به نام یزدان

پاسخ تشریحی ریاضیات پایه و دیفرانسیل کنکور سراسری ۹۵ (رشته ریاضی)

مهندس مهرداد پورنبی

فارغ التحصیل رشته برق دانشگاه چمران اهواز

مدرس ریاضی شهرستان اهواز

۱۰۱- گزینه ۴

$(\alpha^۲+\beta^۲-\alpha\beta)(\alpha^۲+\beta^۲+\alpha\beta)=\alpha^۴+\beta^۴+(\alpha\beta)^۲$

$\alpha=\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}-۴}$

$\beta=\sqrt[۴]{۳\sqrt{۲}+۴}$

$\to \alpha\beta=\sqrt[۴]{۹\times۲-۱۶}=\sqrt[۴]{۲}$

$\Rightarrow (۳\sqrt{۲}-۴)+(۳\sqrt{۲}+۴)+(\sqrt[۴]{۲})^۲$

$=۶\sqrt{۲}+\sqrt{۲}=\boxed{۷\sqrt{۲}}$

۱۰۲- گزینه ۴

$y=(m-۲)x^۲-۲(m+۱)x+۱۲$

معادله دو ریشه منفی داشته باشد

① $P=x_۱\times x_۲=\frac{c}{a}>0\to\frac{۱۲}{m-۲}>0$ $\quad \frac{\quad ۲ \quad}{-\ |\ +}$ Ⓘ

$\ominus\times\ominus$

② $S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}<0\to\frac{۲(m+۱)}{m-۲}<0$ $\quad \frac{-۱ \quad ۲}{+\ |\ -\ |\ +}$ Ⓘⓘ

$\ominus+\ominus$

③ $\Delta=b^۲-۴ac>0\to$ همواره مثبت

$\emptyset \Leftarrow$ Ⓘ ∩ Ⓘⓘ

نیازی به بررسی Δ نیست

۱۰۳- گزینه ۲

$f(x)=۳^{ax+b}\to f(-۱)=g(-۱)=۳^{-a+b}=۹=۳^۲\to\boxed{-a+b=۲}$ Ⓘ

$g(x)=(\frac{۱}{۹})^x$

از طرفی $\to f(۲)=\frac{۱}{۳}\to ۳^{۲a+b}=۳^{-۱}\to\boxed{۲a+b=-۱}$ Ⓘⓘ

از Ⓘ , Ⓘⓘ $\to \begin{cases}\boxed{a=-۱}\\ \boxed{b=۱}\end{cases}\xrightarrow{\text{بازنویسی تابع}} f(x)=۳^{-x+۱}$

می‌دانیم دامنه تابع معکوس برابر با برد تابع اصلی است پس

$f(x)=۳^{-x+۱}=۲۷=۳^۳\to -x+۱=۳\to\boxed{x=-۲}$

۱۰۴) گزینه ۴

$y=a-۲\cos(bx+\frac{\pi}{۲})=a+\sin(bx)$

$-\sin$ تبدیل ← تابع

$T=\frac{۲\pi}{b}=\frac{۱۳\pi}{۱۸}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۱۲\pi}{۱۸}\to\boxed{b=۳}$

از طرفی $\left.\right|_{0}^{\frac{\pi}{۱۸}}\to a+۲\sin(۳\times\frac{\pi}{۱۸})=0\to\boxed{a=-۱}$

$\Rightarrow a+b=۲$

۱۰۵) گزینه ۲

$ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

* نکته: وقتی y بر $(x-\alpha)^2$ بخش پذیر است که

$f'(\alpha) = 0$

$\Rightarrow f'(1) = 3a(1) + 8(1) - 14 = 0 \longrightarrow \boxed{a = 2}$

---

۱۰۶) گزینه ۳

$\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$

$3x+4 > 4(x-1)^2 - 4(x-1)(x) + x^2$

$\rightarrow (3x+4) > x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - 7x < 0 \rightarrow x(x-7) < 0 \rightarrow$

$\dfrac{0 \qquad 7}{+\ |\ -\ |\ +}$ ج

$(0, 7)$

$\rightarrow \dfrac{a+b}{2} = \boxed{7/2}$

---

۱۰۷) گزینه ۱

$f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$

(I) $1 - \log_{10}(x^2 - 3x) \geq 0 \xrightarrow{\text{چرخش}} 1 \geq \log_{10}^{x^2-3x} \rightarrow x^2 - 3x \leq 10$

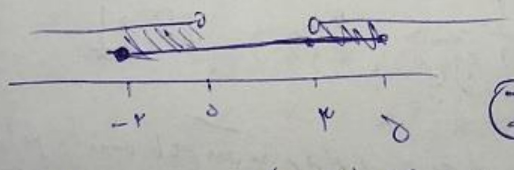
$\rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0 \rightarrow$

$(x-5)(x+2) \leq 0$

$\dfrac{-2 \qquad 5}{+\ |\ -\ |\ +}$ ج

(II) $x^2 - 3x > 0 \rightarrow x(x-3) > 0 \rightarrow$

$\dfrac{0 \qquad 3}{+\ |\ -\ |\ +}$ ج ج



(I) $\cap$ (II) $= [-2, 0) \cup (3, 5]$

* توجه: با استفاده از رد گزینه بهتر توان به جواب رسید.

---

۱۰۸) گزینه ۳

$\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}$

$\Rightarrow \sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = -\cos 2x$

(I) $\cos 2x = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

(II) $\cos 2x \neq 0 \longrightarrow 2\sin 2x = -1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}$

ادامه ۱۰۸

$$\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{11\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=\frac{6\pi}{2}$$

* * *

۱۰۹) گزینه ۱

$$\cos(\underbrace{\tan^{-1}x}_{\alpha})=mx$$

$$\cos\alpha=mx\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=mx$$

سمت چپ همواره مثبت است و صفر نمی‌شود پس $m\neq 0$

از طرفی تابع cos تابعی زوج است پس جواب گزینه ۱ صحیح خواهد بود

* * *

۱۱۰) گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^+}[\sin(0^+)]\cos(\pi^+)+[\tan^2\frac{\pi}{3}^+]=0+3=3$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}[\sin(0^-)]\cos(\pi^-)+[\tan^2\frac{\pi}{3}^-]=(-1)(-1)+3=4$$

حد چپ و راست برابر نیستند پس حد ندارد

* * *

۱۱۱) گزینه ۳

تابع به ازای نقاطی که درون براکت‌ها عدد صحیح شوند ناپیوسته است.

$$x^2=k\Rightarrow x=\pm\sqrt{k}$$

x^2	0	1	2	3	4
x	0	± 1	$+\sqrt{2}$	$+\sqrt{3}$	2
		✓	✓	✓	✓
$[-1,2]$		✓			
		✓ -1			

پنج نقطه

* دقت: $x=0$ نقطه‌ی min تابع است پس پیوسته خواهد بود

* * *

۱۱۲) گزینه ۱:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow -1 < y' < 1$$

$$(m+2)y = mx \Rightarrow y = \frac{mx}{m+2}$$

$$\left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{m}{m+2} \right. \qquad \left|\frac{m}{m+2}\right| < 1 \Rightarrow \boxed{m>-1}$$

* * *

۱۱۳) گزینه ۲

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+(-1)^n}{2n^2+2} = \frac{1}{2}$$

دنباله همگراست

$n=1 \to 0$

$n=2 \to \frac{1}{2}$

$n=3 \to \frac{2}{5}$

$n=4 \to \frac{1}{2}$

غیر یکنواست ~ $0 \uparrow \frac{1}{2} \downarrow \frac{2}{5} \uparrow \frac{1}{2}$

* * *

۱۱۴) گزینه ۴

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}\left(1-x^2\left[\frac{1}{x^2}\right]\right) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} - \left[\frac{1}{x^2}\right]$$

از طرفی در دامنه $0 \leq a-[a] < 1$ که حد ندارد.

* * *

۱۱۵) گزینه ۱

$$\left\{\frac{2n+1}{3n+1}\right\} = \left\{\frac{3n+1-n}{3n+1}\right\} = \left\{1-\frac{n}{3n+1}\right\}$$

صعودی

به ازای بیشترین مقدار این عبارت inf داریم.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \to \left\{1-\frac{1}{3}\right\} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

* * *

۱۱۶) گزینه ۱

$$y = \sqrt[3]{8x^3+4x^2} \sim \sqrt[3]{8}\left(x+\frac{4}{3\times8}\right)$$ → هم‌ارزی بینهایت

$$= 2\left(x+\frac{1}{12}\right) = 2x+\frac{1}{6} \longrightarrow \frac{1}{6}$$ عرض از مبدا

۱۱۷) گزینه ۴ :

$$f(x)=\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})$$

$$f^{-۱}(\frac{۱}{x})+f^{-۱}(x)=?\xrightarrow{x=۱} f^{-۱}(۱)+f^{-۱}(۱)=۲f^{-۱}(۱)$$

دامنه تابع معکوس معادل برد تابع اصلی است که

$$\frac{۱}{۲}(x+\sqrt{x^۲+۴})=۱ \xrightarrow[\text{پس}]{} \boxed{x=۰}$$

پس

$$۲f^{-۱}(۱)=۰ \leftarrow f^{-۱}(۱)=۰$$

* * *

۱۱۸) گزینه ۲

$$f(x)=(x+۲)e^{۱-x} \to f(۱)=۳$$

$$f'(x)=e^{۱-x}-(x+۲)e^{۱-x} \to f'(۱)=-۲$$

$$\tan\alpha=\frac{m_۱-m_۲}{۱+m_۱m_۲}=\frac{-۲-۳}{۱-۶}=①$$

* * *

۱۱۹) گزینه ۳

$$f(۲)=۴ \quad , \quad f'(۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f^۲(x)-۴f(x)}{x-۲}\overset{\text{HoP}}{\Longrightarrow}\frac{۲f(x)f'(x)-۴f'(x)}{۱}=۲\times۴\times۳-۱۲=⑫$$

* * *

۱۲۰) گزینه ۱

$$y=۵x^{۲/۳}-x^{۵/۳}\Rightarrow y'=۵\times\frac{۲}{۳}\times x^{-۱/۳}-\frac{۵}{۳}x^{۲/۳}$$

$$\to y''=۵\times\frac{۲}{۳}\times(-\frac{۱}{۳})x^{-۴/۳}-\frac{۵}{۳}\times\frac{۲}{۳}x^{-۱/۳}$$

$$=-\frac{۱۰}{۹}x^{-۱/۳}(x^{-۱}+۱)=۰$$

غیر صفر

$$\frac{۱}{x}+۱=۰\to\boxed{x=-۱}$$

۱۲۱) گزینه ۳

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \Rightarrow r^2 h = 1 \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{h}}$

$S_{\text{جانبی}} = \pi r \underset{l}{(\text{یال})} = \pi \times \frac{1}{\sqrt{h}} \sqrt{h^2 + \frac{1}{h}} = \pi \sqrt{h + \frac{1}{h^2}} \xrightarrow[\text{برحسب } h]{'}$

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$\pi \times \frac{\left(1 - \frac{2}{h^3}\right)}{2\sqrt{h + \frac{1}{h^2}}} = 0 \rightarrow 1 = \frac{2}{h^3} \rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{2}}$

۱۲۲) گزینه ۲

$y = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$

$\rightarrow x + c = 0 \rightarrow \boxed{\underset{\text{قائم}}{x = -c}} \rightarrow x = -3 \rightarrow \boxed{c = 3}$

$$\begin{array}{l|l} x^2 + ax + b & x + 3 \\ -(x^2 + 3x) & \boxed{x + a - 3} \\ \hline (a-3)x + b & \end{array}$$

$\boxed{x + a - 3} \rightarrow$ مایل

$y = x + a - 3 \xrightarrow[y=0]{x=2}$

$0 = 2 + a - 3 \rightarrow \boxed{a = -4}$

مماس $\Delta = 0 \rightarrow a^2 - 4b = 0 \rightarrow \boxed{b = 4}$

۱۲۳) گزینه ۳

$F(x) = \int \frac{x^2 - 2}{x^2} dx = \int 1 - \frac{2}{x^2} = x + \frac{2}{x}$

$\frac{1}{4-2}\left(F(4) - F(2)\right) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{1}{2} - 2 - 1\right) = \frac{3}{4}$

۱۲۴) گزینه ۲

$\int \frac{1 + \cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin^2 x} = \int \frac{2\cos^2 x}{2 \sin^2 x} = \int \cot^2 x$

$-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cot^2 x - 1 = -(\cot x + x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(0 + \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{4}\right)$

$\boxed{= 1 - \frac{\pi}{4}}$