به نام خدا

www.Konkur.in

سایت کنکور

هر آنچه در دوران تحصیل به آن نیاز دارید

Forum.Konkur.in

پاسخ به همه سوالات شما در تمامی مقاطع تحصیلی، در انجمن کنکور

مدیریت سایت کنکور : آراز و فراز رهبر

سؤالات آزمون سراسری سال ۱۳۹۲

رشته‌ی علوم ریاضی و فیزیک

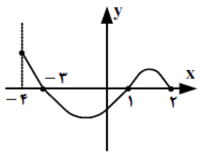
تهیه کننده: ناصر رضائی‌ایوب

ریاضیات پایه، حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱۰۱. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a-۳).x^{۲} + ax - ۱$، از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

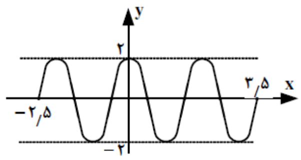
۱) $a \leq ۲$ ۲) $۰ < a \leq ۲$ ۳) $۲ < a < ۳$ ۴) $۰ < a < ۳$

۱۰۲. شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{x.f(x)}$، کدام است؟



۱) $[۰,۲]$ ۲) $[-۳,۲]$ ۳) $[-۴,-۳] \cup [۱,۲]$ ۴) $[-۳,۰] \cup [۱,۲]$

۱۰۳. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. $a.b$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۱۰۴. از هر یک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش آموز به‌یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به‌چند طریق می‌توان ۳ دانش آموز از بین آن‌ها که دوبه‌دو غیر هم‌منطقه‌ای هستند، انتخاب کرد؟

۱) ۵۷۶۰۰ ۲) ۶۷۵۰۰ ۳) ۷۵۶۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰

۱۰۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به‌صورت $\left\{\frac{۱}{\alpha} + ۱, \frac{۱}{\beta} + ۱\right\}$ است؟

۱) $۴x^{۲} - ۵x + ۱ = ۰$ ۲) $۴x^{۲} - ۳x + ۱ = ۰$ ۳) $۴x^{۲} - ۵x - ۱ = ۰$ ۴) $۴x^{۲} - ۳x - ۱ = ۰$

۱۰۶. مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x-۴).|x| < ۲x - ۵$، به‌کدام صورت است؟

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۱-\sqrt{۶}, ۱+\sqrt{۶})$ ۳) $(۱,۵) \cup (۱+\sqrt{۶}, +\infty)$ ۴) $(-\infty, ۱-\sqrt{۶}) \cup (۱,۵)$

۱۰۷. اگر $f(x) = ۲x + ۳$ و $g(f(x)) = ۸x^{۲} + ۲۲x + ۲۰$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog، کدام است؟

۱) $۲x^{۲} - ۷x + ۳$ ۲) $۲x^{۲} - ۳x + ۷$ ۳) $۴x^{۲} - ۲x + ۱۳$ ۴) $۴x^{۲} - ۴x + ۱۱$

۱۰۸. تابع $f(x) = x^{۲} + ۲x + ۱$ با دامنه‌ی $(-۱, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیر متقاطع

۱۰۹. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $۲\sqrt{۲}\sin x.\cos x = \sin x + \cos x$، کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۱۱۰. حاصل عبارت $\tan^{-۱}\sqrt{x^۲+x}+\sin^{-۱}(x^۲+x+۱)$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) π

۱۱۱. اگر $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}=۲^a$ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۱۲. اگر $f(x)=(x^۲-x-۲).\sqrt[۳]{x^۲-۷x}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$ کدام است؟

۱) -۶ ۲) -۳ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۱۱۳. اگر $f(x)=\max\{|۲x|,|x+۱|\}$، آن‌گاه می‌نیمم تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۲

۱۱۴. حاصل $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(۱+\cos x)}{۱-\cos ۲x}$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۵. اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=\begin{cases}f(x) & x\notin\mathbb{Z}\\ f(x)-۱ & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$، آن‌گاه تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع g روی بازه‌ی $[-۴,۴]$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۱۱۶. کم‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+\sqrt[۳]{x^۲-x^۳}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۹}$ ۲) $-\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۳}$ ۴) صفر

۱۱۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^۳+bx & x<۱\\ ۲\sqrt{۴x-۳} & x\geq ۱\end{cases}$، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۱۸. اگر $f(x)=\frac{x^۳-۲}{۱+x^۳}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$؛ حاصل $f'(g(x)).g'(x)$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{x}$ ۲) $\frac{۲}{x^۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳x}$ ۴) $\frac{x-۳}{x^۲}$

۱۱۹. اگر $x>۰\ ;\ f(x)=x.e^x$، آن‌گاه خط مماس بر نمودار تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ای به‌طول e واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{e}$

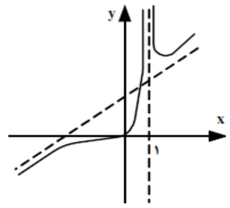
۱۲۰. به‌ازای کدا مجموعه مقادیر a، تقعر منحنی به‌معادله‌ی $y=x^۴+ax^۳+\frac{۳}{۲}x^۲$، همواره رو به بالا است؟

۱) $-۱<a<۱$ ۲) $-۱<a<۲$ ۳) $-۲<a<۱$ ۴) $-۲<a<۲$

۱۲۱. مجموعه‌ی طول نقاط عطف منحنی به‌معادله‌ی $y=x.|x^۲-۴x|$، کدام است؟

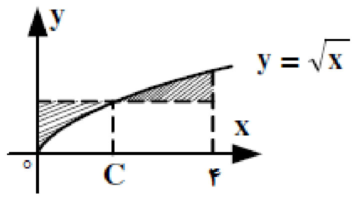
۱) $\{\frac{۴}{۳}\}$ ۲) $\{۰,\frac{۴}{۳},۴\}$ ۳) $\{\frac{۴}{۳},۴\}$ ۴) $\{۰,\frac{۴}{۳}\}$

۱۲۲. شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^۳+ax^۲}{x^۲+bx+c}$ است. عدد $(bc-a)$ کدام است؟



۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲۳. در شکل زیر، مساحت دو ناحیه زده برابرند، c کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۲۴. حاصل انتگرال $\int_{۱}^{۴} \sqrt{(\frac{۱}{۴}x^{۲} - \frac{۱}{x^{۲}})^{۲} + ۱}dx$ ، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

Email: rezaei2001@gmail.com Website: www.baharmath.blogfa.com Tell: 09186720485

پاسخ تشریحی سؤالات آزمون سراسری سال ۱۳۹۲ (رشته‌ی علوم ریاضی و فیزیک)

۱۰۱. گزینه‌ی (۱). اولاً شرط اساسی برای آن‌که نمودار تابع $f(x)=(a-۳).x^{۲}+ax-۱$ از ناحیه‌ی اول عبور نکند، آن است که ضریب $x^{۲}$ عددی منفی باشد، یعنی $a-۳<۰$ یا $a<۳$. ثانیاً اگر نمودار تابع از ناحیه‌ی اول عبور نکند، آن‌گاه حالت‌های زیر را خواهیم داشت.

حالت اول: نمودار تابع از دو ناحیه‌ی سوم و چهارم عبور کند؛ در این حالت باید داشته باشیم $\Delta\leq ۰$. در نتیجه،

$$\Delta\leq ۰\Rightarrow a^{۲}-۴\times(-۱)\times(a-۳)\leq ۰\Rightarrow a^{۲}+۴a-۱۲\leq ۰$$

$$a^{۲}+۴a-۱۲=۰\Rightarrow(a+۶).(a-۲)=۰\Rightarrow a=-۶,a=۲$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & & -۶ & & ۲ & & +\infty \\ \hline a^{۲}+۴a-۱۲ & & + & \vdots & - & \vdots & + & \end{array}\Rightarrow -۶\leq a\leq ۲ \qquad (۱)$$

حالت دوم: نمودار تابع از سه ناحیه‌ی دوم، سوم و چهارم عبور کند. که در این حالت باید داشته باشیم $\Delta>۰$، $a\times c>۰$ و $-a\times b<۰$. در نتیجه،

$$\Delta\leq ۰\Rightarrow a^{۲}-۴\times(-۱)\times(a-۳)\leq ۰\Rightarrow a^{۲}+۴a-۱۲\leq ۰$$

$$a^{۲}+۴a-۱۲=۰\Rightarrow(a+۶).(a-۲)=۰\Rightarrow a=-۶,a=۲$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & & -۶ & & ۲ & & +\infty \\ \hline a^{۲}+۴a-۱۲ & & + & \vdots & - & \vdots & + & \end{array}\Rightarrow a<-۶ \text{ یا } a>۲$$

$$a\times c>۰\Rightarrow(a-۳)\times(-۱)>۰\Rightarrow a<۳$$

$$-a\times b<۰\Rightarrow-(a-۳)\times a<۰\Rightarrow-a^{۲}+۳a<۰$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} a & -\infty & & ۰ & & ۳ & & +\infty \\ \hline -a^{۲}+۳a & & - & \vdots & + & \vdots & - & \end{array}\Rightarrow a<۰ \text{ یا } a>۳$$

که در آن با توجه به‌این‌که باید همواره $a<۳$ باشد، شرط $a>۳$ غیر قابل قبول است. در نتیجه، در این حالت داریم

$$a<-۶\quad;\quad a<۳\quad;\quad a<۰\Rightarrow a<-۶\qquad(۲)$$

$a>۲\quad;\quad a<۳\quad;\quad a<۰\Rightarrow$ این حالت هرگز اتفاق نمی‌افتد

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم

$$(۱),(۲)\Rightarrow a<-۶ \text{ یا } -۶\leq a\leq ۲\Rightarrow a\leq ۲$$

۱۰۲. گزینه‌ی (۴). با توجه به نمودار تابع f نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$\forall x\in[-۴,-۳]:f(x)\geq ۰\quad;\quad\forall x\in[-۳,۰]:f(x)\leq ۰$$
$$\forall x\in[۰,۱]:f(x)\leq ۰\quad;\quad\forall x\in[۱,۲]:f(x)\geq ۰$$

بنابراین، دامنه‌ی تعریف تابع $g(x)=\sqrt{x.f(x)}$ به‌صورت زیر است.

$$g(x)=\sqrt{x.f(x)}\Rightarrow x.f(x)\geq ۰\Rightarrow\begin{cases}x\geq ۰ & ; \quad f(x)\geq ۰\Rightarrow x\in[۱,۲]\\ x\leq ۰ & ; \quad f(x)\leq ۰\Rightarrow x\in[-۳,۰]\end{cases}\Rightarrow d_{g}=[-۳,۰]\cup[۱,۲]$$

۱۰۳. گزینه‌ی (۱). با توجه به نمودار تابع $y=a\sin\pi(\frac{۱}{۲}+bx)=a\cos b\pi x$ نتایج زیر را حاصل می شود.

$T=۲=$ دوره‌ی تناوب $\quad;\quad$ $a=۲\Leftarrow ۲=$ بزرگ‌ترین مقدار $\quad;\quad$ $-۲=$ کوچک‌ترین مقدار

از طرفی می‌دانیم که دوره‌ی تناوب تابع $y=a\cos b\pi x$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}$ است، پس باید داشته باشیم

$$T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}\quad;\quad T=۲\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b\pi|}=۲\Rightarrow\frac{۱}{|b|}=۱\Rightarrow|b|=۱\Rightarrow b=\pm ۱\Rightarrow a\times b=۲\times(\pm ۱)=\pm ۲$$

۱۰۴. گزینه‌ی (۲).

تعداد حالات انتخاب سه دانش آموز به‌طوری که دوبه‌دو غیر هم‌منطقه‌ای باشند $= \binom{۶}{۳}\times\binom{۱۵}{۱}\times\binom{۱۵}{۱}\times\binom{۱۵}{۱} = \binom{۶}{۳}\times ۱۵^{۳}$

$$= \frac{۶!}{۳!(۶-۳)!}\times ۱۵^{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!}\times ۱۵^{۳}$$
$$= \frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!۳!}\times ۱۵^{۳} = \frac{۶\times۵\times۴}{۳!}\times ۱۵^{۳} = ۶۷۵۰۰$$

۱۰۵. گزینه‌ی (۳). با فرض $\alpha' = \frac{۱}{\alpha}+۱$ و $\beta' = \frac{۱}{\beta}+۱$ داریم

$$۲x^{۲}-۳x-۴=۰ \Rightarrow \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-۳}{۲} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \quad ; \quad \alpha\times\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۴}{۲} = -۲$$

$$\alpha'+\beta' = \frac{۱}{\alpha}+۱+\frac{۱}{\beta}+۱ = \frac{\alpha+\beta+۲\alpha\times\beta}{\alpha\times\beta} = \frac{\frac{۳}{۲}+۲\times(-۲)}{-۲} = \frac{۳-۸}{-۴} = \frac{۵}{۴}$$

$$\alpha'\times\beta' = (\frac{۱}{\alpha}+۱)+(\frac{۱}{\beta}+۱) = \frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+۱ = \frac{۱+\alpha+\beta+\alpha\times\beta}{\alpha\times\beta} = \frac{۱+\frac{۳}{۲}-۲}{-۲} = \frac{۳-۲}{-۴} = -\frac{۱}{۴}$$

$$\alpha'+\beta' = -\frac{b'}{a'} \quad ; \quad \alpha'+\beta' = \frac{۵}{۴} \Rightarrow -\frac{b'}{a'} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow (a'=-۴ \;;\; b'=۵) \text{ یا } (a'=۴ \;;\; b'=-۵)$$

$$\alpha'\times\beta' = \frac{c'}{a'} \quad ; \quad \alpha'\times\beta' = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{c'}{a'} = -\frac{۱}{۴} \Rightarrow (a'=-۴ \;;\; c'=۱) \text{ یا } (a'=۴ \;;\; c'=-۱)$$

$$a'x^{۲}+b'x+c'=۰ \Rightarrow ۴x^{۲}-۵x-۱=۰ \text{ یا } -۴x^{۲}+۵x+۱=۰$$

۱۰۶. گزینه‌ی (۴).

$$(x-۴).|x| < ۲x-۵ \quad ; \quad x\geq ۰ \Rightarrow (x-۴).x < ۲x-۵ \Rightarrow x^{۲}-۴x < ۲x-۵ \Rightarrow x^{۲}-۶x+۵ < ۰$$

$$x^{۲}-۶x+۵=۰ \Rightarrow (x-۱).(x-۵)=۰ \Rightarrow x=۱,۵$$

x	$-\infty$		۱		۵		$+\infty$
$x^{۲}-۶x+۵$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow ۱<x<۵ \Rightarrow x\in(۱,۵)$

$$(x-۴).|x| < ۲x-۵ \quad ; \quad x< ۰ \Rightarrow (x-۴).(-x) < ۲x-۵ \Rightarrow -x^{۲}+۴x < ۲x-۵ \Rightarrow x^{۲}-۲x-۵ > ۰$$

$$x^{۲}-۲x-۵=۰ \Rightarrow x = \frac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a} = ۱\pm\sqrt{۶}$$

x	$-\infty$		$۱-\sqrt{۶}$		$۱+\sqrt{۶}$		$+\infty$
$x^{۲}-۲x-۵$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow x<۱-\sqrt{۶}$ یا $x>۱+\sqrt{۶}$

چون در این حالت باید $x<۰$ باشد، پس تنها جواب $x<۱-\sqrt{۶}$ قابل قبول است. بنابراین،

$$x\in(-\infty,۱-\sqrt{۶}) \text{ یا } x\in(۱,۵) \Rightarrow x\in(-\infty,۱-\sqrt{۶})\cup(۱,۵)$$

۱۰۷. گزینه‌ی (۳).

$$f(x)=۲x+۳ \Rightarrow u=۲x+۳ \Rightarrow x=\frac{u-۳}{۲}$$

$$g(f(x)) = ۸x^{۲}+۲۲x+۲۰ \Rightarrow g(u) = ۸\left(\frac{u-۳}{۲}\right)^{۲}+۲۲\left(\frac{u-۳}{۲}\right)+۲۰$$
$$= ۲(u^{۲}-۶u+۹)+۱۱(u-۳)+۲۰$$
$$= ۲u^{۲}-۱۲u+۱۸+۱۱u-۳۳+۲۰$$
$$= ۲u^{۲}-u+۵$$
$$\Rightarrow g(x) = ۲x^{۲}-x+۵$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(۲x^{۲}-x+۵) = ۲\times(۲x^{۲}-x+۵)+۳ = ۴x^{۲}-۲x+۱۳$$

۱۰۸. گزینه‌ی (۴). محل تلاقی نمودار تابع f با تابع $f^{-۱}$، همان محل تلاقی نمودار تابع f با خط $y=x$ است. بنابراین،

$$f(x)=x^{۲}+۲x+۱\ ;\ y=x\Rightarrow x^{۲}+۲x+۱=x\Rightarrow x^{۲}+x+۱=۰\Rightarrow \Delta=b^{۲}-۴ac=۱-۴=-۳<۰$$

چون $\Delta<۰$، پس نمودار تابع f با تابع $f^{-۱}$، هیچ برخوردی ندارد.

۱۰۹. گزینه‌ی (۳).

$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\tfrac{\pi}{۴})\quad ;\quad ۲\sqrt{۲}\sin x.\cos x=\sqrt{۲}\sin ۲x$$

$$۲\sqrt{۲}\sin x.\cos x=\sin x+\cos x\Rightarrow \sqrt{۲}\sin ۲x=\sqrt{۲}\sin(x+\tfrac{\pi}{۴})\Rightarrow \sin ۲x=\sin(x+\tfrac{\pi}{۴})$$

$$\sin ۲x=\sin(x+\tfrac{\pi}{۴})\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\ ۲x=۲k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۳x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

۱۱۰. گزینه‌ی (۲). چون هیچ قیدی در صورت سؤال مطرح نشده است، پس با جای‌گذاری یک مقدار به‌جای x، مثلاً مقدار صفر، بلافاصله، گزینه‌ی مورد نظر مشخص می‌گردد.

$$x=۰\Rightarrow y=\tan^{-۱}\sqrt{۰^{۲}+۰}+\sin^{-۱}(۰^{۲}+۰+۱)=\tan^{-۱}۰+\sin^{-۱}۱=۰+\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}$$

۱۱۱. گزینه‌ی (۲).

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{-\sin x}{۲\sqrt{\cos x}}-\frac{\cos x}{۲\sqrt{\sin x}}}{-\sin(x+\frac{\pi}{۴})}=\frac{\frac{-\sin\frac{\pi}{۴}}{۲\sqrt{\cos\frac{\pi}{۴}}}-\frac{\cos\frac{\pi}{۴}}{۲\sqrt{\sin\frac{\pi}{۴}}}}{-\sin(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴})}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{۲}}{۴}\times\sqrt[۴]{۲}-\frac{\sqrt{۲}}{۴}\times\sqrt[۴]{۲}}{-۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\sqrt[۴]{۲}=۲^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-۱}=۲^{-\frac{۱}{۴}}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۴}$$

۱۱۲. گزینه‌ی (۱). فرض کنید $f(x)=(x^{۲}-x-۲).\sqrt[۳]{x^{۲}-۷x}=g(x).h(x)$. دراین‌صورت چون

$$g(-۱)=۰\quad ;\quad h(-۱)=\sqrt[۳]{(-۱)^{۲}-۷\times(-۱)}=\sqrt[۳]{۸}=۲\neq ۰$$

لذا

$$g'(x)=۲x-۱\Rightarrow g'(-۱)=۲\times(-۱)-۱=-۳$$

$$f'(-۱)=g'(-۱)\times h(-۱)=-۳\times ۲=-۶$$

۱۱۳. گزینه‌ی (۲). با تعیین علامت عبارت $|۲x|-|x+۱|$ داریم

$$|۲x|=|x+۱|\Rightarrow ۴x^{۲}=x^{۲}+۲x+۱\Rightarrow ۳x^{۲}-۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^{۲}-ac}}{a}=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۳}}{۳}=\frac{۱\pm ۲}{۳}=-\frac{۱}{۳},۱$$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
$۳x^{۲}-۲x-۱$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

در نتیجه، تابع f را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$f(x)=\max\{|۲x|,|x+۱|\}=\begin{cases}|۲x| & |۲x|\geq|x+۱|\\ |x+۱| & |۲x|<|x+۱|\end{cases}=\begin{cases}|۲x| & x\leq-\frac{۱}{۳}\ \ or\ \ x\geq ۱\\ |x+۱| & -\frac{۱}{۳}<x<۱\end{cases}$$

چون مشتق تابع f در نقاط مرزی؛ یعنی، $x=-\frac{۱}{۳}$ و $x=۱$ وجود ندارد، لذا این نقاط، نقاط بحرانی تابع می‌باشند و تابع هیچ نقطه‌ی بحرانی دیگری ندارد.

$$x=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow f(-\tfrac{۱}{۳})=|۲\times(-\tfrac{۱}{۳})|=\frac{۲}{۳}\quad ;\quad x=-۱\Rightarrow f(۱)=|۱+۱|=۲\Rightarrow \min f=\frac{۲}{۳}$$

۱۱۴. گزینه‌ی (۱).

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(۱+\cos x)}{۱-\cos ۲x}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x\times\cos(۱+\cos x)}{۲\sin ۲x}=\frac{۰}{۰}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{-\cos x\times\cos(۱+\cos x)-(-\sin x)\times(-\sin x)\times\sin(۱+\cos x)}{۴\cos ۲x}$$

$$=\frac{-\cos\pi\times\cos(۱+\cos\pi)-(-\sin\pi)\times(-\sin\pi)\times\sin(۱+\cos\pi)}{۴\cos ۲\pi}=\frac{-(-۱)\times\cos ۰-۰}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

۱۱۵. گزینه‌ی (۴).

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\notin\mathbb{Z}\\ f(x)-1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}[x]+[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ [x]+[-x]-1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ 0-1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}=-1$$

در نتیجه، تابع g، یک تابع ثابت بوده؛ و لذا هیچ نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد.

۱۱۶. گزینه‌ی (۴). دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$ برابر $\mathbb{R}$ بوده؛ و این تابع بر $\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشد.

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{2x-3x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}}=\frac{3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}+2x-3x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}}$$

$$f'(x)\overset{set}{=}0\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}+2x-3x^2=0\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}=3x^2-2x$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}=3x^2-2x\Rightarrow 27(x^2-x^3)^2=(3x^2-2x)^3$$

$$\Rightarrow 27x^4-54x^5+x^6=27x^6-54x^5+36x^4-8x^3$$

$$\Rightarrow 26x^6+9x^4-8x^3=0\Rightarrow x^3.(26x^3+9x-8)=0$$

اگر قرار دهید $g(x)=26x^3+9x-8$، آن‌گاه

$$\left.\begin{aligned}g(0)&=26\times 0^3+9\times 0-8=-8\\ g(1)&=26\times 1^3+9\times 1-8=27\end{aligned}\right\}\Rightarrow g(0)\times g(1)<0$$

و در نتیجه، بنابر قضیه‌ی بولتزانو معادله‌ی $26x^3+9x-8=0$ در بازه‌ی $(0,1)$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد. از طرفی چون

$$g'(x)=78x^2+9$$

و به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}$، $g'(x)>0$؛ لذا معادله‌ی $26x^3+9x-8=0$ دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی در بازه‌ی $(0,1)$ دارد. فرض کنید این ریشه‌ی حقیقی برابر α باشد. دراین‌صورت نقاط $x=0$ و $x=\alpha$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. با تعیین علامت تابع f' داریم

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	∞	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$ نزولی	min	$\nearrow$ صعودی	max	$\searrow$ نزولی	

با توجه به جدول تغییرات تابع f نتیجه می‌شود که این تابع در نقطه‌ای به‌طول $x=0$ می‌نیمم نسبی دارد که مقدار تابع در این نقطه برابر صفر است. از طرفی چون به‌ازای هر $x\in\mathbb{R}-\{0\}$، $f(x)>0$؛ پس نقطه‌ای به‌طول $x=0$ می‌نیمم مطلق تابع f نیز می‌باشد. بنابراین، کم‌ترین مقدار تابع برابر در نقطه‌ای به‌طول $x=0$ حاصل می‌شود که مقدار تابع در این نقطه برابر صفر است.

۱۱۷. گزینه‌ی (۲). اولاً شرط آن‌که تابع $f(x)=\begin{cases}ax^3+bx & x<1\\ 2\sqrt{4x-3} & x\geq 1\end{cases}$ f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد آن است که بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. در نتیجه، تابع f باید در نقاط مرزی نیز پیوسته باشد. داریم

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax^3+bx)=a+b\quad;\quad f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}2\sqrt{4x-3}=2$$

شرط پیوستگی: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\Rightarrow a+b=2$ (۱)

ثانیاً باید مشتق چپ و راست تابع در نقطه‌ی مرزی وجود داشته و با هم برابر باشد. پس

$$f'(x)=3ax^2+b\quad,\quad x<1\qquad;\qquad f'(x)=\frac{4}{\sqrt{4x-3}}\quad,\quad x>1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(3ax^2+b)=3a+b\quad;\quad f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{4}{\sqrt{4x-3}}=4$$

شرط مشتق‌پذیری: $f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow 3a+b=4$ (۲)

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\ 3a+b=4\end{cases}\overset{\times(-1)}{\Rightarrow}\begin{cases}-a-b=-2\\ 3a+b=4\end{cases}$$

$$2a=2\Rightarrow a=1\quad;\quad 1+b=2\Rightarrow b=1$$

Email: rezaei2001@gmail.com Website: www.baharmath.blogfa.com Tell: 09186720485

۱۱۸. گزینه‌ی (۲).

$$f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}=\frac{x^3-2}{x^3+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1-(-2)}{(1+x^3)^2}\times 3x^2=\frac{9x^2}{(1+x^3)^2}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$f'(g(x)).g'(x)=f'(\sqrt[3]{x-1}).g'(x)=\frac{9\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(1+(\sqrt[3]{x-1})^3)^2}\times\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{3}{(1+x-1)^2}=\frac{3}{x^2}$$

راه‌حل دوم: اگر قرار دهید $h(x)=f(g(x))$، آن‌گاه

$$h(x)=f(g(x))=f(\sqrt[3]{x-1})=\frac{(\sqrt[3]{x-1})^3-2}{1+(\sqrt[3]{x-1})^3}=\frac{x-1-2}{1+x-1}=\frac{x-3}{x}\Rightarrow h'(x)=\frac{0-(-3)}{x^2}=\frac{3}{x^2}$$

$$f'(g(x)).g'(x)=h'(x)=\frac{3}{x^2}$$

۱۱۹. گزینه‌ی (۳).

نقطه‌ی تماس با منحنی f^{-1}: $(e,x)\in f^{-1}\Rightarrow (x,e)\in f\Rightarrow x.e^x=e\Rightarrow x=1\Rightarrow A(e,1)$

$$f(x)=x.e^x\Rightarrow f'(x)=(x+1).e^x\Rightarrow f'(1)=(1+1).e^1=2e\Rightarrow m=(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2e}$$

معادله‌ی خط مماس: $y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-1=\frac{1}{2e}(x-e)\Rightarrow y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$

محل تلاقی با محور y ها $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=\frac{1}{2e}\times 0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

۱۲۰. گزینه‌ی (۴).

$$y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2\Rightarrow y'=4x^3+3ax^2+3x\quad ;\quad y''=12x^2+6ax+3$$

شرط آن‌که تقعر منحنی همواره رو به بالا باشد، آن است که $\Delta_{(y'')}<0$، پس

$$\Delta_{(y'')}<0\Rightarrow 36a^2-144<0\Rightarrow 36a^2<144\Rightarrow a^2<4\Rightarrow |a|<2\Rightarrow -2<a<2$$

۱۲۱. گزینه‌ی (۴).

$$y=x.|x^2-4x|=\begin{cases}x^3-4x^2 & x<0\ \ or\ \ x>4\\ 4x^2-x^3 & 0\le x\le 4\end{cases}$$

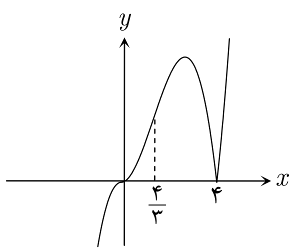
$$y'=\begin{cases}3x^2-8x & x<0\ \ or\ \ x>4\\ 8x-3x^2 & 0\le x\le 4\end{cases}\quad ;\quad y''=\begin{cases}6x-8 & x<0\ \ or\ \ x>4\\ 8-6x & 0<x<4\end{cases}$$

$y''=0\Rightarrow 6x=8\Rightarrow x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$: نقطه‌ی بحرانی تابع y'

هم‌چنین، چون مشتق دوم تابع در نقاط $x=0$ و $x=4$ وجود ندارد، لذا این نقاط نیز نقاط بحرانی تابع y' می‌باشند. با تعیین علامت تابع y'' داریم

x	$-\infty$	0		$\frac{4}{3}$		4	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\cap$ محدب	عطف	$\cup$ مقعر	عطف	$\cap$ محدب		$\cap$ محدب

در نتیجه، نقاطی به‌طول $x=0$ و $x=\frac{4}{3}$، نقاط عطف منحنی نمایش تابع هستند. نمودار تابع $y=x.|x^2-4x|$ در شکل زیر رسم شده است.



۱۲۲. گزینه‌ی (۱). چون خط $x=1$ مجانب قائم منحنی تابع است، پس مخرج کسر به‌ازای $x=1$ باید برابر صفر شود. در نتیجه،

$$x=1 \quad ; \quad x^2+bx+c=0 \Rightarrow 1+b+c=0 \Rightarrow b=-1-c \qquad (1)$$

از طرفی خط $x=1$ مجانب قائم منحنی تابع با انفصال مضاعف می‌باشد، پس $x=1$ باید ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2+bx+c=0$ باشد. لذا

$$\Delta=0 \Rightarrow b^2-4c=0 \Rightarrow c^2+2c+1-4c=0 \Rightarrow c^2-2c+1=0 \Rightarrow (c-1)^2=0 \Rightarrow c=1 \ ; \ b=-1-1=-2$$

بنابراین، ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر در می‌آید.

$$f(x)=\frac{x^3+ax^2}{x^2+bx+c}=\frac{x^3+ax^2}{x^2-2x+1}$$

در نتیجه،

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2ax).(x^2-2x+1)-(2x-2).(x^3+ax^2)}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2+2ax^3-4ax^2+2ax+2x^3+2ax^2-2x^4-2ax^3}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{x^4-4x^3+3x^2-2ax^2+2ax}{(x-1)^4}=\frac{x.(x^2-3x-2a)}{(x-1)^3}$$

چون تابع f در نقطه‌ی $x=0$ اکسترمم نسبی ندارد، لذا $x=0$ باید ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $f'(x)=0$ باشد. بنابراین، $-2a=0$ یا $a=0$. در نتیجه،

$$bc-a=(-2)\times 1-0=-2$$

۱۲۳. گزینه‌ی (۲).

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}dx=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$f(x)=\sqrt{x} \quad ; \quad f(c)=\frac{4}{3}\Rightarrow \sqrt{c}=\frac{4}{3}\Rightarrow c=\frac{16}{9}$$

۱۲۴. گزینه‌ی (۳).

$$\int_1^4 \sqrt{(\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{x^2})^2+1}\,dx=\int_1^4 \sqrt{(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{x^2})^2}\,dx=\int_1^4 (\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{x^2})dx=(\tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{x})\Big|_1^4$$

$$=(\tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{1}{x})\Big|_1^4=(\tfrac{1}{12}\times 4^3-\tfrac{1}{4})-(\tfrac{1}{12}-1)=\tfrac{72}{12}=6$$

Email: rezaei2001@gmail.com Website: www.baharmath.blogfa.com Tell: 09186720485