

پاسخ تشریحی آزمون سراسری سال ۱۳۹۴
درس ریاضی، رشته علوم تجربی

نگارش:

مهرداد معدنی پور

سایت کنکور

☎: 0935 – 6061745

✉: mehrdad.mdpour@gmail.com

۱۲۶- اعداد طبیعی فرد را به گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم، که تعداد در هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد. $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$ مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی‌ام، کدام است؟

- ۱۷۰۰(۱) ۱۷۵۰(۲) ۱۸۰۰(۳) ۱۸۵۰(۴)

اگر به جای هر عدد فرد، شماره آن را در دسته‌ها قرار دهیم: $(1), (2, 3), (4, 5, 6), \dots$ شماره آخرین جمله‌ی آخرین دسته، برابر است با مجموع تعداد اعضای دسته‌ها از اول تا آخرین دسته. یعنی آخرین جمله دسته ۳۰م برابر است با $(1 + 2 + 3 + \dots + 30)$ امین عدد فرد

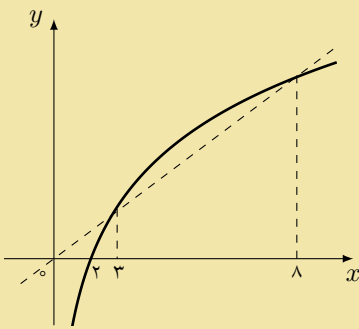
$$(1 + 2 + 3 + \dots + 30) = \frac{30(31)}{2} = 465$$

اگر ۲۹ جمله به عقب برگردیم، اولین جمله دسته ۳۰م حاصل می‌شود، یعنی ۴۲۶ پس باید ۴۶۵ امین و ۴۳۶ امین عدد فرد را با هم جمع کنیم:

$$2(465) - 1 + 2(436) - 1 = 1800$$

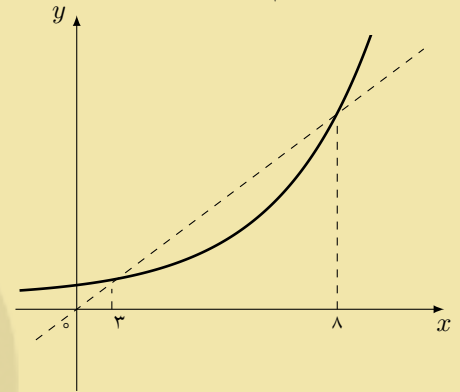
گزینه ۳

۱۲۷- شکل روی نمودار $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟



- (۱) $(0, 2]$ (۲) $[2, 3]$ (۳) $[2, 8]$ (۴) $[3, 8]$

نمودار تابع f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است. باید بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن $x \geq f^{-1}(x)$ که مطابق نمودار $[3, 8]$ است



گزینه ۴

۱۲۸- حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0.28$ ، کدام است؟

$$\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(540^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = -\frac{16}{9}$$

گزینه ۱

۱۲۹- اگر $A = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A - B)^{-1}$ ، کدام است؟

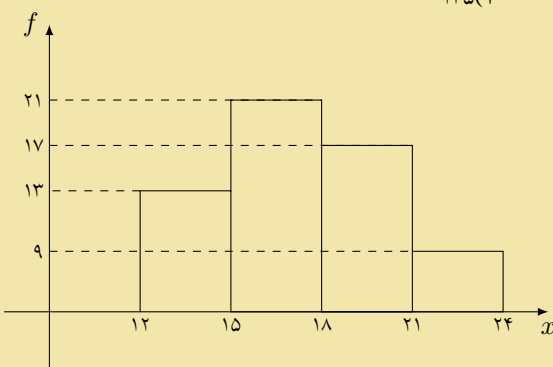
- (۱) $\begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0.2 & -0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = (2)(2) - (3)(-2) = 10 \Rightarrow C^{-1} = \frac{1}{|C|} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}$$

گزینه ۴

۱۳۰- از داده‌های آماری با نمودار مستطیلی مقابل، سه داده ۱۴ و ۱۶ و ۱۶ حذف شده است. در نمودار دایره‌ای داده‌های جدید، بزرگترین زاویه مرکزی نظیر دسته‌ها چند درجه است؟

- ۹۰(۱) ۱۰۵(۲) ۱۲۰(۳) ۱۳۵(۴)



۶۰ داده داریم که با حذف ۳ داده، ۵۷ تای آن‌ها باقی می‌ماند. داده ۱۴ از دسته $(12, 15)$ و دو داده ۱۶ از دسته $(15, 18)$ حذف شده‌اند که در این دسته ۱۹ داده باقی می‌ماند و همچنان بیشترین فراوانی را دارد. پس بزرگترین زاویه، مربوط به همین دسته می‌شود.

$$\theta_{[15, 18)} = \frac{f_{[15, 18)}}{n} \times 360 = \frac{19}{57} \times 360 = 120$$

گزینه ۳

۱۳۱ - داده‌های آماری به صورت ساقه و برگ نشان داده شده‌اند. در نمودار جعبه‌ای، تفاضل میانه از میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

ساقه	برگ	۱,۵(۴)	۱(۳)	۰,۵(۲)	صفر(۱)
۵	۰ ۱ ۱ ۲ ۴ ۴ ۶ ۷ ۹ ۹	۲۵			
۶	۰ ۰ ۲ ۳ ۳ ۵ ۵ ۶				
۷	۱ ۱ ۲ ۲ ۴ ۷ ۸				

در نمودار جعبه‌ای داده‌های بین و چارک اول (Q_1) و چارک سوم (Q_3) قرار دارد. ۲۵ داده داریم. پس داده ۱۳ام چارک دوم (میانه) است. داده هفتم چارک اول و داده ۱۹ام هم چارک سوم است.

$$Q_1 = 56, Q_3 = 71 \Rightarrow 56, 57, 59, 59, 60, 60, 62, 63, 63, 65, 65, 66, 71 = 62$$

$$\text{میانه} = 62$$

$$\text{تفاضل} = 62 \Rightarrow \frac{56 + 57 + 59 + 59 + 60 + 60 + 62 + 63 + 63 + 65 + 65 + 66 + 71}{11} = 62 \Rightarrow \text{تفاضل} = 0$$

۱۳۲ - در جعبه‌ای ۳ مهره سفید ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

$$\frac{21}{45} \quad \frac{29}{45} \quad \frac{28}{45} \quad \frac{21}{45}$$

$$\frac{\underbrace{3 \times 2}_{\text{سیاه و قرمز}} + \underbrace{3 \times 5}_{\text{سفید و قرمز}} + \underbrace{2 \times 5}_{\text{سفید و سیاه}}}{\binom{10}{2}} = \frac{31}{45}$$

گزینه ۳

۱۳۳ - اگر $\tan \beta = \frac{1}{2}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشند، $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$$\frac{0,45(1)}{0,6(2)} \quad \frac{0,75(3)}{0,8(4)}$$

$$\tan \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \tan \alpha = 2 \tan \alpha - 2 \Rightarrow \tan \alpha = 3$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 3 \Rightarrow \sin \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2(3 \cos \alpha) \cos \alpha = 6 \cos^2 \alpha = \frac{6}{1 + \tan^2 \alpha} = 0,6$$

گزینه ۲

۱۳۴ - اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_7(x^2 + 2x)$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

$$[-4, -2] \cup (0, 2](1) \quad [-4, -1] \cup (1, 2](3) \quad [-2, 0](2) \quad [-4, -2) \cup (0, 2](4)$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{3 - \log_7(x^2 + 2x)} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0 \\ \log_7(x^2 + 2x) \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 7 \Rightarrow x^2 + 2x - 7 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0 \Rightarrow \dots \end{cases}$$

$$\dots \Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow \text{اشتراک} : [-4, -2) \cup (0, 2]$$

گزینه ۴

۱۳۵ - در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

چون حد تابع در بی‌نهایت موجود است، پس صورت و مخرج هم‌درجه‌اند. یعنی $n = 1$ از هم‌اوری رادیکال در بی‌نهایت می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 15}{3x - \sqrt{4|x + \frac{15}{4}|}} \stackrel{\text{پس } x + \frac{15}{4} \text{ منفی است}}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{3x + 2(x + \frac{15}{4})} = -1 \Rightarrow \frac{a}{5} = -1 \Rightarrow a = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \stackrel{\text{هویتل}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{8x + 15}{2\sqrt{4x^2 + 15x}}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{39}{2\sqrt{11}}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{39}{2(9)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{13}{6}} \times \frac{6}{6} = \frac{-30}{5} = -6$$

گزینه ۱

۱۳۶ - به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$ بر روی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱ پیوسته است؟

$$\frac{1}{2}(4) \quad \frac{1}{4}(3) \quad -\frac{1}{4}(2) \quad -\frac{1}{2}(1)$$

حد چپ و راست تابع و مقدار تابع، باید در $x = 6$ برابر باشند.

$$\sin \frac{\pi}{6} = a + \cos^2 \frac{\pi(6)}{36} \Rightarrow \frac{1}{2} = a + \frac{3}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

گزینه ۲

۱۳۷- در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو متغیر $\Delta x = 0.21$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

- (۱) $\frac{1}{42}$ (۲) $\frac{1}{21}$ (۳) $\frac{3}{42}$ (۴) $\frac{2}{21}$

آهنگ آئی: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

آهنگ متوسط: $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{1.21} - \sqrt{1}}{0.21} = \frac{1.1 - 1}{0.21} = \frac{0.1}{0.21} = \frac{10}{21} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{21 - 20}{42} = \frac{1}{42}$

گزینه ۱

۱۳۸- در پرتاب یک تاس، اگر عدد زوج ظاهر شود یک تیرانداز مجاز است ۴ تیر رها کند. در غیر این صورت ۳ تیر رها می‌کند. می‌دانیم احتمال موفقیت هر تیر رها شده $\frac{2}{3}$ است. با کدام احتمال فقط ۲ بار موفقیت حاصل می‌شود؟

- (۱) $\frac{8}{27}$ (۲) $\frac{10}{27}$ (۳) $\frac{11}{27}$ (۴) $\frac{13}{27}$

اگر در پرتاب تاس زوج بیاید، یعنی باید از ۴ تیر دو تیر و اگر فرد بیاید یعنی از ۳ تیر ۲ تیر به هدف برسد. در هر دو حالت توزیع دو جمله‌ای داریم که در اولی ۳ بار پیروزی و در دومی ۲ بار پیروزی انتظار داریم:

گزینه ۲ $P = \binom{4}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4}{27} + \frac{6}{27} = \frac{10}{27}$

۱۳۹- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟

- (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$ (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$

اگر ریشه‌های معادله صورت سوال را α و β فرض کنیم، ریشه‌های معادله مورد نظر باید $\frac{1}{\alpha} - 1$ و $\frac{1}{\beta} - 1$ باشند.

جمع ریشه‌ها $= S = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -3 - 2 = -5$

ضرب ریشه‌ها $= P = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1 - \alpha - \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} + 1$

$\frac{1 - \frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} + 1 = 2 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$

گزینه ۴

۱۴۰- تابع با ضابطه $y = x|x - 2|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

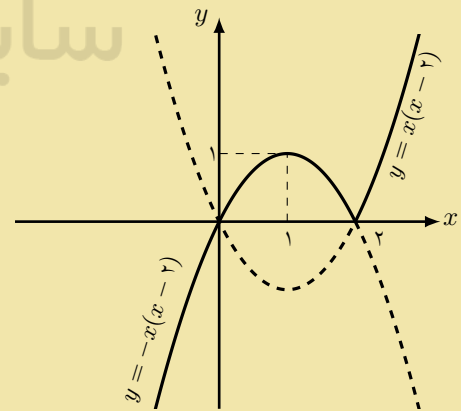
- (۱) $1 - \sqrt{1+x}; x < 0$ (۲) $1 - \sqrt{1-x}; x < 1$ (۳) $1 + \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$ (۴) $1 - \sqrt{1-x}; 0 < x < 1$

$y = x|x - 2| = \begin{cases} x(x - 2); & x \geq 2 \\ -x(x - 2); & x < 2 \end{cases}$ نزولی

با توجه به نمودار، در بازه $(1, 2)$ تابع نزولی است. پس باید برای تابع $y = -x(x - 2); 1 < x < 2$

تابع معکوس بنویسیم. چون برد این تابع طبق نمودار $(0, 1)$ است، پس دامنه معکوس تابع باید همین بازه باشد. یعنی گزینه‌های ۳ یا ۴. اما نقطه $(2, 0)$ روی نمودار تابع است، پس $(0, 2)$ باید در تابع معکوس صدق کند که گزینه ۳ خواهد بود.

گزینه ۳



۱۴۱- دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{v + 4^{n-1}}{2 + 4^n}$ چگونه است؟

- (۱) بی‌کران-صعودی (۲) بی‌کران-نزولی (۳) کران‌دار-صعودی (۴) کران‌دار-نزولی

$a_n = \frac{v + 4^{n-1}}{2 + 4^n} = \frac{4^{n-1} \left(\frac{v}{4^{n-1}} + 1\right)}{4^{n-1} \left(\frac{2}{4^{n-1}} + 4\right)} = \frac{\frac{v}{4^{n-1}} + 1}{\frac{2}{4^{n-1}} + 4}$

گزینه ۴

اول را بررسی کنیم: $\frac{v}{6}, \frac{11}{18}, \dots$ نزولی.

۱۴۲- کارایی کارگر عادی، در کارخانه‌ای پس از t ماه، روزانه به تعداد $f(t) = 90 - e^{-0.02t}$ واحد است. پس از چند ماه تجربه کاری، روزانه ۷۰ واحد را کامل می‌کند؟

- (۱) ۱۷ (۲) ۳۴ (۳) ۵۱ (۴) ۶۸

$$70 = 90 - 40e^{-0.02t} \Rightarrow 20 = 40e^{-0.02t} \Rightarrow e^{-0.02t} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -0.02t \Rightarrow \ln 2 = 0.02t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0.02} = \frac{0.693}{0.02} = 34.65 \approx 35$$

۱۴۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

$k\pi + \frac{\pi}{8}$ (۴) $k\pi - \frac{\pi}{8}$ (۳) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ (۲) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ (۱)

$$2 \cos^2 x - 1 = -2 \sin x \cos x \Rightarrow \cos 2x = -\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow 4x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \quad \text{گزینه ۱}$$

۱۴۴- اگر $f(x) = \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ کدام است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۴ (۴) مشتق ندارد

$$g(x) = \begin{cases} 5x & ; x \geq 0 \\ 3x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow |g(x)| = \begin{cases} 5x & ; x \geq 0 \\ -3x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f \circ g(x) = \frac{1}{5}g(x) - \frac{1}{5}|g(x)|$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(5x) - \frac{1}{5}(5x) = 4x - x = 3x & ; x \geq 0 \\ \frac{1}{5}(3x) - \frac{1}{5}(-3x) = \frac{12}{5}x + \frac{3}{5}x = 3x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f \circ g(x) = 3x \Rightarrow (f \circ g(x))' = 3 \quad \text{گزینه ۲}$$

۱۴۵- خط مماس بر منحنی به معادله $y = \sqrt{2x}e^{2-x}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \sqrt{4}e^0 = 2 \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{2x}}e^{2-x} - \sqrt{2x}e^{2-x} \Rightarrow m = y'(2) = \frac{1}{\sqrt{4}}e^0 - \sqrt{4}e^0 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\text{معادله خط: } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 2) \xrightarrow{x=0} y - 2 = -\frac{3}{2}(0 - 2) \Rightarrow y = 2 + 3 = 5 \quad \text{گزینه ۳}$$

۱۴۶- اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = x^3 - (m+2)x^2 + 3x$ ، همواره صعودی باشند، آنگاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع در کدام بازه است؟

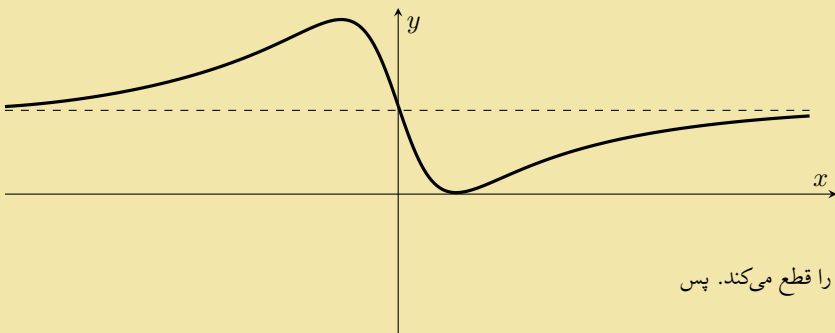
$[-2, 0]$ (۱) $[-2, 2]$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $[0, 1]$ (۴)

مشتق تابع باید همواره نامنفی باشد.

$$f'(x) = 3x^2 - 2(m+2)x + 3 \leq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow (-2(m+2))^2 - 4(3)(3) \leq 0 \Rightarrow 4(m+2)^2 - 36 \leq 0 \Rightarrow (m+2)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow -3 \leq m+2 \leq 3, \text{ طول نقاط عطف: } f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 2(m+2) = 0 \Rightarrow x_{\text{عطف}} = \frac{m+2}{3} \Rightarrow -1 \leq x_{\text{عطف}} \leq 1 \quad \text{گزینه ۳}$$

۱۴۷- شکل روبرو نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 8}{x^2 + 4}$ است. $a + b$ کدام است؟



- ۷ (۱)
- ۶ (۲)
- ۹ (۳)
- ۱۰ (۴)

مجانب افقی $y = a$ است. تابع در $x = 0$ مجانب افقی را قطع می‌کند. پس

$$f(0) = a \Rightarrow a = \frac{8}{4} = 2$$

نمودار تابع بر محور x ها مماس است، پس معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف دارد.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + bx + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4(2)(8) = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8$$

ریشه مضاعف تابع، طبق تمودار مثبت است. پس:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{-b}{4} > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow b = -8 \Rightarrow a + b = -6 \quad \text{گزینه ۲}$$

۱۴۸- خط هادی یک سهمی به معادله $x = \frac{13}{4}$ است. هر پرتوی که از نقطه $(-\frac{5}{4}, -2)$ برای این سهمی بتابد، در امتداد محور x ها باز می‌تابد. این سهمی محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{4}{5}$

هادی سهمی یک خط قائم است، پس سهمی افقی است. طبق ویژگی بازتابندگی سهمی هر پرتوی که از کانون سهمی به سهمی بتابد موازی محور سهمی بازتابیده می‌شود و بالعکس. بنابراین نقطه $(-\frac{5}{4}, -2)$ کانون سهمی می‌باشد.

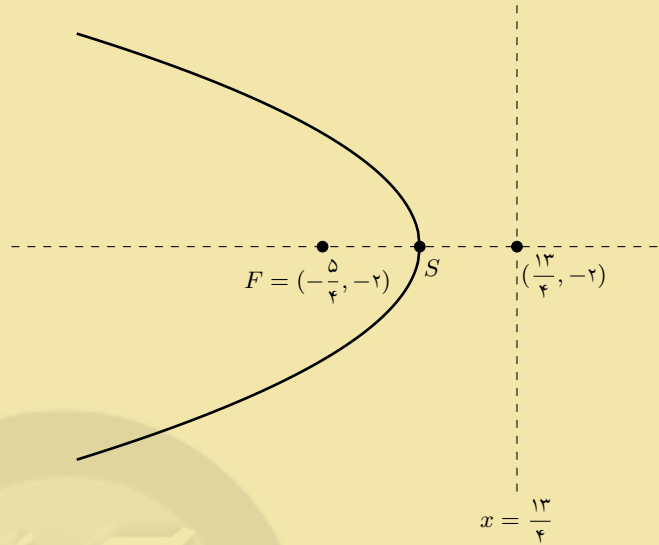
$$S = \frac{(-\frac{5}{4}, -2) + (\frac{13}{4}, -2)}{2} = (1, -2) = (\alpha, \beta)$$

$$p = SF = 1 - (-\frac{5}{4}) = \frac{9}{4} \Rightarrow (y - \beta)^2 = -4p(x - \alpha)$$

$$(y + 2)^2 = -9(x - 1) \xrightarrow{y=0} 4 = -9(x - 1) \Rightarrow x - 1 = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{9}$$

گزینه ۳



۱۴۹- هذلولی به معادله $5y^2 - 4x^2 - 20y = 0$ مفروض است. معادله یک بیضی که کانون‌های آن منطبق بر رأس‌های هذلولی و رأس‌های آن در کانون‌های این هذلولی باشد، کدام است؟

- (۱) $5y^2 + 9x^2 - 20y = 25$ (۲) $5y^2 + 9x^2 - 10y = 36$ (۳) $4y^2 + 5x^2 - 16y = 4$ (۴) $9y^2 + 5x^2 - 36y = 9$

معادله هذلولی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$5(y^2 - 4y) - 4x^2 = 0 \Rightarrow 5((y - 2)^2 - 4) - 4x^2 = 0 \Rightarrow 5(y - 2)^2 - 4x^2 = 20 \Rightarrow \frac{(y - 2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1 \Rightarrow \text{هذلولی قائم}$$

$$(\alpha, \beta) = (0, 2), a^2 = 4, b^2 = 5, c^2 = a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \text{ کانون‌ها } (\alpha, \beta \pm c) = (0, 2 \pm 3) = (0, -1), (0, 5)$$

$$\text{رأس‌ها } (\alpha, \beta \pm a) = (0, 2 \pm 2) = (0, 0), (0, 4)$$

پس کانون‌های بیضی به صورت $F = (0, 0)$ و $F' = (0, 4)$ و رأس‌های آن به صورت $A = (0, -1)$ و $A' = (0, 5)$ هستند. واضح است که بیضی، قائم است.

$$(\alpha, \beta) = \frac{F + F'}{2} = (0, 2), a = \frac{AA'}{2} = \frac{6}{2} = 3, c = \frac{FF'}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\frac{(x - \alpha)^2}{b^2} + \frac{(y - \beta)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1 \Rightarrow 9x^2 + 5(y - 2)^2 = 45 \Rightarrow 9x^2 + 5y^2 - 20y + 20 = 45 \Rightarrow 9x^2 + 5y^2 - 20y = 25$$

گزینه ۱

۱۵۰- حاصل $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ برابر کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) π (۴) صفر

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{|\cos x|} = \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$\left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) - \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = 1 - (-1) = 2$$

گزینه ۲

۱۵۱- اگر $\int \frac{\sqrt{x^3 - 4x}}{\sqrt{x^2}} dx = 3\sqrt{x}f(x) + c$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}x^2 - 2x$ (۲) $\frac{1}{3}x^2 - 1$ (۳) $x^2 - x$ (۴) $x^2 - 2$



$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt{x^2}} dx = \int \left(\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{x^2}} \right) dx = \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} dx - 4 \int \frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx - 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx - 4 \int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$v \times \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 4 \times \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = v \times \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 4 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = 2x^2 \sqrt{x} - \frac{8}{3}x \sqrt{x} + C = 2\sqrt{x} f(x) + C$$

$$\Rightarrow 2x^2 \sqrt{x} - \frac{8}{3}x \sqrt{x} + C = 2\sqrt{x} f(x) + C \Rightarrow f(x) = x^2 - x$$

گزینه ۳

۱۵۲- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویه داخلی C را در D قطع می کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد، AD برابر کدام است؟

- (۱) AM (۲) MD (۳) MC (۴) $\frac{1}{2}AC$

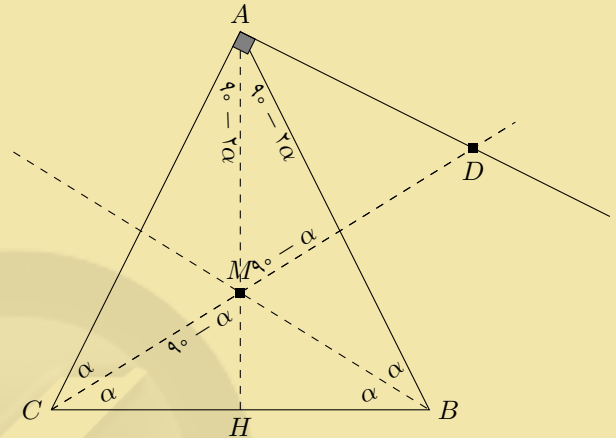
زاویه های مثلث AMD برابراند با:

$$\begin{cases} \hat{A}MD = 90 - \alpha \\ \hat{M}AD = 90 - (90 - 2\alpha) = 2\alpha \\ \hat{M}DA = 180 - (90 - \alpha + 2\alpha) = 90 - \alpha \end{cases}$$

پس این مثلث متساوی الساقین است و $AM = AD$

گزینه ۱

* اگر زاویه A قائمه یا منفرجه باشد، آنگاه D روی AB یا درون مثلث می افتد و البته راه حل مسئله دقیقاً مشابه خواهد بود.



۱۵۳- در مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) قاعده BC را به اندازه ساق تا نقطه D ادامه می دهیم. اگر زاویه خارجی رأس A از مثلث ABD برابر 102 درجه باشد، کوچک ترین زاویه مثلث ABC چند درجه است؟

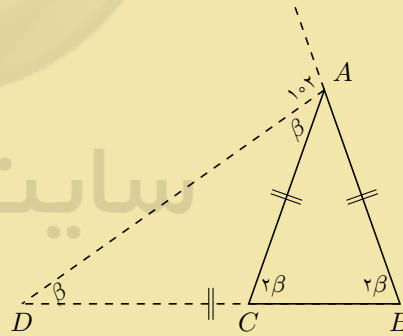
- (۱) 34 (۲) 38 (۳) 42 (۴) 44

در مثلث ABC زاویه خارجی A برابر مجموع دو زاویه داخلی B و C است:

$$2\beta + 2\beta = 102 + \beta \Rightarrow 3\beta = 102 \Rightarrow \beta = 34$$

زاویه های مثلث ABC :

- گزینه ۴ $44, 68, 68$



۱۵۴- در دوزنقه ای اندازه قاعده ها ۴ و ۹ واحد و اندازه ساق ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون دوزنقه تشکیل می شود کدام است؟

- (۱) 11.4 (۲) 11.6 (۳) 12.2 (۴) 12.8

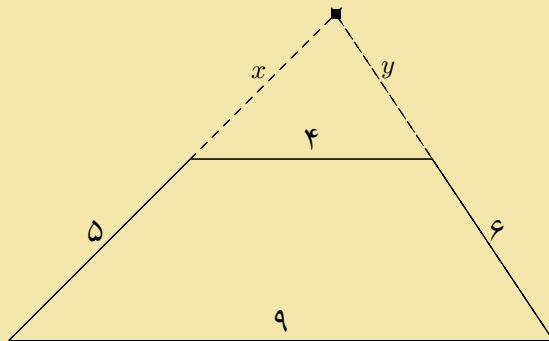
قضیه تالس:

$$\frac{x}{5+x} = \frac{4}{9} = \frac{y}{y+6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 9x = 20 + 4x \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \\ 9y = 4y + 24 \Rightarrow 5y = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{5} \end{cases}$$

$$\text{محیط} = x + y + 4 = 4 + \frac{24}{5} + 4 = \frac{64}{5} = 12.8$$

گزینه ۴



۱۵۵- در داخل یک نیم کره به شعاع ۹ واحد، استوانه‌ای به ارتفاع ۶ واحد جای گرفته است. بیشترین حجم ممکن این استوانه کدام است؟

۲۷۰π (۴)

۲۴۰π (۳)

۲۱۰π (۲)

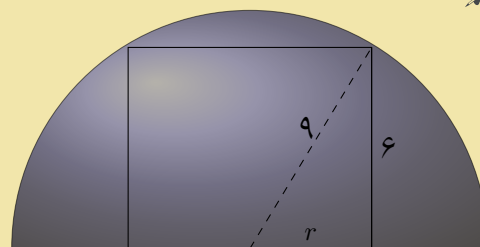
۱۸۰π (۱)



$$r^2 = 9^2 - 6^2 = 81 - 36 = 45$$

$$V = \pi r^2 h = \pi(45)(6) = 270\pi$$

گزینه ۴



باینده و پیروز باشید!

مهرداد معدنی پور

تلفن تماس: ۰۹۳۵۶۰۶۱۷۴۵

Email: mehrdad.mdpour@gmail.com

Website: www.mehrdad.irdabir.ir

سایت کنکور