پاسخ تشریحی آزمون سراسری سال ۱۳۹۴

درس ریاضی، رشته علوم ریاضی و فنی

نگارش:

مهرداد معدنی‌پور

: 0935 – 6061745

: *mehrdad.mdpour@gmail.com*

مهرداد معدنی‌پور
mehrdad.mdpour@gmail.com
۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

۱۰۱ـ جملات دنباله $۲/۳۹, ۲/۳۹۹, ۲/۳۹۹۹, ۲/۳۹۹۹۹, \cdots$ به یک عدد ثابت و گویا بسیار نزدیک می‌شود. جمله دهم دنباله تفاضل آن‌ها از این عدد ثابت کدام است؟

۱) $۱۰^{-۱۱}$ ۲) $۱۰^{-۱۰}$ ۳) $۱۰^{-۹}$ ۴) ۲×۱۰^{-۱۰}

واضح است که جملات دنباله به ۲/۴ نزدیک می‌شوند. دنباله تفاضل این اعداد از ۲/۴ به صورت زیر است:

$$۰/۰۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۰۰۱, \cdots$$

پس جمله دهم برابر $۰.\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{۱۰ تا}}۱$ یعنی $۱۰^{-۱۱}$ خواهد شد. گزینه ۱

۱۰۲ـ تابع $f(x)=\log_{۳}(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x\in(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ بامعنی است. اگر $f(۴)=۲$، آنگاه $f(-\frac{۴}{۹})$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

برای تعیین دامنه تابع لگاریتمی، آرگومان داخل لگاریتم باید مثبت باشد. پس $-\frac{۱}{۲}$ ریشه $ax+b$ است. یعنی: $-\frac{a}{۲}+b=۰$

$$f(۴)=۲\Rightarrow \log_{۳}(۴a+b)=۲\Rightarrow ۴a+b=۹\Rightarrow \begin{cases}-\frac{a}{۲}+b=۰\\ ۴a+b\quad=۹\end{cases}\Rightarrow \frac{۹a}{۲}=۹\Rightarrow a=۲, b=۱\Rightarrow$$

$$f(-\frac{۴}{۹})=\log_{۳}\left(۲(-\frac{۴}{۹})+۱\right)=\log_{۳}\left(\frac{۱}{۹}\right)=-۲$$

گزینه ۱

۱۰۳ـ مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $۲۴\sqrt{۵}$ واحد مربع است. بزرگ‌ترین ضلع این مثلث کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲۴

اگر زاویه بین دو ضلع را θ و ضلع سوم را a فرض کنیم، مساحت مثلث از رابطه روبرو بدست می‌آید: $\frac{۱}{۲}(۹)(۱۶)\sin\theta=۲۴\sqrt{۵}$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{۲۴\sqrt{۵}}{۷۲}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}\Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{۱-\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^{۲}}=\pm\sqrt{\frac{۴}{۹}}=\pm\frac{۲}{۳}\Rightarrow a^{۲}=۹^{۲}+۱۶^{۲}-۲(۹)(۱۶)\cos\theta$$

$$=۸۱+۲۵۶\pm۲(۹)(۱۶)\left(\frac{۲}{۳}\right)=۳۳۷\pm۱۹۲=۵۲۹, ۱۴۵\Rightarrow a=\sqrt{۵۲۹}=۲۳$$

گزینه ۳

۱۰۴ـ با ارقام $۱, ۲, ۳, \cdots, ۹$ به چند طریق می‌توان یک عدد پنج‌رقمی ساخت،به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟

۱) ۶۴۰۰ ۲) ۷۲۰۰ ۳) ۸۴۰۰ ۴) ۹۶۰۰

ابتدا از میان پنج جایگاه ارقام عدد مورد نظر، ۲ جایگاه برای ارقام زوج انتخاب می کنیم دو رقم انتخاب می کنیم: $\binom{۵}{۲}=۱۰$ در این دو جایگاه، باید اعداد زوج $۲, ۴, ۶, ۸$ قرار گیرد و در سه جایگاه بعدی، ارقام فرد $۱, ۳, ۵, ۷, ۹$. پس جواب مسئله به صورت زیر است:

$$۱۰\times(۴\times۳)\times(۵\times۴\times۳)=۱۰\times۱۲\times۶۰=۷۲۰۰$$

گزینه ۲

۱۰۵ـ تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۳

جملات با ردیف فرد یک دنباله هندسی را می‌دهند. اگر جمله اول و قدر نسبت دنباله اصلی به ترتیب a و q باشد، قدر نسبت جملات با ردیف فرد $q^{۲}$ خواهد شد. اولین جمله جملات با ردیف فرد نیز a است. تعداد کل جملات $۲n$ و تعداد جملات با ردیف زوج و تعداد جملات با ردیف فرد هردو برابر n خواهند بود. طبق فرمول مجموع جملات دنباله هندسی داریم: $\boxed{S_N=\frac{a(q^N-۱)}{q-۱}}$

$$S_{\text{همه جملات}}=۳S_{\text{جملات فرد}}\Rightarrow \frac{\cancel{a}\cancel{\left(q^{۲n}-۱\right)}}{q-۱}=۳\times\frac{\cancel{a}\cancel{\left((q^{۲})^{n}-۱\right)}}{q^{۲}-۱}\Rightarrow \frac{۱}{q-۱}=\frac{۳}{q^{۲}-۱}\Rightarrow q=۲$$

گزینه ۳

مهرداد معصومی‌پور mehrdad.mdpour@gmail.com ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

۱۰۶ـ به ازای مقداری از a چندجمله‌ای $f(x)=x^۴+ax^۳-۸x$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه معادله $f(x)=۰$ کدام است؟

۱) $۱-\sqrt{۳}$ ۲) $۱-\sqrt{۵}$ ۳) $-۱-\sqrt{۳}$ ۴) $-۱-\sqrt{۵}$

باید $f(-۲)=۰$

$$(-۲)^۴+a(-۲)^۳-۸(-۲)=۰\Rightarrow ۸a=۳۲\Rightarrow a=۴\Rightarrow f(x)=x^۴+۴x^۳-۸x=۰\Rightarrow x(x^۳+۴x^۲-۸)=۰$$

باید $x^۳+۴x^۲-۸$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد.

$$\begin{array}{r|l} x^۳+۴x^۲-۸ & x+۲ \\ \cline{2-2} -x^۳-۲x^۲ & x^۲+۲x-۴ \\ \cline{1-1} ۲x^۲-۸ & \\ -۲x^۲-۴x & \\ \cline{1-1} -۴x-۸ & \\ ۴x+۸ & \end{array}$$

$$f(x)=x(x+۲)(x^۲+۲x-۴)=۰\Rightarrow x=۰,-۲,x^۲+۲x-۴=۰$$

$$\Delta=۲^۲-۴(۱)(-۴)=۲۰\Rightarrow x=\frac{-۲\pm\sqrt{۲۰}}{۲}=\frac{-۲\pm۲\sqrt{۵}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۵}$$

$\Rightarrow$ کوچک‌ترین ریشه $=-۱-\sqrt{۵}$ **گزینه ۴**

۱۰۷ـ حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

با مربع کامل کردن و یک تغییر متغیر، می‌توانیم مسئله را ساده تر کنیم:

$$(x+۲)^۲-۱=\sqrt{(x+۲)^۲+۱}\xrightarrow{(x+۲)^۲=t}t-۱=\sqrt{t+۱}\Rightarrow t^۲-۲t+۱=t+۱\Rightarrow t^۲-۳t=۰$$

$$\begin{cases} t=۰\Rightarrow (x+۲)^۲=۰ \quad \text{غیرقابل قبول} \quad -۱=\sqrt{۱} \\ t=۳\Rightarrow (x+۲)^۲=۳ \quad \text{قابل قبول}\Rightarrow x+۲=\pm\sqrt{۳}\Rightarrow x=-۲\pm\sqrt{۳} \end{cases}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $=(-۲-\sqrt{۳})(-۲+\sqrt{۳})=۴-۳=۱$ **گزینه ۲**

۱۰۸ـ نمودار تابع $y=|۲x-۶|-|x+۴|+x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

۱) $-x+۶;x<-۴$ ۲) $-x+۵;x>۲$

۳) $-\frac{۱}{۲}x+۱;--۴<x<۳$ ۴) $-\frac{۱}{۲}x+۱;-۴<x<۱۰$

ریشه داخل قدر مطلق‌ها ۴− و ۳ است. قدر مطلق‌ها را باز می‌کنیم:

$$y=\begin{cases} -(۲x-۶)+(x+۴)+x=۱۰ & ;x<-۴ \\ -(۲x-۶)-(x+۴)+x=-۲x+۲ & ;-۴<x<۳ \quad \text{اکیدا نزولی} \\ (۲x-۶)-(x+۴)+x=۲x-۱۰ & ;x>۳ \end{cases}$$

$$y=-۲x+۲,\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}}x=-۲y+۲\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

دامنه تابع معکوس، برابر برد تابع اصلی است.

$$-۴<x<۳\Rightarrow ۸>-۲x>-۶\Rightarrow ۱۰>-۲x+۲>-۴\Rightarrow \text{برد}=(-۴,۱۰)$$ **گزینه ۴**

۱۰۹ـ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin x+\sin ۲x}{\cos x+\cos ۲x}=\cot ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{k\pi}{۵}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۵}$ ۳) $\frac{۳k\pi}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}(۲k+۱)\pi$

هیچ گزینه‌ای درست نیست

$$\frac{\sin x+\sin ۲x}{\cos x+\cos ۲x}=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow$$

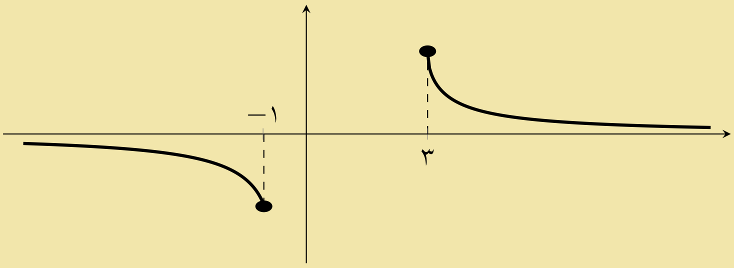
$$\sin^۲x+\sin x\sin ۲x=\cos^۲x+\cos x\cos ۲x\Rightarrow \sin^۲x-\cos^۲x=\cos x\cos ۲x-\sin x\sin ۲x\Rightarrow -\cos ۲x=\cos ۳x$$

$$\cos(۲x+\pi)=\cos ۳x\Rightarrow ۳x=۲k\pi\pm(۲x+\pi)\begin{cases} x=(۲k+۱)\pi\xrightarrow{k=۰}x=\pi\Rightarrow \text{مخرج}=۰ \\ ۵x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۵}\xrightarrow{k=۵}x=\pi\Rightarrow \text{مخرج}=۰ \end{cases}$$

مهرداد معدنی‌پور mehrdad.mdpour@gmail.com ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

۱۱۰ــ شکل روبرو، نمودار تابع $y=\sin^{-1}\Big((U(x)\Big)$ است. ضابطه $U(x)$ به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۲}{x-۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱-x}$ ۳) $\frac{۱}{x-۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲-x}$



حد تابع، وقتی $x\to+\infty$ طبق نمودار برابر ۰^+ است. پس حد تابع داخل $\sin^{-1}$ هم باید ۰^+ باشد. زیرا تابع $\sin^{-1}$ صعودی است. بنابراین گزینه‌های ۲ و ۴ حذف می‌شوند. همچنین، تابع به ازای $x=۰$ نباید تعریف شده باشد. پس گزینه ۳ رد می‌شود. چون دامنه $\sin^{-1}$، بازه $[-۱,۱]$ است و به ازای $x=۰$ ، $\sin^{-1}\left(-\frac{۱}{۲}\right)$ بدست می‌آید که تعریف شده است.

گزینه ۱

۱۱۱ــ حاصل عبارت $۱۶۹\sin\left(۲\cos^{-1}(-\frac{۵}{۱۳})\right)$ کدام است؟

۱) -۱۲۰ ۲) ۶۰ ۳) -۶۰ ۴) ۱۲۰

$$۰\le\alpha\le\pi\Rightarrow\sin\alpha=+\sqrt{۱-\cos^۲\alpha}$$

$$۱۶۹\sin\Big(۲\underbrace{\cos^{-1}(-\tfrac{۵}{۱۳})}_{\alpha}\Big)=۱۶۹\sin ۲\alpha=۱۶۹\Big(۲\sin\alpha\cos\alpha\Big)$$

$$۱۶۹\times۲\times\sqrt{۱-\left(-\frac{۵}{۱۳}\right)^۲}\times\left(-\frac{۵}{۱۳}\right)=-۱۶۹\times۲\times\sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۶۹}}\times\frac{۵}{۱۳}=-\frac{\cancel{۱۶۹}\times۲\times۱۲\times۵}{\cancel{۱۳}\times\cancel{۱۳}}=-۱۲۰$$

گزینه ۱

۱۱۲ــ به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x} & x>۲\\ x-a & x\le ۲\end{cases}$ همواره پیوسته است؟

۱) ۱٫۲ ۲) ۱٫۴ ۳) ۲٫۴ ۴) ۳٫۲

$$\lim_{x\to۲}f(x)=f(۲)\Rightarrow\lim_{x\to۲}\frac{a(۱+\sqrt[۳]{۱-x})}{x^۲-۲x}=۲-a=\frac{۰}{۰}\ \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\ \lim_{x\to۲}\frac{a\left(\dfrac{-۱}{۳\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}\right)}{۲x-۲}$$

$$\Rightarrow ۲-a=\frac{a\left(\frac{-۱}{۳}\right)}{۲}\Rightarrow\frac{-a}{۳}=۴-۲a\Rightarrow ۱۲-۶a=-a\Rightarrow a=\frac{۱۲}{۵}=۲٫۴$$

گزینه ۳

۱۱۳ــ حدّ دنباله $a_n=\left(\frac{n+۲}{n+۱}\right)^{۲n+۳}$ وقتی $n\to\infty$ کدام است؟

۱) $۲e$ ۲) $e^۲$ ۳) $۳e$ ۴) $۳e^۲$

نکته

در حدهای ۱^∞ و $۰^۰$ و $\infty^۰$ می‌توان ابتدا از عبارت داده شده $\ln$ گرفت و آن را به $\frac{۰}{۰}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرد و حد را بدست آورد. جواب مسئله $e^{\text{حد جدید}}$ است.

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+۲}{n+۱}\right)^{۲n+۳}=\lim_{n\to\infty}(۲n+۳)\ln\left(\frac{n+۲}{n+۱}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+۲}{n+۱}\right)}{\frac{۱}{(۲n+۳)}}\ \overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-۱}{(n+۱)^۲}}{\frac{-۲}{(۲n+۳)^۲}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(۲n+۳)^۲}{۲(n+۱)^۲}=\frac{۱}{۲}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲n+۳}{n+۱}\right)^۲\frac{۱}{۲}\times۴=۲\Rightarrow\lim_{n\to\infty}a_n=e^۲$$

گزینه ۲

مهرداد معدنی‌پور mehrdad.mdpour@gmail.com ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

۱۱۴ـ حاصل $\lim_{x\to ۰}\left([۲x]+[-۲x]\right)\left(\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}\right)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) صفر ۴) حد ندارد

یادآوری

$$[u]+[-u]=\begin{cases} ۰ & \text{عدد صحیح } u \\ -۱ & \text{عدد غیر صحیح } u \end{cases}$$

وقتی $x\to ۰$ یعنی x به صفر نزدیک می‌شود، اما هرگز برابر صفر نمی‌شود. با استدلالی مشابه $۲x$ هم برابر صفر نخواهد بود. یعنی عددی غیر صحیح است. بنابراین:

$$[۲x]+[-۲x]=-۱$$

$$\lim_{x\to ۰}\left([۲x]+[-۲x]\right)\left(\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}\right)=\lim_{x\to ۰}(-۱)\left(\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱-\cos^۳ x}{\sqrt{۱+x^۲}-۱}\right)$$

$$=\frac{۰}{۰}\overset{\text{هوپیتال}}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\left(\frac{-۳(-\sin x)(\cos^۲ x)}{\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{-۳(-\sin x)(۱)}{\frac{x}{\sqrt{۱+۰}}}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۳\sin x}{x}\right)=۳$$

گزینه ۲

۱۱۵ـ یکی از ریشه‌های حقیقی معادله $x^۳+۲x^۲-۴x-۳=۰$ ، در کدام بازه است؟

۱) $(-\frac{۳}{۴},-\frac{۱}{۲})$ ۲) $(۱,-\frac{۳}{۴})$ ۳) $(-\frac{۱}{۲},۰)$ ۴) $(۰,\frac{۱}{۲})$

با استفاده از قضیه بولتزانو اگر برای تابع پیوسته f در بازه $[a,b]$ داشته باشیم: $f(a)\times f(b)<۰$ ، آن‌گاه معادله $f(x)=۰$ در بازه (a,b) حداقل یک ریشه دارد.

$$f(x)=x^۳+۲x^۲-۴x-۳\Rightarrow f(-\frac{۳}{۴})=(-\frac{۳}{۴})^۳+۲(-\frac{۳}{۴})^۲-۴(-\frac{۳}{۴})-۳$$

$$=-\frac{۲۷}{۶۴}+\frac{۱۸}{۱۶}+۳-۳=\frac{-۲۷+۷۲}{۶۴}=\frac{۴۵}{۶۴}>۰\ ,\ f(-\frac{۱}{۲})=(-\frac{۱}{۲})^۳+۲(-\frac{۱}{۲})^۲-۴(-\frac{۱}{۲})-۳=-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲}+۲-۳$$

$=\frac{-۱+۴-۸}{۸}=\frac{-۵}{۸}<۰\Rightarrow$ همین گزینه جواب است

گزینه ۱

۱۱۶ـ امتداد مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۲x}-\sqrt{x^۲-۲x}$ نیمساز ناحیه اول و سوم را در دو نقطه A و B قطع می کند. اندازه AB کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۴ ۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

مجانب‌های احتمالی این تابع، افقی یا مایل هستند. برای پیدا کردن آن‌ها،از هم‌ارزی رادیکال استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{ax^۲+bx+c}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{۲a}\right|$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^۲+۲x}-\sqrt{x^۲-۲x})=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{۱}\left|x+\frac{۲}{۲}\right|-\sqrt{۱}\left|x-\frac{۲}{۲}\right|\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(|x+۱|-|x-۱|\right)$$

$$\xRightarrow{+\infty\text{ و }-\infty\text{ را جدا می‌کنیم}}\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left((x+۱)-(x-۱)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(۲\right)\Rightarrow y=۲ & \text{مجانب افقی}\\ \lim_{x\to-\infty}\left(-(x+۱)+(x-۱)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-۲\right)\Rightarrow y=-۲ & \text{مجانب افقی}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(y=x)$ محل برخورد با نیمساز ناحیه اول و سوم: $A=(-۲,-۲)\ ,\ B=(۲,۲)\Rightarrow AB=\sqrt{\left(۲-(-۲)\right)^۲+\left(۲-(-۲)\right)^۲}=$

$\sqrt{۴^۲+۴^۲}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$

گزینه ۴

۱۱۷ـ اگر θ زاویه بین مماس چپ و مماس راست نمودار تابع با ضابطه $f(x)=[x+\frac{۱}{۲}]x+x^۲$ ، در نقطه $x=\frac{۱}{۲}$ باشد، $\tan\theta$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

مهرداد معصـــرنی‌پور mehrdad.mdpour@gmail.com ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

تابع در $x=\frac{۱}{۲}$ از چپ پیوسته نیست. پس مماس چپ در این نقطه بی معنی است. با این حال مسئله را حل می‌کنیم .

نکته مهم

شیب هر خط ، برابر تانژانت زاویه‌ای است که آن خط ، با جهت مثبت محور xها می‌سازد. و نیز، شیب خط مماس بر منحنی برابر مشتق تابع در آن نقطه است. پس شیب مماس چپ، همان مشتق چپ و شیب مماس راست، همان مشتق راست می‌باشد. و تفاضل این دو زاویه، همان زاویه بین دو مماس است. و چون تانژانت دو زاویه را داریم، از فرمول تانژانت تفاضل دو کمان می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\tan(\theta)=|\tan(\theta_۲-\theta_۱)|=\left|\frac{\tan\theta_۱-\tan\theta_۲}{۱+\tan\theta_۱\tan\theta_۲}\right|$$

که البته به این دلیل از قدر مطلق استفاده کردیم که تانژانت زاویه «حاده» بین دو خط را پیدا کنیم.

$$\begin{cases} x=\left(\frac{۱}{۲}\right)^+\Rightarrow f(x)=\left[\left(\frac{۱}{۲}\right)^++\frac{۱}{۲}\right]x+x^۲=[۱^+]\,x+x^۲=x+x^۲\Rightarrow f'_+(x)=۱+۲x\Rightarrow f'_+\left(\frac{۱}{۲}\right)=۱+۲\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲ \\ x=\left(\frac{۱}{۲}\right)^-\Rightarrow f(x)=\left[\left(\frac{۱}{۲}\right)^-+\frac{۱}{۲}\right]x+x^۲=[۱^-]\,x+x^۲=۰+x^۲\Rightarrow f'_-(x)=۲x\Rightarrow f'_-\left(\frac{۱}{۲}\right)=۲\left(\frac{۱}{۲}\right)=۱ \end{cases}$$

$$\tan(\theta)=\left|\frac{f'_+\left(\frac{۱}{۲}\right)-f'_-\left(\frac{۱}{۲}\right)}{۱+f'_+\left(\frac{۱}{۲}\right)\times f'_-\left(\frac{۱}{۲}\right)}\right|=\left|\frac{۲-۱}{۱+۲\times۱}\right|=\frac{۱}{۳}$$

گزینه ۲

۱۱۸ـ از رابطه $x^۲y-y^۲-۲\sqrt{x}+۴=۰$ مقدار $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ در نقطه $(۱,۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۶}$ ۲) $\frac{۸}{۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۶}$

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{۲xy-\frac{۱}{\sqrt{x}}}{x^۲-۲y}\ \overset{(x,y)=(۱,۲)}{=\!=\!=}\ -\frac{۲(۱)(۲)-\frac{۱}{\sqrt{۱}}}{۱^۲-۲(۲)}=۱$$

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=(y'_x)'=\left(-\frac{۲xy-\frac{۱}{\sqrt{x}}}{x^۲-۲y}\right)'=-\frac{\underbrace{\left(۲y+۲xy'_x+\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{x}\right)}_{\text{مشتق صورت}}\underbrace{(x^۲-۲y)}_{\text{مخرج}}-\underbrace{(۲x-۲y'_x)}_{\text{مشتق مخرج}}\underbrace{\left(۲xy-\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)}_{\text{صورت}}}{\underbrace{(x^۲-۲y)^۲}_{(\text{مخرج})^۲}}$$

$$=-\frac{(۴+۲+\frac{۱}{۲})(۱-۴)-(۲-۲)(۴-\frac{۱}{۱})}{(۱-۴)^۲}=-\frac{\left(\frac{۱۳}{۲}\right)(-۳)}{۹}=\frac{۱۳}{۶}$$

گزینه ۴

۱۱۹ـ اگر $f(x)=x^۳-x^۲+۲x$ معادله خط قائم بر منحنی تابع $f^{-۱}$ در نقطه $x=۲$ واقع بر آن کدام است؟

۱) $y+۳x=۷$ ۲) $y-۳x=-۵$ ۳) $۳y+x=۵$ ۴) $۳y-x=۱$

اگر نقطه $(۲,\alpha)$ روی $f^{-۱}$ باشد، نقطه $(\alpha,۲)$ روی f خواهد بود، بنابراین:

$$f(\alpha)=۲\Rightarrow\alpha^۳-\alpha^۲+۲\alpha=۲\Rightarrow\Rightarrow\alpha^۳-\alpha^۲+۲\alpha-۲=۰\Rightarrow\alpha^۲(\alpha-۱)+۲(\alpha-۱)=۰\Rightarrow(\alpha-۱)(\alpha^۲+۲)=۰$$

$$\alpha=۱\Rightarrow {f^{-۱}}'(۲)=\frac{۱}{f'(\alpha)}=\frac{۱}{f'(۱)}\ \overset{f'(x)=۳x^۲-۲x+۲}{=\!=\!=\!=}\ \frac{۱}{۳-۲+۲}=\frac{۱}{۳}=\text{شیب مماس}\Rightarrow\text{شیب قائم}=-۳$$

$$\Rightarrow\text{معادله قائم}:\quad y-۱=-۳(x-۲)\Rightarrow y+۳x=۷$$

گزینه ۱

مهـرداد معـــدنی‌پور
mehrdad.mdpour@gmail.com
۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

۱۲۰ـ نمودار تابع $y=|x|\mathrm{e}^{-x}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(۰,۱)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

$$f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & x\geq ۰ \\ -x\mathrm{e}^{-x} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} (۱-x)\mathrm{e}^{-x} & x>۰ \\ (x-۱)\mathrm{e}^{-x} & x<۰ \end{cases} \Rightarrow f''(x)=\begin{cases} (x-۲)\mathrm{e}^{-x} & x>۰ \\ (۲-x)\mathrm{e}^{-x} & x<۰ \end{cases}$$

باید f' و f'' را تعیین علامت کنیم:

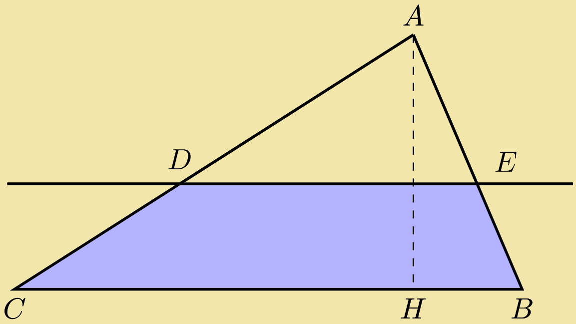
x		۰		۲	
$f''(x)$	+	‖	−	۰	+

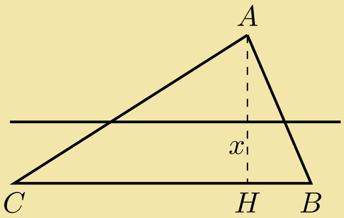
x		۰		۱	
$f'(x)$	−	‖	+	۰	−

برای نزولی و تقعر رو به پایین بودن، باید هر دو مشتق، منفی باشند و طبق جدول تعیین علامت بازه $(۱,۲)$ جواب است. **گزینه ۳**

۱۲۱ـ در مثلث ABC ضلع $BC=۲۰$ و ارتفاع $AH=۱۲$ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت ۰/۲ واحد در ثانیه از آن دور می‌شود. سرعت افزایش مساحت ذوزنقه در لحظه‌ای که فاصله دو خط موازی ۹ واحد باشد، کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۰/۹ ۳) ۱ ۴) ۱/۲





$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{۱}{۲}(BC+DE)(x)$$

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AH-x}{AH}\Rightarrow\frac{DE}{۲۰}=\frac{۱۲-x}{۱۲}=۱-\frac{x}{۱۲}\Rightarrow DE=۲۰-\frac{۲۰x}{۱۲}=۲۰-\frac{۵}{۳}x$$

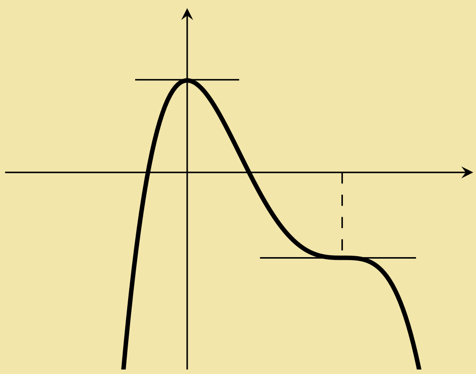
$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{۱}{۲}(۲۰+۲۰-\frac{۵}{۳}x)(x)=\frac{۱}{۲}(۴۰x-\frac{۵}{۳}x^{۲})=۲۰x-\frac{۵}{۶}x^{۲}\ ,\ \frac{dS_{\text{ذوزنقه}}}{dt}=\frac{dS_{\text{ذوزنقه}}}{dx}\times\frac{dx}{dt}$$

$$(۲۰-\frac{۵}{۳}x)\times ۰/۲=\left(۲۰-\frac{۵}{۳}(۹)\right)\times ۰/۲=۵\times ۰/۲=۱$$

گزینه ۳

۱۲۲ـ شکل روبرو نمودار تابع $f(x)=-x^{۴}+۸x^{۳}+ax^{۲}+b$ است. a کدام است؟

۱) -۱۸ ۲) -۱۵ ۳) -۱۲ ۴) -۹



طبق نمودار، تابع در $x=۰$ ماکسیمم نسبی دارد، پس $f'(۰)=۰$

$$f'(x)=-۴x^{۳}+۲۴x^{۲}+۲ax=x(-۴x^{۲}+۲۴x+۲a)$$

تابع، در یک نقطه مماس افقی دارد که نمودار را قطع می‌کند، پس این نقطه، عطف است.
بنابراین مشتق اول و دوم هردو در این نقطه برابر صفر هستند.

$$f''(x)=-۱۲x^{۲}+۴۸x+۲a$$

عبارت داخل پرانتز f' در باید با f'' یک ریشه مشترک داشته باشد.

$$-۴x^{۲}+۲۴x+۲a=-۱۲x^{۲}+۴۸x+۲a\Rightarrow ۸x^{۲}-۲۴x=۰\Rightarrow ۸x(x-۳)=۰\Rightarrow x=۳\Rightarrow f''(۳)=۰$$

$$-۱۲(۹)+۴۸(۳)+۲a=۰\Rightarrow \cancel{۲}a=\cancel{۱۲}^{۶}(۹)-\cancel{۴۸}^{۲۴}(۳)=۵۴-۷۲=-۱۸$$

گزینه ۱

۱۲۳ـ اگر $\int_{۲}^{\sqrt{x}}\frac{\ln(t+۲)}{t^{۲}}dt$ $G(x)=x^{۲}$ باشد، $G'(۴)$ چند برابر $\ln ۲$ است؟

۱) -۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۳

مهرداد معرنی‌پور mehrdad.mdpour@gmail.com ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

$G(x)$ به صورت حاصل‌ضرب دو تابع است. پس می‌توانیم از فرمول مشتق حاصل ضرب استفاده کنیم:

$$G(x)=\underbrace{x^{۲}}_{f}\underbrace{\int_{۲}^{\sqrt{x}}\frac{\ln(t+۲)}{t^{۲}}dt}_{g}\Rightarrow G'(x)=f'g+fg'$$

قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال

اگر داشته باشیم: $F(x)=\int_a^x f(t)dt$، آنگاه مشتق تابع F ، f خواهد بود. یعنی:

$$F'(x)=f(x)$$

و اگر به جای x در انتگرال، تابعی مانند u داشته باشیم، طبق قاعده زنجیری داریم:

$$F(x)=\int_a^{u(x)}f(t)dt\Rightarrow F'(x)=u'(x)\times f\Big(u(x)\Big)$$

$$g(x)=\int_{۲}^{\sqrt{x}}\frac{\ln(t+۲)}{t^{۲}}dt\Rightarrow g'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times\frac{\ln(\sqrt{x}+۲)}{(\sqrt{x})^{۲}}\Rightarrow g'(۴)=\frac{۱}{۲\sqrt{۴}}\times\frac{\ln(\sqrt{۴}+۲)}{(\sqrt{۴})^{۲}}=\frac{\ln ۴}{۱۶}=\frac{۲\ln ۲}{۱۶}=\frac{\ln ۲}{۸}$$

$$G'(x)=f'g+fg'=(۲x)g(x)+(x^{۲})g'(x)\Rightarrow G'(۴)=(۸)g(۴)+(۱۶)g'(۴)=۸\times\cancelto{۰}{\left(\int_{۲}^{\cancelto{۲}{\sqrt{۴}}}\frac{\ln(t+۲)}{t^{۲}}dt\right)}+۱۶\times\frac{\ln ۲}{۸}$$

$$=۲\ln ۲$$

گزینه ۳

۱۲۴ـ حاصل $\int_{۰}^{۴}\left[\frac{x}{۲}\right]\frac{\sqrt{x}-۱}{x}dx$ کدام است؟

۱) $۴-۲\sqrt{۲}-\ln ۲$ ۲) $۴-۲\sqrt{۲}+\ln ۲$ ۳) $۲+۲\sqrt{۲}-\ln ۲$ ۴) $۲-۲\sqrt{۲}-\ln ۲$

بازه انتگرال را به بازه‌های کوچک‌تر طوری تقسیم می‌کنیم که در آن بازه‌ها، داخل جزء صحیح بین دو عدد صحیح متوالی قرار بگیرد.

$$\int_{۰}^{۴}\left[\frac{x}{۲}\right]\frac{\sqrt{x}-۱}{x}dx=\int_{۰}^{۲}\cancelto{۰}{\left[\frac{x}{۲}\right]}\frac{\sqrt{x}-۱}{x}dx+\int_{۲}^{۴}\cancelto{۱}{\left[\frac{x}{۲}\right]}\frac{\sqrt{x}-۱}{x}dx=\int_{۲}^{۴}\frac{\sqrt{x}-۱}{x}dx=\int_{۲}^{۴}\frac{\sqrt{x}}{x}dx-\int_{۲}^{۴}\frac{۱}{x}dx$$

$$=\int_{۲}^{۴}\frac{۱}{\sqrt{x}}dx-\int_{۲}^{۴}x^{-۱}dx=\int_{۲}^{۴}x^{-\frac{۱}{۲}}dx-\int_{۲}^{۴}x^{-۱}dx=\frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}\Bigg|_{۲}^{۴}-\ln|x|\Bigg|_{۲}^{۴}$$

$$=۲\sqrt{x}\Bigg|_{۲}^{۴}-\ln|x|\Bigg|_{۲}^{۴}=۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۲}-(\ln|۴|-\ln|۲|)=۴-۲\sqrt{۲}-\ln\frac{۴}{۲}$$

$$=۴-۲\sqrt{۲}-\ln ۲$$

گزینه ۱

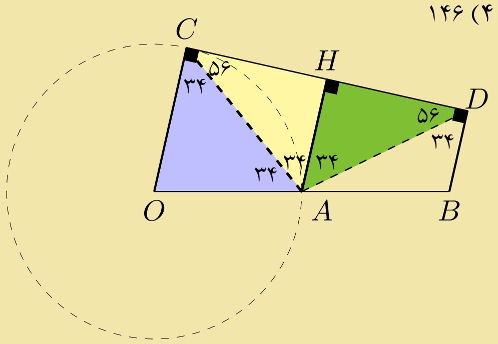
یادآوری

$$\int x^{-۱}dx=\ln|x|+C$$

$$\int x^a dx=\frac{x^{a+۱}}{a+۱}+C,\ a\neq -۱$$

۱۲۵ـ در یک دایره به مرکز O ، شعاع OA را به اندازه خود تا نقطه B امتداد می‌دهیم. از نقطه B بر مماس دلخواه دایره، عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $\hat{ADB}=۳۴^\circ$ باشد، زاویه OAD چند درجه است؟

۱) ۶۸ ۲) ۷۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۴۶



از A موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌کنیم، می‌دانیم ساق‌ها را به نسبت مساوی قطع می‌کند. پس $CH=HD$ و نتیجتا مثلث‌های AHD و AHC همنهشت هستند.

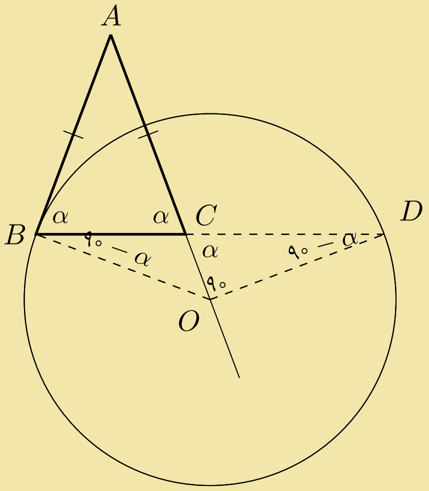
همچنین، مثلث OAC متساوی‌الساقین است.

$$\hat{O}AD=۳۴+۳۴+۳۴=۱۰۲$$

گزینه ۳

مهرداد معززی‌پور mehrdad.mdpour@gmail.com ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

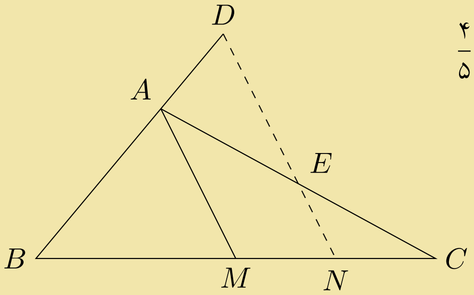
۱۲۶ـ در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ نقطه O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطه B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟



۱)متساوی‌الساقین ۲)قائم‌الزاویه
۳)قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴)غیر مشخص

گزینه ۲

۱۲۷ـ در مثلث ABC $(AB = \frac{۲}{۳}AC)$ پاره‌خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

قضیه تالس در مثلث‌های BDN و AMC :

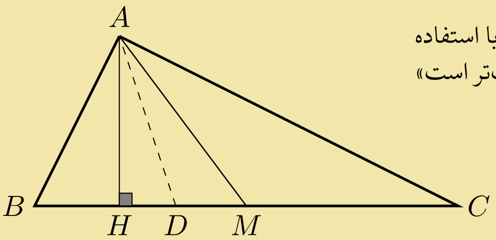
$$\begin{cases} \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{MN}{BM} \\ \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{MN}{MC} \end{cases} \xrightarrow{\text{دو تساوی را بر هم تقسیم می‌کنیم}} \dfrac{\dfrac{AD}{AB}}{\dfrac{AE}{AC}} = \dfrac{\dfrac{MN}{BM}}{\dfrac{MN}{MC}}$$

$$\frac{AD \times AC}{AB \times AE} = \frac{\cancel{MN} \times \cancel{MC}}{\cancel{BM} \times \cancel{MN}} = ۱ \Rightarrow \frac{AD}{AE} \times \frac{AC}{AB} = ۱ \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{۲}{۳}$$

گزینه ۳

۱۲۸ـ در مثلث ABC ، میانه AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است. کدام تساوی همواره درست است؟

۱) $AM < BC$ ۲) $AM < AB$ ۳) $AD < AB$ ۴) $AD < AM$



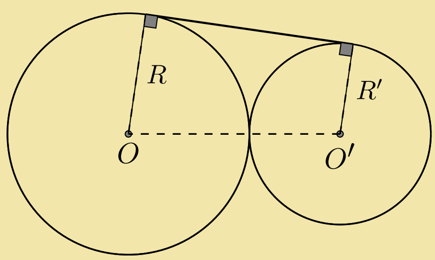
اگر فرض کنیم $AB < AC$، می توانیم مثلث ABC را به صورت زیر رسم کنیم. با استفاده از این قضیه که « در هر مثلث ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر از ضلع مقابل به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است» به راحتی می‌توانیم ثابت کنیم که

$$AH \leq AD \leq AM$$

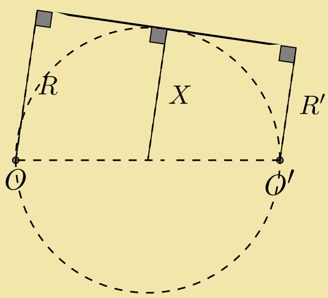
گزینه ۴

۱۲۹ـ دو دایره به مرکزهای O و O' مماس خارج‌اند. دایره‌ای به قطر OO' ، با مماس مشترک خارجی این دو دایره، کدام وضعیت را دارد؟

۱)متقاطع ۲)مماس ۳)متخارج ۴)نامشخص



هر خط، با یک دایره سه وضعیت می‌تواند داشته باشد. متقاطع، مماس و متخارج؛ با تعیین فاصله مرکز دایره از خط، می‌توانیم این وضعیت را تعین کنیم. مرکز دایره وسط پاره‌خط OO' و شعاع آن $\frac{R+R'}{۲}$ است.



با قضیه تالس (یا نوشتن مجموع مساحت‌های ذوزنقه‌ها)، مقدار X بدست می‌آید: $X = \frac{R+R'}{۲}$ که برابر شعاع دایره به قطر OO' است.
پس مماس خواهند بود.

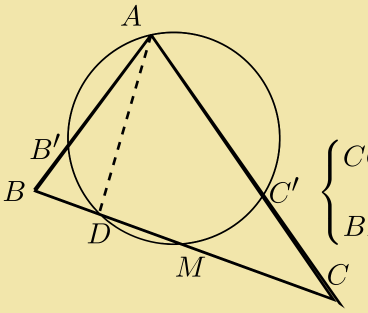
گزینه ۲

مهرداد معدنی‌پور
mehrdad.mdpour@gmail.com
۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

۱۳۰ـ در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویه A است. دایره محیطی مثلث ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{AB}{AC}$ ۳) $\frac{AB'}{AC'}$ ۴) $\frac{DB}{DM}$

طبق روابط طولی در دایره داریم:



$$\begin{cases} CC' \times AC = CM \times CD \\ BB' \times AB = BD \times BM \end{cases} \xrightarrow{\text{دو تساوی را بر هم تقسیم می‌کنیم}} \frac{CC'}{BB'} \times \frac{AC}{AB} = \frac{\cancel{CM}}{BD} \times \frac{CD}{\cancel{BM}}$$

$$\frac{CC'}{BB'} \times \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$$

نیمساز، ضلع روبرو را به نسبت ضلع‌های مجاور تقسیم می‌کند، یعنی: $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$ پس $\frac{CC'}{BB'} = ۱$ **گزینه ۱**

۱۳۱ـ با استفاده از کدام تبدیل هندسی، داخل مثلث مفروض می‌توان مربعی محاط کرد که یک ضلع آن بر روی ضلع مثلث، و دو رأس دیگر بر روی دو ضلع این مثلث قرار گیرند؟

۱)دوران ۲)بازتاب ۳)انتقال ۴)تجانس

صورت این سوال، ابهام دارد، دستکم برای من.

۱۳۲ـ نقطه A در خارج صفحه مثلث BCD است. صفحه گذرا بر A را طوری تعیین کنید که نقاط D و C و B از آن به یک فاصله باشند. تعداد این نوع صفحات کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

صفحه‌ای که از A می‌گذرد و با صفحه مثلث موازی است، یکی از جواب‌ها است. می‌دانیم هر صفحه که از وسط یک پاره‌خط می‌گذرد از دو سر آن به یک فاصله است. پس سه صفحه دیگر هم هست که از A و از وسط هریک از سه پاره‌خط می‌گذرد و از سه نقطه D و C و B به یک فاصله است.

گزینه ۴

۱۳۳ـ نقاط $A(۵,-۴,۱)$ و $B(-۱,۲,۴)$ و $O(۰,۰,۰)$ مفروض هستند و $\overrightarrow{AM} = \frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB}$ ، مقدار $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۱۰}$ ۲) $\sqrt{۱۱}$ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۱۴}$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M - A = \frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M = A + \frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB} = (۵,-۴,۱) + \frac{۲}{۳}\Big((-۱,۲,۴)-(۵,-۴,۱)\Big)$$

$$(۵,-۴,۱) + \frac{۲}{۳}(-۶,۶,۳) = (۵,-۴,۱) + (-۴,۴,۲) = (۱,۰,۳) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{۱^۲+۰^۲+۳^۲} = \sqrt{۱۰}$$

گزینه ۱

۱۳۴ـ فاصله دو خط به معادلات $\frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۲}{۱} = \frac{z}{-۱}$ و $(x = ۲y+۱\ ,\ z = -y+۲)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

معادله خط دوم را به صورت متقارن می‌نویسیم: $\frac{x-۱}{۲} = y = \frac{z-۲}{-۱}$ ، بردارهای هادی دو خط برابرند. پس دو خط موازی هستند. کافی است یک نقطه دلخواه از یکی از خط ها را انتخاب کنیم و فاصله آن را از خط دیگر حساب کنیم:

$$\text{از خط اول} : P = (۱,-۲,۰), \text{از خط دوم} : P_۰ = (۱,۰,۲) \Rightarrow \overrightarrow{P_۰P} = (۰,-۲,-۲)\ ,\ \overrightarrow{u} = (۲,۱,-۱)$$

$$\overrightarrow{P_۰P} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ ۰ & -۲ & -۲ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = (۴,-۴,۴) \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|\overrightarrow{P_۰P} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|} = \frac{\sqrt{۴۸}}{\sqrt{۶}} = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

گزینه ۲

۱۳۵ـ صفحه گذرنده بر خط به معادله $\frac{x+۱}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{z-۲}{-۱}$ و نقطه $(۰,۳,۰)$ محور Zها را با کدام ارتفاع قطع می‌کند؟

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) ۲ ۴) ۳

با داشتن سه نقطه، می‌شود معادله صفحه را نوشت: $C = (۰,۳,۰)\ ,\ \underbrace{B = (-۱,۰,۲),\ A = (۳,۶,۰)}_{\text{دو نقطه از خط}}$

$$\text{نرمال صفحه} : \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -۴ & -۶ & ۲ \\ -۳ & -۳ & ۰ \end{vmatrix} = (۶,-۶,-۶), \text{معادله صفحه} : ۶(x-۰) - ۶(y-۳) - ۶(z-۰) = ۰$$

$$۶x - ۶y - ۶z = -۱۸ \xrightarrow{x=y=۰} z = ۳$$

گزینه ۴

۱۳۶ـ دو دایره C و C' در نقطه $(0,1)$ مماس برونی هم هستند. اگر قائم‌های بر دایره C همواره از نقطه $(2,-3)$ بگذرد. مرکز دایره C' با شعاع $\sqrt{5}$ کدام است؟

۱) $(-1,3)$ ۲) $(-1,2)$ ۳) $(1,-2)$ ۴) $(1,-1)$

مرکز دایره C نقطه $(2,-3)$ است. چون دو دایره مماس بیرونی هستند پس نقطه تماس باید بین دو مرکز دایره باشد. بنابراین طول مرکز دایره C' باید از صفر کمتر باشد. لذا گزینه‌های ۳ و ۴ حذف می‌شوند. فاصله مرکز دایره C' ، از نقطه $(0,1)$ برابر شعاع این دایره یعنی $\sqrt{5}$ است. که فقط گزینه ۱ این شرط را دارد.

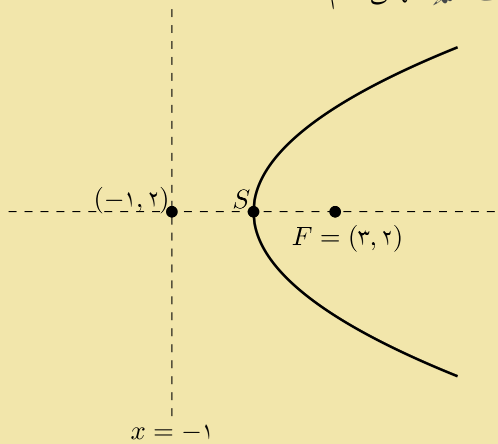
$$R=\sqrt{(3-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{5}\ \checkmark$$

گزینه ۱

۱۳۷ـ سهمی به کانون $F(3,2)$ و خط هادی به معادله $x=-1$ ، محور xها را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A تا کانون سهمی کدام است؟

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۲/۷۵ ۴) ۳

سهمی قائم است.



$$S=\frac{(-1,2)+(3,2)}{2}=(1,2)=(\alpha,\beta)$$
$$p=SF=3-1=2\Rightarrow(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$$
$$(y-2)^2=8(x-1)\xrightarrow{y=0}4=8(x-1)\Rightarrow x-1=\frac{4}{8}$$
$$x-1=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{2}\Rightarrow A=(\frac{3}{2},0)$$
$$\Rightarrow FA=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-3\right)^2+\left(0-2\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+4}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}=2/5$$

گزینه ۲

۱۳۸ـ ماتریس دوران A، با رابطه $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A.\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ ، معادله مقطع مخروطی $5x^2+24xy-2y^2=12$ را به صورت استاندارد بر حسب x' و y' تبدیل می‌کند. تانژانت زاویه دوران کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

نکته مهم

اگر مقطع مخروطی $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ را تحت زاویه θ دوران دهیم به طوری که به صورت استاندارد در آید (یعنی جمله xy از آن حذف شود)، در این صورت داریم:

$$\tan 2\theta=\frac{B}{A-C}$$

$$\tan 2\theta=\frac{24}{5-(-2)}=\frac{24}{7}\xRightarrow{\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$$
$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{24}{7}\Rightarrow 14\tan\theta=24-24\tan^2\theta$$
$$\Rightarrow 12\tan^2\theta+7\tan\theta-12=0\xRightarrow{\times 12}$$
$$(12\tan\theta)^2+7\times 12\tan\theta-144=0$$

$$12\tan\theta=x\Rightarrow x^2+7x-144=0\xRightarrow{144=12\times 12=9\times 16=\cdots}(x-9)(x+16)=0\begin{cases}x=9\Rightarrow\tan\theta=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}\ \checkmark\\ x=-16\Rightarrow\tan\theta=\frac{-16}{12}=-\frac{4}{3}\end{cases}$$

گزینه ۲

۱۳۹ـ اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 3}$ و $B=[b_{ij}]_{4\times 3}$ باشند، کدام ضرب ماتریس‌ها تعریف شده است؟

۱) AB ۲) A^tB ۳) B^tA^t ۴) AB^t

برای تعریف شدن حاصل‌ضرب دو ماتریس،باید تعداد ستون‌های اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشد.

$$A^t=[a_{ji}]_{3\times 2}\ ,\ B^t=[b_{ji}]_{3\times 4}\Rightarrow A_{2\times 3}B^t_{3\times 4}\ \checkmark$$

گزینه ۴

۱۴۰ـ اگر $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&0\\3&0&0\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس A^{-1} کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) صفر

مهرداد معدنی‌پور
mehrdad.mdpour@gmail.com
۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \times \begin{bmatrix} \text{ترانهاده} \\ \text{ماتریس} \\ \text{هم‌سازه‌ها} \end{bmatrix} = \frac{۱}{|A|} \times \begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۲۱} & A_{۳۱} \\ A_{۱۲} & A_{۲۲} & A_{۳۲} \\ A_{۱۳} & A_{۲۳} & A_{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌های ستون دوم} = \frac{۱}{|A|} \times (A_{۲۱} + A_{۲۲} + A_{۲۳})$$

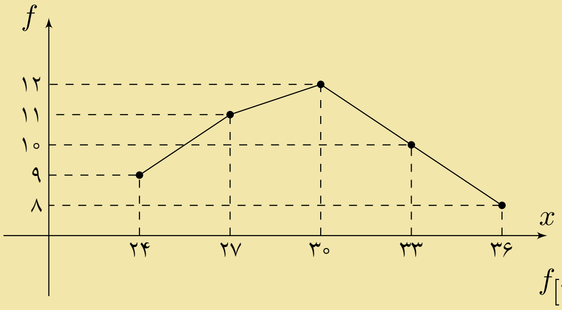
$$= \frac{۱}{(۱)(۲)(۳)} \times \left((-۱)^{۲+۱} \begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} + (-۱)^{۲+۲} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} + (-۱)^{۲+۱} \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۰ \end{vmatrix} \right) = \frac{۱}{۶} \times \left((-۱)(-۳) + (+۱)(۳) + (-۱)(۰) \right)$$

$$= \frac{۶}{۶} = ۱$$

گزینه ۳

۱۴۱ـ به داده‌های آماری با نمودار چندبر روبرو، دو داده ۲۹ و ۳۲ افزوده شود، درصد فراوانی نسبی در دسته وسط داده‌های جدید کدام است؟

۱) ۲۳ ۲) ۲۴ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶



طول دسته‌ها ۳ است، پس دسته‌ها به صورت زیر هستند:

$$[۲۲٫۵, ۲۵٫۵), [۲۵٫۵, ۲۸٫۵), [۲۸٫۵, ۳۱٫۵), [۳۱٫۵, ۳۴٫۵), [۳۴٫۵, ۳۷٫۵)$$

۲۹ به دسته وسط افزوده می‌شود. فراوانی کل داده‌های جدید عبارت‌است از:

$$n = ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۲ = ۵۲$$

درصد فراوانی نسبی داده‌های دسته وسط عبارت‌است از:

$$f_{[۲۸٫۵,۳۱٫۵)} = \frac{۱۲ + ۱}{۵۲} \times ۱۰۰\% = \frac{۱۳}{۵۲} \times ۱۰۰\% = \frac{۱}{۴} \times ۱۰۰\% = ۲۵\%$$

گزینه ۳

۱۴۲ـ اگر میانگین داده‌های دسته‌بندی شده، برابر ۱۶ باشد، با تعیین فراوانی دسته چهارم مقدار واریانس کدام است؟

نماینده دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	a	۳

۱) ۴٫۸۵ ۲) ۴٫۹۲ ۳) ۵٫۵۵ ۴) ۵٫۷۴

$$۱۶ = \frac{۵ \times ۱۲ + ۷ \times ۱۴ + ۱۰ \times ۱۶ + a \times ۱۸ + ۳ \times ۲۰}{۵ + ۷ + ۱۰ + a + ۳} = \frac{۶۰ + ۹۸ + ۱۶۰ + ۱۸a + ۶۰}{۲۵ + a} = \frac{۳۷۸ + ۱۸a}{۲۵ + a} \Rightarrow$$

$$۴۰۰ + ۱۶a = ۳۷۸ + ۱۸a \Rightarrow ۲a = ۲۲ \Rightarrow a = ۱۱ \Rightarrow \sigma^۲ = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^۲}{n}$$

گزینه ۳

$$= \frac{۵(-۴)^۲ + ۷(-۲)^۲ + ۱۰(۰)^۲ + ۱۱(۲)^۲ + ۳(۴)^۲}{۳۶} = \frac{۸۰ + ۲۸ + ۰ + ۴۴ + ۴۸}{۳۶} = \frac{۲۰۰}{۳۶} = \frac{۵۰}{۹} = \frac{۵۰}{۹} = ۵٫۵۵$$

۱۴۳ـ در اثبات نامساوی $n! > ۲^{n+۱}$ ، به روش استقرای تعمیم‌یافته ، عدد m مناسب، و رابطه بدیهی در گام بعدی حکم ، برای $k \geq m$ کدام است؟

۱) $k + ۱ > ۲ \, , m = ۵$ ۲) $k + ۱ > ۲ \, , m = ۶$ ۳) $۲k + ۱ > ۴ \, , m = ۵$ ۴) $۲k + ۱ > ۴ \, , m = ۶$

$$۵! = ۱۲۰ > ۲^۶ = ۶۴ \, , \Rightarrow m = ۶ \, , \begin{cases} k! > ۲^{k+۱} \\ \times (k+۱) > ۲ \\ (k+۱)! > ۲^{k+۲} \end{cases}$$

گزینه ۱

۱۴۴ـ اگر S یک زیرمجموعه ۱۱۵عضوی از اعداد طبیعی باشد، در تقسیم عضوهای S بر ۲۷ ، به طور یقین، حداقل چند عضو دارای باقیمانده یکسان هستند؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۳) ۷

باقیمانده هر عدد طبیعی در تقسیم بر ۲۷ عددی است بین صفر تا ۲۶، یعنی ۲۷ حالت برای آن وجود دارد. پس با انتخاب ۲۸ عدد حداقل دو تای آن‌ها هم‌باقیمانده خواهند بود، اگر ۲۷ تای دیگر انتخاب کنیم، یعنی روی هم ۵۵ عدد، این بار ۳ تا هم‌باقیمانده داریم. با ادامه این روند می‌توانیم $۴ \times ۲۷ + ۱ = ۱۰۹$ عدد انتخاب کنیم و مطمئن باشیم حداقل ۵ عضو دارای باقیمانده یکسان هستند.

گزینه ۲

۱۴۵ـ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \left\{ m \in \mathbb{Z} : |m| \leq n \, , \, ۲^m \leq ۲n \right\}$، آنگاه $(A_۶ - A_۴) \cup A_۱$ چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۳) ۷

$$A_۱ = \left\{ m \in \mathbb{Z} : |m| \leq ۱, ۲^m \leq ۲ \right\} = \left\{ -۱, ۰, ۱ \right\}$$

$$A_۴ = \left\{ m \in \mathbb{Z} : |m| \leq ۴, ۲^m \leq ۸ \right\} = \left\{ -۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳ \right\}$$

$$A_۶ = \left\{ m \in \mathbb{Z} : |m| \leq ۶, ۲^m \leq ۱۲ \right\} = \left\{ -۶, -۵ - ۴, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳ \right\}$$

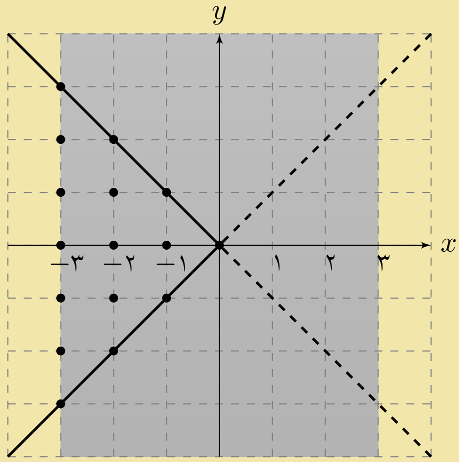
$$(A_۶ - A_۴) \cup A_۱ = \left\{ -۶, -۵ \right\} \cup \left\{ -۱, ۰, ۱ \right\} = \left\{ -۶, -۵, -۱, ۰, ۱ \right\} \Rightarrow \text{۵ عضو}$$

گزینه ۲

مهرداد معدنی‌پور
mehrdad.mdpour@gmail.com
۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

۱۴۶ـ رابطه $\{(x,y): -x \geq |y|\}$ بر روی مجموعه $A = \{x : |x| \leq ۳\}$ تعریف شده است. تعداد عضوهای این مجموعه با مختص‌های صحیح کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۰



$$A: \ |x| \leq ۳ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۳$$

مجموعه A همه نقاط بین دو خط $x = -۳$ و $x = ۳$ است.

$$-x \geq |y| \Rightarrow \begin{cases} -x \geq y & y \geq ۰ \\ -x \geq -y & y < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq -x & y \geq ۰ \\ y \geq x & y < ۰ \end{cases}$$

همه نقاط با مختص صحیح که بالا و روی نیمساز ربع سوم و پایین و روی نیمساز ربع دوم باشند جواب مسئله هستند که تعداد آن‌ها ۱۶ نقطه است.

گزینه ۳

....

۱۴۷ـ هریک از اعداد ۶ ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور تصادفی،متوالی هم یک گوی از جعبه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال اعداد فرد یا زوج یک در میان خارج می‌شوند؟

۱) ۰/۱ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۱۵ ۴) ۰/۲

دو حالت وجود دارد، یا اولین عدد فرد است که بعدی زوج و به همین ترتیب ادامه می‌یابد. و یا اولین عدد زوج است و بعدی فرد و ...

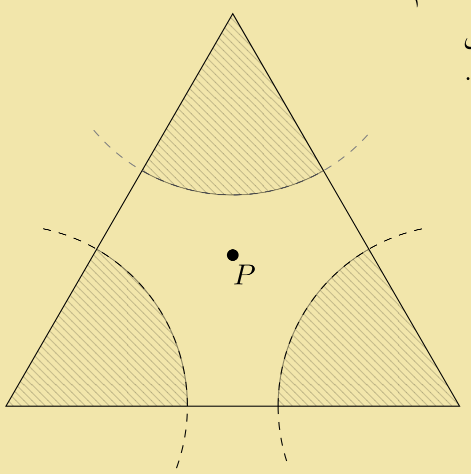
$$P(A) = \frac{۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱ + ۳ \times ۳ \times ۲ \times ۲ \times ۱ \times ۱}{۶!} = \frac{۳۶ + ۳۶}{۷۲۰} = \frac{۷۲}{۷۲۰} = ۰/۱$$

گزینه ۱

....

۱۴۸ـ یک نقطه به طور تصادفی، درون مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\sqrt{۲\pi\sqrt{۳}}$ انتخاب می‌شود. با کدام احتمال، فاصله این نقطه تا هر رأس مثلث بیشتر از ۱ واحد است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$



برای این که فاصله یک نقطه از یک رأس بیشتر از یک باشد، باید این نقطه خارج دایره‌ای به مرکز آن رأس و شعاع ۱ باشد. پس این نقطه تصادفی باید خارج ناحیه‌های سایه‌زده بیفتد.

مساحت ناحیه سایه زده برابر مساحت یک نیم‌دایره است.(۳ تا $\frac{۱}{۶}$ دایره)

$$P(A) = \frac{S_{\text{ناحیه سایه نزده}}}{S_{\text{مثلث}}} = \frac{S_{\text{مثلث}} - S_{\text{ناحیه سایه زده}}}{S_{\text{مثلث}}}$$

$$= ۱ - \frac{S_{\text{ناحیه سایه زده}}}{S_{\text{مثلث}}} = ۱ - \frac{\frac{۱}{۲}\pi r^۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲} = ۱ - \frac{\frac{\pi}{۲}(۱)}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲\pi\sqrt{۳})}$$

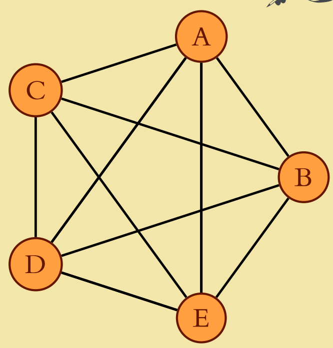
$$= ۱ - \frac{\frac{\pi}{۲}}{\frac{۳}{۲}\pi} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

گزینه ۳

....

۱۴۹ـ در یک گراف کامل از مرتبه ۵ چند دور با طول ۵، وجود دارد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴



هر جایگشت دوری از ۵ رأس گراف،تشکیل یک دور به طول ۵ می‌دهد، البته چون جهت حرکت مهم نیست، پس هر دور دو بار شمرده می‌شود. یعنی مثلا دور $ABEDCA$ با دور $ACDEBA$ یکسان است. پس باید نتیجه را بر ۲ تقسیم کنیم:

$$\frac{(۵-۱)!}{۲} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

گزینه ۱

مهـرداد معـــدنی‌پور mehrdad.mdpour@gmail.com ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

۱۵۰ـ چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقیمانده تقسیم‌های آن بر دو عدد ۴ و ۵ ، برابر ۱ باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

نکته مهم

اگر a و b نسبت به هم اول باشند و $x \overset{a}{\equiv} c$ و $x \overset{b}{\equiv} c$ آنگاه:

$$x \overset{ab}{\equiv} c$$

$$\begin{cases} x \overset{4}{\equiv} 1 \\ x \overset{5}{\equiv} 1 \end{cases} \Rightarrow x \overset{20}{\equiv} 1,\ \ x \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow \begin{cases} x \overset{20}{\equiv} 121 \\ x \overset{11}{\equiv} 121 \end{cases} \Rightarrow x \overset{220}{\equiv} 121$$

گزینه ۲

$$x = 220k + 121 = 121, 341, 561, 781, \cancel{1001}$$

۱۵۱ـ مجموع دو عدد ۲۷۷۲ و بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه آنها ۲۳۱ و مخالف عدد کوچک‌تر است. تفاضل این دو عدد کدام است؟

۱) ۲۳۱ ۲) ۴۶۲ ۳) ۶۹۳ ۴) ۹۲۴

$$(a,b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = kd \\ b = k'd \\ (k,k') = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2772 = (k+k') \times 231 \Rightarrow k + k' = \frac{2772}{231} = 12$$

تنها حالتی که k و k' نسبت به هم اول‌اند حالتی است که $k = 5,\ k' = 7$

(اگر $k = 1,\ k' = 11$ آنگاه $a = 231$ در این صورت یکی از اعداد برابر عدد کوچک‌تر می‌شود که خلاف فرض سوال است)

$$\begin{cases} a = 5 \times 231 \\ b = 7 \times 231 \end{cases} \Rightarrow b - a = 2 \times 231 = 462$$

گزینه ۲

۱۵۲ـ اگر عدد $2x^2 - x - 6$ مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگترین عدد سه‌رقمی x کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

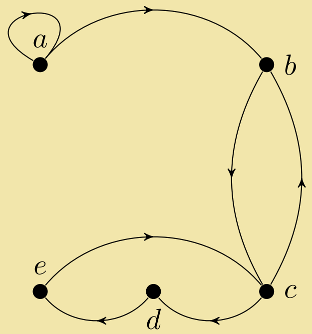
$$2x^2 - x - 6 = \frac{1}{2}(4x^2 - 2x - 12) = \frac{1}{2}\Big((2x)^2 - 1 \times 2x - 12\Big) = \frac{1}{2}(2x-4)(2x+3) = (x-2)(2x+3)$$

$$(x-2)(2x+3) = 53k \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 53k \\ 2x + 3 = 53m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 53k + 2 = 53 \times 18 + 2 = 956 \\ 2x = 53m - 3 \Rightarrow x = \dfrac{53m - 3}{2} = 26m - 1 + \dfrac{m-1}{2} \end{cases}$$

$$m = 37,\ x = 26 \times 37 + \frac{37-1}{2} = 962 - 1 + 18 = 979$$

گزینه ۴

۱۵۳ـ شکل زیر گراف مربوط به رابطه $\mathbf{R}$ است. ماتریس متناظر $\mathbf{RoR}$ چند درایه یک دارد؟



۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

$$M(\mathbf{R}) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

گزینه ۴

$$\Rightarrow M(\mathbf{R}o\mathbf{R}) = [M(\mathbf{R})]^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مهرداد معدنی‌پور mehrdad.mdpour@gmail.com ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵

۱۵۴ـ تعداد جواب‌های صحیح و غیر منفی نامساوی $x_۱+x_۲+x_۳\leq ۴$ کدام است؟

۱) ۳۰   ۲) ۳۲   ۳) ۳۳   ۴) ۳۵

یادآوری

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n$ عبارت است از:

$$\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

در واقع ۵ معادله داریم: $x_۱+x_۲+x_۳=۰,۱,۲,۳,۴$
پس ۵ دسته جواب هم داریم

$$\binom{۰+۲}{۲}+\binom{۱+۲}{۲}+\binom{۲+۲}{۲}+\binom{۳+۲}{۲}+\binom{۴+۲}{۲}$$
$$=\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۴}{۲}+\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۲}$$
$$=۱+۳+۶+۱۰+۱۵=۳۵$$

گزینه ۴

۱۵۵ـ در دو ظرف به ترتیب ۲۴ و ۱۸ مهره یکسان موجود است. در ظرف اول ۶ مهره سفید و در ظرف دوم ۳ مهره سفید است. از اولی ۷ مهره و از دومی ۵ مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

۱) $\frac{۱۳}{۷۲}$ ۲) $\frac{۷}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۵}{۷۲}$ ۴) $\frac{۳۱}{۱۴۴}$

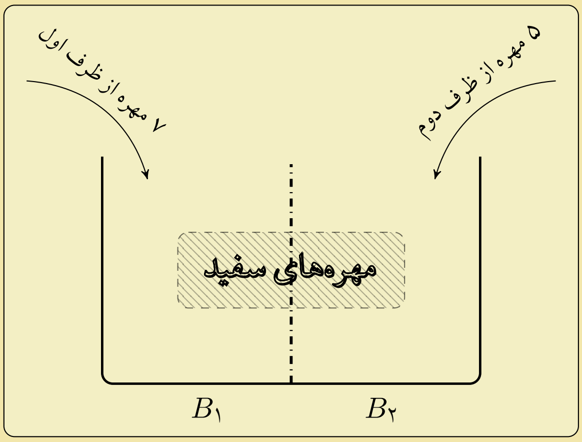
فضای نمونه‌ای را می‌توانیم به دو زیرمجموعه مجزا تقسیم کنیم:

- $B_۱$: مهره هایی که از ظرف اول آمده‌اند.
- $B_۲$: مهره هایی که از ظرف دوم آمده‌اند.

A را پیشامد آمدن مهره سفید در نظر می‌گیریم:

$$P(A)=P(B_۱)\times P(A|B_۱)+P(B_۲)\times P(A|B_۲)$$
$$=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۶}{۲۴}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۸}=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۱}{۶}$$
$$=\frac{۲۱+۱۰}{۱۴۴}=\frac{۳۱}{۱۴۴}$$

گزینه ۴



پاینده و پیروز باشید!

مهرداد معدنی‌پور
تلفن تماس: ۰۹۳۵-۶۰۶۱۷۴۵
Email:mehrdad.mdpour@gmail.com