کدام است؟ $(a = \frac{1}{2}b, \phi = 2\theta)$**



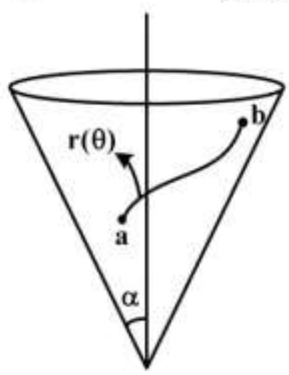
۱) $x = a(\phi - \sin\phi)\ ;\ y = a(1 - \cos\phi)$

۲) $x = a(\phi + \cos\phi)\ ;\ y = a(1 - \cos\phi)$

۳) $x = a(\phi + \sin\phi)\ ;\ y = a(1 + \cos\phi)$

۴) $x = a(\phi - \sin\phi)\ ;\ y = a(1 + \sin\phi)$

۲۰- **کوتاهترین مسیر بین نقاط a و b روی مخروط زیر، کدام است؟ (B و C اعداد ثابت هستند.)**



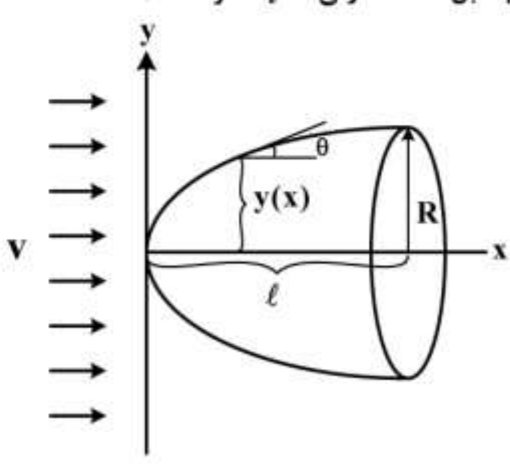
۱) $r(\theta) = B\sin\alpha\sec(\theta\sin\alpha - C)$

۲) $r(\theta) = \frac{B}{\sin\alpha}\sin(\theta\sin\alpha - C)$

۳) $r(\theta) = \frac{B}{\cos\alpha}\sec(\theta\sin\alpha - C)$

۴) $r(\theta) = \frac{B}{\sin\alpha}\sec(\theta\sin\alpha - C)$

۲۱- **کدام منحنی $y(x)$ نیروی درگ ناشی از جریان سیال با سرعت v را مینیمم می‌کند؟ (فشار برابر $P = 2\rho v^2 \sin^2\theta$ است و فرض شود $\tan\theta = \sin\theta$ یعنی y' قابل ملاحظه ولی y'^2 صفر است.)**



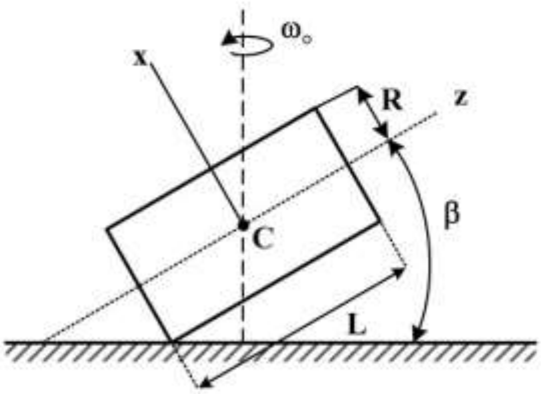
۱) $y = R(\frac{x}{\ell})^{\frac{1}{3}}$

۲) $y = R(\frac{x}{\ell})^{\frac{1}{4}}$

۳) $y = R(\frac{x}{\ell})^{\frac{3}{4}}$

۴) $y = R(\frac{x}{\ell})^{\frac{4}{3}}$

۲۲- استوانهٔ همگنی مطابق شکل زیر به طور مایل بر روی سطح زمین قرار دارد. محور استوانه حول محور قائمی که از مرکز جرم استوانه می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای $\omega_\circ$ می‌چرخد به‌گونه‌ای که مرکز جرم استوانه هیچ‌گونه حرکتی نمی‌کند. با فرض اینکه لبهٔ استوانه بر روی زمین بدون لغزش می‌غلتد و زاویهٔ β بین محور استوانه و خط افقی ثابت می‌ماند، بردار سرعت زاویه‌ای استوانه کدام است؟ (طول استوانه L و شعاع آن R فرض شود.)



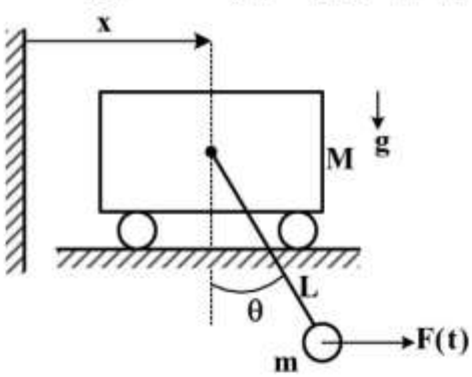
۱) $\omega_\circ \cos\beta \vec{i} + \omega_\circ \sin\beta \vec{k}$

۲) $\omega_\circ \cos\beta \vec{i} + \frac{L}{R}\omega_\circ \sin\beta \vec{k}$

۳) $\omega_\circ \cos\beta \vec{i} + \frac{L}{R}\omega_\circ \tan\beta \vec{k}$

۴) $\omega_\circ \cos\beta \vec{i} + \frac{L}{2R}\omega_\circ \cos\beta \vec{k}$

۲۳- مطابق شکل زیر یک پاندول ساده به جرم m و طول L به یک ارابه به جرم M که بر روی سطح افقی بر روی خط راست حرکت می‌کند، متصل شده است. نیروی همواره افقی $F(t)$ بر انتهای پاندول وارد می‌شود. برای توصیف حرکت ارابه و پاندول از مختصات تعمیم یافتهٔ x و θ استفاده می‌کنیم. نیروی تعمیم‌یافتهٔ متناظر با مختصات تعمیم‌یافتهٔ x و θ کدام است؟



۱) $Q_\theta = F(t)\ ,\ Q_x = \circ$

۲) $Q_\theta = F(t)L\cos\theta\ ,\ Q_x = F(t)$

۳) $Q_\theta = F(t)L\ ,\ Q_x = F(t)$

۴) $Q_\theta = \circ\ ,\ Q_x = F(t)$

۲۴- نیروی $\vec{F} = At\vec{i} + Bt\vec{j}$ که در آن A و B ثابت هستند، بر نقطهٔ مادی به جرم m وارد می‌شود. در لحظهٔ $t = \circ$ سرعت جرم برابر صفر است. کار انجام‌شده توسط نیرو تا لحظهٔ $t = T$ برابر کدام است؟

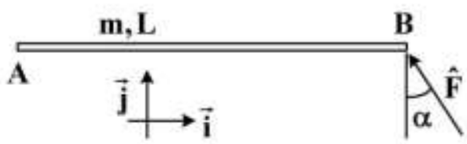
۱) $W = \frac{T^4}{8m}(A^2 + B^2)$

۲) $W = \frac{T^4}{m}(A^2 + B^2)$

۳) $W = \frac{T^4}{2m}(A^2 + B^2)$

۴) $W = \frac{T^4}{3m}(A^2 + B^2)$

۲۵- در شکل زیر، میلهٔ AB به طول L و جرم m، ابتدا در حالت سکون است. ضربهٔ $\hat{F}$ تحت زاویهٔ α به انتهای B وارد می‌شود. سرعت ایجاد شده در انتهای B کدام است؟ (توزیع جرم میله را یکنواخت فرض کنید.)



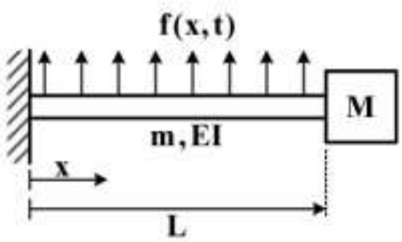
۱) $\vec{V}_B = \frac{\hat{F}}{m}\cos\alpha\,\vec{i}$

۲) $\vec{V}_B = \frac{\hat{F}}{m}(\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$

۳) $\vec{V}_B = \frac{\hat{F}}{m}(-\sin\alpha\,\vec{i} + ۴\cos\alpha\,\vec{j})$

۴) $\vec{V}_B = \frac{\hat{F}}{m}(\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j})$

۲۶- معادلهٔ ارتعاش عرضی تیر مقابل که تحت بار گستردهٔ $f(x,t)$ است و جرم متمرکز M درانتهای آن قرار دارد، کدام است؟



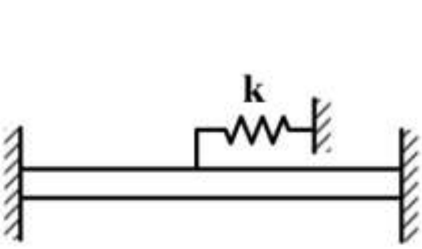
۱) $EI\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲} + f = m\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$

۲) $\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\left[EI\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲}\right] + f = m\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$

۳) $-\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\left[EI\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲}\right] - f = m\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$

۴) $-\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\left[EI\frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲}\right] + f = m\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲}$

۲۷- نقطهٔ وسط یک میلهٔ یکنواخت به طول ℓ مطابق شکل زیر به فنر $k = \frac{۴EA}{\ell}$ متصل شده است. اولین فرکانس طبیعی میله با استفاده از خارج‌قسمت ریلی و تابع آزمایشی $u(x) = x(x-\ell)$ ، کدام است؟ (ρ: جرم واحد طول، E: مدول یانگ، A: سطح مقطع).



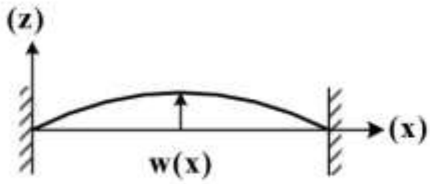
۱) $\sqrt{\frac{۲۵E}{۲\rho\ell^۲}}$

۲) $\sqrt{\frac{۲۸E}{۳\rho\ell^۲}}$

۳) $\sqrt{\frac{۳۵E}{۲\rho\ell^۲}}$

۴) $\sqrt{\frac{۳۸E}{۳\rho\ell^۲}}$

۲۸- معادلهٔ ارتعاشات عرضی نخ به‌طول L، مدول سطحی EA، چگالی بر واحد حجم ρ و کشش درونی P با در نظر گرفتن اثر افزایش کشش ناشی از کشیدگی نخ، کدام است؟



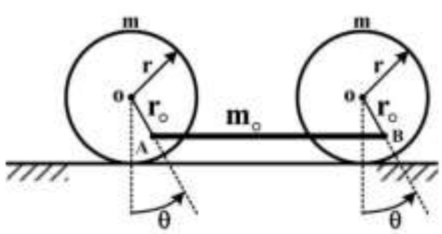
۱) $\rho A\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=(P+\dfrac{EA}{2}(\dfrac{\partial w}{\partial x})^2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

۲) $\rho A\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\left[P+EA(\dfrac{\partial w}{\partial x})\right]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

۳) $\rho A\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\left[P+\dfrac{EA}{L}w\right]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

۴) $\rho A\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\left[P+\dfrac{EA}{3}(\dfrac{\partial w}{\partial x})^3\right]\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

۲۹- دیسک‌های یکنواخت در مکانیزم زیر دارای جرم m ، ممان اینرسی $J_G=\dfrac{1}{2}mr^2$ و میلهٔ رابط دارای جرم $m_\circ$ است. با فرض عدم لغزش و نوسانات کوچک، فرکانس نوسانات سیستم چقدر است؟



۱) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{m_\circ g r_\circ}{3mr^2+m_\circ(r-r_\circ)^2}}$

۲) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{m_\circ g r_\circ}{3mr^2}}$

۳) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{m_\circ g r_\circ}{3m(r-r_\circ)^2}}$

۴) $\omega_n=\sqrt{\dfrac{m_\circ g r_\circ}{(3m+m_\circ)r^2}}$

۳۰- کدام رابطه مربوط به محاسبهٔ فرکانس طبیعی ارتعاش عرضی یک تیر با مقطع و جنس یکنواخت از روش تقریبی ریلی است؟ $W(x)$ تابع شکل مود تیر است که حدس زده می‌شود.

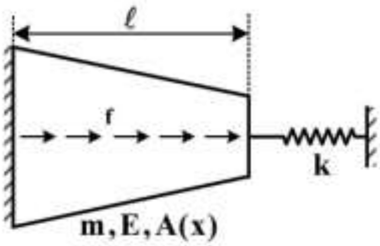
۱) $\omega^2 = \dfrac{\rho A \int_0^{\ell} W^2 dx}{EI \int_0^{\ell} (\frac{d^2W}{dx^2})^2 dx}$

۲) $\omega^2 = \dfrac{EI \int_0^{\ell} (\frac{d^2W}{dx^2})^2 dx}{\rho A \int_0^{\ell} W^2 dx}$

۳) $\omega^2 = \dfrac{EI \int_0^{\ell} (\frac{d^2W}{dx^2})^2 dx}{\rho A \int_0^{\ell} W dx}$

۴) $\omega^2 = \dfrac{EI \int_0^{\ell} (\frac{d^2W}{dx^2}) dx}{\rho A \int_0^{\ell} W^2 dx}$

۳۱- معادلهٔ خیز استاتیکی $u(x)$ که در آن تحت بار محوری گستردهٔ f قرار گرفته است، کدام است؟



۱) $\frac{d}{dx}(EA\frac{du}{dx}) - f = 0$

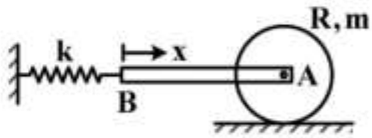
۲) $\frac{d^2}{dx^2}(EA\frac{du}{dx}) - f = 0$

۳) $\frac{d^2}{dx^2}(EA\frac{du}{dx}) + f = 0$

۴) $\frac{d}{dx}(EA\frac{du}{dx}) + f = 0$

۳۲- میلهٔ یکنواخت (ℓ, A, ρ معلوم) در طرف راست به مرکز دیسک لولا شده و دیسک روی زمین غلتش ناب دارد. شرایط مرزی میله برای ارتعاش طولی کدام است؟

دیسک $I_A = \frac{1}{2}mR^2$



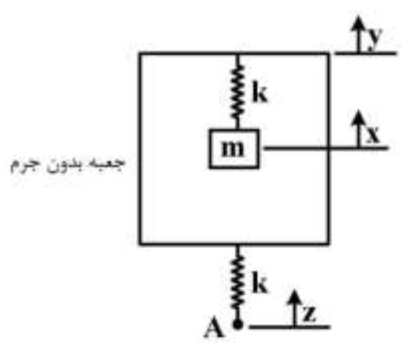
۱) $EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,t)} = k.u\Big|_{(0,t)}$ ، $-EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(\ell,t)} = \frac{3}{2}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{(\ell,t)}$

۲) $-EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,t)} = k.u\Big|_{(0,t)}$ ، $EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(\ell,t)} = \frac{3}{2}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{(\ell,t)}$

۳) $EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,t)} = ku\Big|_{(0,t)}$ ، $-EA\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(\ell,t)} = \frac{m}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{(\ell,t)}$

۴) شرط مرزی سمت راست به R بستگی دارد.

۳۳- اگر به نقطهٔ A در جهت z جابه‌جایی ناگهانی و ثابت h بدهیم، پاسخ بدون شرایط اولیهٔ $x(t)$ جرم m، کدام است؟



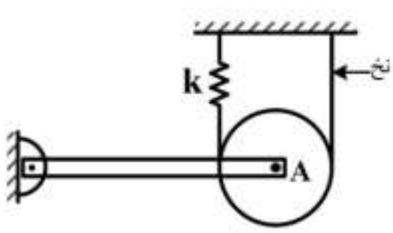
۱) $h(1-\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t)$

۲) $h(1-\sin\sqrt{\frac{k}{2m}}t)$

۳) $h(1-\cos\sqrt{\frac{k}{2m}}t)$

۴) $h(1-\sin\sqrt{\frac{2k}{m}}t)$

۳۴- دیسکی یکنواخت به جرم m روی نخی که به فنر k متصل است، غلتش ناب دارد. اگر مرز دیسک (A) به تیری یکنواخت به جرم m لولا شده باشد و به نقطهٔ A نیروی قائم هارمونیک $F = F_0 \sin\omega t$ وارد شود، دامنهٔ پاسخ پایدار نقطهٔ A کدام است؟



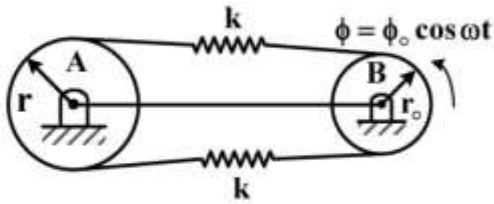
۱) $\frac{F_0}{k-2m\omega^2}$

۲) $\frac{6F_0}{24k-11m\omega^2}$

۳) $\frac{12F_0}{48-7m\omega^2}$

۴) $\frac{18F_0}{72k-13m\omega^2}$

۳۵- دیسک **A** دارای شعاع **r** و جرم **m** بوده و توسط دیسک **B** به‌صورت هارمونیک تحریک می‌گردد. شعاع ژیراسیون دیسک **A** برابر **b** است. دامنهٔ پاسخ حالت ماندگار دیسک **A** به تحریک هارمونیک کدام است؟



۱) $\overline{\theta} = \phi_\circ$

۲) $\overline{\theta} = \phi_\circ \dfrac{(\frac{r_\circ}{r})^2}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$ که در آن $\omega_n = \dfrac{r}{2b}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

۳) $\overline{\theta} = \phi_\circ \dfrac{2(\frac{r_\circ}{r})^2}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$ که در آن $\omega_n = \dfrac{r}{b}\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$

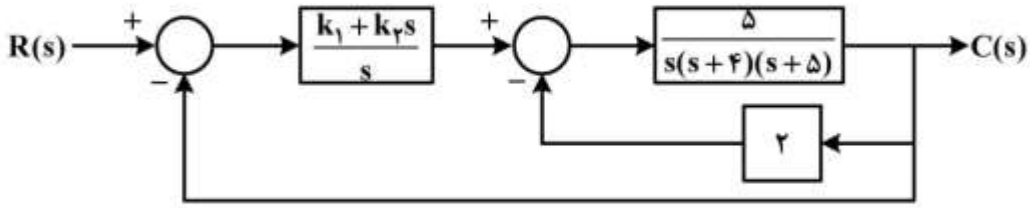
۴) $\overline{\theta} = \phi_\circ \dfrac{\frac{r_\circ}{r}}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2}$ که در آن $\omega_n = \dfrac{r}{b}\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

۳۶- چنانچه سیستم زیر را فیدبک خطی کنیم، وضعیت تعادل دینامیک صفر آن چیست؟

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = x_1 + x_2 x_3 - x_3^3 \end{cases}$$
$$y = x_1$$

۱) نقطه: پایدار
۲) نقطه: ناپایدار
۳) مجموعه نقاط روی خط: پایدار
۴) مجموعه نقاط در صفحه: ناپایدار

۳۷- دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم کنترل فیدبک در شکل زیر نمایش داده شده است. معادلات حالت این سیستم در فرم **Controllable Canonical** کدام است؟



(۱ $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -5k_1 & -10-5k_2 & -20 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t) \text{ و } C(t)=\begin{bmatrix}5k_1 & 5k_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

(۲ $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -5k_1\\ 1 & 0 & 0 & -10-5k_2\\ 0 & 1 & 0 & -20\\ 0 & 0 & 1 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5k_1\\ 5k_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t) \text{ و } C(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

(۳ $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5k_1 & 0 & 0 & 0\\ -10-5k_2 & 0 & 0 & 1\\ -20 & 0 & 1 & 0\\ -9 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5k_1\\ 5k_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u(t) \text{ و } C(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

(۴ $$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -5k_1 & -10-5k_2 & -20 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u(t) \text{ و } C(t)=\begin{bmatrix}10k_1 & 10k_2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

۳۸- برای اثبات پایداری سیستم دینامیکی به فرم $m\ddot{x}+b\dot{x}|\dot{x}|+k_{\circ}x+k_{1}x^{3}=\circ$ حول حالت تعادل $x=\circ$ و $\dot{x}=\circ$ ، کدام تابع زیر می‌تواند به عنوان تابع لیاپانوف در نظر گرفته شود؟

۱) $V(x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}+\frac{1}{2}k_{\circ}x^{2}$

۲) $V(x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}+\frac{1}{4}k_{1}x^{4}$

۳) $V(x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}+\frac{1}{2}k_{\circ}x^{2}+\frac{1}{4}k_{1}x^{4}$

۴) $V(x)=\frac{1}{2}m\dot{x}^{2}+\frac{1}{2}k_{\circ}x^{2}+\frac{1}{2}k_{1}x^{2}$

۳۹- در کدام‌یک از توابع تبدیل زیر، شرایط کنترل‌پذیری کامل وجود دارد؟

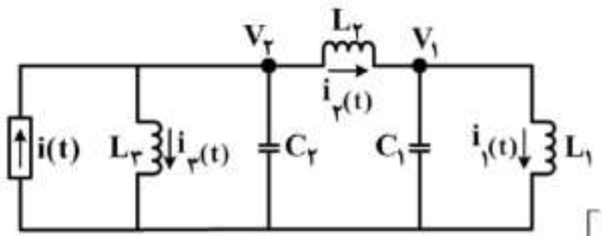
۱) $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s^{2}+3s+2}$

۲) $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+2}{s^{2}+2s+1}$

۳) $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+3}{s^{2}+4s+3}$

۴) $\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+1}{s^{2}+5s+4}$

۴۰- مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل را در نظر بگیرید. ورودی این مدار $i(t)$ و خروجی آن ولتاژ $V_1(t)$ است. با فرض شرایط اولیهٔ صفر، متغیرهای حالت سیستم را $x_1(t)=V_1(t)$ ، $x_2(t)=V_2(t)$ ، $x_3(t)=i_1(t)$ و $x_4(t)=i_2(t)$ در نظر بگیرید. معادلات حالت سیستم کدام است؟



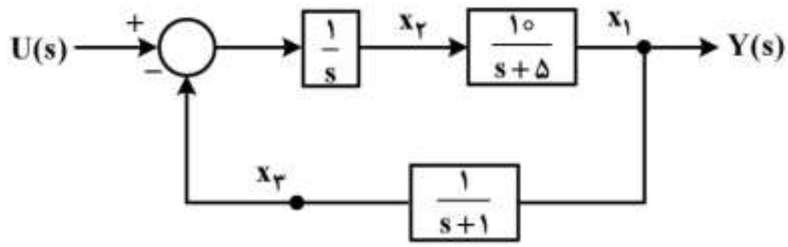
۱) $$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} \frac{L_2+L_3}{L_3C_2} & \frac{1}{L_1} & \frac{L_3+L_2}{L_3} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & \frac{1}{C_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

۲) $$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{L_1}{L_3C_2} & \frac{L_2+L_3}{L_3C_2} \\ \frac{1}{C_1} & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

۳) $$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{-L_1}{L_3C_2} & \frac{L_1+L_2}{L_3} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1} \\ 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

۴) $$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{-L_1}{L_3C_2} & \frac{-L_2-L_3}{L_3C_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

۴۱- متغیرهای حالت و خروجی سیستمی که در دیاگرام جعبه‌ای زیر نشان داده شده است، عبارتند از: x_1 ، x_2 ، x_3 و y. معادلات حالت سیستم کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -5 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 10\\ 1\end{bmatrix}U(s)$ و $y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 10 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}U(s)$ و $y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -5 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 10\\ 1\end{bmatrix}U(s)$ و $y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}U(s)$ و $y=\begin{bmatrix}1 & 10 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$

۴۲- تابع تبدیل حلقه‌بستهٔ یک سیستم کنترل به فرم $\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)}=\frac{0.2}{(s+5)(s^2+s+0.5)}$ است. مقدار میرایی و ثابت زمانی این سیستم کدام است؟

۱) $\tau=0.2s$ و $\zeta=1$

۲) $\tau=0.5s$ و $\zeta=0.85$

۳) $\tau=1s$ و $\zeta=0.5$

۴) $\tau=2s$ و $\zeta=0.707$

۴۳- ماتریس G در سیستم زیر برای اینکه مقادیر ویژهٔ (eigenvalues) ماتریس $A-BG$ در نقاط (۱−)، (۱−)، (۱−)و ($-۱\pm j$) قرار گیرند، کدام است؟

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$$
$$u(t)=-Gx(t)$$
$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & -۳ & -۴ & -۱۰ \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$
$$G=\begin{bmatrix} g_۱ & g_۲ & g_۳ & g_۴ \end{bmatrix}$$

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۳ & -۶ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۷ & ۴ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۴ & ۷ & ۶ & ۲ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ & ۴ & ۱۰ \end{bmatrix}$

۴۴- مدل دینامیکی حرکت یک هواپیما که ارتفاع آن از سطح زمین قابل اندازه‌گیری بوده و بردار متغیرهای حالت آن به‌صورت [زاویهٔ حمله ; ارتفاع ; سرعت طولی] = X در نظر گرفته شده و به شرح زیر محاسبه شده است. کدام گزینه در مورد ماتریس‌های لازم برای طراحی مشاهده‌گر کاهش مرتبه، صحیح است؟

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ -۶ & -۸ & ۱ \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۱) $A_{aa}=[-۱]$ $A_{ab}=\begin{bmatrix} -۸ & -۶ \end{bmatrix}$ $B_a=[۱]$
$A_{ba}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ $A_{bb}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ $B_b=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۲) $A_{aa}=[-۱]$ $A_{ab}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ $B_a=[۰]$
$A_{ba}=\begin{bmatrix} -۶ \\ ۰ \end{bmatrix}$ $A_{bb}=\begin{bmatrix} -۱ & -۸ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ $B_b=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$

۳) $A_{aa}=[۲]$ $A_{ab}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ $B_a=[۰]$
$A_{ba}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۸ \end{bmatrix}$ $A_{bb}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۶ & ۱ \end{bmatrix}$ $B_b=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$

۴) $A_{aa}=[۲]$ $A_{ab}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ $B_a=[۰]$
$A_{ba}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۸ \end{bmatrix}$ $A_{bb}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix}$ $B_b=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$

۴۵- برای سیستم روبه‌رو، کروشهٔ لی کدام است؟

$$\dot{x}_1 = x_1^2 + 3x_2 + \sin(x_1 + x_2)$$
$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 + x_1 \cos x_2 + \exp(x_2) u$$

۱) $[f,g] = \begin{bmatrix} \exp(x_2)(3 + \cos(x_1 + x_2)) \\ -x_1 \exp(x_2)(x_2 + \cos x_2 + \sin x_2 - 1) \end{bmatrix}$

۲) $[f,g] = \begin{bmatrix} -\exp(x_2)(3 + \cos(x_1 + x_2)) \\ x_1 \exp(x_2)(x_2 + \cos x_2 + \sin x_2 - 1) \end{bmatrix}$

۳) $[f,g] = \begin{bmatrix} \exp(x_2)(3 - \cos(x_1 + x_2)) \\ -x_1 \exp(x_2)(x_2 + \cos x_2 - \sin x_2 + 1) \end{bmatrix}$

۴) $[f,g] = \begin{bmatrix} -\exp(x_2)(3 - \cos(x_1 + x_2)) \\ x_1 \exp(x_2)(x_2 + \cos x_2 - \sin x_2 + 1) \end{bmatrix}$