

پاسخنامه تشریحی

آزمون سراسری ورودی دانشگاه‌های کشور - سال ۱۳۹۴

صبح پنج‌شنبه
۹۴/۳/۲۱

آزمون اختصاصی
گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

مهندس حمید پیری

πri

۱۰۱- جملات دنباله $۲/۳۹, ۲/۳۹۹, ۲/۳۹۹۹, ۲/۳۹۹۹۹, \dots$ به یک عدد ثابت و گویا بسیار نزدیک می شود. جمله دهم دنباله تفاضل آنها از این عدد ثابت کدام است؟

- (۱) $۱۰^{-۱۱}$ (۲) $۱۰^{-۱۰}$
(۳) $۱۰^{-۹}$ (۴) ۲×۱۰^{-۱۰}

گزینه ۱

$$a_n \rightarrow 2/4, \quad b_n = 2/4 - a_n$$

$$b_n : 0/1, 0/01, 0/001, \dots$$

$$\Rightarrow b_n = 10^{-n}$$

۱۰۲- تابع $f(x) = \log_3(ax + b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{4}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد.

آنگاه $f(-\frac{4}{9})$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

گزینه ۱

با توجه به دامنه داده شده حتما ریشه پراتنز $x = -\frac{1}{4}$ است

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + b = 0 \Rightarrow -a + 2b = 0 \Rightarrow a = 2, b = 1 \\ f(4) = 2 \Rightarrow 4a + b = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(-\frac{4}{9}) = \log_3\left(-\frac{4}{9} + 1\right) = \log_3\frac{5}{9} = -2$$

۱۰۳- مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۶ و ۹ واحد، برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟

- (۱) ۲۱ (۲) ۲۲
(۳) ۲۳ (۴) ۲۴

گزینه ۳

روش اول: با توجه به رابطه هرون و اینکه عدد مساحت کسری نیست پس ضلع سوم عددی فرد است که نصف مساحت آن عدد غیر کسری بدست آمده است.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{یادآوری هرون:}$$

لذا گزینه ۱ یا گزینه ۳ درست خواهد بود

با امتحان یک گزینه مشکل حل می شود مثلا اگر گزینه ۱ امتحان شود

$$p = \frac{9+16+2}{2} = 23$$

$$S = \sqrt{23(23-9)(23-16)(23-2)} = 14\sqrt{23} \quad \text{غ}$$

غلط است و گزینه ۳ درست خواهد بود

روش دوم:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C \Rightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times 9 \times 16 \times \sin C \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cos C = \pm \sqrt{1 - \sin^2 C} =$$

$$= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \pm \frac{2}{3} \xrightarrow{C > 90} \cos C = -\frac{2}{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow c^2 = 9^2 + 16^2 - 29 \times 16 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 529 \Rightarrow c = \sqrt{529} = 23$$

۱۰۴- با ارقام ۱, ۲, ۳, ..., ۹ به چند طریق می توان یک عدد پنج رقمی ساخت. به طوری که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟

۹۶۰۰ (۴)

۸۴۰۰ (۳)

۷۲۰۰ (۲)

۶۴۰۰ (۱)

گزینه ۲

عدد ۵ رقمی با ۵ رقم انتخاب شده و انتخاب سه عدد فرد پنج عدد فرد موجود و انتخاب ۲ عدد زوج از چهار عدد زوج موجود

$$\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5! = 7200$$

۱۰۵- تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

گزینه ۳

تکنیک: فرض کنیم دنباله فقط ۲ جمله داشته باشد

$$a_1 + a_2 = 2a_1 \Rightarrow a_1 + a_1 q = 2a_1 \Rightarrow a_1 q = 2a_1 \Rightarrow q = 2$$

۱۰۶- به ازای مقداری از a چند جمله‌ای $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x$ بر $x+2$ بخش پذیر است، کوچکترین ریشه

معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{5} & \quad (2) \\ -1 - \sqrt{5} & \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{3} & \quad (1) \\ -1 - \sqrt{3} & \quad (3) \end{aligned}$$

گزینه ۴

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 16 - 8a - 16 = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 4x^3 - 8x = x(x^3 + 4x^2 - 8)$$

$$-2 \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 4 & 0 & -8 & \\ \hline 1 & 2 & -4 & 0 & \end{array} \quad \text{پس } x = -2 \text{ ریشه } x^3 + 4x^2 - 8 \text{ است پس بنا بر هورنر}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x^3 + 4x^2 - 8) = x(x+2)(x^2 + 2x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -1 - \sqrt{5} \quad \text{min} \\ x = -1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

۱۰۷- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = x^2 + 4x + 3$ کدام است؟

$$1 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

$$4 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

گزینه ۲

با فرض $x^2 + 4x + 3 = t$ و توجه به $t > 0$ داریم:

$$t = \sqrt{t+2} \Rightarrow t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow$$

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

۱۰۸- نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $-x + 6; x < -4$
- (۲) $-x + 5; x > 2$
- (۳) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 3$
- (۴) $-\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 10$

گزینه ۴

با توجه به ریشه های داخل قدرمطلق

باید x در فاصله ای باشیم که ضریب عددی x منفی باشد که در بازه $(-4, 3)$ رخ می دهد و معادله بصورت $y = -2x + 2$ است و وارون آن $y^{-1} = -\frac{1}{2}x + 1$ است در بازه $(-4, 10)$

۱۰۹- جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{5}$
- (۲) $\frac{2k\pi}{5}$
- (۳) $\frac{3k\pi}{5}$
- (۴) $\frac{1}{5}(2k+1)\pi$

گزینه ۴

به ازای $k=0$ در گزینه های ۱ و ۲ و ۳ مقدار $x=0$ است که در دامنه $\cot x$ صدق نمی کند پس گزینه ۴ درست است

۱۱۰- شکل روبهرو، نمودار تابع $y = \sin^{-1}(U(x))$ است. ضابطه $U(x)$ ، به کدام صورت است؟



- (۱) $\frac{2}{x-1}$
- (۲) $\frac{2}{1-x}$
- (۳) $\frac{1}{x-2}$
- (۴) $\frac{1}{2-x}$

گزینه ۱

با توجه به اینکه تابع $\sin^{-1} x$ در مقادیر مثبت مقداری مثبت دارد پس $U(3) > 0$ است که فقط در گزینه های ۱ و ۳ رخ می دهد همچنین عدد $x=0$ باید در $U(x)$ مقداری بزرگتر از ۱ یا کوچکتر از -۱ بدهد چون این نقطه در دامنه نیست

پس فقط گزینه ۱ صحیح است $\frac{2}{0-1} = -2 < -1$

۱۱۱- حاصل عبارت $(169 \sin(2 \cos^{-1}(-\frac{5}{13})))$ کدام است؟

- (۱) -۱۲۰
- (۲) ۶۰
- (۳) -۶۰
- (۴) ۱۲۰

گزینه ۱

$$\cos^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right) = \theta \Rightarrow \cos \theta = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \pm \frac{12}{13} \xrightarrow{90^\circ < \theta < 180^\circ} \sin \theta = +\frac{12}{13}$$

$$169 \sin(2\theta) = 169 \times 2 \sin \theta \cos \theta = 169 \times 2 \times \frac{12}{13} \times \left(-\frac{5}{13}\right) = -120$$

۱۱۲- به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a(1 + \sqrt{1-x}) & ; x > 2 \\ x^2 - 2x & ; x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

- (۱) ۱/۲
- (۲) ۱/۶
- (۳) ۲/۴
- (۴) ۳/۲

گزینه ۳

باید در $x = 2$ پیوسته باشد

$$2^- : 2 - a$$

$$2^+ : \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1 + \sqrt{1-x})}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(2-x)}{x(x-2)} = -\frac{a}{6}$$

$$f(2) = 2 - a$$

$$2 - a = -\frac{a}{6} \Rightarrow a = \frac{12}{5} = 2/4$$

۱۱۳- حد دنباله $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+2}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ ، کدام است؟

- (۱) $2e$
- (۲) e^2
- (۳) $3e$
- (۴) $3e^2$

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1+1}{n+1}\right)^{2n+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n+2} = e^2 = e^2$$

۱۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است).
 (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) حد ندارد.

گزینه ۲

یادآوری: $[u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in \mathbb{Z} \\ -1 & u \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ پس $[2x] + [-2x] = -1$ $x \rightarrow 0$

$$\xrightarrow{P} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1) \frac{2x^2}{1-x^2} \times 2(1)}{1-x^2} = +3$$

۱۱۵- یکی از ریشه‌های حقیقی معادله $x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = 0$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$ (۲) $(-1, -\frac{3}{4})$
 (۳) $(-\frac{1}{2}, 0)$ (۴) $(0, \frac{1}{2})$

گزینه ۱

قضیه مقدار میانی $f(-\frac{3}{4}) < 0$, $f(-\frac{1}{2}) > 0$

۱۱۶- امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$ ، نیمساز ناحیه اول و سوم را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اندازه AB کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) ۴
 (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{2}$

گزینه ۴

دو مجانب افقی بدست می‌آید

$$\xrightarrow{N} |x+1| - |x-1| = \begin{cases} x \rightarrow +\infty : y = x+1 - x+1 = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x \rightarrow -\infty : y = -x-1 + x-1 = -2 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

محل تقاطع این دو مجانب با $y = x$ نقاط $A(2, 2)$ و $B(-2, -2)$ است پس $AB = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

۱۱۷- اگر θ زاویه بین مماس چپ و مماس راست، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [x + \frac{1}{x}]x + x^2$ ، در نقطه

$x = \frac{1}{2}$ باشد. $\tan \theta$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

مسئله غلط

با توجه به اینکه تابع در نقطه Z ساز ناپیوسته است پس مشتق چپ ندارد و مسئله غلط است

۱۱۸- از رابطه $x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 = 0$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه (۱, ۲) کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $\frac{8}{6}$ (۳) $\frac{11}{6}$ (۴) $\frac{13}{6}$

گزینه ۴

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2yx - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x^2 - 2y} = -\frac{2yx - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x^2 - 2y} \Rightarrow y'(1, 2) = 1$$

$$y'' = \frac{\left(2(y'x + y) - \frac{-1}{2\sqrt{xx}}\right)(x^2 - 2y) - (2x - 2y')(2yx - \frac{1}{\sqrt{x}})}{(x^2 - 2y)^2} = \frac{13}{16}$$

۱۱۹- اگر $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ باشد، معادله خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} ، در نقطه $x = 2$ واقع بر آن کدام است؟

- (۱) $y + 2x = 7$ (۲) $y - 2x = -5$ (۳) $2y + x = 5$ (۴) $2y - x = 1$

گزینه ۱

$$x^3 - x^2 + 2x = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

$$m = (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3} \Rightarrow m' = -3$$

$$y - 1 = -3(x - 2) \Rightarrow y + 2x = 7$$

۱۲۰- نمودار تابع $y = |x|e^{-x}$ ، در کدام بازه نزولی و تقعر آن روبه پایین است؟

- (۱) $(-\infty, 1)$
 (۲) $(0, 1)$
 (۳) $(1, 2)$
 (۴) $(2, +\infty)$

گزینه ۳

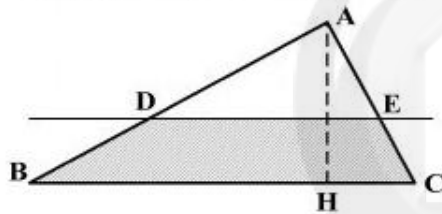
$$y = \begin{cases} x \geq 0 : y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \leq 0 \Rightarrow x \geq 1 & (i) \\ x < 0 : \end{cases}$$

با توجه به جواب بدست آمده قسمت $x < 0$ لازم نیست بررسی گردد و گزینه های ۱ و ۲ حذف

$$y'' = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -e^{-x}(2-x) \leq 0 \Rightarrow x \leq 2 \quad (ii)$$

$(i) \cap (ii) = (1, 2)$

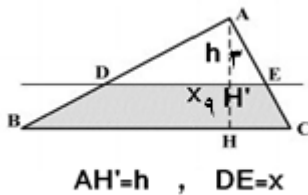
۱۲۱- در مثلث ABC ضلع $BC = 20$ و ارتفاع $AH = 12$ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت 0.2 واحد در ثانیه از آن دور می شود. سرعت افزایش مساحت دوزنقه در لحظه ای که فاصله دو خط موازی ۹ واحد باشد کدام است؟



- (۱) 0.8
 (۲) 0.9
 (۳) 1
 (۴) 1.2

گزینه ۳

سرعت تغییرات مساحت دوزنقه و مثلث یکسان است پس مثلث را بررسی می کنیم

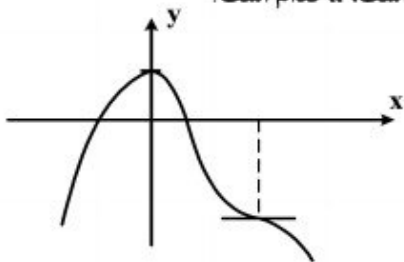


$$\frac{h}{12} = \frac{x}{20} \Rightarrow x = \frac{5}{3}h$$

$$S = \frac{1}{2} h \cdot x \rightarrow S = \frac{1}{2} h \times \frac{5}{3} h = \frac{5}{6} h^2$$

$$S' = \frac{5}{3} h h' = \frac{5}{3} \times 3 \times \frac{2}{10} = 1$$

۱۲۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 + ax^2 + b$ است، a کدام است؟



(۱) -۱۸

(۲) -۱۵

(۳) -۱۲

(۴) -۹

گزینه ۱

تابع در یک نقطه با طول مثبت عطف افقی دارد یعنی مشتق ریشه مضاعف دارد

$$f' = -4x^3 + 24x^2 + 2ax = x(-4x^2 + 24x + 2a) = 2x(-2x^2 + 12x + a) = 0 \xrightarrow{\Delta=0}$$

$$\rightarrow 144 + 8a = 0 \Rightarrow a = -\frac{144}{8} = -18$$

۱۲۳- اگر $G(x) = x^2 \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2} dt$ باشد، $G'(4)$ چند برابر $\ln 2$ است؟

(۲) ۱/۵

(۴) ۳

(۱) ۱

(۳) ۲

گزینه ۳

$$G' = 2x \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{\ln(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}^2} \right) - 0 \right) x^2 \Rightarrow$$

$$G'(4) = 2(4) \int_2^2 \frac{\ln(t+2)}{t^2} + \left(\frac{1}{2\sqrt{4}} \left(\frac{\ln(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{4}^2} \right) - 0 \right) (4)^2$$

$$= 0 + \frac{1}{4} \times \frac{\ln 4}{4} \times 16 = \ln 4 = 2 \ln 2$$

۱۲۴- حاصل انتگرال $\int_0^4 \left| \frac{x}{2} \right| \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx$ کدام است؟

(۲) $4 - 2\sqrt{2} + \ln 2$

(۴) $2 - \sqrt{2} + \ln 2$

(۱) $4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$

(۳) $2 + \sqrt{2} - \ln 2$

گزینه ۱

پایه	۰	۱	۲
۰	۰	۱	۲
۲	۱	۲	۴
۴	۲	۴	۸

$$= \int_0^2 \left[\frac{x}{2} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) dx + \int_2^4 \left[\frac{x}{2} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) dx = 0 + 2\sqrt{x} - \ln x \Big|_0^4 = (4 - \ln 4) - (2\sqrt{2} - \ln 2) =$$

$$4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$$