

۱۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 + 2\cos 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2(\cos 6\theta + \cos 2\theta)}{\cos 2\theta} = \frac{4\cos 4\theta \cos 2\theta}{\cos 2\theta} = 4\cos 4\theta$$

۱۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = 2(x + 2a)(x - 2)(x + 2) \Rightarrow 2a = 2, -2 \Rightarrow a = -1, 1$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)}{\cos a \cos b} = \frac{1}{\cos b}$$

۱۲- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

۱۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos(2x + x) = -1 \Rightarrow \cos 3x = -1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{3}$$

۱۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{HOP: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + 2\sin 2x}{x + \sqrt{4-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x\sqrt{4-x^2}}{x + \sqrt{4-x^2}} = 16$$

$$f'(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{۱۵- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.}$$

$$(f(\operatorname{tg} x))' = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot f(\operatorname{tg} x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)^{-\frac{1}{2}} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{2}} = \left| \frac{1}{\cos x} \right|$$

$$a = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 = 0 + b + 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{۱۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.}$$

۱۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 2x - \cos^2 2x}{\sin 2x \cos 2x} = -\frac{\cos 4x}{\sin 4x} = -\operatorname{Cotg} 4x \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

$$x + \sqrt{-2x} = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f^{-1}(0) = -2 \quad \text{۱۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.}$$

$$f'(x) = 1 \times \frac{\sqrt{3x-2}}{(5x-3)^4} + (x-1)(\dots) \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{16} \quad \text{۱۹- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.}$$

## پاسخ آزمونهای جامع ریاضیات سنجش

۱- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(x, y) \Leftrightarrow (-x, -y) \Rightarrow y = x|x|$$

۲- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x + y = a \Rightarrow y = a - x$$

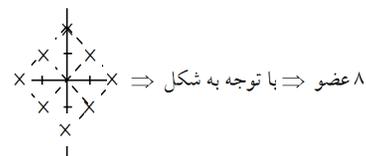
$$f(f(x)) = f(a - x) = a - (a - x) = x$$

$$\frac{a(q^4 - 1)}{q - 1} = 1, \frac{a(q^4 - 1)}{q - 1} \Rightarrow q^4 + 1 = 10 \Rightarrow q^4 = 9$$

$$aq^4 = 9a \Rightarrow 9a$$

۴- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{Log} \frac{625}{1000} = \operatorname{Log} \frac{25}{40} = \operatorname{Log} \frac{5}{8} = \operatorname{Log} \frac{1}{16} = \operatorname{Log} 10 - 4 \operatorname{Log} 2 = 1 - 4a$$



۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$2x^2 + 17x + 8 = mx \Rightarrow 2x^2 + (17 - m)x + 8 = 0 \quad \text{۶- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.}$$

$$(17 - m)^2 - 64 < 0 \Rightarrow (m - 17 - 8)(m - 17 + 8) < 0 \Rightarrow 9 < m < 25$$

۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(-x) = f(x)$$

$$|-x + 2| + a|-x - 2| = |x + 2| + a|x - 2|$$

$$|x - 2| + a|x + 2| = |x + 2| + a|x - 2| \Rightarrow a = 1$$

۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x, y \Rightarrow 2x = y + 6 \Rightarrow y = 2x - 6 \Rightarrow x, 2x - 6$$

$$x(2x - 6) = 2(x^2 - 3) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = -3 \Rightarrow x + y = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \\ x_2 = 3x_1 + 3 \end{cases} \Rightarrow 4x_1 + 3 = \frac{17}{3}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 5 \Rightarrow \frac{m}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow m = 10$$

۲۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.  $\Rightarrow$  تعداد زیر مجموعه‌های مجموعه  $\{b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$   $2^4 = 16$  است.  
توجه: یک مجموعه‌ی  $n$  عضوی  $2^n$  زیر مجموعه دارد.

۳۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.  
 $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x & x \in Q \\ 1 & x \notin Q \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \Rightarrow \begin{matrix} x \in Q \Rightarrow x + 2 \in Q \\ x \notin Q \Rightarrow x + 2 \notin Q \end{matrix}$

۳۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۳۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.  
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|yx|}{x(1+x)} = \frac{-yx}{x(1+x)} = -2$

۳۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.  
 $f(x) = \begin{cases} 2(2x+1) & x \rightarrow 2^+ \\ 1(2x+1) & x \rightarrow 2^- \end{cases} \Rightarrow f'_+(2) - f'_-(2) = 4 - 2 = 2$

۳۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.  
 $(2, a) \in f^{-1} \Rightarrow (a, 2) \in f$

$$x^2 + x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$$

$$f'(1) = 4 \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow 4y - 4 = x - 2 \Rightarrow 4y - x = 2$$

۳۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.  
 $x^3 \geq x^2 - 2x \Rightarrow x \geq \sqrt{x^3 - 2x} \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$  می‌نیم  $= 0$

۳۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \sqrt[5]{x}, x = 32, \Delta x = 1/5$$

$$dy = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} dx = \frac{1}{5} = \frac{1/5}{16} = 0.01175 = 2/170$$

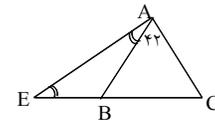
۳۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.  
 $y = 1 + \frac{x}{x^2 - 1} \Rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} = -1 \Rightarrow$  معادلات مجانب‌ها  $y = x + 1$

۲۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.  
توجه: اگر شاخص‌های پراکنندگی صفر باشد، داده‌ها با هم برابرند.

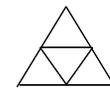
$$\delta^2 = 0 \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 0 \Rightarrow x_i = \bar{x} = 20$$

۲۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

۲۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

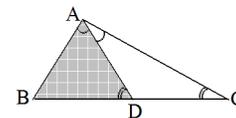


$$\hat{B} = \frac{180 - 42}{2} = \frac{138}{2} = 69 \Rightarrow E = 34/5$$



۲ برابر  $\Rightarrow$  محیط نصف می‌شود  $\Rightarrow$  هر ضلع نصف شده

$$\begin{cases} 6x + x + 7 > 2x - 4 \\ x + 7 + 2x - 4 > 6x \\ 6x + 2x - 4 > x + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 11 > 0 \\ x < 3 \\ 4x > 11 \end{cases} \Rightarrow \frac{11}{4} < x < 3$$

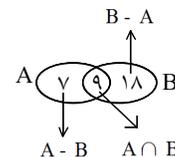


۲۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.  
 $AD^2 = AB \cdot AC$  نمی‌تواند درست باشد، پس فرض غلط است  $\Rightarrow BD \cdot DC$   
رابطه همیشه درست  $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$

۲۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. دوران  $\Rightarrow$  شیب خط حفظ نمی‌شود

۲۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.  
مثال نقض  $(2)^2 = 4, (2)^3 = 8$

۲۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



$$n(A \Delta B) = 7 + 18 = 25$$

$$n(A \Delta B) = n(A - B) + n(B - A)$$



۵۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$36a \equiv 192 \quad 84 \text{ پیمانه } \Rightarrow 34 \equiv 16 \text{ (پیمانه ۷)}$$

$$3a \equiv 2 \quad 7 \text{ پیمانه } , 3a \equiv 9 \text{ (پیمانه ۷)} \Rightarrow a = 3$$

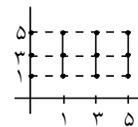
در نتیجه  $a \equiv 4$  مورد قبول نیست  $\Rightarrow 2a \equiv -1$

$$a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

توجه:

$$1, 3, 5 \Rightarrow P = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad : n(s) = 3^2 = 9$$

۵۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.



$$P = \frac{8}{9} \text{ یا با توجه به نمودار مقابل}$$

۵۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)}{(x^2 \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

۵۶- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \Rightarrow 1 - 2 \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

راه اول:

$$\tan^2 x + 1 = 4 \tan x \Rightarrow \frac{2(2 \tan x)}{1 + \tan^2 x} = 1 \Rightarrow 2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

راه دوم:

۵۷- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a - 2b = 5 \\ b - 2a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 4b = -10 \\ -2b + 4a = -6 \end{cases} \Rightarrow \text{تکراری } -a - b = 8 \Rightarrow a + b = -8$$

۵۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ [x] < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 2$$

$$|x + 1| + |x - 3| = x + 1 - x + 3 = 4$$

$$a + (n - 1)d = 2n - 3 \Rightarrow d = 2, a = -1$$

۵۹- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$S = \frac{15}{2} [-2 + 28] = 15 \times 13 = 195$$

$$x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 3 \quad \frac{K}{3} + \frac{10}{3} = 3 \Rightarrow K = -1$$

۶۰- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$S(1, 5) \in f \Rightarrow (-2, 5) \in f_1$$

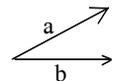
۶۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

۶۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| \Rightarrow \tan 45^\circ = \left| \frac{m - \frac{m-1}{m+1}}{1 + \frac{m(m-1)}{m+1}} \right| \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow \text{همواره برقرار است.}$$

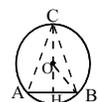
$$|\vec{a}| = |a| |\vec{U}|, |\vec{a}| \vec{b} = |a| \cdot |b| \vec{V}$$

۶۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.



$$|\vec{a}| + |\vec{b}| = |a| \cdot |b| (|\vec{U} + \vec{V}|) \text{ دو برابر موازی و هم جهت}$$

۶۴- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} OB = 5 \\ BH = 4 \end{cases} \Rightarrow OH = \sqrt{25 - 16} = 3 \quad CH = 8 \Rightarrow S = \frac{8 \times 8}{2} = 32$$

$$\frac{360}{n} = 15 \Rightarrow n = 24$$

۶۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

۷۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x[x^2 + x^2 - 1 - mx + m] = 0 \quad x_1 = 0, \quad 2x^2 - mx + m - 1 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \Rightarrow 0 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4$$

$$\frac{m^2}{4} - m + 1 = 4 \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0$$

فقط  $m = -2$  قابل قبول است.  $\Rightarrow m = -2, m = 6 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow f(x) < 0 \quad \text{گزینه ۴ پاسخ صحیح است.}$$

$$y^2 + x^2 - 2xy = x^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}, \quad x < 0$$

$$K^2 + 9 = 25 \Rightarrow K = \pm 4 \quad \text{گزینه ۲ پاسخ صحیح است.}$$

۷۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(2) = 1 + 2a + 2b + 6 = 0 \\ f(-1) = -1 + a - b + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -7 & a = -4 \\ a - b = -5 & b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -3$$

۷۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos^2 x - \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1, \frac{-1}{2} \Rightarrow \text{جواب ۴}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2) \left[ \frac{x}{x-2} \right] = 4 = f(2) \quad \text{گزینه ۱ پاسخ صحیح است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) \left[ \frac{x}{x-2} \right] = 0 \quad \text{از راست پیوسته}$$

۸۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع  $x^2 - [x^2]$  در نقطه  $x = 2$  ناپیوسته است، پس مشتق ندارد.

$$y' = \left( \frac{2}{x} \right) \sqrt{x} + \frac{x-2}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{گزینه ۲ پاسخ صحیح است.}$$

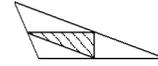
$$y + 1 = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \Rightarrow x = 0, y = -\frac{5}{3}$$

$$A = \frac{3 \times 180}{5} = 108$$

۶۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{BAC} = 108 + 18 + 18 = 144 \Rightarrow \frac{144}{18} = 8$$

۶۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۴ برابر  $\Rightarrow$  هر چهار مثلث معادل هم‌اند.

$$\begin{cases} \frac{AO}{AO'} = \frac{y}{3} \\ AO + AO' = 15 \end{cases} \Rightarrow \frac{OA}{AO'} = \frac{10/5}{4/5} \Rightarrow AB = 10/5 - 4/5 = 3/5$$

۶۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

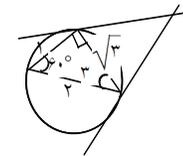
$$(2, 3), (\alpha, \beta) \quad \frac{\beta - 3}{\alpha - 2} = 1 \quad \begin{cases} \beta - \alpha = 1 \\ \beta + \alpha = 9 \end{cases} \Rightarrow (4, 5)$$

۶۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(a+2) + (b+3) + 14 = 0$$

مختصات وسط نقطه و تصویرش در خط صاف می‌کند.

$$2^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 \quad \text{قائم الزاویه است.}$$



۷۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\alpha = \frac{(180^\circ + 60^\circ) - 120^\circ}{2} = 60^\circ$$

۷۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(-4, 2) \in B, (-4, 2) \in A \Rightarrow A \cap B = A - B' = B - A' \Rightarrow \text{نا برابر } A' - B$$

۷۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (6, 6)$$

$$P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

۷۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه: اگر در  $n$  بار انجام عملی بخواهیم  $k$  بار موفق شویم، احتمال موفقیت برابر است

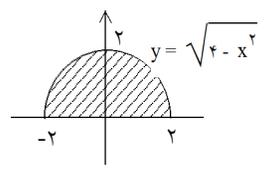
$$\binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

با:

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{2} \times \left( \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{2}{9}$$

91- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.  $xx' + yy' = 0 \Rightarrow 3(0/0.2) - 4y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{0/0.3}{2} = 0/0.15$

92- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.  $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2}(\pi \times 4) = 2\pi$



نیم دایره به مرکز (۰، ۰) و شعاع ۲

93- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \int_1^{x^2} \frac{t+2}{t^3} dt \Rightarrow f'(x) = 2x \left( \frac{x^2+2}{x^6} \right) = \frac{2x^3+4}{x^5}$$

$$f'(x) = 2x \left( \frac{x^2+2}{x^6} \right) = \frac{2x^3+4}{x^5}$$

94- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.  $c^2 = \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx \Rightarrow c^2 = \frac{1}{9} (x^3|_1^2) = 7 \Rightarrow C = \sqrt{7}$

95- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.  $a(3, -2, 1) \rightarrow a(3, -2, 1)$  بردار عمود بر صفحه  $3(x-2) - 2(y-5) + 1(z+1) = 0$   
 $\Rightarrow 3x - 2y + z = -5 \Rightarrow (1, 4, 0)$

96- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. برای دو بردار غیرصفر باشند  $a \cdot b = b \cdot a$

97- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.  $(\alpha, \beta, \gamma) (2, 4, 1) \frac{\alpha-2}{1} = \frac{\beta-4}{-1} = \frac{\gamma-1}{1}$

$$\alpha + 2 - (\beta + 4) + (\gamma + 1) = 0 \Rightarrow \alpha - \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \beta = -\alpha + 6$$

$$\lambda = \alpha - 1 \Rightarrow \left( \frac{\lambda}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

98- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.  $x^2 + y^2 + a(x+y) = 0 \Rightarrow 16 + 16 + 18a = 0 \Rightarrow a = -4$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8 \Rightarrow R = 2\sqrt{2}$$

82- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.  $y = \frac{\sin x}{\sin x - 2} \quad x \in [0, 2\pi]$

$$y' = \frac{-2 \cos x}{(\sin x - 2)^2} = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 = \min \\ x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = +\frac{1}{3} = \max \end{cases} \Rightarrow \max - \min = \frac{4}{3}$$

83- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.  $\int_{-1}^1 (1-y) \sin \pi x dx + \int_{-1}^1 (1+y) \sin \pi x dx = -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{\pi}$

84- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.  $\frac{1}{n + \sqrt{n}} < \frac{5}{100} \Rightarrow n + \sqrt{n} > 20$

$$(\sqrt{n+5})(\sqrt{n-4}) > 0 \Rightarrow n > 16 \Rightarrow n_1 = 17$$

85- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots = \frac{1}{1}$

86- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = f(1^-) = 0 \\ f(1^+) = 2 \end{cases} \\ x=-1 \Rightarrow f(-1) = f(-1^+) = f(-1^-) = 0 \end{cases}$$

پس f در x=1 ناپیوسته است.

87- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. تعریف حد  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

88- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

۳ خط مجانب  $\Rightarrow$  مجانب قائم  $x = \frac{1}{2}$ , مجانب های افقی  $y = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$

89- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.  $y' \left( 2y \cos \pi x - \frac{2}{y} \right) + (-\pi y^2 \sin \pi x + 18x) = 0$

$$\Rightarrow y' \left( 2 - \frac{2}{y} \right) = 2\pi \sqrt{3} - 6 \Rightarrow y' = 2\pi \sqrt{3} - 12$$

90- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.  $y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \quad y'' = -\frac{2}{9} x^{-\frac{4}{3}} < 0 \quad x \in (-\infty, +\infty)$

۱۰۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$11x + 6y = 512 \xrightarrow[\text{می رویم}]{\text{به پیمانه ۶}}$$

$$\cancel{11}x + \cancel{6}y \equiv \cancel{512} : -x \equiv +2 \Rightarrow x \equiv -2 \Rightarrow x = 6k - 2 \xrightarrow{\text{جاگذاری}}$$

$$y = -11k + 89 \quad \begin{cases} x > 0 : k > \frac{1}{3} \\ y > 0 : k < \frac{89}{11} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 8 \end{matrix}$$

$$x + y = -5k + 87 \xrightarrow{\text{پیش ترین}} x + y = 82 \Rightarrow k = 1$$

۱۰۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

۱۰۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.  $X_i$  تعداد هر نوع گل:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 5 \xrightarrow{\text{حسابی}} \binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5} = 252$$

۹۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$3(x-1)^2 - 4(y-1)^2 + 12 = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2y - x\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$3x^2 - 6x + 3 - 4y^2 + 8y - 4 + 12 = 0$$

$$2(y-2)^2 = -3x - 3 \Rightarrow (y-2)^2 = -\frac{3}{2}(x+1)$$

$$F\left(-1 - \frac{3}{2}, 2\right) \Rightarrow F\left(-\frac{11}{2}, 2\right)$$

۱۰۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

۱۰۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{l} \text{برابر ستون دوم را} \\ \text{به ستون سوم اضافه می کنیم} \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 1 & \text{Log } a & \text{Log } abc \\ 1 & \text{Log } b & \text{Log } abc \\ 1 & \text{Log } c & \text{Log } abc \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{ستون سوم } k \text{ برابر ستون اول} \\ \cdot \end{array}$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$A_{12}^* = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2(15) - 5(-6) = 60$$

$$a_{ij}^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{ji}^* \Rightarrow a_{21}^{-1} = \frac{1}{60} \times 6 = 0.1$$

$$\frac{P(p-1)}{2} = 72 \Rightarrow P(p-1) = 144 \text{ نشدنی}$$

۱۰۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(A|B) = 0 \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.4 + 0.25 = 0.65$$

۱۰۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

۱۰۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

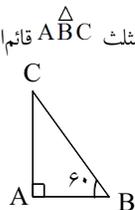
$$\text{می دانیم} \begin{cases} a \equiv m \\ n \\ a \equiv b \end{cases} \Rightarrow a \equiv [m, n] b \quad \begin{matrix} 4 & 4 \\ a \equiv 1 \equiv 13 \\ 5 & 5 \\ 4 \equiv 8 \equiv 13 \end{matrix} \Rightarrow a \equiv [4, 5] 13 : a \equiv 20$$

۱۱۶- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} 1 + 2 + 3 &= 6 \\ 180 \div 6 &= 30 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \times 30 = 90 \\ B = 2 \times 30 = 60 \\ C = 1 \times 30 = 30 \end{cases}$$

بنابراین مثلث قائم الزاویه است. بنابراین BC ضلع بزرگتر و AC ضلع متوسط است.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{BC}} = \frac{1}{\sin 60} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



۱۱۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. باید هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر باشد.

$$\begin{cases} 4x - 4 < 6x + x + 7 \\ 6x < 4x - 4 + x + 7 \\ x + 7 < 6x + 4x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11 < 3x \Rightarrow -\frac{11}{3} < x \\ x < 3 \\ 11 < 9x \Rightarrow \frac{11}{9} < x \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{11}{9} < x < 3$$

$$A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به}} A \begin{vmatrix} -y \\ -x \end{vmatrix} : M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۱۸- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

۱۱۹- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

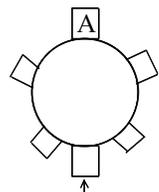
مستقل

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(A) - p(A) \cdot p(B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{6 + 4 - 3}{8} = \frac{7}{8}$$

۱۲۰- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. نفر A را در یکی از مکانها قرار می دهیم، ۵ مکان باقی می ماند، احتمال این که B

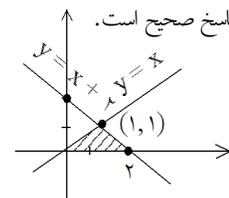
روبروی A بنشیند یکی از ۵ مکان است پس:  $p = \frac{1}{5}$



B باید این جا باشد

$$(x - y)(x + y) - 2(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x + y - 2) = 0$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{2 \times 1}{2} = 1$$



۱۰۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-4}{4 \times 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120$$

۱۱۰- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

۱۱۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\log \frac{12}{5} = \log \frac{100}{8} = \log 100 - \log 8 = 2 - 3\log 2 = 2 - 0.903 = 1.097$$

$$\log 4 = 0.602 \Rightarrow \log 2 = 0.301$$

۱۱۲- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. رقم یکان باید صفر یا ۵ باشد:

$$\begin{cases} \frac{541}{100} = 5.41 \\ \frac{441}{100} = 4.41 \end{cases} \xrightarrow{+} 36$$

۱۱۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم تعداد اقطار n ضلعی برابر  $\frac{n(n-3)}{2}$  می باشد پس:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 104 \Rightarrow n(n-3) = 208 \Rightarrow n = 16$$

۱۱۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = 6^2 \text{ (زوج مرتب)}$$

$$p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$A = \{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\} : n(A) = 6$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب به مخرج}} \frac{MA}{AB} = \frac{NA}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow MN \parallel BC$$

۱۱۵- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

بنابراین دو مثلث AMN و ABC متشابهند و  $K = \frac{2}{5}$  در نتیجه نسبت مساحت های این دو مثلث  $\frac{4}{25}$  است.

۱۲۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$f(1) = 0$$

۱۲۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \sqrt{1-1^+} - \sqrt{0^-} \quad \text{تعریف نشده}$$

$$\text{Lim}_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sqrt{1-1^-} - \sqrt{1-1^-} = \sqrt{0^+} - \sqrt{0^+} = \sqrt{0^-} \quad \text{تعریف نشده}$$

پس  $f$  در  $x=1$  از چپ و راست ناپیوسته است.

۱۲۳- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Lim}_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sin 2x} = \text{Lim}_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \text{Lim}_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \sin x} = \frac{1}{4}$$

۱۲۴- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a + c = 3 \Rightarrow c = 3 - a \Rightarrow c^2 = a^2 - 6a + 9 \Rightarrow a^2 + b^2 = a^2 - 6a + 9 \Rightarrow b^2 = -6a + 9 \Rightarrow a = \frac{9 - b^2}{6}$$

$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{12} (9b - b^3) \Rightarrow S' = \frac{1}{12} (9 - 3b^2) = 0 \Rightarrow b^2 = 3 \Rightarrow b = \sqrt{3}, a = 1$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{1}{2} (1)(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

۱۲۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(g \cdot f)'(1) = g'(1)f(1) + g(1) \cdot f'(1) = 0 + (1) \left( \frac{1}{\sqrt{4}} \right) = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = g(1)f(1) = 0 \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - x + 1 = 0$$

۱۲۶- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$a + b = 3i - 2j \Rightarrow (a + b) \times (a - b) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -10k$$

$$a - b = i - 4j \Rightarrow (a + b) \cdot (a - b) = 3 + 8 = 11$$

$$\text{tg} \theta = \frac{|(a + b) \times (a - b)|}{(a + b) \cdot (a - b)} = \frac{10}{11}$$

۱۲۷- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. حاصل ضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه هادی فصل مشترک آنها می‌باشد.

$$U = N \times N' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2i + 3j - k$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2} \\ y + \frac{5}{2} = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow A \left( 0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad \text{نقطه ای از فصل مشترک}$$

$$\text{فصل مشترک} : \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-1}$$

بردارهای هادی فصل مشترک و خط  $\Delta$  موازی نیستند پس این دو خط یا متقاطع و یا متنازقند.

$$\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases} \xrightarrow{\text{در فصل مشترک قرار می دهیم}} \frac{t}{\frac{1}{2}} = \frac{t + 2 - \frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1 - 2t - \frac{5}{2}}{-1}$$

مقادیر  $t$  که از رابطه‌ی فوق به دست می‌آید مساوی نیستند پس دو خط متنازقند.

$$x = \frac{-z - 1}{2} \Rightarrow x = y - 2 = \frac{-z - 1}{2} \Rightarrow U' = (1, 1, -2) \quad \text{۱۲۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.}$$

حاصل ضرب خارجی بردارهای هادی دو خط بردار نرمال صفحه مطلوب است.

$$N = U \times U' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5i + 3j - k$$

$$A \in \text{خط} \Rightarrow A(1, 4, 0)$$

$$\text{معادله ی صفحه} \Rightarrow -5(x - 1) + 3(y - 4) - 1(z - 0) = 0$$

$$-5x + 3y - z - 7 = 0$$

$$y \text{ و } x = 0 \xrightarrow{\text{برخورد با محور } z} -z - 7 = 0 \Rightarrow z = -7$$

۱۲۹- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} a & a & a+2 \\ ra & ra+2 & ra \\ 6a+2 & 6a & 6a \end{vmatrix} = 12 \xrightarrow{\substack{\text{۳- برابر سطر اول را به سطر دوم} \\ \text{و ۶- برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه می کنیم}}}$$

$$\begin{vmatrix} a & a & a+2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 2 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 12 \xrightarrow{\substack{\text{بسط} \\ \text{نسبت به ستون اول}}} a(-24) + 2(-6a - 2a - 4) = 12$$

$$\Rightarrow -24a - 16a - 8 = 12 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۱۳۰- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. در گزینهی ۱ رابطهی درست  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  و در گزینهی ۳ رابطهی درست  $(AB)^t = B^tA^t$  و در گزینهی ۴ رابطهی درست  $|A^{-1}B^{-1}| = \frac{1}{|AB|}$  می باشد.

۱۳۱- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$2y^2 - 9(x-1)^2 = -25$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{25}{9}} - \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \Rightarrow C^2 = \frac{25}{9} + \frac{25}{4} = \frac{13 \times 25}{36}$$

$$C = \frac{5}{6}\sqrt{13} \Rightarrow 2C = \frac{5}{3}\sqrt{13} \Rightarrow \frac{5}{3}$$

۱۳۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. فاصلهی کانون سهمی تا خط هادی سهمی برابر  $|2a|$  می باشد برای این که اشتباهی با مقدار ثابت  $2a$  در سهمی مسئله نشود معادلهی سهمی را به صورت  $y^2 - 2y + a'x + a' = 0$  می نویسیم.

$$(y-1)^2 - 1 + a'x + a' = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = -a'x - a' + 1 \Rightarrow (y-1)^2 = -a' \left(x + 1 - \frac{1}{a'}\right)$$

پس  $-a' = -a'$  از طرفی طبق فرض  $|2a| = 2$  در نتیجه  $a' = \pm 4$  و  $-a' = \pm 4$  بنابراین معادلهی سهمی به صورت

$$(y-1)^2 = 4 \left(x + \frac{1}{4}\right) \text{ یا } (y-1)^2 = -4 \left(x + \frac{1}{4}\right) \text{ درمی آید.}$$

$$S = \left(-\frac{5}{4}, 1\right) \text{ یا } S = \left(-\frac{3}{4}, 1\right) \text{ راس سهمی}$$

۱۳۳- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. ۹ رأس را با حداقل ۸ یال می توان به هم وصل کرد تا همبند شود.

$$\text{فرما: } a^{p-1} \equiv 1$$

۱۳۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow 2^{16} \equiv 1 \xrightarrow{\uparrow 3} 2^{48} \equiv 1 \xrightarrow{\times 2^5} 2^{53} \equiv 1 \xrightarrow{17} 2^{32} \equiv 1 \xrightarrow{17} 2^{15}$$

۱۳۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a^3 - 2a^2 - a + 2 = m.K \Rightarrow (a^2 - 1)(a - 2) = m.K$$

$$a^2 - 1 = m.K' \Rightarrow m | a^2 - 1$$

۱۳۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.  $n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(M) - n(A \cup B)$  مضرب ۳: A  
مضرب ۷: B

$$= 900 - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)]$$

$$= 900 - \left[ \left[ \frac{999}{3} \right] - \left[ \frac{99}{3} \right] + \left[ \frac{999}{7} \right] - \left[ \frac{99}{7} \right] - \left[ \frac{999}{21} \right] + \left[ \frac{99}{21} \right] \right]$$

$$= 900 - [300 + 128 - 43] = 515$$

توجه: تعداد مضارب k بین m تا n برابر است با:  $\left[ \frac{n}{k} \right] - \left[ \frac{m}{k} \right]$

۱۳۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. هر سه سکه ۲ حالت و هر تاس ۶ حالت دارد پس:  $n(S) = 2^3 \times 6^1 = 96$

۱۳۸- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.  $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) : p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

A و B مستقل اند.

۱۳۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.  $S = \{(دوقلو و دختر)(دوقلو و پسر)(دختر و دوقلو)(پسر و دوقلو)\}$

$$A = \{(دوقلو و پسر)\} : p(A) = \frac{1}{4}$$

۱۴۰- طبق تعریف همسایگی باز متقارن:

$$a - \varepsilon \quad a \quad a + \varepsilon \quad (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

اگر دو همسایگی باز متقارن تعریف شوند  $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$  می باشد. فرض کنیم  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ، در این صورت:

$$(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1) \subset (a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2)$$

بنابراین اجتماع دو همسایگی برابر با همسایگی با شعاع بزرگتر و اشتراک آنها برابر با همسایگی با شعاع کوچکتر می باشد. بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱۴۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$X = A^{-1} \cdot A^t = - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow a \times b = -2i - 2j + k \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ گزینهی ۴ صحیح است.}$$

۱۵۳- گزینهی ۳ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = R\left(\frac{\pi}{4}\right) = R\left(\frac{\pi}{4}\right) = R_{\pi}$$

$$\Rightarrow A^{\pi} = \begin{bmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

توجه:  $R_{\alpha}^n = R(n\alpha)$  (ماتریس دوران)

۱۵۴- گزینهی ۲ صحیح است.  $\cos 20^\circ - \cos 80^\circ = 2 \sin 50^\circ \sin 30^\circ = \sin 50^\circ = \cos 40^\circ$

۱۵۵- گزینهی ۳ صحیح است.

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \Rightarrow 8 = 4 \times 4 \times \cos \theta \Rightarrow \theta = 60^\circ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 4$$

۱۵۶- گزینهی ۱ صحیح است.

$$\begin{cases} y + 2x = 4 \\ 2y + x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 2, m^2 + m + 1 = 2 + 1 \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$$

غ ق ق ق

۱۵۷- گزینهی ۳ صحیح است.  $91a + 63b = 7 \Rightarrow 13a + 9b = 1$  یکان ۹

$$13a + 9b = 1 \Rightarrow 13a = 1 - 9b \Rightarrow a = \frac{1-9b}{13} = \frac{1}{13} - \frac{9}{13}b = \frac{1}{13} - \frac{9}{13}k - \frac{2}{13}$$

جاگذاری  $\rightarrow b = -13k + 2 \Rightarrow a + b = -4k + 1$

$$\left. \begin{aligned} \text{مساحت دایره} = S = \pi r^2 \Rightarrow \text{آهنگ تغییر مساحت} = \frac{dS}{dr} = 2\pi r \\ r_1 = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dS}{dr} = 2 \times 10 \times \pi = 20\pi \quad -158$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۱۵۹- ابتدا مشتق دوم را تعیین می‌کنیم:  $y' = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = 2 - \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$$y'' = 0 \Rightarrow 2 = \frac{1}{4x\sqrt{x}} \Rightarrow (2\sqrt{x})^3 = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

x	0	$\frac{1}{4}$	1
y''	-	+	
y			

قبل از  $x = \frac{1}{4}$  تفر رو به پایین و بعد از آن تفر رو به بالاست. پس گزینه ۱ صحیح است.

زوج مرتب

۱۴۳- گزینهی ۲ صحیح است.  $n(s) = \rho^2(,)$

$$A = \{(4,6), (5,5), (6,4)\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۱۴۴- گزینهی ۳ صحیح است.

$$\left\{ \begin{aligned} |A| \xrightarrow{\text{بسط بر حسب}} + 2 \left| \begin{matrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{matrix} \right| = 2(3-5) = -4 \\ \text{ستون دوم} \\ A_{31} = + \left| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{matrix} \right| = -2 \end{aligned} \right.$$

۱۴۵- گزینهی ۱ صحیح است.  $P = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{7 \times 6 \times 5}{11 \times 10 \times 9} = \frac{7}{33}$

۱۴۶- گزینهی ۳ صحیح است.

$$a = 2R \sin A \quad 4\sqrt{3} = R\sqrt{3} \Rightarrow R = 4 \quad S = 16\pi \Rightarrow 16$$

۱۴۷- گزینهی ۲ صحیح است.  $\tan x + \cot x = -2 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{2}$

۱۴۸- گزینهی ۴ صحیح است.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow 2(x+1) - (y-2) + 2(z-1) = 0 \quad 2x - y + 2z + 2 = 0$$

۱۴۹- گزینهی ۱ صحیح است.  $4(x+2)^2 - 3(y-1)^2 = 15$  (۲, ۱) مرکز هذلولی

۱۵۰- اگر  $a_n$  جمله عمومی دنباله بوده و  $a_n = 1$  حد باشد، گوئیم دنباله  $\{a_n\}$  به عدد حقیقی  $l$  همگرا گردیده است،  $n \rightarrow \infty$

در این سوال:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1 - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^2+1}} = 0$$

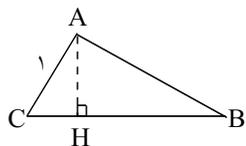
بنابراین دنباله فوق همگرا به صفر است و گزینه ۴ صحیح است.

۱۵۱- گزینهی ۴ صحیح است.  $f(x) > 0 \Rightarrow -f(x) < 0 \Rightarrow f(-f(x)) = 4 \Rightarrow f(4) = 2$

۱۵۲- گزینهی ۲ صحیح است.  $\frac{2 \times 3}{3 \times 4} \Rightarrow A \times B'$  قابل تعریف

۱۶۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\log_a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



$$\cos C = \frac{1}{BC} \Rightarrow BC = \frac{1}{\cos C}$$

$$\tan C = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \tan C$$

$$BH \cdot BC = (AB)^2 \Rightarrow BH \left( \frac{1}{\cos C} \right) = \tan^2 C \Rightarrow$$

$$BH = \tan^2 C \cos C = \sin C \times \tan C$$

۱۶۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.  $x=0$  محور تقارن تابع  $y = x \sin x$  است پس  $x=1$  محور تقارن تابع  $y = (x-1) \sin(x-1) + 2$  می باشد.

۱۶۷- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a - b - 2 = 0 \\ -2 + b = 0 \rightarrow b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 5$$

۱۶۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$2x^2 + 2x > mx^2 + m + 2 \Rightarrow (m-2)x^2 - 2x + (m+2) < 0$$

$$a < 0 \Rightarrow m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

با توجه به گزینهها، فقط گزینهی ۲ می تواند صحیح باشد.

۱۶۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{\pi}{\pi} = 1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow T_f = 1$$

۱۷۰- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{16 + 2a - 4} \neq 0 \Rightarrow 12 + 2a = 0 \Rightarrow a = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x + 1 - \sqrt{4x + 1}}{2x^3 - 6x - 4} = \frac{7 - 5}{2(6)^3 - 36 - 4} = \frac{1}{196}$$

۱۷۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = -\cos \frac{\pi}{x} \Rightarrow y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x} \Rightarrow y' \left( \frac{12}{\pi} \right) = (-2) \left( \frac{\pi}{144} \right) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{-\pi}{144}$$

۱۶۰- گزینهی ۴ صحیح است.

$$y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \rightarrow (x-1)^2 = y+1 \rightarrow |x-1| = \sqrt{y+1} \xrightarrow{x \geq 1}$$

$$x-1 = \sqrt{y+1} \rightarrow x = 1 + \sqrt{y+1} \rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

۱۶۱- گزینهی ۳ صحیح است.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

۱۶۲- گزینهی ۱ صحیح است.  $A - B = \{4\}$   $B \cap A^c = B - A = \{1\} \Rightarrow (4, 1)$

$$\left( \frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32}$$

۱۷۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. باید هر دو ریشه معادله دو مجزوری پس:

$$\begin{cases} \frac{-b}{a} > 0 \rightarrow 2m - 1 > 0 \rightarrow m > \frac{1}{2} \\ \frac{c}{a} > 0 \rightarrow m + 1 > 0 \rightarrow m > -1 \Rightarrow m > \frac{1}{2} \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

دیده می‌شود با توجه به  $m > \frac{1}{2}$ ، بدون حل  $\Delta > 0$  و فقط گزینه‌ی یک می‌تواند جواب باشد.

۱۷۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x_1 \Rightarrow x_2 = \frac{-b}{3a} = \frac{5}{3\left(\frac{1}{3}\right)} = 5$$

۱۷۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^-} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \cot x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^-} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x = -1$$

۱۷۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$-1 < \frac{1}{x-2} < 1 \Rightarrow x-2 > 1 \text{ یا } x-2 < -1 \Rightarrow x > 3 \text{ یا } x < 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - (1, 3)$$

۱۸۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y' = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} = -2 \frac{1}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

۱۸۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای تعیین میانه باید داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم سپس داده‌ای که وسط قرار می‌گیرد میانه است.

مد هم داده‌ای است که بیش از همه داده‌ها تکرار می‌شود.

۸ و ۹ و ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۱ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۷

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{تفاضل} = 11 \\ \text{میان} = 11 \\ \text{مد} = 11 \end{cases} \rightarrow \text{صفر}$$

۱۷۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$y = \frac{x^2}{|x|} = \pm x$$

۱۷۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(1) = 4 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} \stackrel{\text{HoP}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

f به ازای هر مقدار a پیوسته است.

۱۷۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$L = (f \cdot g)'(4) = f'(4)g(4) + f(4)g'(4)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \rightarrow f'(4) = 3 \text{ و } f(4) = 8$$

$$g'(x) = \frac{-(2x-3)}{(x^2-3x)^2} \Rightarrow g'(4) = \frac{-5}{16} \text{ و } g(4) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow L = (3)\left(\frac{1}{4}\right) + (8)\left(-\frac{5}{16}\right) = \frac{3}{4} - \frac{5}{2} = \frac{-7}{4}$$

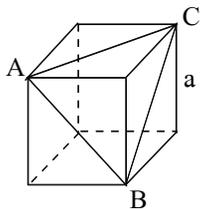
۱۷۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = x - 1 \\ x^3 + 1 = 0 \rightarrow x^3 = -1 \end{cases} \Rightarrow R = ax^3 + bx^2 + 1 = a(-1) + b(x-1) + 1$$

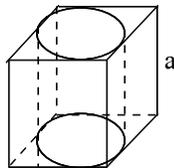
$$R = bx + (1 - a - b) \equiv x - 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 1 - a - b = -2 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

تذکر: این مسأله از طریق تقسیم معمولی هم قابل حل است.

۱۸۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a\sqrt{2}$  است.



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\text{یک وجه}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} (a\sqrt{2})^2}{a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۱۸۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل می توان بزرگ ترین استوانه را درون مکعب قرار داد. به طوری که ارتفاع استوانه برابر یال مکعب و شعاع قاعده آن مساوی نصف یال مکعب است.

$$2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$$

$$\text{سطح کل استوانه} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

$$\text{سطح کل استوانه} = 2\pi \left(\frac{a}{2}\right) (a) + 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

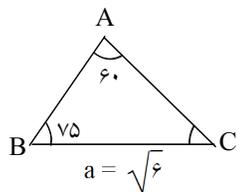
$$\text{سطح کل استوانه} = \frac{3\pi(4)^2}{2} = 24\pi$$

۱۸۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تست غلط است. زیرا در مثلث قائم الزاویه  $\widehat{AOD}$  ضلع قائمه OD برابر ۵ می باشد از طرفی وتر  $OA = \frac{1}{3}$  می باشد و این تناقض می باشد.

۱۹۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\substack{\widehat{A} = 60^\circ \\ \widehat{B} = 75^\circ}} \widehat{C} = 45^\circ$$

با توجه به قضیه سینوس ها داریم:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \Rightarrow c = 2$$

۱۸۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زمانی که شاخص های پراکندگی صفر باشد همه با هم برابرند پس:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{15}$$

۱۵

$$\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 540 \Rightarrow 15x^2 = 540 \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow x = 6$$

نما یا مد هم برابر ۶ خواهد بود چون همگی ۶ هستند.

۱۸۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (B \cap A') = A \cup (B \cap A') = (A \cup B) \cap (A \cup A')$$

$$A \cap (B \cup B') = A$$

مرجع M

مرجع M

$$= A \cup B \overset{A \subset B}{=} B$$

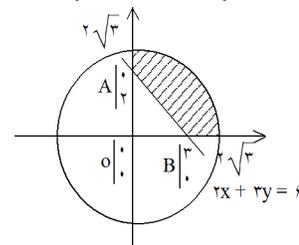
۱۸۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز دارد، پس  $12 \times 7 = 84$  لانه داریم که در هر کدام یکی قرار دهیم، نفر ۸۵ را که برداریم طبق اصل لانه کبوتر در یکی از لانه ها قرار می گیرد.

۱۸۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اعداد زوج را کنار بگذاریم، ۴ تا عدد می ماند که با آنها ۲ زیرمجموعه می توان نوشت.

۱۸۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 < 12 \rightarrow x^2 + y^2 = 12 \xrightarrow{\text{دایره}} \begin{cases} O \\ r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

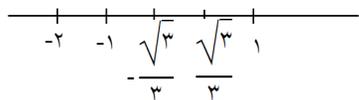
$$2x + 3y \geq 6 \rightarrow 2x + 3y = 6$$



$$S_{\text{هاشور}} = S_{\text{ربع دایره}} - S_{\text{مثلث}} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{3 \times 2}{2} = 3\pi - 3$$

۱۹۵- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. تابع در  $x = \pm 1$  مشتق ندارد حال برای مشتق برابر صفر داریم:

$$y = \pm x(x^2 - 1) \Rightarrow y = \pm(x^3 - x) \rightarrow y' = \pm(3x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



دیده می شود اگر  $f$  بخواند فقط ۵ نقطه‌ی بحرانی داشته باشد باید  $1 < b < \frac{\sqrt{3}}{3}$  پس  $\max(b) = 1$ .

۱۹۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\operatorname{tg}^2 x - \cot x} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-1}{2(1 + \operatorname{tg}^2 x) + (1 + \cot^2 x)} = \frac{-1}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

۱۹۷- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} \text{ و } f(1) = 0$$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} \rightarrow g'(1) = \frac{1}{2} \text{ و } g(1) = 2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{(g(1))^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(2) - 0}{4} = \frac{1}{4}$$

۱۹۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(\alpha) = \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} dx = \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} \sin^2 \frac{x}{2} dx = -2\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}$$

۱۹۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$F(x) = \int (1 + x - 2\sqrt{x}) dx = x + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$$

$$F(4) - F(0) = 4 + 8 - \frac{32}{3} = \frac{4}{3}$$

۱۹۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. برای بدست آوردن قرینه‌ی خط نسبت به نقطه کافیسست قرینه‌ی یک نقطه دلخواه خط را بدست آورده و چون شیب تغییر نمی کند با همان شیب معادله‌ی خط قرینه را بنویسیم.

$$A \in \text{خط} \Rightarrow A(0, 6) \text{ و } O(2, -3)$$

اگر  $A'$  قرینه‌ی  $A$  نسبت به نقطه‌ی  $O$  باشد داریم:

$$O = \frac{A + A'}{2} \Rightarrow A' = 2O - A \Rightarrow A' = 2(2, -3) - (0, 6) \Rightarrow A' = (4, -12)$$

از طرفی شیب خط داده شده برابر  $\frac{3}{2}$  است پس شیب خط قرینه نیز  $\frac{3}{2}$  می باشد.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y + 12 = \frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 18$$

عرض مبدأ خط قرینه برابر  $-18$  است.

۱۹۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left( \sqrt{\frac{x-3}{x+1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(-2x)}{\sqrt{\frac{x-3}{x+1}} + 1} = -\frac{2}{2} = -2$$

$y = x - 2$  مجانب مایل است.

۱۹۳- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x = 2 \in D_{f^{-1}} \Rightarrow y = 2 \text{ و } x^3 + x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 2)$$

$$y = x^3 + x \rightarrow 1 = (3x^2 + 1)x' \Rightarrow x' = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

$$x'' = \frac{-6xx'}{(3x^2 + 1)^2} \Rightarrow x''(1) = \frac{-6(1)\left(\frac{1}{4}\right)}{(3+1)^2} = -\frac{3}{32}$$

۱۹۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.  $f$  در  $x = 2$  مشتق ندارد و  $x = 2$  متعلق به بازه است.

۲۰۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$A - xI = \begin{bmatrix} -2-x & 0 & 3 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 4 & 0 & 1-x \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-x & 0 & 3 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 4 & 0 & 1-x \end{bmatrix}$$

$$|A - xI| = \begin{vmatrix} -2-x & 0 & 3 \\ 0 & 2-x & 0 \\ 4 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{بسط نسبت به ستون دوم} \Rightarrow (2-x)[(2-x)(1-x) - 12] = 0$$

$$\Rightarrow (2-x)(2-3x+x^2-12) = 0 \Rightarrow (2-x)(x^2-3x-10) = 0$$

$$\Rightarrow (2-x)(x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=5 \\ x=-2 \end{cases}$$

۲۰۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

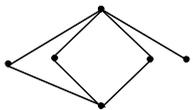
$$B = R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^4 - 4\sqrt{2}B = \begin{bmatrix} -7 & -4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & -7 \end{bmatrix} - 4\sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^4 - 4\sqrt{2}B| = 49$$

۲۰۷- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. کافی است شکل گراف را رسم کنیم:



$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

حال هر رأس درجه ۲ که برداریم با رئوس درجه ۳ و ۴، تشکیل دور به طول ۴ می‌دهد:

۲۰۰- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط از فرمول  $\left(\frac{|AB \times U|}{|U|}\right)$  (فاصله)

استفاده می‌کنیم که در آن B نقطه‌ای دلخواه از خط است.

$$A(1, 2, -1) \quad B(1, -1, 0) \Rightarrow \vec{AB}(0, -3, 1) \quad \vec{U} = (-1, 1, 1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{U} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4i - j - 3k$$

$$\text{فاصله} = \frac{|AB \times U|}{|U|} = \frac{\sqrt{16+1+9}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{26}{3}}$$

۲۰۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. این صفحه موازی محور X ها می‌باشد. به طور کلی صفحه با معادله  $by + cz + d = 0$  موازی با محور X ها می‌باشد.

۲۰۲- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است. b' تصویر بردار b روی a است.

$$|a \times b| = |a| \times |b'|$$

$$|a \times b| = |a| \times \frac{|a \cdot b|}{|a|} \Rightarrow |a \times b| = |a \cdot b| \Rightarrow \sin\theta = \cos\theta \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

۲۰۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. این مقطع یک بیضی است و خروج از مرکز بیضی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} e = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \end{cases}$$

۲۰۴- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است. فقط در دایره است که قائم‌های وارد بر آن از مرکز آن می‌گذرد. پس معادله‌ی فوق

دایره است. بنابراین  $a = 2$  و معادله‌ی دایره به صورت  $x^2 + y^2 + \frac{b}{2}x + \frac{c}{2}y = 0$  است و  $O(3, 1)$  مرکز دایره است.

$$O = \left(-\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right) = (3, 1) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = -12 \\ -\frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = -4 \end{cases} \Rightarrow b + c = -16$$

۲۰۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \{cx + my \mid x, y \in Z\} \xrightarrow{\text{بزرگ}} (m, c) = \text{Min}A \Rightarrow (m, c) = 1$$

$$ac \equiv bc \xrightarrow{\div c} a \equiv b \pmod{(m, c) = 1}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow \begin{cases} a^n \equiv b^n \pmod{m} \\ ac \equiv bc \pmod{m} \end{cases}$$

۲۰۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x_i \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 7 \xrightarrow{\text{تعداد جواب حسابی}} \binom{9}{2} = 36$$

توجه: تعداد جوابهای حسابی معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$  برابر  $\binom{m+n-1}{n-1}$  می باشد.

۲۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

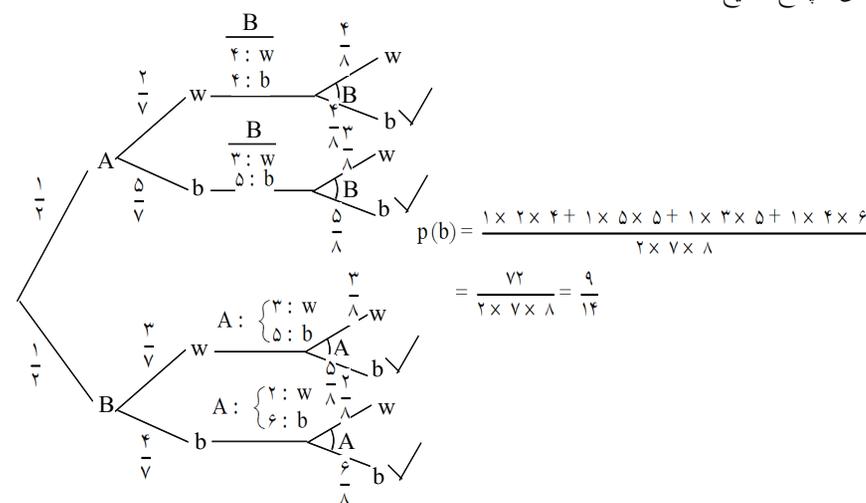
x	۱۰	۱۱	۱۲	...
p(X=x)	ap	ap(1-p)	ap(1-p) <sup>2</sup>	...

$$\Sigma p(X=x) = 1 \Rightarrow ap + ap(1-p) + ap(1-p)^2 + \dots = 1$$

سری هندسی  
جمله اول ap  
قدر نسبت ۱-p

$$\Rightarrow \frac{ap}{1-(1-p)} = 1 \Rightarrow a = 1$$

۲۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۲۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M^T = M \odot M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{۷ تا ۱ دارد}$$

۲۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ماتریس A ماتریس  $2 \times 3$  ماتریس  $B^t$  یک ماتریس  $3 \times 2$  است، پس حاصل ضرب  $A \cdot B^t$  قابل تعریف است. دقت کنیم شرط ضرب پذیری دو ماتریس آن است که تعداد ستونهای اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشد.

۲۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{فاصله } A \text{ تا صفحه} = \frac{|6 + 12 - 6|}{\sqrt{4 + 9 + 3}} = \frac{12}{4} = 3$$

۲۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{cases} y = \sin x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

این معادله بی شمار جواب دارد. چون نمودار تابع  $y = \frac{1}{x}$  در بی شمار نقطه نمودار تابع  $y = \sin x$  را قطع می کند.

۲۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم هر مجموعه n عضوی شامل  $2^n$  زیر مجموعه است. حال کفایت a را کنار بگذاریم با ۳ عضو مانده  $2^3$  زیر مجموعه می توان نوشت سپس در هر کدام a را قرار می دهیم.

۲۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم اگر در دادههای  $X_i$  میانگین  $\bar{X}$  و انحراف معیار  $\delta$  باشد در دادههای  $aX_i + b$  میانگین  $a\bar{X} + b$  و انحراف معیار  $|a| \cdot \delta$  می باشد.

$$x_i \xrightarrow{\text{تبدیل}} -x_i + 2 \Rightarrow \delta = \delta'$$

۲۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\bar{f}_i = \frac{f_i}{N}$$

$$\Rightarrow \frac{69}{N} = 0.15 \Rightarrow N = \frac{69 \times 100}{15} = \frac{23 \times 100}{5} = 460$$

۲۲۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{\sum X_i}{N} = 20$$

$$\delta^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{x})^2}{N} \rightarrow \delta^2 = \frac{4 + 1 + 1 + 0 + 0 + 4}{6} = \frac{10}{3} = 1/67$$

۲۲۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$9 + 3 = 12 \Rightarrow 2R = 2\sqrt{3} \quad R = \sqrt{3}$$

مثلث قائم الزاویه است زیرا اضلاع آن در رابطه فیثاغورث صدق می‌کند

۲۲۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$CM \parallel AD, AM = AC = 8$$

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AM} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۲۳۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

۲۳۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$a\sqrt{3} = 3\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{6} \Rightarrow V = 6\sqrt{6} \quad \text{حجم هرم جدا شده} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{6}a^3 = \sqrt{6}$$

$$\text{حجم قطعه بزرگتر} = 6\sqrt{6} - \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$

۲۳۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{2}{5}$$

$$BD = \frac{2}{5}BC \quad BD = \frac{4}{5}AB \quad \frac{BD}{AB} = \frac{4}{5}$$

۲۳۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{MO}{MO'} = \frac{R}{R'} = \frac{5}{3} \quad \frac{MO}{MO + MO'} = \frac{5}{8}$$

$$MO = \frac{5}{8} \times 12 = 7.5$$

۲۱۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

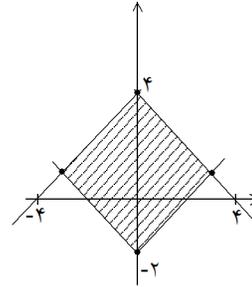
$$(m+2)x^2 + 4x + m - 1 = 0, \Delta' = 4 - (m^2 + m - 2) > 0 \Rightarrow -m^2 - m + 6 > 0 \Rightarrow -3 < m < 2$$

۲۲۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$(-x - y) \rightarrow (x, y) \quad x^2 + xy = 4$$

۲۲۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$|y - 1| = 3 - |x| \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = 3 - |x| \\ \text{یا} \\ y - 1 = -3 + |x| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 - |x| \\ \text{یا} \\ y = |x| - 2 \end{cases}$$



$$S = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$

۲۲۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$x - |x| \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad [0, \infty)$$

$$12, 1, \frac{16}{3} \Rightarrow \text{تصادف هندسی} \Rightarrow q = \frac{1}{12} = \frac{2}{3} \quad \frac{aq^9}{aq} = q^8 = \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{1}{27}$$

۲۲۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

۲۲۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{n}{2}(n+1) = \frac{5}{9}n^2 \quad n+1 = \frac{10}{9}n \quad n=9$$

۲۲۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$GB + GC = 2GM = -GA \Rightarrow GA + CB + GC = 0$$

۲۲۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = \text{تعداد حالات ممکن} = 3! = 6$$

$$1 \text{ و } 3 \text{ جایگشت } \rightarrow 2! : n(A) = 4 \Rightarrow P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۲۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2^{n+2} = 2^n + 384 \quad 3 \times 2^n = 384 \quad 2^n = 128 \quad n = 7$$

توجه: تعداد کل زیر مجموعه‌ها یک مجموعه n عضوی برابر است با  $2^n$ .

۲۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$L_S = 2 - 0 = 2$$

$$x < \frac{3}{4} \rightarrow 0 < 3 < \frac{3}{4} : L_A = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}$$

$$P(A) = \frac{L_A}{L_S} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$$

۲۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$AB \text{ زاویه دوران} = 45^\circ$$

۲۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$105 = \text{بزرگترین زاویه} \Rightarrow 180 = \text{مجموع دو زاویه مقابل}$$

۲۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \rightarrow 0.7 = 0.4 + 0.3 - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = 0$$

پس A و B ناسازگار هستند

۲۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$E \cap G = \emptyset$$

$\Rightarrow$  اعداد فرد و اعداد زوج

$$E \cup G = Z$$

توجه: باید اشتراک افزارها تهی باشد و اجتماع آنها مجموعه مرجع را تولید کند.

۲۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(-1) = 2 \Rightarrow 2 - m + 2 = 2 \Rightarrow m = 2 \quad f(1) = 2 + 2 + 2 = 6$$

۲۴۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 \Rightarrow f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 2 = x + 2$$

۲۴۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (2x - 1) \frac{(x^2 - x)^{12}}{(5x - 2)^{24}} \quad f'(x) = 2 \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{12}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{24}} + 0 \cdot x \cdot 0 = 2$$

۲۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \times \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x \Rightarrow y' = \cos 2x \quad y' = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

۲۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2x^2 - 4x + 1 > x^2 - 6x + 9 \quad 3x^2 + 2x - 8 > 0$$

$$9x^2 + 6x > 24 \quad (3x + 1)^2 > 25 \quad |3x + 1| > 5 \Rightarrow (1, 5)$$

۲۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ویژگی واگرا ندارد  $\Rightarrow$  همگرا - کراندار - نزولی  $\left\{ \sin \frac{\pi}{n+1} \right\}$

۲۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$10A = 5 + \frac{162}{999} \quad A = \frac{5162 - 5}{9990} = \frac{5157}{9990} = \frac{573}{1110} = \frac{191}{370}$$

$$\operatorname{Lim}_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{3 + 2x} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

۲۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

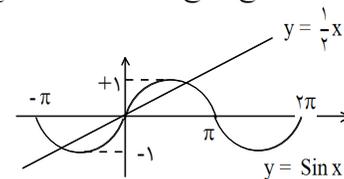
۲۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تعداد  $\{ -4, \frac{3}{2}, 2, 3, 4 \}$  نقاط بحرانی  $\Rightarrow$  مشتق صفر یا مشتق پذیر نیست.

۲۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{Lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow \operatorname{Lim}_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x} = \operatorname{Lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}} = 1$$

۲۵۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در سه نقطه متقاطع اند.



۲۵۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin x = \frac{x}{\sqrt{2}} \quad \begin{cases} y = \sin x \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{a}{n} \quad \text{تفاضل} = [f(a) - f(\cdot)] \times \Delta x$$

$$= (a - \cdot) \frac{a}{n} = \frac{a^2}{n}$$

۲۵۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$b - a = 4 - 3 = 1, f'(x) = \frac{1 - 3x^2}{(x^3 - x)^2} \Rightarrow f'(4) \leq \int_3^4 \frac{dx}{x^3 - x} \leq f'(3)$$

$$f'(4) = \frac{1}{64 - 4} = \frac{1}{60}, \quad f'(3) = \frac{1}{27 - 3} = \frac{1}{24} \Rightarrow \left[ \frac{1}{60}, \frac{1}{24} \right]$$

۲۵۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$|a||b| \sin \theta = -|a||b| \cos \theta \quad \operatorname{tg} \theta = -1 \quad \theta = 135^\circ$$

۲۵۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\alpha = \beta = \frac{1}{4}, \gamma^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(1, 1, \pm \sqrt{2}) \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{\pm \sqrt{2}} \quad x = 0 \Rightarrow z = \pm 2\sqrt{2}$$

۲۵۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$4x^2 + 9(y-1)^2 = 36 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 = 9$$

$$a^2 = 9 : a = 3$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 8$$

۲۵۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$(y-2)^2 = 4x - 24 \rightarrow (y-2)^2 = 4(x-6) \rightarrow S \text{ راس سهمی } \left( \frac{6}{2}, 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \right)$$

$$\text{معادله خط هادی سهمی افقی} \Rightarrow x = -a + \alpha \Rightarrow x = -1 + 6 \Rightarrow x = 5$$

۲۵۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

بیشمار مقدار  $\Rightarrow$  دو سطر اول و سوم ضریبی از هم هستند پس برای هر  $x$  مقدار دترمینان صفر است.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2x & -2 & 4 \\ -1 & -x & 1 & -2 \\ 1 & x & -1 & 2 \\ 1 & x^2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

۲۵۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$X = A^{-1} A^t = - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

توجه: اگر  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  باشد وارون  $A$  برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۲۵۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

اگر دترمینان ماتریس صفر باشد، ماتریس وارون پذیرفت.

$$|A| = q^3(2+3) + a(-1-4) = 0 \Rightarrow a = 3$$

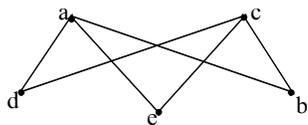
۲۶۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم اگر از سطر ۱ ستون ماتریس عدد فاکتور بگیریم می‌توانیم آن را به صورت ضرب پشت دترمینان بنویسیم پس:

$$|A_2| = 3 \times 3 \times (-2) \times |A_1| = -18 \times |A_1|$$

۲۶۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۳ دور.

abcd  
abca  
adca



۲۶۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. زیرا ضرورتی ندارد رابطه هم‌ارزی، یاد تقارنی را نیز داشته باشد.

۲۶۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{18}{a} = b \Rightarrow |a - b| \xrightarrow{\text{طبق گزینه ها}} 167 \equiv 95$$

۲۶۴- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = 37q + 23 \text{ روش اول}$$

$$2A = 37(2q) + 46 = 37q' + 9 \Rightarrow 2A - 3 = 37q' + 6 \Rightarrow 6$$

$$A \equiv 23 \pmod{37} \rightarrow 24 \equiv 46 \pmod{37} : 2A - 3 \equiv 43 \pmod{37} \equiv 6$$

۲۶۵- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

کوچکترین عضو  $(37, 25) = 1$   
توجه: طبق قضیه بزو کوچکترین عضو مثبت مجموعه  $\{ax + by > 0 | x, y \in \mathbb{Z}\}$  برابر است با  $(a, b)$ .

۲۶۶- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = 6^2 = 36 \text{ زوج مرتب}$$

$$X = 5 \Rightarrow \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} \Rightarrow P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

توجه: تعداد اعضای فضای نمونه  $n$  بار پرتاب تاس  $6^n$ ، تایی مرتب است.

۲۶۷- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

در آزمایش برنولی هر آزمایش را زمانی انجام می‌دهیم که در بار قبلی موفق نشده باشیم، که احتمال موفقیت در هر بار ثابت است.

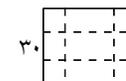
مثلاً احتمال شیر آمدن سکه در هر بار پرتاب  $\frac{1}{2}$  است ولی اگر بخواهیم احتمال موفقیت دربار انجام را بررسی کنیم باید شکست‌های قبلی را نیز محاسبه کنیم.

۲۶۸- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$1 - \frac{3x^2 - 3x}{x^3 - 1} < 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 1} < 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^3}{(x-1)(x^2 + x + 1)} < 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} < 0 \Rightarrow \emptyset \text{ نشدنی است}$$

۲۶۹- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.



۲۷۰- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{-h} = -\sqrt{x^2 + 9} \quad -h = t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x+t)}{t} = -\sqrt{x^2 + 9}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow (f(x^2))' = 2x \sqrt{x^2 + 9} = 2 \times 2 \times \sqrt{25} = 20$$

۲۷۱- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f \left| \begin{array}{c} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{array} \right. \quad sf = p = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - (+3) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

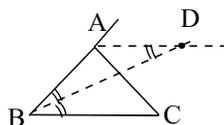
$$s \left| \begin{array}{c} 2 \\ +3 \end{array} \right.$$

$$(x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta) \rightarrow (x - 2)^2 = 2(y - 3) : x^2 - 4x + 2 = 2y$$

۲۷۲- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.



۲۷۳- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.



۲۸۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow x + y = 2$$

کوس ماتریس ضرایب

۲۸۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

کافی است از بین ۷ مهره، ۲ مهره برداریم:

$$C_V^2 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

۲۸۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 29 \end{bmatrix} \Rightarrow (1, 29)$$

۲۸۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(A \cup B) \cap (B \cap A)' = (A \cup B) \cap (A \cup B)' = A \cup (B \cap B)' = A \cup \emptyset = A$$

۲۸۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(A) = 0/7 \quad P(B) = 0/8 \quad P(A \cap B) = 0/7 + 0/8 - 0/94 = 0/56$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

مستقل هستند

۲۸۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = 22$$

$$A = \{102, 105, 108, 111, 114, 117, 120\} \Rightarrow P(A) = \frac{7}{22}$$

۲۸۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم:

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) = (a \times b) \cdot c$$

۲۸۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$O(2, 2) \quad A(2, 0) \rightarrow OA = a = 2$$

$$f' \text{ و } f \text{ وسط } a = 2, c = 4, b^2 = c^2 - a^2 = 12$$

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1 \Rightarrow 3y^2 - x^2 - 12y + 4x = 4$$

$$f' f' = 2C = 8 \Rightarrow C = 4$$

چون  $f, x$  ها ثابت است پس هذلولی قائم است.

$$f \circ f = \frac{x}{x-1} = x \Rightarrow (f \circ f)' = 1$$

۲۷۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = 6$$

۲۷۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{x-2}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{4x-2}{3\sqrt[3]{x^2}}, 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

۲۷۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

علامت  $f'$  قبل از  $\frac{1}{4}$  منفی و بعد از آن مثبت است یعنی  $x = \frac{1}{4}$  طول نقطه‌ی مینیمم نسبی است.

۲۷۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|x+1| + |x-7| = |x+1| + |7-x| \geq 8 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

همواره نامساوی برقرار است

۲۷۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ترکیب دو تابع نزولی یک تابع صعودی است  $\cos \frac{2\pi}{n+1}$  صعودی و کراندار است

$$1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots, -1$$

۲۷۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (m(x)) = y' (2), y = \sqrt{25-x^2} \quad y' = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \quad y'(2) = \frac{-2}{3}$$

۲۸۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{y} = A \Rightarrow A - \frac{1}{A} = \frac{y}{12} \Rightarrow 12A^2 - yA - 12 = 0 \Rightarrow A = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}$$

۲۸۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 dx = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx + \int (1 + \operatorname{Cotg}^2 x) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{Cotg} x + c =$$

$$\frac{-1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} + c = -2 \operatorname{cotg} x + c$$

۲۹۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$3(x-2)^2 + 4y = 21$$

$$(x-2)^2 = \frac{4}{3} \left( y - \frac{21}{4} \right) \Rightarrow 4P = \frac{4}{3} \Rightarrow 4P = \frac{4}{3}$$

۲۹۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & x^2 \\ 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & x^3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = 1, x = 0, x = 2$$

سه ریشه متمایز

توجه: اگر تمامی درایه‌های یک سطر یا ستون صفر باشند یا یک سطر و ستون K برابر سطر و ستون دیگر باشند ترمینان صفر است.

۲۹۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$|A^n| = |A| \Rightarrow |A|^n - |A| = 0 \Rightarrow |A| (|A|^{n-1} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 1 \end{cases}$$

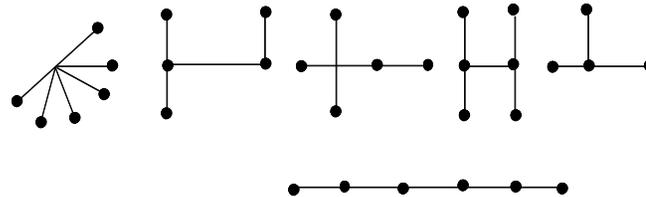
غیر قابل قبول ۱

۲۹۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^3)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

۲۹۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



شش صورت

۲۹۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A \equiv 23 \xrightarrow{27} 2A \equiv 46 \equiv 9 \xrightarrow{27} 2A - 3 \equiv 6$$

۲۹۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$[a, b] = \frac{a+b}{2} \rightarrow a' b' d = \frac{(a' b')d}{2} \rightarrow \frac{a' b'}{a'+b'} = \frac{1}{2} \frac{a'+b'}{a'+b'}$$

متابین

$$\begin{cases} a' b' = 1 \\ a' + b' = 2 \end{cases} \Rightarrow a' = b' = 1$$

$$\Rightarrow a - b = (a' - b') d = 0$$

۲۹۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$11x + 9y = 18 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} : \begin{cases} x = -9k \\ y = 11k + 2 \end{cases} \Rightarrow x + y = 2k + 2 = 2(k+1)$$

۲۹۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\xrightarrow{\text{فرما}} P : a^{P-1} \equiv 1 \Rightarrow 2^6 \equiv 1 \Rightarrow 2^{32} \equiv 1$$

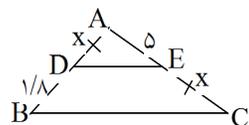
۲۹۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0 : P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۳۰۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow A = \{(3, 5), (5, 3)\} \Rightarrow P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$



۳۰۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{1/8} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 3, AC = 8$$

۳۰۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$9k^2 + 16k^2 = 100 \Rightarrow k = 2$$

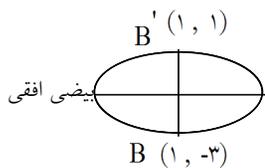
$$(3k)^2 = x \times 10 = (6)^2 \Rightarrow x = 3/6$$

۳۰۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{6}$$

۳۰۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$9 \equiv -1 \Rightarrow 9^9 \equiv (-1)^9 = -1 \Rightarrow 9^9 \equiv 9$$



۳۱۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$2(x-1)^2 + 3(y+1)^2 = 12 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

پس  $y = -3$  و  $y = 1$  مماس خواهند بود.

۳۱۳- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 3} \Rightarrow A^t = [a_{ji}]_{3 \times 2} \quad A^t \cdot A = [C_{ij}]_{3 \times 3}$$

۳۱۴- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. زاویه بین نیمسازهای ۲ زاویه مکمل و مجاور همواره برابر قائمه است.

$$\alpha + \beta = \pi \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$$

۳۱۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$1 \text{ و } 2 \text{ و } 3 \text{ و } \dots \text{ و } 230 \text{ و } a < 231 \text{ و } a < 11 \times 3 \times 7$$

$$\varphi(n) = 10 \times 2 \times 6 = 120 \quad 230 - 120 = 110 \Rightarrow \text{تعداد اعداد غیراول با } 231$$

تل تعداد

۳۱۶- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} < \frac{1}{1200} \Rightarrow \frac{2}{n(n+2)} < \frac{1}{1200} \Rightarrow n(n+2) > 2400 \Rightarrow n(n+2) > 48 \times 50 \Rightarrow n > 48 \Rightarrow n \geq 49$$

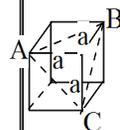
۳۱۷- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. تعداد جوابها صفر است.

$$5x + 3 \equiv 3x : 2x \equiv -3$$

۳- (۲, ۶): شرط جواب

۳۱۸- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$(f \circ g)(x) = 2(5 + 2x)^2 - (5 + 2x) - 1 = 0 \Rightarrow 5 + 2x = 1, \frac{-1}{2}, x = -2, \frac{-11}{4}$$



۳۰۵- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{حجم مکعب} = a^3 \quad \text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} a^2 \right) \times a = \frac{1}{6} a^3$$

$$\text{نسبت دو حجم} = \frac{\frac{5}{6} a^3}{\frac{1}{6} a^3} = 5 \Rightarrow \text{حجم باقیمانده} = \frac{5}{6} a^3$$

۳۰۶- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - y^2 - 2(x-y) = 0 \quad (x-y)(x+y-2) = 0$$

$$x+y=2, y=x, y=-1$$

$$S = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

۳۰۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است. چون رأس ۴ ضلعی بر روی دایره واقعند لذا ۴ ضلعی محاطی است و در ۴ ضلعی محاطی زوایای مقابل مکملند.

۳۰۸- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$2^4 \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow 2^{68} \equiv (2^4)^{17} \equiv (-1)^{17} \equiv -1 \pmod{17} \Rightarrow 2^{71} \equiv -8 \pmod{17}$$

$$\Rightarrow 2^{71} = 9$$

۳۰۹- گزینهی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\binom{3}{1} \left( \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{8}$$

توجه: در  $n$  بار انجام عملی  $K$  بار موفق شویم احتمال موفقیت برابر است با:

$$\binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}, \quad P \text{ موفقیت در هر بار انجام}$$

۳۱۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است. سهمی است.  $\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$ .

$$AC = AB = \frac{360 - 50}{2} = 155 \Rightarrow \hat{A} = 77/5$$

۳۱۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

نکته: کمانهای بین ۲ وتر موازی با هم برابرند.

۳۱۹- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \\ 12 & -2 & -20 \end{bmatrix} = -4(-8 - 24) = 128 \quad A_{11} = -16 \quad A_{31} = 8$$

توجه:  $a^{-1}_{ij} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{ji}$

$$a^{-1}_{11} + a^{-1}_{12} + a^{-1}_{13} = \frac{1}{|A|} (A_{11} + A_{21} + A_{31}) = \frac{1}{128} (2 - 4 + 2) = 0$$

۳۲۰- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\vec{AB}(2, -1, -1) \quad \vec{AC}(-1, 1, 1), \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = -\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳۲۱- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

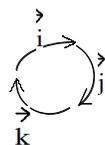
$$x = \frac{y+2}{1+y} \Rightarrow xy + x - y = 2 \quad y = \frac{2-x}{x-1} \quad \text{یا} \quad y = \frac{x-2}{1-x}$$

۳۲۲- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5 - a \quad \text{و} \quad 5 - a > 0 \Rightarrow a < 5$$

۳۲۳- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم برای ضرب خارجی بردارهای واحد داریم:



$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \end{aligned}$$

۳۲۴- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

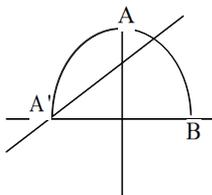
$$\frac{C_3^2 + C_4^2}{C_5^2} = \frac{3 + 6}{21} = \frac{3}{7}$$

۳۲۵- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$q_{\text{کامل}} = \binom{P}{r} = \binom{6}{2} = 15$$

۳۲۶- گزینهی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} 90^\circ \text{ دوران} \\ (x, y) \rightarrow (y, -x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 3x + 2y = 6 \\ x = y \\ y = -x \end{aligned} \Rightarrow 2(y) + 2(-x) = 6 \Rightarrow 2x - 2y + 6 = 0$$



۳۲۷- گزینهی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1} \Rightarrow A = 6, B = 3, C = 3 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$$

۳۲۸- گزینهی ۴ پاسخ صحیح است.

$$y' = 3x' + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0, y' = 0 \Rightarrow x = \frac{-2a}{3}, y = 0$$

$$0 = \frac{-16a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 \Rightarrow \frac{4a^3}{27} = -4 \quad a = -3 \Rightarrow (-3, 0)$$

توجه: ریشهی مضاعف تابع هم دو معادله‌ی تابع و هم در معادله‌ی مشتق تابع صلق می‌کند.

۳۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$  و  $A \Rightarrow p(A \cap B) = p(A)$  مستقل B

$$\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

A یا B رخ دهد

۳۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$

$$1 - x - \sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow 1 - x \geq \sqrt{1-x} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} \geq 1 \Rightarrow 1-x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup \{1\}$$

$$y = \frac{1-x^2}{2x+1} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{2x+1} > -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$$

۳۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

پس تابع هم در  $+\infty$  و هم در  $-\infty$  بالای مجانب افقی قرار دارد.

$$y = \frac{x^2(x+a)}{x^2+bx+1}$$

۳۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x^3}{x^2+bx+1}$$

اگر عامل x توان ۳ باشد آنگاه نقطه  $x = 0$  نقطه عطف می شود  $0 + a = 0 \Rightarrow a = 0$

این تابع همواره یک مجانب مایل دارد پس برای آنکه فقط دو مجانب داشته باشد، باید یک مجانب قائم نیز داشته باشد یعنی تابع باید به صورت  $y = \frac{x^3}{(x+c)^2}$  باشد.

$$y' = \frac{3x^2(x+c)^2 - 2(x+c)x^3}{(x+c)^4} = 0 \Rightarrow x^2(x+c)(3x+3c-2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = -c \text{ ق ق} \\ x = -3c \geq 0 \Rightarrow c \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c = b \\ c^2 = 1 \Rightarrow c = -1 \end{cases} \Rightarrow b = -2 \Rightarrow (a, b) = (0, -2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{2 \sin x} = \frac{1}{4}$$

۳۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $-2 < x - 1 < 2 \Rightarrow -1 < x < 3 \Rightarrow |2x+2| + 2|x-3| = 2x+3 - 2x+6 = 9$

$$(x-y)(x+y-2) = 0 \Rightarrow S = 1$$

۳۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y \log 2 = 0.602, \log 2 = 0.301 \Rightarrow \log 12/5 = \text{Log} \frac{100}{\lambda} = 2 - 3(0.301) = 1.097$$

$$d_n = \frac{n(n-3)}{2} = 104 \Rightarrow n(n-3) = 208 \Rightarrow n = 16$$

۳۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} n(s) = 6^2 = 36 \text{ زوج مرتب} \\ n(A) = 6 \text{ هر دو یکان باشند} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

۳۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معکوس یک تابع فرد خود یک تابع فرد است.

$$-3x^2 + 15x - m = 0$$

۳۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 4 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{2} \Rightarrow m = \frac{27}{2} \left(5 - \frac{9}{2}\right) = \frac{27}{4}$$

۳۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\pi}{q} < x < \frac{\pi}{q} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < \cos 3x \leq 1 \\ \cos 3x = \frac{m-1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 2 < m \leq 3$$

۳۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\hat{A} = x, \hat{B} = 2x, \hat{C} = 3x$$

$$x + 2x + 3x = 180 \Rightarrow x = 30 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \text{مثلث قائمه است}$$

۳۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق قضیه حمار:  $|(\frac{4}{3}x - 4) - (x + 7)| < \frac{4}{3}x < (\frac{4}{3}x - 4) + (x + 7)$

$$|3x - 11| < \frac{4}{3}x < 5x + 3 \Rightarrow \frac{11}{9} < x < 3$$

$$A \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به}} A' \begin{vmatrix} -y \\ -x \end{vmatrix} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۳۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۳۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون رو به بالا یا پایین مشخص نیست پس  $a = \pm 4$

$$(y-1)^2 = -ax - a + 1 = -a\left(x + 1 - \frac{1}{a}\right) \Rightarrow \begin{cases} S_{\text{راس}} \left| \begin{matrix} -1 + \frac{1}{a} \\ 1 \end{matrix} \right. \\ \Rightarrow \\ \begin{matrix} \text{راس} \\ \text{پ} \end{matrix} \left| \begin{matrix} a \\ \frac{a}{4} \end{matrix} \right. \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

$$x_{\text{راس}} = \begin{cases} -1 + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} \\ 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

فاصله کانون تا هادی  $2p = 2 \Rightarrow p = 1$

۳۵۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. کوچکترین گراف همبند با حداقل یال درست است.  $q = p - 1 \Rightarrow q = 8$

۳۵۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قضیه فرما  $(a, p) = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1$

$$\text{پس } 2^{16} \equiv 1 \xrightarrow{\uparrow 2} 2^{32} \equiv 1 \xrightarrow{\times 2^5} 2^{53} \equiv 2^5 = 32 \equiv 15$$

۳۵۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a^2 - 2a + 1 \equiv a - 1 \Rightarrow (a-1)^2 - (a-1) \equiv 0 : m|(a-1)(a-2) \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} m|a-1$$

$$(a, b) = 1 \xrightarrow{\text{لم اقلیدس}} a|bc$$

۳۵۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \text{بخش پذیر } 3 = \left[ \frac{999}{3} \right] - \left[ \frac{99}{3} \right] = 300 = n(A) \\ \text{بخش پذیر بر } 7 = \left[ \frac{999}{7} \right] - \left[ \frac{99}{7} \right] = 178 = n(B) \\ \text{بخش پذیر بر } 3 \text{ و } 7 = \left[ \frac{999}{21} \right] - \left[ \frac{99}{21} \right] = 42 = n(A \cap B) \end{cases} \Rightarrow n(A \cup B) = 386$$

$$n(A \cup B) = 514 = \text{کل} = \text{جواب نمایی}$$

$$n = \text{تعداد مضارب} : \text{تذکر } K \text{ از } 1 \text{ تا } \left[ \frac{n}{K} \right]$$

۳۵۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تذکر: فضای نمونه  $m$  تاس و  $n$  سکه برابر است با  $2^m \times 6^n$ ،  $(m+n)$  تاس مرتب  $6^1 \times 2^4 = 96$  تاس مرتب

۳۵۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \Rightarrow A, B \text{ مستقل}$$

۳۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$

$$g'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{4-3x}} \Rightarrow g'(1) = \frac{-3}{2}$$

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(1) = f'(1) \cdot g(1) + f(1) \cdot g'(1) = \frac{1}{2}(1) + (1) \left( \frac{-3}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow h(1) = 0 \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y - x + 1 = 0$$

۳۴۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\int \frac{\text{ArcSin}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}} dx = \int \frac{\text{ArcSin}(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx = \int_1^2 \text{ArcSin}(x-1) (\text{ArcSin}(x-1))' dx = \frac{1}{2} (\text{ArcSin}(x-1))^2 \Big|_1^2 = \frac{\pi^2}{8}$$

۳۴۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$\begin{vmatrix} a & a & a+2 \\ 2a & 2a+2 & 2a \\ 2a+2 & 2a & 2a \end{vmatrix}$	-۱ برابر ستون اول	$\begin{vmatrix} q & 0 & 2 \\ 2a & 2 & 0 \\ 2a+2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$	سطر دوم به سطر سوم اضافه شود.	$\begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ 2a & 2 & 0 \\ 4a+2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$	سطر بر حسب ستون دوم.
---	-------------------	---	-------------------------------	--	----------------------

$$= +2 \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2a+2 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2a - 4a - 4) = 12 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

۳۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر  $A, B$  دو ماتریس مربع باشد و  $|AB| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$  و  $|B| \neq 0$  خواهد یعنی  $A$  و  $B$  هر دو وارون پذیرند. ولی گزینه‌های ۳ و ۴ درست نیست اما برای کرانها در ماتریس داریم:  $(AB)^T = B^T A^T$

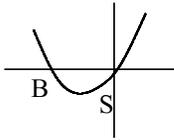
۳۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2y^2 - 9(x^2 - 2x) = -16 : 4y^2 - 9(x-1)^2 + 9 = -16 : 4y^2 - 9(x-1)^2 = -25$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{25}{9}} - \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{25}{9} \\ b^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = \frac{25}{36} \times 13 \Rightarrow c = \frac{5}{6} \sqrt{13} \Rightarrow ff' = 2c = \frac{5}{3} \sqrt{13}$$

$$S(-1, -1), a(0, 0), B(-2, 0)$$

$$S = \frac{1}{4}(2 \times 1) = 1$$



۳۶۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos 20^\circ - \cos 80^\circ = 2 \sin 50^\circ \sin 30^\circ = \sin 50^\circ = \cos 40^\circ$$

۳۶۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(R\alpha)^n = R(n\alpha)$$

۳۶۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow A^4 = R_{\pi} = \begin{bmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{6}{9} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow BD = 4$$

۳۶۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = (x-1)^2 - 1$$

$$x-1 = \sqrt{y+1} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{1+y}$$

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$$

۳۶۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A : 2 \times 3 \quad B^T : 3 \times 4 \Rightarrow A \cdot B^T : 2 \times 4$$

۳۷۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۳۷۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. کافیت ماتریس تبدیل را در نقطه مورد نظر ضرب کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow (1, 11)$$

$$x = A^{-1} \cdot A^t = - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ +1 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +4 & +5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

۳۷۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{توجه: } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۳۷۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در کتاب درسی آمده است: تساوی دو ضلع

۳۷۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گزینه ۱ و ۳ و ۴ خواص کلی ب.م.م.ک است و مثال نقص گزینه ۲ اعداد ۴ و ۶ و ۱۲ می باشد.

۳۵۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر دو فرزند دوقلو را X بگیریم و ۲ فرزند اول دوقلو باشد فضای نمونه چنین است.

$$S = \{(X, \text{پسر}), (X, \text{دختر}), (X, \text{پسر}), (X, \text{دختر})\}$$

که X چهار حالت دارد: (پ و پ)، (پ و د)، (د و پ)، (د و د) که عملاً فضای نمونه

$$p(\text{فرزند اول پسر}) - p(\text{پسر و دوقلو}) = \frac{1}{2} - \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$a \equiv b \Rightarrow a - b = 12k \xrightarrow{\text{طبق گزینه ها}} 59 - 23 = 36 = 12 \times 3$$

۳۵۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \theta \Rightarrow 8 = 4 \times 4 \cos \theta \Rightarrow \theta = 60^\circ$$



۳۵۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$p(x) = |5 - x^2| \quad p'(x) = \begin{cases} -2x \\ 2x \end{cases} \Rightarrow p'(1) = -2, p'(4) = 8$$

۳۶۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$p'(1) + p'(4) = -2 + 8 = 6$$

$$a_{ij}^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{ji} = \frac{1}{-4} \times (-2) = \frac{1}{2}$$

۳۶۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

۳۶۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2(y+1)^2 = x - b + 2 \Rightarrow (y+1)^2 = \frac{1}{2}(x - b + 2) \Rightarrow 2p = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

$$\text{راس } A \begin{vmatrix} b-2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \text{ کانون } f \begin{vmatrix} b-2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = b - \frac{15}{8} = \frac{17}{8} \Rightarrow b = 4$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2i - 2j + k \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

۳۶۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$-f(x) < 0 \Rightarrow f(-f(x)) = 4 \Rightarrow f(4) = 2$$

۳۶۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳۸۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $\binom{12}{2} - 12 = 54$   $\Rightarrow$  تعداد اقطار  $\binom{n}{2} - n$ : روش اول

روش دوم  $\Rightarrow$  تعداد اقطار  $n$  ضلعی محدب: توجه: روش دوم  $\Rightarrow$  تعداد قطر  $= \frac{n(n-3)}{2} = \frac{12(12-3)}{2} = 54$

۳۸۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} y + 2x + 4 \\ 2y + x = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 2 \quad \frac{m^3 - 1}{m - 1} = 3 \quad m^2 + m + 1 = 3 \Rightarrow m = -2$$

$$(m + 2)(m - 1) = 0$$

۳۷۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هرگاه در  $n$  بار انجام عملی بخواهیم دقیقاً  $K$  بار موفق شویم احتمال موفقیت برابر است با:

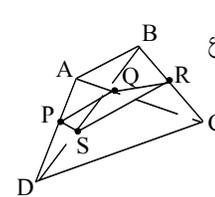
۳۷۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $n(s) = 6^2 = 36$

$$A = \{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\} \Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

۳۷۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$91a + 63b = 7 \Rightarrow 13a + 9b = 1 \xrightarrow{\text{پیمانه 9}} 13a + 9b = 1 \Rightarrow 4a + 0 \equiv 1 \Rightarrow 4a \equiv -8 \Rightarrow a \equiv -2 \Rightarrow a = 9K - 2$$

$$13a + 9b = 1 \xrightarrow{\text{جاگذاری در رابطه}} b = -13K + 3 \Rightarrow a + b = -4K + 1$$



۳۷۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  $PQ \parallel RS \parallel \frac{AB}{2}$ ,  $PS \parallel RQ \parallel \frac{CD}{2}$  اضلاع

چهارضلعی RQPS مساوی و دو به دو موازی اند پس لوزی است.

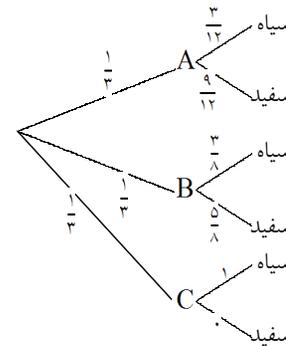
۳۷۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $A - B = \{4\}$

$$B \cap A' = B - A = \{1\} \quad (A - B) \times (B \cap A') = \{(4, 1)\}$$

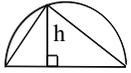
۳۸۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $S = 6a^2$

$$S' = 6 \left( a - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 6a^2 \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}$$

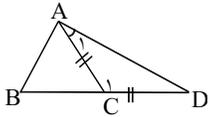
۳۸۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left( \frac{9}{12} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{3}{8} \right) + \frac{1}{3} (1) = \frac{3}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24}$$



۳۹۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. این مثلث در دایره‌ای به قطر وتر محاط است و بیشترین مقدار  $h$  برای آن شعاع دایره (نصف وتر است)  
 $Max = h = \frac{12}{2} = 6$



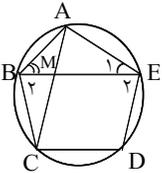
۳۹۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  
 $\hat{C}_1 = 120^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D} = \frac{180 - 120}{2} = 30^\circ$   
 $\hat{BAD} = 60 + 30 = 90$   
 $\hat{B} = 60$   
 $\hat{D} = 30$   
 زوایا با اعداد ۱، ۲ و ۳ متناسبند.

۳۹۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق قضیه کتاب درسی از برخورد نیمسازهای زوایای متوازی الاضلاع، مستطیل به وجود می‌آید.

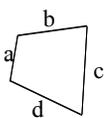
۳۹۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر نصف کبوترها یعنی ۱۱ را در نظر بگیریم، ۱۱ لانه احتیاج داریم که در هر لانه دقیقاً ۲ کبوتر قرار گیرد. بنابراین برای این که در یک لانه بیش از دو کبوتر قرار گیرد، باید حداکثر ۱۰ لانه داشته باشیم.

۳۹۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  
 $n(A) = 17, n(A \Delta B) = 21, n(A \cap B) = 5$   
 $21 = 17 + x - 10 \Rightarrow x = 14$   
 می‌دانیم:  $n(A \Delta B) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

۳۹۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
 $n(S) = \binom{10}{3} = 120$   
 $n(A) = \binom{6}{3} = 20$   
 $\Rightarrow p(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$



۳۹۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با رسم دایره محیطی پنج‌ضلعی داریم:  
 $\hat{B}_7 = \hat{E}_7 \Rightarrow BEDC$  دوزنقه  
 $ED = BC$   
 $BEDC \rightarrow MEDC$  دوزنقه متساوی‌الساقین



۳۹۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چهارضلعی محیطی است و می‌دانیم در ۴ ضلعی محیطی مجموع اضلاع  $a + c = b + d =$  نصف محیط  $= 19$  روبرو با هم برابر است لذا داریم:

۴۰۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم میانه‌ی وارد به یک ضلع از نصف مجموع به ضلع دیگر کوچکتر است لذا:  
 $m < \frac{a+b}{2} = \frac{5+7}{2} = 6$

۳۸۴- طبق تعریف داریم:  
 $c = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \end{cases}, (a', b') = 1$

در این سوال داریم:  
 $\left. \begin{aligned} \frac{a}{c} &= a'd \\ \frac{ab}{c} &= a'b'd \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left( \frac{a}{c}, \frac{ab}{c} \right) = |a'd| = a$

پس گزینه ۱ صحیح است.

۳۸۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + y^2 = 737 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy(x+y) = 737 \Rightarrow |1331| - 23xy = 737 \Rightarrow xy = \frac{|1331| - 737}{23} = 18$$

۳۸۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
 $\sqrt{(x-3)^2} = 3 - |x| \Rightarrow |x-3| + |x| = 3$

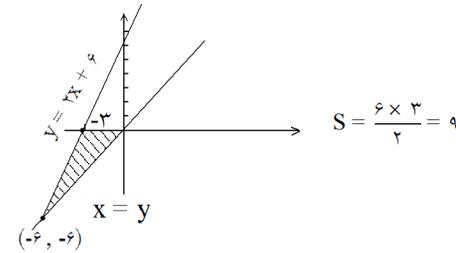
$$0 \leq x \leq 3 \Rightarrow |x-3| + |x| = 3 - x + x = 3$$

۳۸۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
 $\log \frac{1}{a} = 2/148 \Rightarrow \log a = -2/148$

$$x = a^3 \Rightarrow \log x = 3 \log a = -6/544, -7 < \log x < -6 \Rightarrow 10^{-7} < x < 10^{-6} \Rightarrow$$

X، ۶ صفر بعد از ممیز دارد.

۳۸۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۳۸۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  
 $\operatorname{tg} 75^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ = \cot 15^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ = 2 \operatorname{Cotg} 30^\circ = 2\sqrt{3}$

نکته:  $\operatorname{Cotg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{Cotg} 2\alpha$

۳۹۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
 $|2A^{-1}| = 2 \cdot 2 \cdot |A^{-1}| = \frac{4}{|A|} = \frac{4}{10+6} = \frac{1}{4}$

۳۹۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  
 $b^2 = (\sqrt{2} + 1)(1 - \sqrt{2}) \Rightarrow b^2 = 1 - 2 \Rightarrow b^2 = -1$  غیر ممکن است.

۴۰۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = g(f(x)) \Rightarrow y = \sqrt{\sin 2x} \Rightarrow y' = \frac{2 \cos 2x}{2\sqrt{\sin 2x}} \Rightarrow y' \left( \frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

۴۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left| \frac{2x-3}{x+2} \right| < 1 \Rightarrow |2x-3| < |x+2| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4x^2 - 12x + 9 < x^2 + 4x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 16x + 5 < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 5 \Rightarrow -\frac{5}{3} < x - \frac{1}{3} < \frac{5}{3} \Rightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| < \frac{5}{3} \Rightarrow |3x - 1| < 5$$

۴۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n - n] = \sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n^2 + 2n} - n] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \cdot = \cdot$$

$$\cdot < \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} < 1 \Rightarrow \left[ \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \right] = \cdot$$

تذکر:

۴۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = 0.1272727 \Rightarrow \begin{cases} 10A = 1.272727 \\ 1000A = 1272.727 \\ 100A = 127.2727 \end{cases} \Rightarrow 1000A - 10A = 1272.727 - 1.272727$$

$$\Rightarrow A = \frac{126}{990} = \frac{14}{110} = \frac{7}{55} \Rightarrow 8 - \frac{1}{A} = 8 - \frac{55}{7} = \frac{1}{7}$$

۴۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

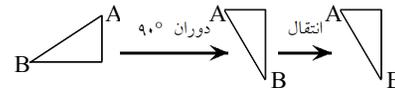
$$f \Rightarrow f'(x_0) = f'(x_0) = 1 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = 1$$

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

۴۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

۴۰۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تبدیل انتقال اضلاع نظیر - نظیر موازیند.



$$R_1 = f(-1) = -a + b - 2 = 4 \Rightarrow b - a = 6$$

۴۰۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$R_2 = g(2) = 8 + 2a - 2b = 8 - 2(b - a) = 8 - 2 \cdot 6 = -16$$

۴۰۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= x_1 + 2 \Rightarrow x_2 - x_1 = 2 \\ x_2 + x_1 &= m \\ x_1 x_2 &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x_2 &= m + 2 \Rightarrow x_2 = \frac{m+2}{2} \\ x_1 &= \frac{m-2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{m^2 - 4}{4} = 4 \Rightarrow$$

$$m^2 = 20 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{5}$$

۴۰۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = g(f(x)) \Rightarrow (x^2)^2 + x^2 = (x^2 + x)^2 \Rightarrow$$

$$x^4 + x^2 = x^4 + 2x^3 + x^2 \Rightarrow 2x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{محور تقارن } x = \frac{-(-2)}{2(1)} = 1 \Rightarrow A(1, -1)$$

۴۰۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

این نقطه فقط در خط  $y = -1$  لای صدق می کند.

۴۰۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + \frac{1}{2^x}}{2^x - \frac{1}{2^x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{2x} + 1}{2^{2x} - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

۴۰۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x+T) = \begin{cases} \sin^2 \pi(x+T) & x+T \in \mathbb{Q} \\ \cdot & x+T \notin \mathbb{Q} \end{cases} \xrightarrow{T=1} f(x+1) = f(x)$$

۴۰۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x-1 = 0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \cdot \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \cdot \end{cases} \Rightarrow$$

f در  $x=1$  پیوسته است. ولی مشتق چپ و راست در این نقطه با هم یکی نیست.

۴۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قطر دایره با آن زاویه قائمه می‌سازد و چون خطوط  $d$  و  $\Delta$  هر دو قطرند لذا محل برخورد ۲ خط مرکز دایره است.

$$f'_x = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}$$

$$f'_y = 0 \Rightarrow 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = -1$$

۴۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه: در مقاطع غیراستاندارد اگر  $\Delta < 0$  باشد، شکل مورد نظر بیشی، نقطه یا تهی است.

$$2x^2 - 3xy + y^2 - x + 2y = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 12 = -3 < 0$$

۴۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بیضی قائم

$$2x^2 - 2x + y^2 + 6y = 5 \Rightarrow 2(x-1)^2 - 2 + (y+3)^2 - 9 = 5$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2} \Rightarrow ff' = 2c = 4\sqrt{2}$$

۴۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شرط وارون پذیری:  $|A| \neq 0$  پس:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & a & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 2(a-15) - (4-0) \neq 0 \Rightarrow 8a - 34 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{17}{4}$$

۴۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -I \Rightarrow A^4 = I \Rightarrow M = I$$

پس تبدیل هر نقطه توسط  $M$ ، همان نقطه خواهد شد.

۴۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر کامل بود

$$p = 8 \rightarrow q = \binom{8}{2} = 28, \text{ منتظم } 7$$

چون باید یک یال برداریم پس ۲ راس، درجه‌ی ۶ می‌شود ولی مابقی درجه‌ی ۷ باقی می‌مانند که تعدادشان ۶ تا است.

۴۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد هر نوع گل

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow \binom{5}{2} = 21$$

۴۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر  $R \circ R \subset R$  باشد، آن گاه  $R$  تراپایی است.

۴۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$n(S) = 3 \times 6 = 18 \Rightarrow p(A) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

۴۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شرط جواب

$$ax + by = c \rightarrow (a, b) \mid c$$

با توجه به گزینه‌ها  $ax + 12y = a \Rightarrow (8, 12) \mid a \Rightarrow 4 \mid a \rightarrow a = 52$  پس:

۴۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$T = \pi \quad x \in [0, \pi]$$

$$S = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

۴۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هیچ یک از شرایط رول برقرار نمی‌باشد. (تابع باید پیوسته باشد ولی در بازه  $[-1, 1]$  به دلیل وجود صفر، ناپیوسته است.)

۴۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(x-1)^2 + 2}{(x-1)^2} dx = \int \left( 1 + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx = x - \frac{2}{(x-1)} + c =$$

$$= \frac{x^2 - x - 2}{x-1} + c \Rightarrow f(x) = x^2 - x - 2$$

۴۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \sin(a, b) = 0 \Rightarrow \sin(\widehat{a, b}) = 0 \Rightarrow a \parallel b$$

۴۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \times 1 + 0 + 1 \times 1}{\sqrt{4+4+1} \times \sqrt{1 \times 1}} = \frac{3}{3 \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\widehat{a, b}) = 45^\circ$$

۴۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} x + z = 1 &\Rightarrow z = -x + 1 \\ z - y = 1 &\Rightarrow z = y + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{فصل مشترک } d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = z \Rightarrow L = (-1, 1, 1)$$

$$B \text{ دلخواه } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{OB} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{OB} \times \vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{|\vec{OB} \times \vec{L}|}{|\vec{L}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

۴۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3z = 6 &\Rightarrow \vec{N} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} \\ \text{محور } y \text{ موازی صفحه است} &\Rightarrow \vec{N} \cdot \vec{L} = 0 \Rightarrow p \parallel d \\ \text{محور } y \text{ راستا} &\Rightarrow \vec{L} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \right\}$$

۴۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 4y^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{25}{16}} = 1$$

$$a^2 = \frac{25}{4}, b^2 = \frac{25}{16} \quad c^2 = a^2 - b^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{3}}{4} \Rightarrow FF' = 2c = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{10\left(3 + \frac{11}{2} + 3 + \frac{20}{2}\right)}{2} = 107/5$$

۴۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{3} - \frac{4}{4} = 12 \\ \frac{3}{3} - \frac{4}{4} = 12 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 24$$

۴۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. رقم یکان عدد سه رقمی ۰ یا ۵ باید باشد:

(رقم تکراری می‌تواند باشد)

۴۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = 0.1090909 \Rightarrow 10A = 1.090909 \dots \Rightarrow 1000A - 10A = 109 - 1$$

$$990A = 108 \Rightarrow A = \frac{108}{990} = \frac{12}{110} \Rightarrow 33A = \frac{36}{10} = 3.6$$

$$\Rightarrow 990A = 108 \Rightarrow A = \frac{108}{990} = \frac{12}{110} \Rightarrow 33A = \frac{36}{10} = 3.6$$

۴۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. راهنمایی: اگر  $S'$  مساحت تصویر یک شکل تحت ماتریس  $S, M$  مساحت آن شکل باشد  $S' = |M|S$  پس:

$$\begin{array}{l} A(2, -2) \\ B(2, 2) \\ C(-2, 2) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} AB = 4 \\ BC = 4 \end{array} \Rightarrow S = AB \times BC = 16$$

$$S' = |M| S = 5 \times 16 = 80$$

۴۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow$$

تابع در فواصل پیوسته صعودی و ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد.

۴۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$2y - mx + (m - 4) = 0 \Rightarrow OH = \frac{|m - 4|}{\sqrt{4 + m^2}} = 2 \Rightarrow |m - 4| = 2\sqrt{4 + m^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 - 8m + 16 = 16 + 4m^2 \Rightarrow 3m^2 + 8m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{m - 4}{m} = \frac{-\frac{8}{3} - 4}{-\frac{8}{3}} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

طول از مبدا

۴۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $\Rightarrow S_n = A$   $\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{A}{15} \\ d = \frac{A}{15} \end{cases} \Rightarrow$  تصاعد حسابی  $\Rightarrow \frac{A}{15}, \frac{2A}{15}, \dots$

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) : A = \frac{n}{2}\left(\frac{2A}{15} + \frac{(n-1)A}{15}\right) \Rightarrow 1 = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{15} + \frac{n}{15}\right) \Rightarrow$

$n^2 + n - 30 = 0 : n = \begin{cases} 5 \text{ ق ق } 6 \\ 5 \text{ ق ق } 6 \end{cases}$

هندسی حسابی

$a_1 = t_1$   
 $a_q = t_q$  :  $t_1, t_2, t_3 \xrightarrow{\text{تساعد هندسی}} t_q = t_1 \cdot t_3$   
 $a_{4q} = t_3$

۴۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$a_q = a_1 \cdot a_{4q} : (a_1 + \lambda d)^q = a_1(a_1 + 4\lambda d) \Rightarrow a_1^q + 4\lambda a_1 d + 4\lambda^2 d^2 = a_1^q + 4\lambda a_1 d \Rightarrow a_1 = 2d$

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = a_1 = 2d \\ t_q = a_q = a_1 + \lambda d = 10d \Rightarrow q = \frac{t_q}{t_1} = 5 \end{cases}$

۴۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با هر ۲ نقطه‌ای که انتخاب کنیم، یک وتر ساخته می‌شود:  $\binom{7}{2} = 21$

۴۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $n(S) = 6^2 = 36$

$A = \{(5, 5), (4, 6), (6, 4), (6, 5), (5, 6), (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

۴۵۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \times \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \times \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$

۴۵۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$\sin^2 x - \cos^2 x = 0 : \sin^2 x = \cos^2 x : \tan^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 1 : x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \tan x = -1 : x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$

پس در یک دور دارای ۴ جواب است.

۴۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$\begin{cases} x+y > 4 \\ 6 - \frac{1}{2}y > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y > 4 \\ -x - \frac{1}{2}y > -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y > 4 \\ -2x-y > -12 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} x+y > 4 \\ -x > -8 \end{cases} \Rightarrow x < 8$

۴۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} + \sqrt{\frac{2-x}{x}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x+3} \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول}} x < -3 \cup x \geq 1 \\ \frac{2-x}{x} \geq 0 \xrightarrow{\text{جدول}} 0 < x \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 \leq x \leq 2$

۴۴۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر منحنی  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  بعد از انتقال محور به فرم  $y = \frac{A}{x}$  درآید مقدار A برابر است

با:  $C = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 : A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

۴۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  $f(g(x)) = x^4 : \begin{cases} f(x^2-1) = x^4 \\ x^2-1 = x : x^2 = x+1 \end{cases} : f(x) = (x+1)^2$

۴۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. یادآوری:  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$4x+2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

۴۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $\text{Log}_7(4x+2) - 2 \text{Log}_7 \sqrt{x+4} = 1 \Rightarrow \text{Log}_7 \left( \frac{4x+2}{x+4} \right) = 1 \Rightarrow$

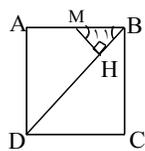
$\frac{4x+2}{x+4} = 7 \Rightarrow 4x+2 = 7x+28 \Rightarrow x = -3$

۴۴۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  $M : \text{بیشترین داده} : m : \text{کمترین داده} \Rightarrow d_1 = M - m$

$d_r = (M+r) - (m+r) = M - m = d_1$

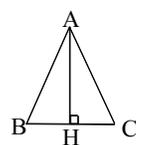
۴۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  $\alpha_i = \bar{f}_i \times 360 \Rightarrow 60 = \bar{f}_A \times 360 \Rightarrow \bar{f}_A = \frac{1}{6}$

$\bar{f}_A = \frac{f_A}{n} \Rightarrow f_A = 1000$



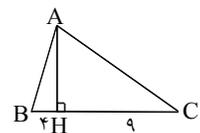
۴۶۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} MB^2 &= \sqrt{2} MH^2 \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{2} MB \\ MB &= \frac{AB}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{2}}{4} AB$$



۴۶۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده بر نیمساز زاویه بین ۲ ساق منطبق است. بنابراین خواهیم داشت:

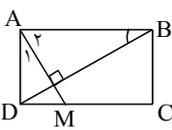
$$S = \frac{AH \times BC}{2} = 12 \Rightarrow \frac{AH \times 8}{2} = 12 \Rightarrow AH = 3$$



۴۶۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث قائمه، ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین پاره‌خطهایی است که توسط این ارتفاع بر روی وتر ایجاد می‌شوند.

$$AH^2 = BH \cdot CH = 36 \Rightarrow AH = 6$$

$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{6 \times 12}{2} = 36$$



۴۶۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_2 &= 90 \\ A_2 + B_1 &= 90 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle ABD \Rightarrow$$

$$\frac{AD}{DM} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{DM} = 2 \Rightarrow DM = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{4} \Rightarrow \frac{DM}{MC} = \frac{1}{3}$$

$$AH = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

۴۶۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{81 - 32} = 7$$

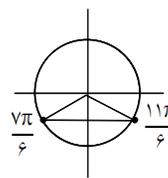
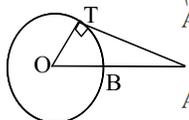
$$V = \frac{1}{3} (\text{مساحت قاعده}) \times \text{ارتفاع هرم} = \frac{1}{3} (8 \times 8) \times 7 = \frac{448}{3}$$

۴۶۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: فاصله A تا نزدیکترین نقطه از دایره از رسم قطر مرسوم از A بوجود می‌آید.

$$AB = 8 \text{ و } OB = 5 \Rightarrow AO = 13$$

با توجه به اینکه شعاع OT بر خط مماس AT عمود است، داریم:

$$AT^2 = AO^2 - OT^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AT = 12$$



۴۵۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  
-۱ = بیشترین مقدار  $\rightarrow -2 \leq \frac{1}{\sin x} \leq -\frac{1}{2} : -1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$

$$\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cot x - \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$$

۴۵۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم:

$$\left\{ \begin{aligned} \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{B+C}{2} = 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} + \sin \frac{B+C}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{B+C}{2} [2 \cos \frac{B-C}{2} + 1] = \sin \frac{B+C}{2} [2 \cos \frac{B-C}{2} + 1]$$

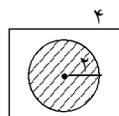
$$= \cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow B + C = 90^\circ \Rightarrow A = 90^\circ$$

$$A' - B = A' \cap B' = B' \cap A' = B' - A$$

۴۵۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴۵۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۵۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سور «بعضی» تقیض سور «هر» می‌باشد.



۴۵۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
 $S_S = S_{\text{مربع}} = 16$   
 $S_A = \pi r^2 = 4\pi$   
 $\Rightarrow P(A) = \frac{S_A}{S_S} = \frac{\pi}{4}$

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

۴۵۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \Rightarrow P(B) = P(A \cup B) = \frac{1}{3}$$

۴۶۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

انتخاب ۲ گوی از ۵ گوی:  $n(S) = \binom{5}{2} = 10$   
یکی سیاه و یکی سفید:  $n(A_1) = \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} = 6$   
هر دو گوی سیاه:  $n(A_2) = \binom{3}{2} = 3$   
 $\Rightarrow P(A) = \frac{n(A_1) + n(A_2)}{n(S)} = \frac{9}{10}$

$$2 \operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x = K - 1 : 2 \operatorname{tg}^2 x + 1 = (K - 1) \operatorname{tg} x \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

۴۶۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2 \operatorname{tg}^2 x - (K - 1) \operatorname{tg} x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x' + \operatorname{tg} x'' = \frac{K - 1}{2} \\ \operatorname{tg} x' \cdot \operatorname{tg} x'' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x' + x'' = \operatorname{Arctg} 2 \Rightarrow \operatorname{tg}(x' + x'') = 2 \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} x' + \operatorname{tg} x''}{1 - \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} x''} = 2 \Rightarrow \frac{K - 1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow K = 3$$

۴۶۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y(x + 3) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x + 1}{x + 3} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانِب قائم } x = -3 \\ \text{مجانِب افقی } y = 2 \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{matrix} -3 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

۴۶۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = [f(x)]^2 \Rightarrow g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow g'(3) = 2 \times f(3) \times f'(3) = 2 \times 3 \times \frac{5}{4} = 7.5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = f'(2) = \frac{5}{4}$$

۴۷۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} y = \operatorname{Arctg} x \rightarrow \text{مماس } m = f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \text{مماس } m = f'(1) = \frac{1}{2} \\ x = 1 \rightarrow y = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(x - 1) \end{cases}$$

تلاقی با  $y = x$  خط مماس  $\rightarrow x - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - 1$

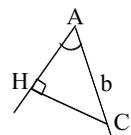
$$f(x) = a \sin x + b \cos x \rightarrow R_f = \left[ -\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + b^2} \right] \text{ . گزینه ۲ پاسخ صحیح است.}$$

$$f(x) = \sin x - 2 \cos x \Rightarrow f_{\text{بیشترین}} = \sqrt{1 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

۴۷۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{1}{x^2 + 3} \rightarrow y' = \frac{-2x}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow y'' = \frac{6x^2 - 6}{(x^2 + 3)^3} < 0 \Rightarrow 6x^2 - 6 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

همواره مثبت



۴۶۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا زاویه  $A$  را رسم کرده  $AC = b$  را بر روی یکی از اضلاع آن اختیار می‌کنیم. نقطه‌ی  $B$  بر روی ضلع دیگر زاویه و بفاصله‌ی  $a$  از رأس  $C$  قرار دارد، بنابراین بر روی دایره‌ای به مرکز  $C$  و شعاع  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}b$  قرار دارد.

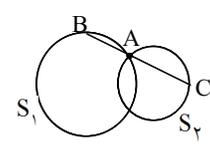
$$\sin \hat{A} = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{3}}{2}b > a$$

مطابق شکل داریم:

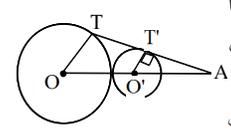
با توجه به اینکه فاصله‌ی نقطه‌ی  $C$  از اضلاع دیگر زاویه‌ی  $(CH)$  از شعاع دایره‌ی  $(a)$  بیشتر است. بنابراین دایره ضلع دیگر زاویه را قطع نمی‌کند. بنابراین مسئله فاقد جواب است.

$$\begin{cases} X = -y \\ Y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -X \\ x = Y \end{cases} \xrightarrow{\text{با جایگزینی در معادله خط داریم}} 2(-X) - 3(Y) = 6 \Rightarrow -2X - 3Y = 6$$

$$-2X - 3Y = 6 \text{ و یا } 2X + 3Y = -6$$



۴۶۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل هرگاه قاطع  $ABC$  در  $2$  دایره وترهای مساوی  $AB$  و  $AC$  را جدا کند، می‌توان گفت نقطه‌ی  $C$  قرینه‌ی  $B$  نسبت به نقطه‌ی  $A$  خواهد بود بنابراین هرگاه دایره‌ی  $S_1$  را نسبت به  $A$  قرینه‌ی کنیم دایره‌ی  $S_2$  را در نقطه‌ی  $C$  قطع کرده و امتداد  $AC$  جواب مسأله خواهد بود.



۴۷۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون خط‌های مرکزین برابر مجموع شعاعهای دایره است لذا  $2$  دایره مماس خارجند. هرگاه  $A$  محل برخورد مماس مشترک خارجی با خط‌های مرکزین باشد، مرکز تنجاس  $2$  دایره خواهد بود.

$$\frac{AO'}{AO} = \frac{OT'}{OT} \Rightarrow \frac{AO'}{AO' + OO'} = \frac{R'}{R} \Rightarrow \frac{AO'}{AO' + 8} = \frac{3}{5} \Rightarrow AO' = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{2 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{2x}} \stackrel{\text{هویتال}}{=} \lim_{x \rightarrow 8} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2x}}} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{8}}}{-\frac{1}{\sqrt{16}}} = \frac{1}{3}$$

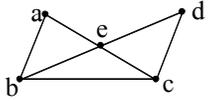
۴۷۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$d \times d' = L \neq 0$$

۴۸۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر  $d$  و  $d'$  مجانبهای هذلولی باشند، داریم:

$$(y - 2x + 1)(y + 2x - 3) = L \xrightarrow{A(1 + \sqrt{2}, 3)} (2 - 2\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2}) = L \Rightarrow L = -4$$

$$y = 0 \Rightarrow (0 - 2x + 1)(2x - 3) = -4 \Rightarrow -4x^2 + 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$



abca, decd, edcb, eabc, ebc, eabced

دورها:

۴۸۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر شکل گراف را رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$a^{p-1} \equiv 1, (a, p) = 1$$

۴۸۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قضیهی فرما:

$$v^{16} \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} v^{32} \equiv 1 \Rightarrow v^{16} \equiv 1 \Rightarrow 5 \times 16 \equiv 5 \Rightarrow 1 \equiv 5 + a \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 13$$

$$ab | c, (a, b) = 1 \Rightarrow a | c, b | c, p^n | c^k \Rightarrow p | c$$

$$54 | (a+b)^3 \Rightarrow 2 \times 3^3 | (a+b)^3 \Rightarrow \begin{cases} 2 | (a+b) \\ 3 | (a+b) \end{cases} \xrightarrow{(a,b)=1} \begin{cases} 2 \nmid a \\ 2 \nmid b \\ 3 \nmid a \\ 3 \nmid b \end{cases}$$

$$(36, a) = 1 \Rightarrow [36, a] = 36a$$

پس:

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p, q = 1 - p$$

$$P(X = 5) = q^4 \cdot p = (0.8)^4 \times 0.2 = 0.16384$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{6}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + 5 \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5}{6} \left[ \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \right] = \frac{5}{6} \left( \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}} \right) \Rightarrow$$

$$\text{نقاط بحرانی} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) \text{ نشده} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ 4 \end{cases}$$

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{N} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{M} \text{ وسط } AB = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P: -2(x-2) - 4(y-0) - 1\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2x + 4y + z = 4/5 \Rightarrow 2x + 4y = 4/5 \Rightarrow 2x + 4y = 9$$

۴۷۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{Cotg} x)^x dx = \int (\operatorname{tg}^x x + \operatorname{Cotg}^x x + 2) dx = \int (1 + \operatorname{tg}^x x) dx + \int (1 + \operatorname{Cotg}^x x) dx =$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{Cotg} x + C$$

$$y = \frac{1}{x}$$

۴۷۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$a_n = (-1)^n \operatorname{Cos} (n\pi) = (-1)^n (-1)^n = 1$$

۴۸۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$t - 1 : n \rightarrow \infty$$

۴۸۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)(t+1)}{2t(t-1)} = 2$$

$$h = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (y - 2x) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)}{(t-1)} - \frac{2t}{t-1} = 0$$

۴۸۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$U_n \cong \int_2^3 (x^2 + 2x) dx = \frac{24}{3}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -5i - 6j + 4k = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

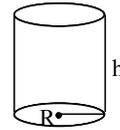
۴۸۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{N} = \vec{L}_1 \times \vec{L}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3i - 5j + k = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

۴۸۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \text{خط} \Rightarrow A \in \text{صفحه} \Rightarrow -2(x-0) - 5(y+1) + (z-2) = 0 \Rightarrow 2x + 5y - z = -7$$

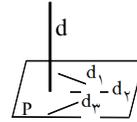
$$\text{معادله صفحه: } a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$



۴۹۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت جانبی استوانه برابر محیط قاعده ضربدر ارتفاع استوانه می‌باشد.

$$\begin{aligned} (2\pi R) \times h &= 24\pi \\ h &= 3 \Rightarrow R = 4 \end{aligned}$$

$$V = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^2 \times h = \pi \times 16 \times 3 = 48\pi$$



۴۹۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تصویر یک خط بر صفحه، نقطه است. بنابراین خط مورد نظر بر صفحه عمود می‌باشد. و مطابق قضیه‌ی کتاب هرگاه خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، بر تمام

$$d \perp p \Rightarrow \begin{cases} d \perp d_1 \\ d \perp d_2 \\ d \perp d_3 \end{cases}$$

خطوط آن صفحه عمود است.