اکسترمم نسبی:

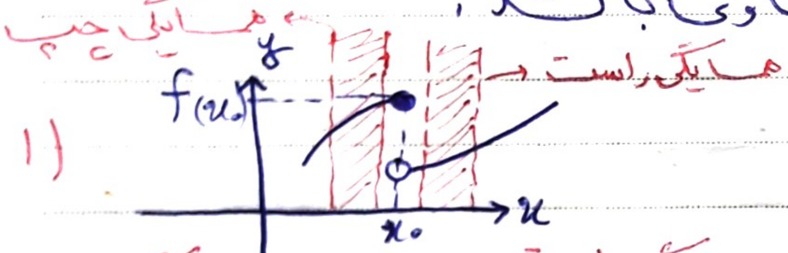
تعیین اکسترمم نسبی روی نمودار

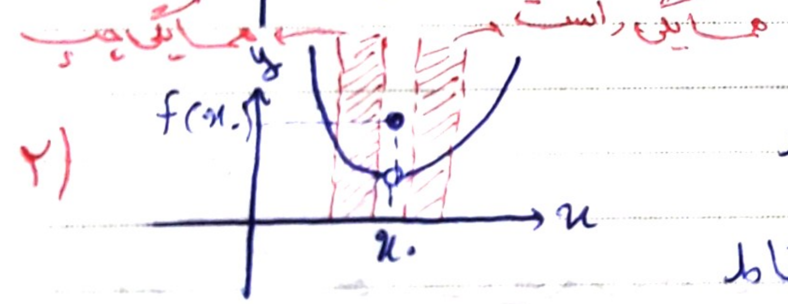
الف) ماکزیمم نسبی: نقطه‌ی x_0 ماکزیمم نسبی می‌باشد

اگر: ۱) $x_0 \in D_f$ (x_0 عضو دامنه f باشد)

۲) همسایگی دو طرفه داشته باشد (یعنی نمودار هم از چپ و هم از راست به x_0 نزدیک شود.

۳) مقدار تابع f در x_0 ($f(x_0)$) از تمام مقادیر تابع در همسایگی آن نقطه بزرگتر یا مساوی باشد.





به عنوان مثال:

نقاط x_0 عضو دامنه می‌باشد

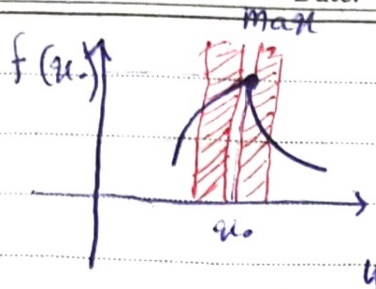
و همسایگی دو طرفه نیز دارند

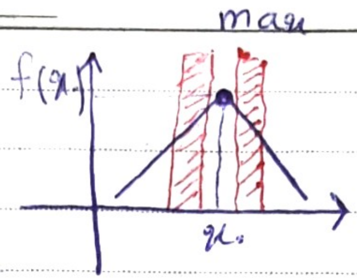
و در آن مقدار $f(x_0)$ از تمام نقاط

در همسایگی x_0 بزرگتر می‌باشد.

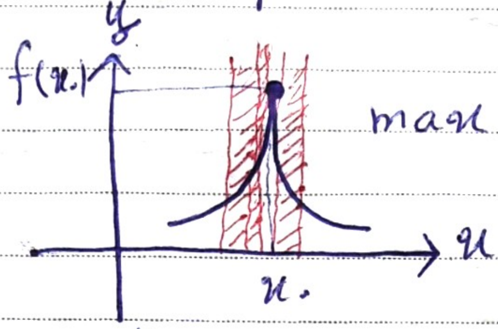
نقاط ماکزیمم نسبی خاص:

Year. Month. Date. Subject :

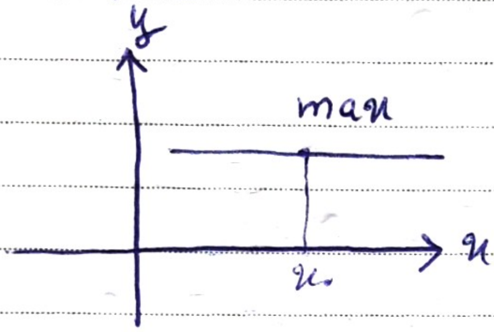




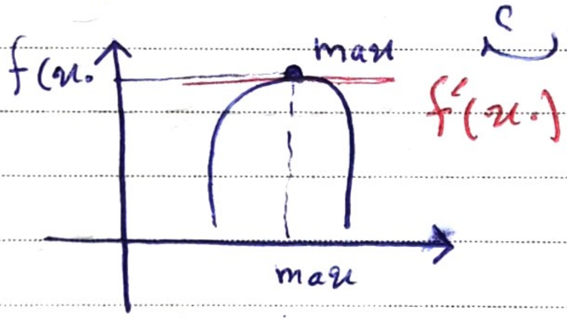
۱) نقطه‌ی زاویه‌دار



۲) نقطه‌ی بازگشت



۳) تابع ثابت



۴) مشتق تابع صفر باشد

ب) مینیمم نسبی = x_0 مینیمم نسبی تابع می‌باشد اگر

۱) $x_0 \in D_f$

۲) x_0 دارای همسایگی دوطرفه باشد

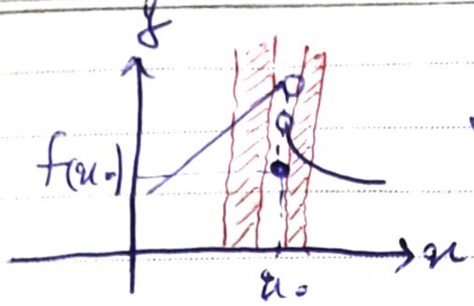
۳) مقدار $f(x_0)$ از تمام مقادیر همسایگی خود کوچک‌تر یا

مساوی با آن باشد:

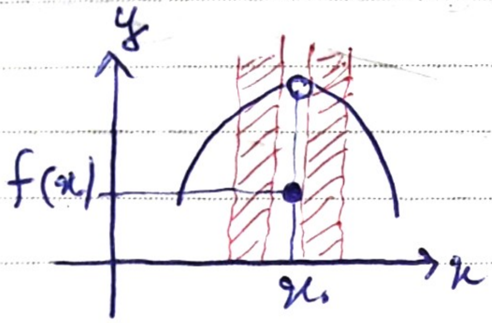
به عشق ابوالفضل

KHATERE

Year. Month. Date. Subject :

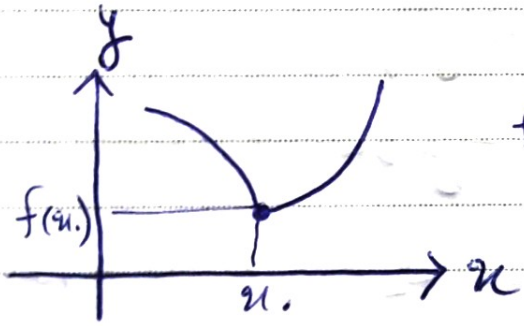


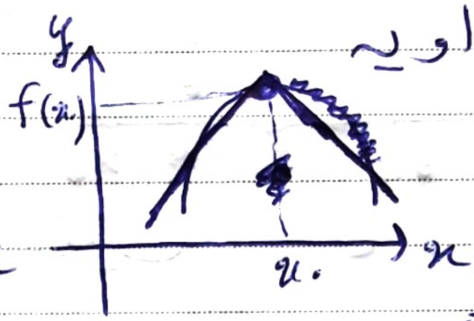
x_0 عضو دامنه می باشد و همسایگی دوطرفه نیز دارد و $f(x_0)$ از تمام مقادیر همسایگی خود کوچکتر می باشد



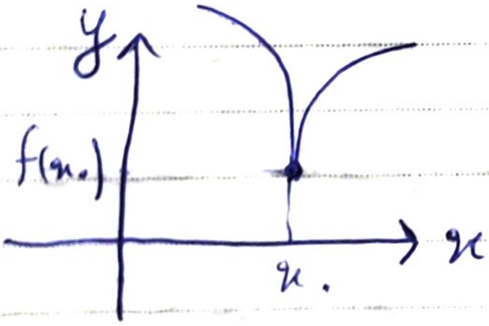
نقاط مینیمم نسبی خاص

۱/ نقطه ی زاویه

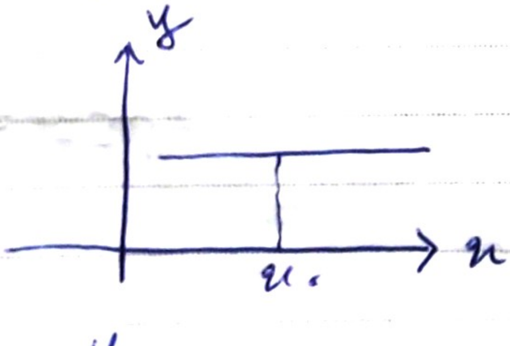




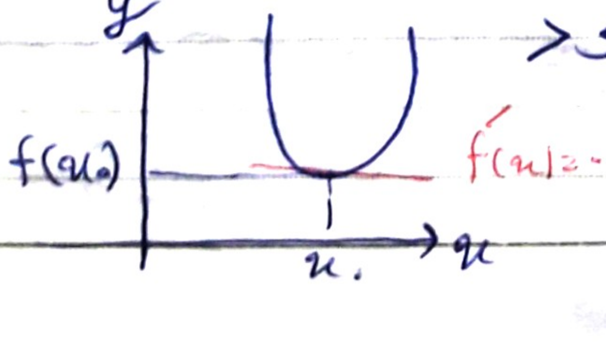
۲/ نقطه ی بازگشت



۳/ تابع ثابت



٤/ مشتق تابع صفر شود



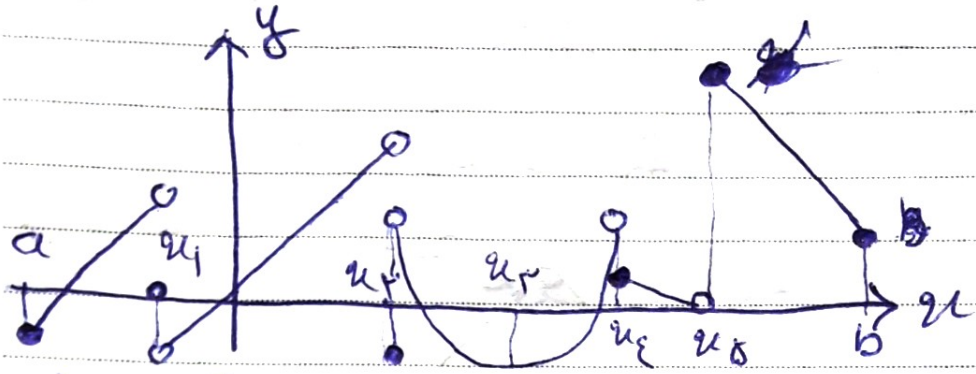
Year. Month. Date. Subject :

نکته های مهم

۱) نقطه های ابتدایی و انتهایی بازه اکسترمم نسبی نیستند

۲) در تابع ثابت همه ی نقاط هم ماکزیمم نسبی و هم مینیمم نسبی هستند

مثال ← تعداد نقاط اکسترمم نسبی را در شکل های زیر بیابید



۱) a و b نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار می باشند پس اکسترمم نسبی نیستند

۲) x_1 = نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی چون نه همسایگی های راست و چپ هم از $f(x_1)$ بزرگتر و هم کوچکتر باشند

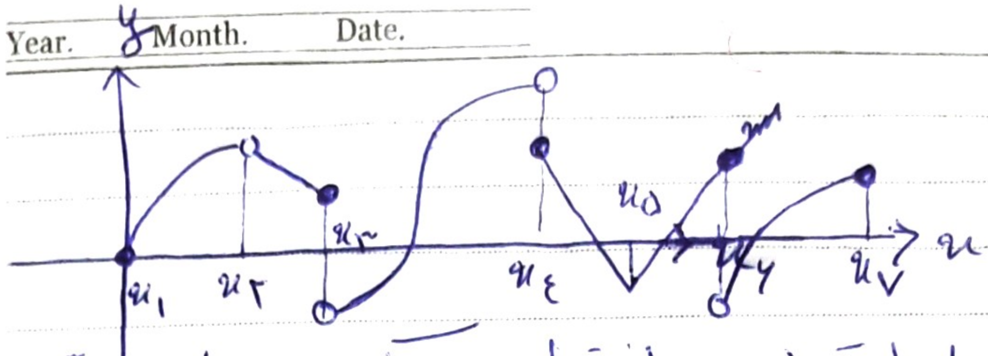
۳) x_2 = مینیمم نسبی

) x_3 = مینیمم نسبی

) x_4 = نه ماکزیمم نسبی و نه مینیمم نسبی

x_5 = ماکزیمم نسبی

Year. Month. Date. Subject :



۱) x_1 و x_7 = نقاط ابتدایی و انتهایی، اکسترمم نیستند

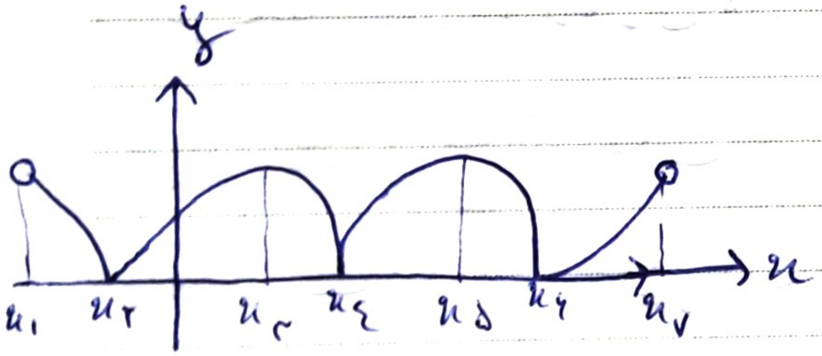
۲) x_2 = اکسترمم نمی باشد زیرا عضو دامنه نیست

۳) x_3 = اکسترمم نمی باشد

۴) x_4 = اکسترمم نمی باشد

۵) x_5 = مینیمم نسبی = نقطه زاویه دار

۶) x_6 = ماکسیمم نسبی



۱) x_2 و x_6 = مینیمم نسبی
نقاط زاویه دار

۲) x_4 = نقطه ی بازگشت = مینیمم نسبی

۳) x_5 و x_3 = ماکسیمم نسبی = مشتق صفر شده

۴) x_1 و x_7 = نقاط ابتدایی و انتهایی اکسترمم نسبی نمی باشند

Year. Month. Date. Subject :

بدست آوردن طول نقاط اکسترمم نسبی (موضعی)

برای بدست آوردن طول نقاط اکسترمم ابتدا ضابطه ی مشتق تابع را بدست می آوریم و برابر صفر قرار می دهیم و ریشه های ساده و مکرر مرتبه ی فرد را بدست می آوریم که این ریشه ها همان طول اکسترمم نسبی باشند

بدست آوردن طول ماکزیمم یا مینیمم نسبی

بعد از اینکه طول اکسترمم های نسبی را بدست آوردیم با استفاده از آزمون مشتق اول ضابطه ی مشتق تابع را تعیین علامت می کنیم که اگر از علامت منفی به سمت مثبت رفتیم آن ریشه (نقطه) مینیمم نسبی و اگر از علامت مثبت به سمت منفی رفتیم آن نقطه ماکسیمم نسبی می باشد

	x_0	
$f'(x)$	$-$ ↘	↗ $+$
	min	

	x_0	
$f'(x)$	$+$ ↗	↘ $-$
	max	

مثال: اکسترمم های تابع $y = x^4 + 3x^2 + 1$ را بدست آورید.

$$y' = 4x^3 + 6x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 + 3) = 0$$

KHATEREH

$$\begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$ غیرممکن (همواره مثبت)

		0	
$2x$	$-$		$+$
$2x^2+3$	$+$		$+$
	$-$ ↘	min	↗ $+$

$x=0$ طول مینیمم نسبی تابع می‌باشد.

مثال ۳: طول اکسترمم نسبی تابع $y = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ را بدست آورید.

$$y = 3x^{-2} + x^{-3} \Rightarrow y' = -6x^{-3} - 3x^{-4}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{-6x^2 - 3x}{x^3} = 0$$

$$-6x^2 - 3x = 0 \Rightarrow -3x(+2x+1) = 0$$

$$\begin{cases} -3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$-3x$	$+$		$+$		$-$
$2x+1$	$-$		$+$		$+$
	$-$ ↘	min نسبی	↗ $+$ ↘	max	$-$

پس تابع یک ماکسیمم نسبی به طول صفر و یک مینیمم نسبی به طول $-\frac{1}{2}$ دارد.

مثال ۴: در تابع $y = |x^2 + 2x|$ اکسترمم‌های نسبی را بیابید.

Year. Month. Date. Subject :

ابتدا تابع را به تابع چند ضابطه ای تبدیل می کنیم و مشتق ها کنیم

$x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x=0 \; , \; x=-2$

	$-\infty$ ⟶ -2	-2 ⟶ 0	0 ⟶ $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$
	۱	۲	۳

$1) \quad x \le -2 \Rightarrow (-x)(-(x-2)) = x^2+2x$

$2) \quad -2 \le x < 0 \Rightarrow (-x)(+(x+2)) = -x^2-2x$

$3) \quad x > 0 \Rightarrow (x)(x+2) = x^2+2x$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} x^2+2x , & x \le -2 \\ -x^2-2x , & -2 \le x < 0 \\ x^2+2x , & x > 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x+2 , & x < -2 \\ -2x-2 , & -2 < x < 0 \\ 2x+2 , & x > 0 \end{cases}$$

حال هر کدام از ضابطه ها را برابر صفر قرار می دهیم

$2x+2=0 \Rightarrow x=-1$ غ ق ق $\notin$ عضو دامنه نمی باشد

$-2x-2=0 \Rightarrow x=-1$ ق ق $\in$ عضو دامنه می شود

$2x+2=0 \Rightarrow x=-1$ غ ق ق $\notin$ عضو دامنه نمی باشد

پس $x=-1$ طول نقطه اکسترمم نسبی می باشد.

KHATEREH

Year. Month. Date. Subject :

مثال ۱: اکسترمم های نسبی تابع $y=\begin{cases} x & , |x|<1 \\ (x-1)^2 & , 1\leq x\leq 4 \end{cases}$ را بیابید؟

مشتق تابع را بدست می‌آوریم و هر ضابطه را جداگانه برابر صفر قرار می‌دهیم

$$y' = \begin{cases} 1 & -1<x<1 \\ 2(x-1)(1) & , 1<x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=0 & \text{برقرار نمی‌باشد} \\ 2x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \end{cases}$$

غ ق

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$2x-2$	$-$	0	$+$
	$\searrow$	min	$\nearrow$

پس $\boxed{x=1}$ طول مینیمم نسبی می‌باشد.

خصوصیات نقاط اکسترمم نسبی :

۱) در تابع صدق می کنند ($y_0 = f(x)$)

۲) مشتق تابع را صفر می کنند ($f'(x_0) = 0$)

و در توابع کسری

۱) در تابع صدق می کنند

۲) مشتق تابع را صفر می کنند

۳) در هوپیتال تابع نیز صدق می کنند $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{Hop} \frac{f'(x)}{g'(x)} = y$

مثال : نقطه ی $(-1,-1)$ مینیمم نسبی تابع $y = ax^2 - b|x|$ می باشد a و b را بدست آورید؟

$$(-1,-1) \Rightarrow x=-1 , y=-1$$

نقطه ی مینیمم در تابع صدق می کند

$$-1 = a(-1)^2 - b|-1| \Rightarrow \boxed{a-b=-1}$$

نقطه ی مینیمم مشتق تابع صفر می کند

$$x=-1 \Rightarrow |x| = -x$$

$$y = ax^2 + bx \Rightarrow y' = 2ax + b = 0$$

$$\boxed{-2a+b=0}$$

Year. Month. Date. Subject :

$$\begin{cases} a-b=-1 \\ -2a+b=0 \end{cases} \xrightarrow{+} \boxed{a=1} \text{ و } \boxed{b=2}$$

مثال = اگر نقطه ی (۲و۳) اکسترمم نسبی تابع $y=\dfrac{ax^2+b}{x^3}$ باشد مقدار b را بدست آورید؟

نقطه ی مینیمم در تابع صدق می کند

$(2,3) \Rightarrow y=3 , x=2$

$$y=\frac{ax^2+b}{x^3} \Rightarrow 3=\frac{4a+b}{8} \Rightarrow 4a+b=24$$

نقطه ی مینیمم در هوپیتال تابع صدق می کند

Hop

$$\Rightarrow y'=\frac{2ax}{3x^2} \Rightarrow 3=\frac{4a}{12} \Rightarrow \boxed{a=9}$$

$$a=9 \Rightarrow 4a+b=24 \Rightarrow \boxed{b=-12}$$

نکات مهم =

۱) اگر f تابعی فرد و مشتق پذیر در x_0 باشد آنگاه اگر f در x_0 ماکزیمم نسبی باشد در $-x_0$ مینیمم نسبی می باشد

۲) اگر f تابعی زوج و مشتق پذیر در x_0 باشد آنگاه اگر f در x_0 مینیمم نسبی باشد f در x_0 نیز مینیمم نسبی می باشد

Year. Month. Date. Subject :

۳) اگر f تابعی مشتق پذیر در x_0 و $f(x_0)\neq 0$ آنگاه اگر

f در x_0 ماکزیمم نسبی باشد $\frac{1}{f}$ در x_0 می نیمم نسبی است

۴) در توابع به فرم زیر $x=a$ طول اکسترمم نسبی می باشد

1) $y=(x-a)^{2n}\cdot g(x)$

۲) $y=|x-a|\cdot g(x)$

آزمون مشتق دوم برای تعیین اکسترمم نسبی

اگر c نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد آنگاه اگر

1) $f'(c)=0$ و ۲) $f''(c)$ موجود باشد داریم

الف) $f''(c)<0$ آنگاه c ماکزیمم نسبی تابع می باشد

ب) $f''(c)>0$ آنگاه c مینیمم نسبی تابع می باشد

ج) $f''(c)=0$ آزمون مشتق دوم بی نتیجه می باشد

تذکر = بهتر است در موارد زیر از آزمون مشتق دوم استفاده کنیم:

۱) در تعیین ماکزیمم یا مینیمم نسبی توابع مثلثاتی

۲) اگر در صورت سوال نقطه ای به ما داده بود و ماکس

Year. Month. Date. Subject :

و مینیمم نسبی را نداشته بودند.

مثال: ماکس و مینیمم نسبی را در تابع $y=\frac{1}{2}x-\sin x$ در $[0,\pi]$ بیابید.

حل: ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم.

$$y'=0 \Rightarrow \frac{1}{2}-\cos x=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$k=0 \xRightarrow{[0,\pi]} \boxed{x=\frac{\pi}{3}}$$

حال مشتق دوم تابع را بدست می‌آوریم

$$y''=\sin x \Rightarrow y''\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}>0$$

پس $x=\frac{\pi}{3}$ طول مینیمم نسبی تابع در فاصله‌ی $[0,\pi]$ می‌باشد.

تذکر: روش بدست آوردن نقطه‌ی بحرانی در مطلب بعدی می‌باشد.

مثال: در تابع $y=\cos 3x$ نقطه‌ای به طول $x=\frac{2\pi}{3}$ ماکسیمم نسبی است یا مینیمم نسبی؟

$$y'=-3\sin 3x \Rightarrow y'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-3\sin 3\left(\frac{2\pi}{3}\right)=0$$

پس شرط اول برقرار می‌باشد

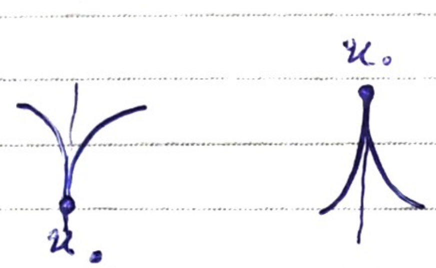
$$y''=-9\cos 3x \Rightarrow y''\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-9\cos 3\left(\frac{2\pi}{3}\right)<0$$

پس $x=\frac{2\pi}{3}$ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی می‌باشد

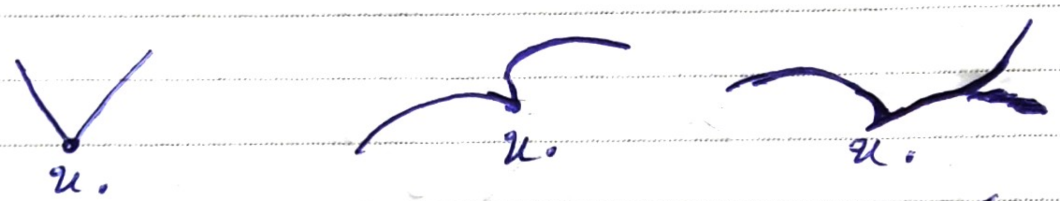
نقطه‌ی بحرانی :

نقطه‌ی بحرانی روی نمودار

۱) نقطه‌ی بازگشت



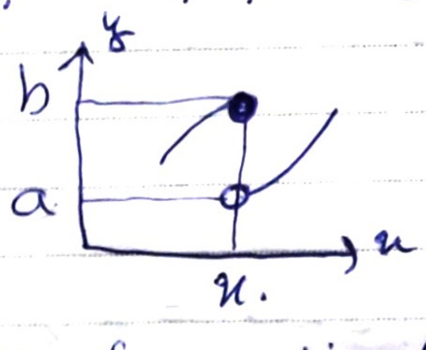
۲) نقاط زاویه‌دار

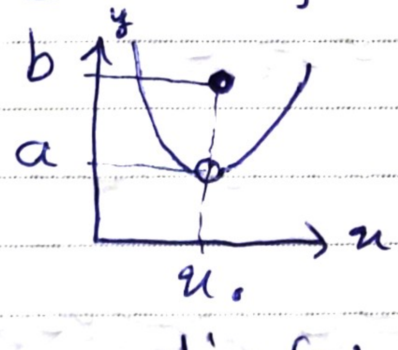


۳) نقاطی که خط مماس برآن‌ها افقی باشد (مشتق صفر باشد)

$y = k$

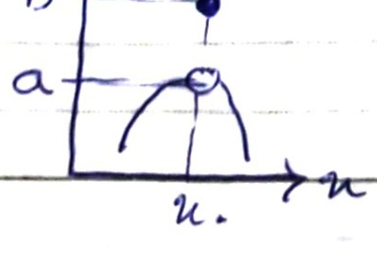
۴) نقاط ناپیوستگی (حد چپ و راست برابر مقدار تابع نباشد)

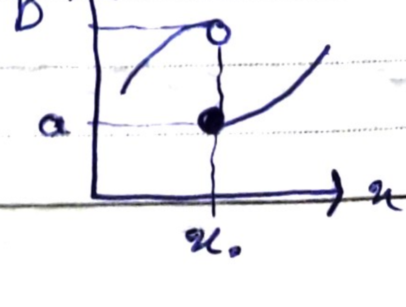




$\lim_{x\to x_0^+} f = a \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x) = b$

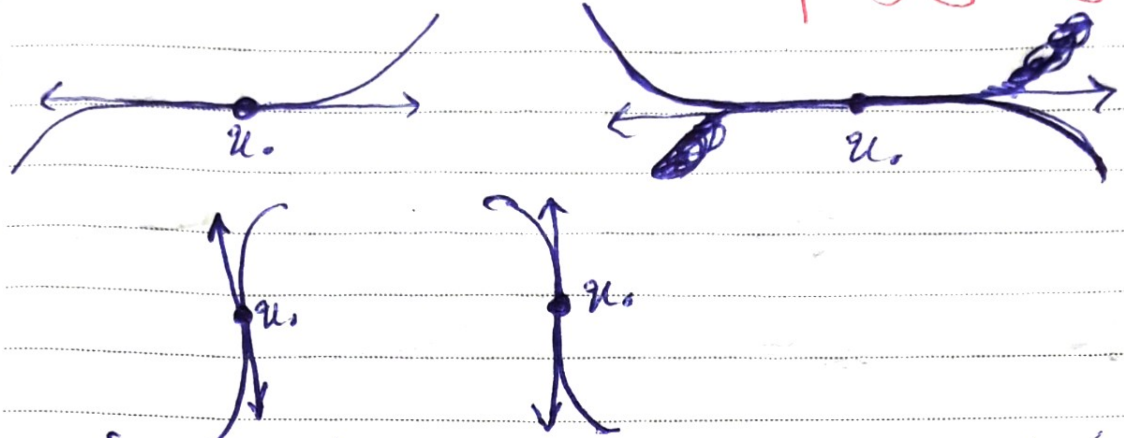
$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} \neq f(x_0)$



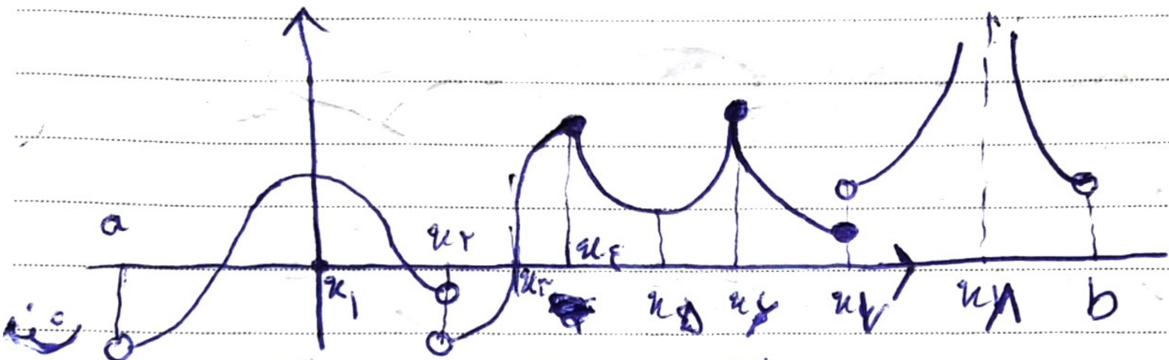


Year. Month. Date. Subject :

۵) عطف های افقی و قائم :



مثال : نقاط بحرانی نمودارهای زیر را بیابید



۱) x_1 و x_5 ⇐ مماس افقی می باشد پس نقطه ی بحرانی می ب

۲) x_2 ⇐ ناپیوسته می باشد اما عضو دامنه نمی باشد

۳) x_3 = عطف قائم پس نقطه ی بحرانی می باشد

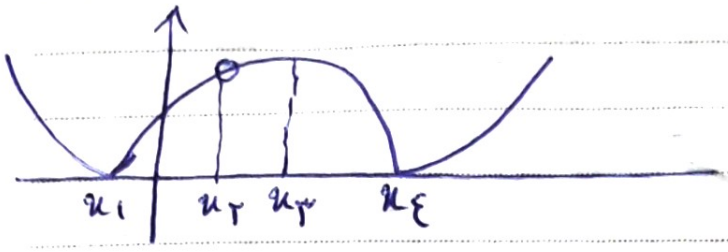
۴) x_4 = نقطه ی زاویه دار می باشد پس نقطه ی بحرانی است

۵) x_6 = نقطه ی بازگشت می باشد پس نقطه ی بحرانی است

۶) x_7 = نقطه ناپیوسته می باشد پس نقطه ی بحرانی می باشد

۷) x_8 = مشتق وجود ندارد اما عضو دامنه نمی باشد

Year. Month. Date. Subject :



۱) x_1 و x_4 = نقطه‌ی زاویه‌دار پس بحرانی می‌باشد

۲) x_2 = تابع پیوسته اما عضو دامنه نمی‌باشد

۳) x_3 = مماس افقی می‌باشد پس بحرانی می‌باشد

بدست آوردن نقطه‌ی بحرانی از روی ضابطه =

۱) توابع چند ضابطه‌ای = ابتدا مشتق تابع را بدست می‌آوریم و تک تک ضابطه‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌هایی که را بدست می‌آوریم این ریشه‌ها اگر در دامنه باشند نقاط بحرانی می‌باشند.

علاوه بر ریشه‌ها نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم که اگر تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نبود آنگاه نقطه نقطه‌ی بحرانی می‌باشد

۲) تابع کسری = ابتدا مشتق تابع را بدست می‌آوریم و ریشه‌های صورت و مخرج را بدست می‌آوریم و اگر عضو دامنه باشند نقاط بحرانی می‌باشند

Year. Month. Date. Subject :

۳) تابع قدرمطلق = ابتدا با توجه به جدول تعیین علامت تابع را به تابع چندضابطه‌ای تبدیل می کنیم و همانند تابع چندضابطه ای نقاط بحرانی را بدست می آوریم

۴) تابع جزء صحیح = جزء صحیح مانند یک ضریب در تو تابع کار می کند پس با توجه به بازه داده شده آنها را به یک تابع چند ضابطه ای تبدیل می کنیم و همانند تو تابع چند ضابطه ای عمل می کنیم.

به عنوان مثال تابع $y = x - [x]$ در بازه ی $[-1, 1]$ را به صورت زیر می نویسیم

$$y = \begin{cases} x - (-1), & -1 \leq x < 0 \\ x - 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

نکته مهم = برای ریاضی ها نقاط ابتدایی و انتهایی بازه ی $[a, b]$ نقاط بحرانی می باشند اما برای تجربی ها این نقاط نقاط بحرانی محسوب نمی شوند.

نکته ی مهم = هر نقطه ی اکستریمم نسبی بحرانی می باشد اما عکس این قضیه برقرار نیست

KHATEREH

۱۵| توابع خطی = نقاط بحرانی از قرار داد که مشتق تابع برابر صفر بدست می‌آید؛

مثال = نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید،

① $y = x^4 - 4x^3 + 3$

$y' = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x-3) = 0$

$$= \begin{cases} 4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \xrightarrow{D_f = R} \boxed{x = 0, 3}$$ نقاط بحرانی

② $y = x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x \in [-1, 1]$،

$y' = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$

$\Rightarrow \frac{(4\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x}) - 2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$

تابع کسری می‌باشد پس ریشه‌های صورت و مخرج در صورت عضو دامنه بودن نقاط بحرانی می‌باشند

$4\sqrt[3]{x^2} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{8} =$

$\Rightarrow x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$

$3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0$

~~پس تابع برای ریاضی‌ها $\{1, 0, -1, \pm\frac{\sqrt{2}}{4}\}$ و ۰ نقاط بحرانی‌اند~~

و برای تجربی‌ها $\{\pm\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\}$ نقاط بحرانی‌اند،

Year. Month. Date. Subject :

(۳) $y = |x-2|\sqrt[3]{x^2}$

$x-2=0 \Rightarrow$

$x-2$	$-$	۲	$+$
	۱		۲

۱) $x \leq 2 \Rightarrow -(x-2)\sqrt[3]{x^2} = (-x+2)\sqrt[3]{x^2}$

۲) $x > 2 \Rightarrow +(x-2)\sqrt[3]{x^2} = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} (-x+2)\sqrt[3]{x^2}, & x \leq 2 \\ (x-2)\sqrt[3]{x^2}, & x > 2 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} (-1)\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2(1)}{3\sqrt[3]{x}}(-x+2), & x < 2 \\ (1)\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2(1)}{3\sqrt[3]{x}}(x-2), & x > 2 \end{cases}$$

(۱) $y' = 0 \Rightarrow -\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{-2x+4}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \dfrac{(\sqrt[3]{x^2})(3\sqrt[3]{x}) - 2x+4}{3\sqrt[3]{x}}$

قابل قبول است

$$\dfrac{-3x-2x+4}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -5x+4=0 = \boxed{x=\frac{4}{5}} \in x< \\ 3\sqrt[3]{x}=0 = \boxed{x=0} \in x< \end{cases}$$

(۲) $y' = 0 \quad \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \dfrac{(\sqrt[3]{x^2})(3\sqrt[3]{x}) + 2x}{3\sqrt[3]{x}}$

$$\dfrac{3x+2x-2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{5}} \notin x> \\ 3\sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \notin x> \end{cases}$$

KHATEREH

Year. Month. Date. Subject :

حال نقاط مرزی را بررسی می کنیم

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

پیوسته می باشد

$$f'_+(2) = \sqrt[3]{4}$$
$$f'_-(2) = -\sqrt[3]{4} \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

پس مشتق پذیر نمی باشد و نقطه ی بحرانی می باشد

بنابراین نقاط بحرانی عبارت اند از $\{2 , 0 , \frac{4}{5}\}$

(۴) $y = x^3 - 4x[x]$, $[1,3]$

$$y = \begin{cases} x^3 - 4x(1) , & 1 \leq x < 2 \\ x^3 - 4x(2) , & 2 \leq x < 3 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^3 - 4x , & 1 \leq x < 2 \\ x^3 - 8x , & 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 3x^2 - 4 , & 1 < x < 2 \\ 3x^2 - 8 , & 2 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4 = 0 \\ 3x^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \boxed{x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow +\frac{2}{\sqrt{3}} \in (1,2)} \\ \boxed{x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \notin [2,3)} \end{cases}$$

حال نقاط مرزی را بررسی می کنیم $(x=2)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} = -8 \Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2)$$

پس $x=2$ نقطه ی بحرانی می باشد

KHATEREH

بنابراین نقاط بحرانی عبارت اند از : $\{2 , \frac{2}{\sqrt{3}}\}$

مثال: نقاط بحرانی تابع

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & |x|\leq 2\\ x^2-6x+8, & |x|>2\end{cases}$$ را بدست آورید.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}, & -2<x<2\\ 2x-6, & x>2 \text{ یا } x<-2\end{cases}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Rightarrow \begin{cases}-x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \in [-2,2]\\ \sqrt{4-x^2}=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2} \in [-2,2]\end{cases}$$

$$2x-6=0 \Rightarrow \boxed{x=3} \in (x>2 \text{ یا } x<-2)$$

حال نقاط مرزی را بررسی می کنیم

با توجه به $f(x)=0$ ، $x=\pm 2$ نقاط مرزی می باشند

در بالا فهمیدیم که هردو نقطه، نقطه ی بحرانی می باشند

بنابراین نقاط بحرانی عبارت اند از $\{-2, 2, 3, 0\}$

۲) نقاط بحرانی توابع مثلثاتی:

مثال: نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $f(x)=\sin 2x+2\cos x$ را بیابید.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2\cos 2x-2\sin x=0$$

$$2(1-2\sin^2 x-\sin x)=0 \Rightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

با تغییر متغیر $\sin x = x$

$$\Rightarrow 2x^2+x-1=0$$

Year. Month. Date. Subject :

$$b = a + c \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

ماکزیمم و مینیمم مطلق (اکسترمم مطلق یا سراسری)

الف) ماکزیمم و مینیمم مطلق از روی نمودار

بیشترین مقدار ($f(x)$) در نمودار، ماکزیمم مطلق

و کمترین مقدار در نمودار مینیمم مطلق می‌باشد.

نکته‌ی مهم = ممکن است یک نقطه روی نمودار هم

ماکسیمم مطلق و هم ماکسیمم نسبی و هم مینیمم مطلق و یا مینیمم نسبی باشد

نکته‌ی مهم = ممکن است در هر تابع چند اکسترمم نسبی

داشته باشیم اما اکسترمم های مطلق در صورت

وجود منحصر به فرد می‌باشند

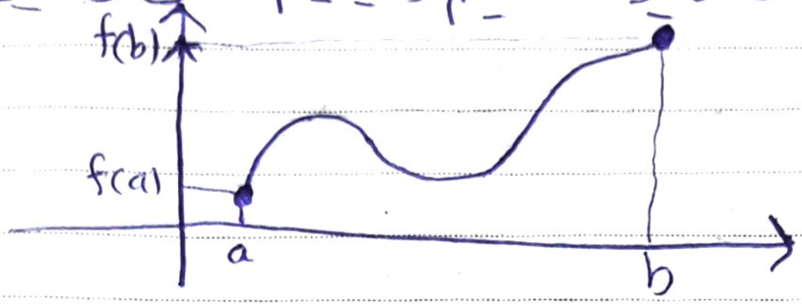
نکته‌ی مهم = زمانی که تابع در نقاط ابتدایی و انتهایی

دارای اکسترمم باشد آن نقاط اکسترمم مطلق می‌باشند

KHATEREH

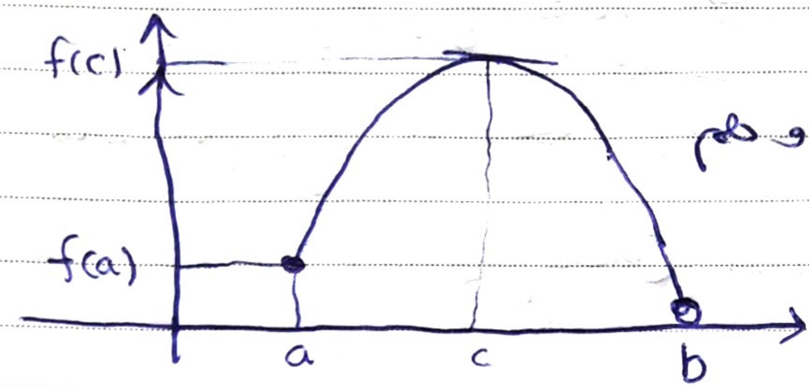
Year. Month. Date. Subject :

مثال ۲: در شکل های زیر ماکسیمم و مینیمم مطلق را بیابید؟



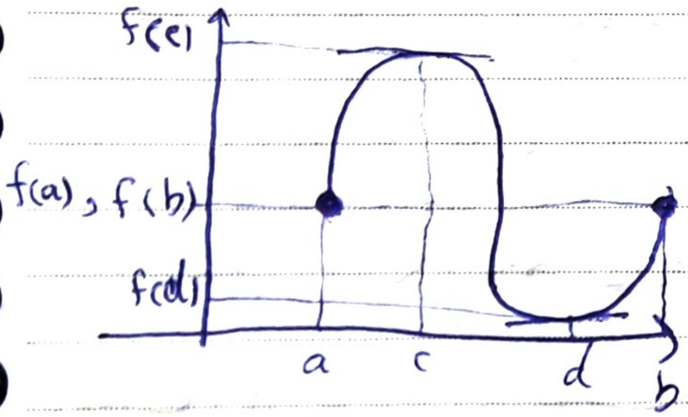
۱) a = مینیمم مطلق

۲) b = ماکسیمم مطلق



۱) c = هم ماکسیمم مطلق و هم ماکسیمم نسبی

۲) تابع مینیمم مطلق ندارد



۱) c = هم ماکسیمم مطلق و هم ماکسیمم نسبی

۲) d = هم مینیمم مطلق و هم مینیمم نسبی

در بازه ی $[a,b]$

۵) بدست آوردن ماکزیمم و مینیمم مطلق از روی ضابطه

ابتدا نقاط بحرانی را بدست می آوریم و اگر بازه به صورت $[a,b]$ باشد نقاط a و b را همراه نقاط بحرانی در تابع جایگذاری می کنیم هر کدام که مقدار تابع

KHATEREH

Year. Month. Date. Subject :

در آن بیشترین باشد ماکس مطلق و نقطه‌ای که مقدار تابع کمترین (یا کمترین) مقدار را داشته باشد مینیمم مطلق می‌باشد

تذکر مهم = اگر تابع f در بازه‌ی مورد نظر در نقطه‌ای ناپیوسته باشد باید حد تابع را در آن نقطه بدست آوریم و با مقادیر بدست آمده از سایر نقاط بحرانی مقدار ماکس و مین مطلق را مشخص کنیم .

تذکر = در صورت سؤال‌ها منظور از بیشترین مقدار ماکزیمم مطلق و منظور از کمترین مقدار مینیمم مطلق می‌باشد

مثال = کمترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ در بازه‌ی $[1,4]$ را بدست آورید؟

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3} , x = -1 \notin (1,4)$$

$$a = 1 , b = 4 , x = 3$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1)^2 - 9(1) = -11$$ مینیمم مطلق

$$f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) = -27 \Rightarrow (3,-27)$$

KHATEREH

$$f(4) = (4)^3 - 3(4)^2 - 9(4) = -20$$

Year. Month. Date. Subject :

مثال: ماکزیمم مطلق $f(x)=x^2e^x$ در بازه‌ی $[-2,1]$ را بدست آورید؟

$$f'(x)=2xe^x+e^x x^2=0 \Rightarrow xe^x(2+x)=0$$

$$xe^x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \in (-2,1)$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \notin (-2,1)$$

نقاط ابتدایی و انتهایی $= \boxed{-2 , 1}$

$$x=0 \Rightarrow f(0)=0$$

$$x=1 \Rightarrow f(1)=e \rightarrow max=(1,e)$$

$$x=-2 \Rightarrow f(-2)=\frac{4}{e^2}$$

مثال: کمترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=1-\cos^2x-\sin x$ را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ بدست آورید؟

$$f'(x)=-2(\cos x)(-\sin x)-\cos x$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\cos x(-2\sin x+1)=0$$

$$-\cos x=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}}$$

$$-2\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}}$$

نقاط ابتدایی و انتهایی $= \boxed{0 , 2\pi}$

Year. Month. Date. Subject :

$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2})=0$

$x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{3\pi}{2})=2$

$x=\frac{\pi}{6} \Rightarrow f(\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{4}$

$\boxed{min=-\frac{1}{4}}$

$x=\frac{5\pi}{6} \Rightarrow f(\frac{5\pi}{6})=-\frac{1}{4}$

$x=0 \Rightarrow f(0)=0$

$x=2\pi \Rightarrow f(2\pi)=0$

بدست آوردن ماکزیمم یا مینیمم مطلق در بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ و (a,b) =

ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم و همراه با نقاط مرز بسته ~~همچنین~~ مقدار تابع را مقایسه می‌کنیم و مقدار ماکس و مین مطلق را بدست می‌آوریم

تذکر مهم = در مرزهای باز حد تابع را بدست می‌آوریم و با مقادیر بالا مقایسه می‌کنیم و اگر مقدار ماکس یا مین از این نقاط بدست آمد تابع max یا min مطلق ندارد.

Year. Month. Date. Subject :

ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع چند ضابطه ای

برای نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع چند ضابطه ای ابتدا هر ضابطه را با توجه به دامنه ی خود مورد بررسی قرار می دهیم و در آخر همه نقاط بدست آمده از کل ضابطه ها را مقایسه می کنیم و ماکس و مین مطلق را بدست می آوریم.

مثال: مقدار مینیمم مطلق تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 , & -1\leq x<0 \\ \sqrt{x} , & 0\leq x<1 \end{cases}$ را بدست آورید؟

① $y=x^2+1 \Rightarrow D_y=[-1,0)$

$y'=2x \Rightarrow y'=0 \Rightarrow x=0 \notin (-1,0)$

نقطه‌ی مرزبسته $=\boxed{-1}$ نقطه‌ی مرزباز $=0$

② $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow x=0 \notin (0,1)$

نقطه‌ی مرزبسته $=\boxed{0}$ نقطه‌ی مرزباز $=1$

1) $f(-1)=2$ ، 3) $\lim_{x\to 0} x^2+1=1$

2) $f(0)=0$ ، 4) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$

KHATEREH

$min=(0,0)$

Year. Month. Date. Subject :

تابع صعودی و نزولی

الف) اگر تابع f پیوسته باشد:

از تابع مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی تابع را می‌یابیم و در فواصلی که $f'>0$ ، f صعودی و در فواصلی که $f'<0$ ، f نزولی می‌باشد (مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم در فواصل مثبت f صعودی و در فواصل منفی f نزولی می‌باشد)

ب) اگر تابع f در بازه‌ی I پیوسته نباشد

۱) اگر تابع مجانب قائم داشته باشد ⇐ در آن بازه یکنوا نمی‌باشد

۲) اگر تابع مجانب قائم نداشته باشد ⇐ اگر در جدول تعیین علامت مشتق تابع علامت مثبت بود تابع صعودی و اگر علامت منفی بود $(f'<0)$ تابع نزولی می‌باشد (تابع باید یک به یک باشد)

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنه $\{x: |x-1|<2\}$ همواره چگونه است؟

مثال : نمودار تابع $y=(x-1)^3(x+1)$ در چه فاصله‌ای نزولی می‌باشد.

ابتدا نقاط بحرانی را بدست می‌آوریم $\Leftarrow$ $y'=0$

$$y'=3(x-1)^2(x+1)+(x-1)^3(1)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2\big(3(x+1)+(x-1)\big)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(3x+3+x-1) \Rightarrow y'=(x-1)^2(4x+2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \in D_f=R \\ 4x+2=0 \Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}} \in D_f=R \end{cases} \Rightarrow \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$$

حال جدول تعیین علامت مشتق تابع را تشکیل می‌دهیم

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+		+	+
$4x+2$	−		+	+
$y'<0$	−		+	+

عبارت همواره مثبت $\Leftarrow (x-1)^2$

پس تابع در فاصله $(-\infty, -\frac{1}{2})$ نزولی می‌باشد

صعودی و نزولی بودن توابع قدرمطلق و چند ضابطه‌ای و جزء صحیح :

~~به دلیل وجود ناپیوستگی باید از رسم نمودار~~

KHATEREH

Year. Month. Date. Subject :

استفاده کنیم

در توابع قدر مطلق ابتدا تابع را با استفاده از جدول تعیین علامت به تابع چند ضابطه ای تبدیل می کنیم و سپس تابع چند ضابطه ای را رسم می کنیم.

مثال: تابع $f(x) = |x| + |x-1|$ در چه فاصله‌ای صعودی می‌باشد.

ابتدا تابع قدر مطلق را به تابع چند ضابطه‌ای تبدیل می کنیم سپس آن را رسم می کنیم.

$x = 0$

$x = 1$

$\Rightarrow$

	$-\infty$	0	1 $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	۱	۲	۳

۱) $x \leq 0 \Rightarrow -(x) - (x-1) = -2x + 1$

۲) $0 \leq x < 1 \Rightarrow +(x) - (x-1) = 1$

۳) $x > 1 \Rightarrow +(x) + (x-1) = 2x - 1$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 , & x \leq 0 \\ 1 , & 0 \leq x < 1 \\ 2x - 1 , & x > 1 \end{cases}$$

KHATEREH

Year. Month. Date. Subject :

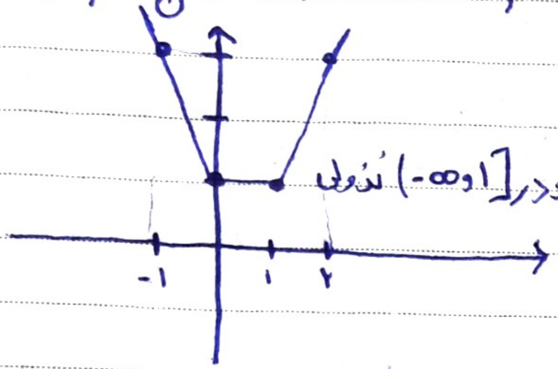
1) $y=-2x+1 \Rightarrow x<0$

x	۰	۱-
y	۱	۳

2) $y=1 \Rightarrow 0\leq x<1$ ⇐ تابع ثابت

3) $y=2x-1 \Rightarrow x>1$

x	۱	۲
y	۱	۳



تابع در بازه‌ی $[0,+\infty)$ صعودی و در $(-\infty,1]$ نزولی

و در بازه‌ی $[1,+\infty)$ صعودی اکید

می‌باشد و در بازه‌ی $(-\infty,0]$ نزولی اکید می‌باشد

مثال: یکنوایی تابع f را بر روی D_f با ضابطه‌ی زیر را مشخص کنید؟

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & , \ x\leq 0\\ x^2-1 & , \ x\geq 1\end{cases}$$

1) $y=-x^2$

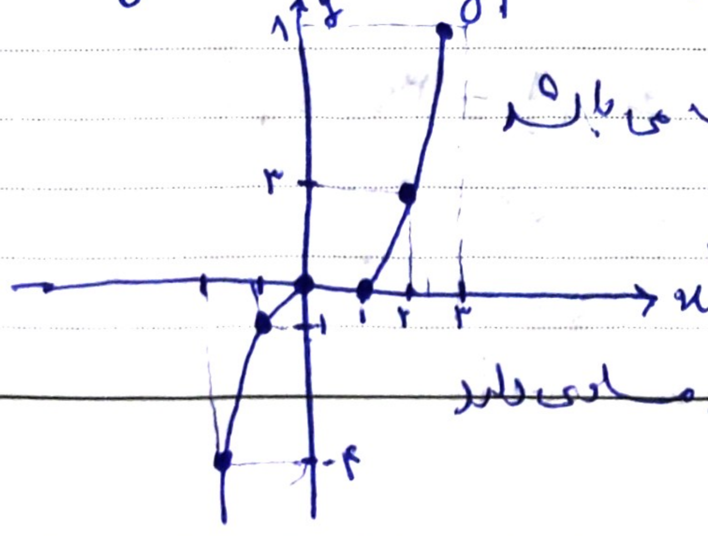
x	۰	۱-	۲-
y	۰	۱-	۴-

$(x\leq 0)$

2) $y=x^2-1$

x	۱	۲	۳
y	۰	۳	۸

$(x\geq 1)$



تابع در D_f صعودی می‌باشد

دقت شود که تابع صعودی

اکیدی نمی‌باشد چون مقدار مساوی دارد

KHATEREH

$f(0)=f(1)$

Year. Month. Date. Subject :

صعودی و نزولی بودن توابع کسری

برای توابع کسری ابتدا شرایط وجود مجانب قائم را بررسی می کنیم اگر تابع مجانب قائم داشت تابع در دامنه ی خود ($R-\{$ریشه مخرج$\}$) یکنوا نمی باشد اما در بازه های یک طرفه ی مجانب قائم یکنوا می باشد و صعودی و نزولی بودن آن را از تعیین علامت مشتق می یابیم به عنوان مثال در تابع $y=\frac{1}{x}$ ، $x=0$ مجانب قائم تابع می باشد پس تابع در $R-\{0\}$ یکنوا نمی باشد اما در بازه های یک طرفه ی مجانب قائم $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ یکنوایی را بررسی می کنیم.

مثال = تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$ در چه بازه ای صعودی است؟

ابتدا شرایط وجود مجانب قائم را بررسی می کنیم.

$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1$ غیر ممکن

پس تابع ریشه ی مخرج ندارد بنابراین مجانب قائم ندارد و تابع در کل دامنه ی خود یکنوا می باشد

$$y' = \frac{(x^2+1)(1) - (2x)(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

حال نقاط بحرانی را بدست می آوریم

ریشه های صورت و مخرج در صورت عضو دامنه بودن نقاط بحرانی می باشند

$$\begin{cases} 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1} \\ (x^2+1)^2=0 \Rightarrow \boxed{x^2=-1} \end{cases}$$

غیر ممکن ریشه ندارد ⇐

$D_f = R \Rightarrow \{+1,-1\}$ نقاط بحرانی

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	$+$	$-$	
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$	$+$	
$y'>0$	$-$	$+$	$-$	

⇐ پس تابع در بازه ی $(-1, 1)$ صعودی می باشد

مثال - نمودار تابع با ضابطه ی $y = \frac{x}{1-x^2}$ در چه بازه ای صعودی است؟

ابتدا شرایط مجانب قائم را بررسی می کنیم

$$1-x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$$

ریشه ها را در صورت جای گذاری می کنیم

$x=1 \Rightarrow +1$

ریشه ها صورت را صفر نکردند

$x=-1 \Rightarrow -1$

Year. Month. Date. Subject :

حال دامنه ی تابع را بدست می آوریم $R-\{-1,1\}$ و

ریشه ها می توانند از اعداد کوچکتر و بزرگتر از ریشه ها به ریشه ها

نزدیک شوند پس $x=-1$ و $x=1$ مجانب قائم تابع

می باشند بنابراین در بازه های $(1,+\infty)$ و $(-1,1)$ و $(-\infty,-1)$

تابع یکنوا می باشد.

$$y' = \frac{(1-x^2)(1)+(2x)(x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

نقاط بحرانی را بدست می آوریم

$$\begin{cases} 1+x^2=0 \Rightarrow \boxed{x^2=-1} & \text{(عبارت همواره مثبت) غیرممکن} \\ (1-x^2)^2=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1} & \text{(عبارت همواره مثبت)} \end{cases}$$

چون که هر دو عبارت همواره مثبت می باشد پس تابع

همواره صعودی می باشد یعنی در بازه های $(1,+\infty)$ و $(-1,1)$

و $(-\infty,-1)$ همواره صعودی می باشد.

نکته ی مهم: برای اینکه تابع درجه ی دوم $y=ax^2+bx+c$

صعودی باشد باید دو شرط زیر برقرار باشد

۱) $a\geq 0$ ۲) $y'\geq 0$ ⇐ وجواب اشتراک دو شرط می باشد

KHATEREH

مثال = حدود a برای آنکه که تابع $y=(a-2)x^2-x$ در فاصله‌ی $[1,\infty)$ صعودی باشد را بیابید؟

$$1)\ a\geq 0 \Rightarrow a-2\geq 0 \Rightarrow \boxed{a\geq 2}\ ①$$

$$2)\ y'\geq 0 \Rightarrow 2(a-2)x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2(a-2)}$$

$$[1,+\infty) \Rightarrow x\geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2(a-2)}\geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2a-4}-1\geq 0 \Rightarrow \frac{5-2a}{2a-4}\geq 0 \Rrightarrow$$ باتعیین علامت

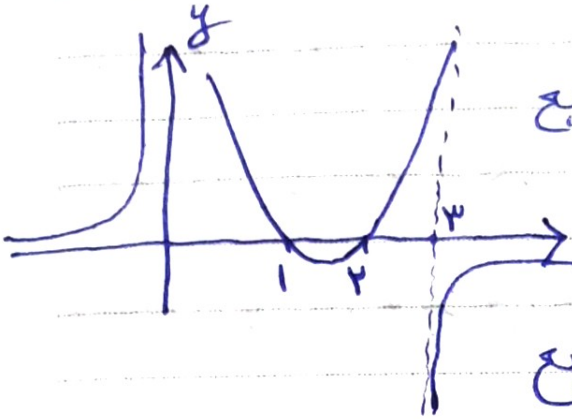
$$\Rightarrow \boxed{2< a\leq \frac{5}{2}}\ ②$$

$$① \cap ② \Rightarrow \boxed{a\geq \frac{5}{2}}$$

نکته‌ی مهم = اگر در نمودار f' آنکه قسمت از نمودار که زیر محور xها است $(f'(x)<0)$ تابع f نزولی و آنکه قسمت از نمودار که بالای محور xهای باشد $(f'(x)>0)$ تابع f صعودی می‌باشد.

مثال = تابع f روی R پیوسته و نمودار f' به صورت مقابل است. تابع f در چه بازه‌ای نزولی می‌باشد.

Year.   Month.   Date.   Subject :

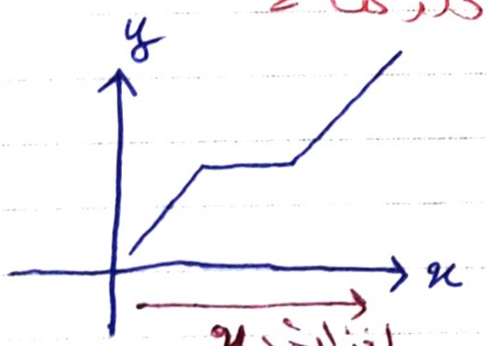


در نمودار زیر محور x ها تابع f نزولی می باشد پس در بازه های $(1,2)$ و $(3,+\infty)$ تابع f نزولی می باشد

نکته ی مهم: جمع دو تابع صعودی، تابعی صعودی می باشد

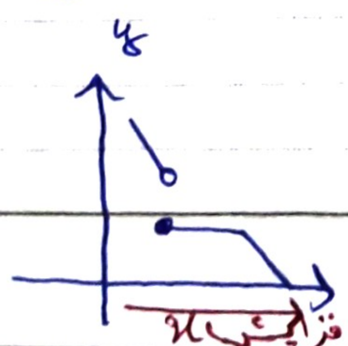
نکته ی مهم: اگر f در یک بازه صعودی (نزولی) باشد آنگاه $(-f)$ رفتار برعکس یعنی نزولی (صعودی) خواهد داشت و اگر f در بازه ای همواره مثبت یا همواره منفی باشد، رفتار $\frac{1}{f}$ نیز برعکس رفتار f خواهد بود

صعودی یا نزولی بودن نمودارها:



۱) تابع صعودی

با افزایش x مقدار $f(x)$ افزایش می یابد در این نوع مقدار مساوی نیز داریم

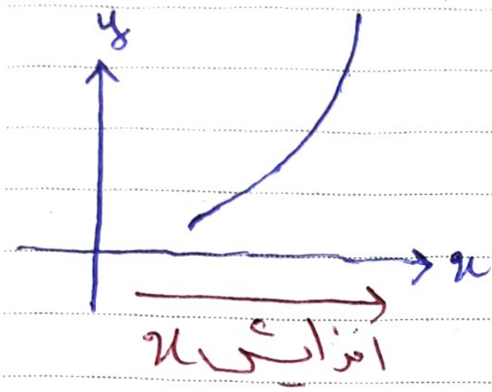


۲) تابع نزولی

با افزایش مقدار x مقدار $f(x)$ کاهش می یابد در این نوع مقدار مساوی داریم

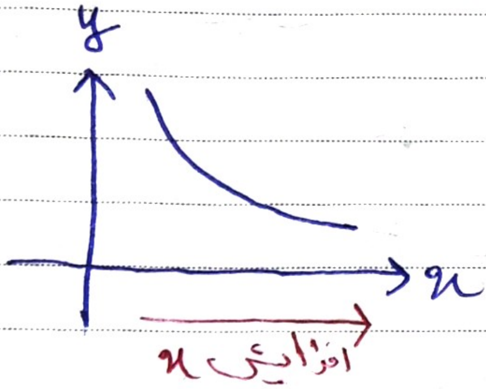
Year. Month. Date. Subject :

۳) صعودی اکید :



با افزایش مقدار x مقدار f(x)
افزایش می یابد در اینه نوع
مقدار f(x) مساوی نداریم.

۴) نزولی اکید :



با افزایش مقدار x مقدار f(x)
کاهش می یابد در اینه نوع مقدار
f(x) مساوی نداریم.

Year. Month. Date. Subject :

نکته: اگر تابع f صعودی و تابع g نزولی باشد آنگاه

۱) $fog \Rightarrow (+)(-) = -$ ⟸ نزولی

۲) $fogof \Rightarrow (+)(-)(+) = -$ ⟸ نزولی

تقعر

۱) بدست آوردن جهت تقعر از روی ضابطه:

مشتق دوم تابع را بدست می آوریم و آن را تعیین علامت می کنیم که علامت مثبت نشان دهنده ی تقعر رو به بالا و علامت منفی نشان دهنده ی تقعر رو به پایین می باشد.

مثال: جهت تقعر منحنی با ضابطه ی $f(x)=x^4-2x^2$ را مشخص کنید.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$12x^2-12$	+	−	+	
	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

پس در فاصله های $(-\infty,-1)$ و $(1,+\infty)$ تقعر رو به بالا

و در فاصله ی $(-1,1)$ تقعر رو به پایین می باشد.

Year. Month. Date. Subject :

مثال : تقعر نمودار تابع با ضابطه ی $f(x)=\frac{x^2+9}{x^2+12}$ را مشخص کنید؟

$$y'=\frac{2x(x^2+12)-2x(x^2+9)}{(x^2+12)^2}=\frac{6x}{(x^2+12)^2}$$

$$y''=\frac{6(x^2+12)^2-2(2x)(x^2+12)(6x)}{(x^2+12)^4}$$

$$y''=0 \Rightarrow \frac{6(x^2+12)(x^2+12-4x^2)}{(x^2+12)^4}=0$$

$$\frac{6(12-3x^2)}{(x^2+12)^3}=0 \Rightarrow \begin{cases} 6(12-3x^2)=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 2} \\ (x^2+12)^3=0 \Rightarrow x^2=-12 \text{ غ ممکن} \end{cases}$$

	$-\infty$		-2		$+2$		$+\infty$
$6(12-3x^2)$		$-$		$+$		$-$	
$(x^2+12)^3$		$+$		$+$		$+$	
y''		$-$		$+$		$-$	
		$\cap$		$\cup$		$\cap$	

پس تابع در فاصله ی $(-2, 2)$ تقعر رو به بالا و در فاصله های $(2, +\infty)$ و $(-\infty, -2)$ تقعر رو به پایین دارد

تقعر تابع از روی نمودار

۱) هرگاه در تابع f' (مشتق تابع f) ، منفی مشـ

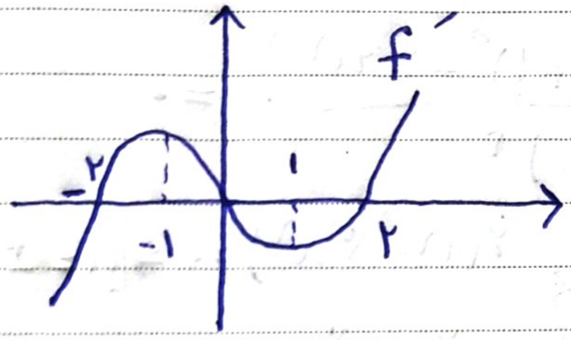
KHATEREH

Year. Month. Date. Subject :

اگر f' صعودی باشد تقعر f در آن بازه رو به بالا می‌باشد

۲) هرگاه در تابع f ، مشتق اگر f' نزولی باشد تقعر f در آن فاصله رو به پایین می‌باشد

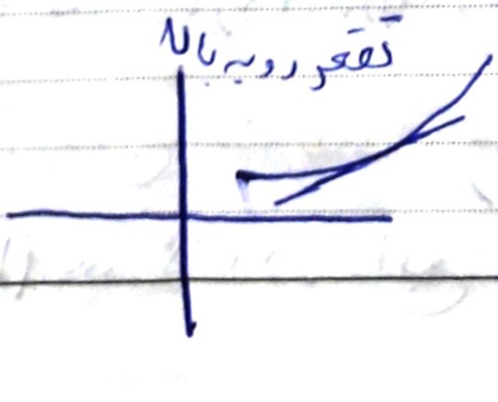
مثال = هرگاه نمودار مشتق تابع پیوسته f به صورت زیر باشد نمودار تابع f در کدام بازه تقعری رو به پایین دارد

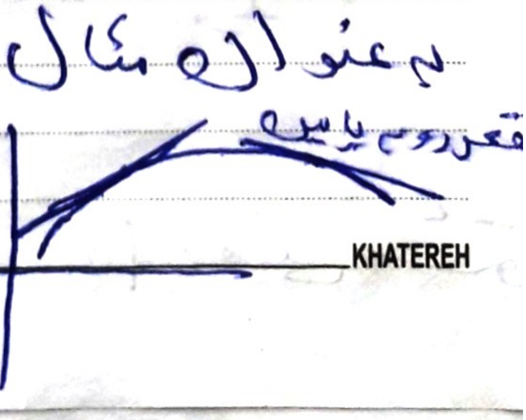


تابع در $(-1,1)$ اگر f' نزولی می‌باشد پس در این فاصله تقعری رو به پایین دارد.

نکته = در تابع f در بازه‌ی I در بالای مماس‌هایش قرار گیرد نمودار تابع در آن بازه تقعری رو به بالا و اگر نمودار تابع f در بازه‌ی I در پایین مماس‌هایش قرار گیرد نمودار در آن بازه تقعری رو به پایین دارد.

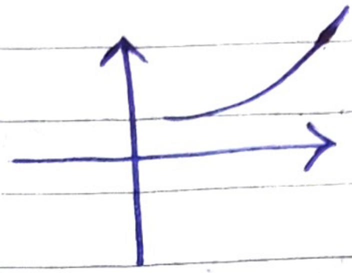
به عنوان مثال





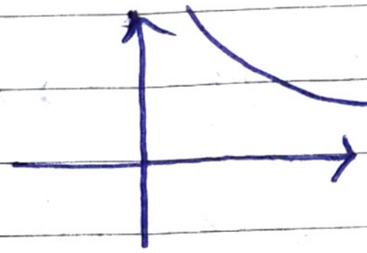
Date: Subject:

نکته = در نمودار تابع f داریم

۱)  ⇐

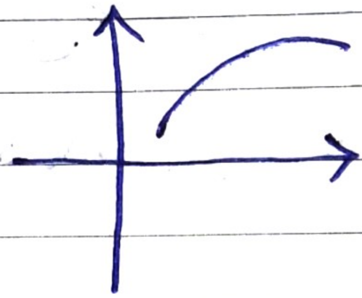
$f' > 0$ ⇐ ۱) تابع صعودی

$f'' > 0$ ⇐ ۲) تقعر رو به بالا

۲)  ⇐

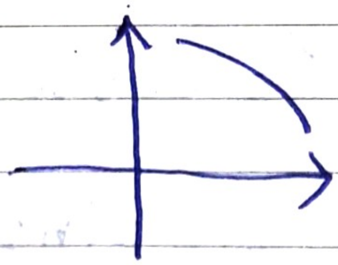
$f' < 0$ ⇐ ۱) تابع نزولی ⇐

$f'' > 0$ = ۲) تقعر رو به بالا

۳)  ⇐

$f' > 0$ ⇐ ۱) تابع صعودی ⇐

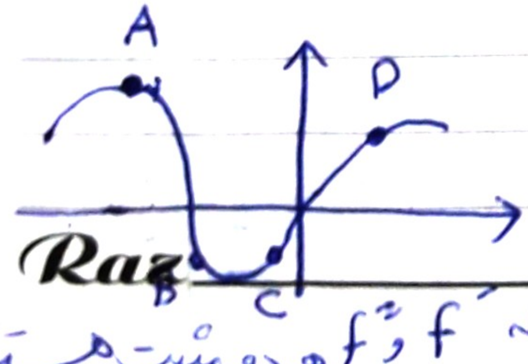
$f'' < 0$ ⇐ ۲) تقعر رو به پایین

۴)  ⇐

$f' < 0$ ⇐ ۱) تابع نزولی ⇐

$f'' < 0$ ⇐ ۲) تقعر رو به پایین

مثال = در کدام یک از نقاط نمودار شکل مقابل، مقادیر f' و f'' هر دو مثبت می‌باشند



در نقطه‌ی C هم تابع صعودی و هم تقعر رو به بالا دارد بنابراین در این نقطه f' و f'' هر دو مثبت هستند

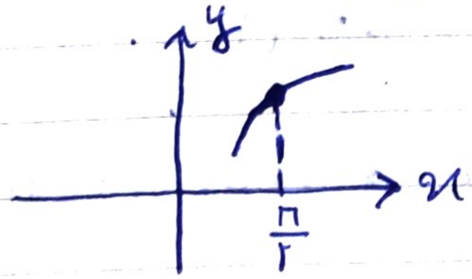
تشخیص نمودار تابع f در همسایگی نقطه‌ی A

ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و نقطه‌ی A را در آن جای‌گذاری می‌کنیم که در این صورت صعودی یا نزولی تابع در آن نقطه مشخص می‌شود سپس از تابع مشتق دوم می‌گیریم و نقطه‌ی A را در آن جای‌گذاری می‌کنیم که در این صورت تقعر تابع مشخص می‌شود

مثال: نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\sin x-\cos x$ در حوالی $x=\frac{\pi}{2}$ به چه صورت می‌باشد؟

$y' = \cos x + \sin x \Rightarrow y'(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$ صعودی

$y'' = -\sin x + \cos x \Rightarrow y''(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$ تقعر رو به پایین



نقطه‌ی عطف

۱) توابع خطی = برای بدست آوردن نقاط عطف توابع خطی (چند جمله‌ای) ابتدا مشتق دوم تابع را بدست می‌آوریم سپس مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم و نقطه‌ای که جهت تقعر اگر عوض می‌شود نقطه‌ی عطف می‌باشد.

مثال = طول نقطه‌ی عطف تابع $y=2(x-1)(2x-3)^2+1$ را بدست آورید؟

$$y' = 2\big((2x-3)^2(1)\big)+2\big(2(2)(2x-3)(x-1)\big)$$

$$= 2(2x-3)(6x-7)$$

$$y'' = 2\big((2)(6x-7)+6(2x-3)\big) = 2(24x-32)$$

$$y''=0 \Rightarrow 2(24x-32)=0 \Rightarrow x=\frac{32}{24}=\frac{4}{3}$$

	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$2(24x-32)$	$-$	0	$+$
جهت تقعر	$\cap$		$\cup$

چون در $x=\frac{4}{3}$ جهت تقعر عوض شده بنابراین نقطه‌ی عطف می‌باشد.

مثال ۲: نقاط عطف تابع $f(x)=x^2e^{-x}$ را بدست آورید.

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x-x^2)$$

$$f''(x) = (-e^{-x})(2x-x^2) + e^{-x}(2-2x)$$

$$= e^{-x}(x^2-4x+2)$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow e^{-x}(x^2-4x+2)=0 \xrightarrow{\boxed{e^{-x}>0}}$$

$$x^2-4x+2=0 \Rightarrow \Delta = 8 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+\sqrt{8}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-4-\sqrt{8}}{2} \end{cases}$$

	$-\infty$	$\frac{-4-\sqrt{8}}{2}$		$\frac{-4+\sqrt{8}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−	0	+	
جهت تقعر	∪		∩		∪	

در $x=\frac{-4+\sqrt{8}}{2}$ و $x=\frac{-4-\sqrt{8}}{2}$ جهت تقعر عوض شده

بنابراین نقاط عطف می باشند

۲) توابع قدر مطلق و چند ضابطه ای

در تابع قدر مطلق ابتدا با استفاده از جدول تعیین علامت تابع قدر مطلق را به تابع چند ضابطه ای تبدیل می کنیم و سپس همانند توابع چند ضابطه ای عمل می کنیم

Date: Subject:

در توابع چند ضابطه‌ای ابتدا مشتق دوم تابع را بدست

می‌آوریم سپس نقاطی که مشتق دوم وجود ندارد ($f''_- \neq f''_+$

معمولاً نقاط مرزی) و نقاطی که مشتق دوم برابر صفر

می‌شود را بدست می‌آوریم و در جدول تعیین

علامت قرار می‌دهیم و مشتق دوم تابع را تعیین

علامت می‌کنیم و نقاطی که جهت تقعر عوض می‌شود

را در دو شرط زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم :

۱) پیوستگی ۲) وجود خط مماس

(یا تابع در آن نقطه مشتق پذیر (مشتق چپ و راست برابر) و یا

با فرض پیوسته بودن که $f'_- = f'_+ = \pm\infty$ باشد)

و در صورتی که هر یک از دو شرط بالا برقرار نباشد آن

نقطه، نقطه‌ی عطف نمی‌باشد .

مثال : طول نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x}{1+|x|}$

را بدست آورید ؟

Raz

$x=0 \Rightarrow$

	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$		$+$
	①		②

۱) $x \leq 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1-x}$

۲) $x > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1+x}$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & , \boxed{x \leq 0} \\ \dfrac{x}{1+x} & , \boxed{x > 0} \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)^2} & , x > 0 \\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & , x < 0 \end{cases} \quad , \quad y'' = \begin{cases} \dfrac{-2}{(1+x)^3} & , x > 0 \\ \dfrac{2}{(1-x)^3} & , x < 0 \end{cases}$$

۱) $y''=0 \Rightarrow$ ریشه ندارد

۲) $y''=$ وجودنداشته باشد $\Rightarrow f''_-(0) \neq f''_+(0) \Rightarrow 0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$+$	‖	$-$
جهت تقعر	$\cup$	‖	$\cap$

توضیح = در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ ضابطه‌ی تابع با دامنه‌ی $x<0$ به ازای دامنه همواره مثبت می‌باشد و در بازه‌ی $(0, +\infty)$ ضابطه‌ی تابع با دامنه‌ی $x>0$ به ازای xهای دامنه همواره منفی می‌باشد

حال شروط را در $x=0$ بررسی می‌کنیم

۱) پیوستگی $= \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$

۲) وجودمماس $= f'_-(0) = f'_+(0) = 1$

پس $x=0$ طول نقطه‌ی عطف تابع می‌باشد.

مثال ٤: مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2, & x\geq -1 \\ -12-\frac{9}{x}, & x<-1 \end{cases}$$

را بدست آورید؟

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-6x, & x>1 \\ 9, & x=-1 \\ \frac{9}{x^2}, & x<-1 \end{cases} \quad , \quad f''(x)=\begin{cases} 6x-6, & x>-1 \\ -\frac{18}{x^3}, & x<-1 \end{cases}$$

1) $f''(x)=0 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=1$

2) $f''(x)=$ وجود نداشته باشد $\Rightarrow f''_-(-1) \neq f''_+(-1) \Rightarrow -1$

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
y''	+	‖	−	•	+
جهت تقعر	∪	‖	∩		∪

توضیح ⇐ در بازه‌ی $(-\infty,-1)$ با ضابطه‌ای که دامنه‌ی آن $x<-1$ است

می‌باشد همواره مثبت در بازه‌ی $-1<x<1$ از ضابطه‌ی $6x-6$

استفاده کردیم که در این بازه همواره منفی می‌باشد و در بازه‌ی

$x>1$ $(1,+\infty)$ از ضابطه‌ی $6x-6$ استفاده کردیم که همواره مثبت است

1) تابع در $x=-1$ و $x=1$ پیوسته می‌باشد ⇐ پیوستگی (1

2) وجود مماس $\Rightarrow$ 1) $f'_-(-1)=f'_+(-1)=9$

$3x^2-6x$ ضابطه‌ی $x\in$ ... $\in$ 2) $f'_-(1)=f'_+(1)=-3$

Date: Subject:

پس دو نقطه‌ی $\{1, -1\}$ طول نقاط عطف تابع می‌باشند

۳) توابع کسری و یا توابعی که مشتق دوم آنها کسری می‌شود

مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم و اگر

ریشه های ساده یا مکرر مرتبه فرد داشته

باشد نقطه‌ی عطف می‌باشد

مثال = طول نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$$ را بیابید؟

مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم،

ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد $\Leftarrow$ $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

پس $x = 0$ طول نقطه‌ی عطف می‌باشد

خاصیت نقطه‌ی عطف

۱) مشتق اول تابع را صفر می‌کند

۲) در مشتق دوم تابع صدق می‌کند.

رسم نمودار

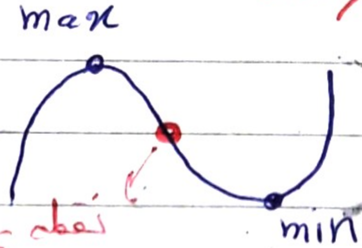
۱) تابع درجه‌ی سوم

الف) ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و سپس Δ مشتق تابع را بدست می‌آوریم

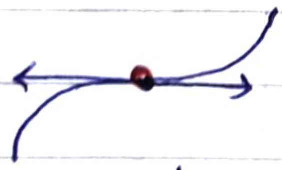
ب) سپس علامت a (ضریب x^3) را مشخص می‌کنیم.

① $a>0$

الف) $\Delta>0 \Rightarrow$



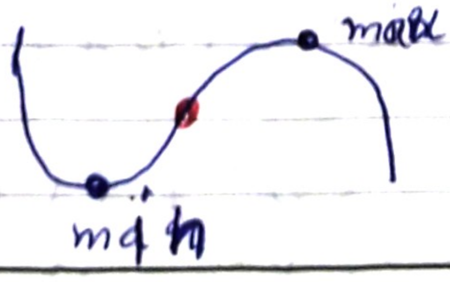
ب) $\Delta=0 \Rightarrow$

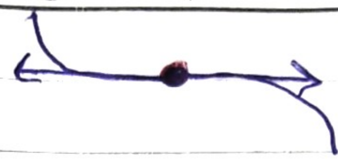


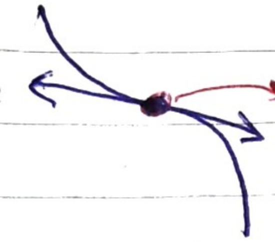
ج) $\Delta<0 \Rightarrow$

② $a<0$

الف) $\Delta>0 \Rightarrow$

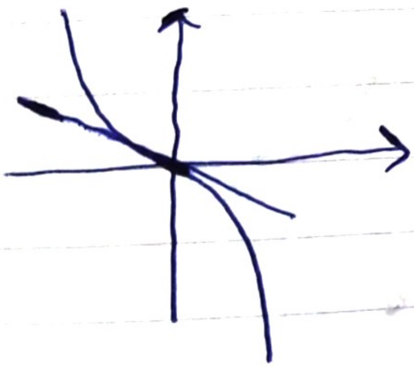


ب) $\Delta = 0 \Rightarrow$ 

پ) $\Delta < 0 \Rightarrow$ 

۳) طول نقطه‌ی عطف و مرکز تقارن برابر $x = -\frac{b}{3a}$ می‌باشد.

مثال: با توجه به شکل در معادله‌ی $y = -x^3 + ax^2 + bx$ مقدارهای a و b را بدست آورید.



۱) طول نقطه‌ی عطف $x = 0$ می‌باشد بنابراین:

$$x = -\frac{b}{3a} = +\frac{a}{3} = 0$$

$$\boxed{a = 0}$$

۲) از طرفی Δ منفی باشد.

مشتق $= -3x^2 + 2bx + b$

$$\Delta = 4b^2 + 4(3)(1) = 4b^2 + 12 < 0$$

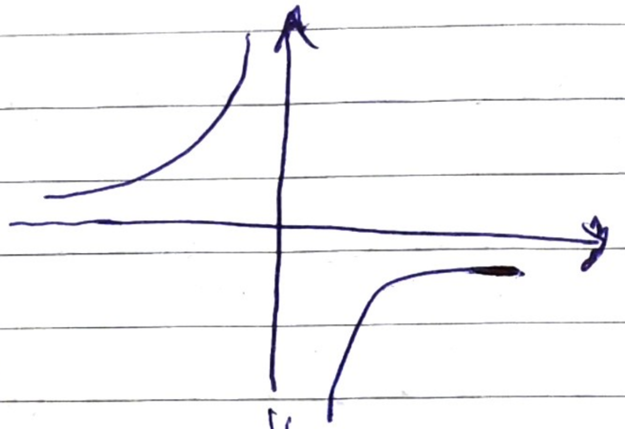
$$b^2 < -\frac{12}{4} \Rightarrow b^2 \cancel{<} \sqrt{3}$$

۱۵۱

Date: Subject:

۲) تابع هموگرافیک $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

الف) $ad-bc>0$

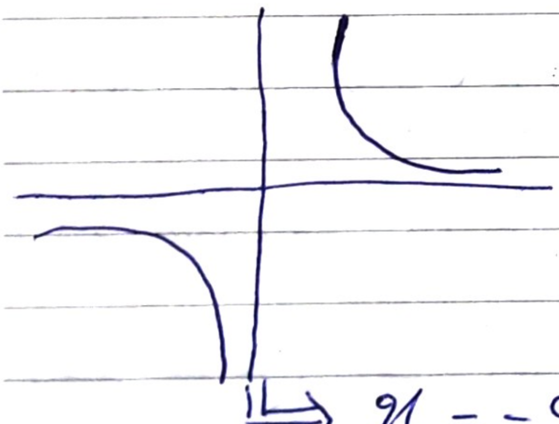


$\Rightarrow$ مجانب قائم $\Rightarrow y = \dfrac{a}{c}$

$\Downarrow$

مجانب افقی $= x = -\dfrac{d}{c}$

ب) $ad-bc<0$



$\Rightarrow y = \dfrac{a}{c} \Rightarrow$ مجانب قائم

$\Rightarrow x = -\dfrac{d}{c} \Rightarrow$ مجانب افقی

نکته: تابع هموگرافیک نقطه‌ی عطف و اکسترمم ندارد.

نکته: محل برخورد مجانب افقی و قائم مرکز تقارن

همانا شکل که برابر $\left(-\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{c}\right)$ می‌باشد

Raz

رسم نمودار تابع $y=f(x)$

۱) دامنه ی تابع را مشخص می کنیم

۲) مجانب های تابع را در صورت وجود مشخص می کنیم

۳) نقاط برخورد تابع با محور xها و yها را مشخص می کنیم

۴) مشتق اول تابع را حساب و صعودی یا نزولی بودن تابع را مشخص می کنیم

۵) مشتق دوم تابع را بدست می آوریم و نقاط عطف را در صورت وجود بدست می آوریم و جهت تقعر تابع را مشخص می کنیم ،

مثال : نمودار تابع $y=\frac{1}{1+x^2}$ را رسم کنید.

۱) دامنه ی تابع $\Leftarrow D = R - \{-1, +1\}$

۲) $x=+1$, $x=-1$ مجانب های قائم تابع می باشند

Date: Subject:

۳) $\boxed{\text{مجانب افقی } y=0}$ ⟸ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-1}=0$

۴) به ازای $x=0$ ⟸ $y=-1$ ⟸ پس تابع

محور yها را در نقطهٔ ۱- قطع می‌کند.