

با توجه به جوابگویی سریع احتمال خطا وجود دارد، از دوستان خواهشمند است هر اشتباهی را با اینجانب در میان بگذارید.

پاسخ سوالات ریاضی ۲ - حسابان - دیفرانسیل

۱۰۱- اگر  $\alpha = \sqrt[3]{3\sqrt{2}-4}$  و  $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{2}+4}$  باشند، حاصل عبارت  $(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)$  کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۸ (۳)  $6\sqrt{2}$  (۴)  $7\sqrt{2}$

۱۰۱- گزینه ۴

$$\alpha\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{2}-4} \times \sqrt[3]{3\sqrt{2}+4} = \sqrt[3]{18-16} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (\alpha\beta)^2 = \sqrt{2}$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + (\alpha\beta)^2 = 3\sqrt{2}-4 + 3\sqrt{2}+4 + \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

۱۰۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$  منحنی به معادله  $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$  محور  $x$ ها را در دو نقطه به طولهای منفی

قطع می‌کند؟

- (۱)  $m > 2$  (۲)  $-1 < m < 2$  (۳) هر مقدار  $m$  (۴) هیچ مقدار  $m$

۱۰۲- گزینه ۴

$$\Delta > 0 \rightarrow 4(m+1)^2 - 4 \cdot 8(m-2) > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \cdot 0m + 100 > 0 \rightarrow (2m-10)^2 > 0 \Rightarrow \boxed{m \in \mathbb{R}, m \neq 5} \quad (1)$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow \boxed{m > 2} \quad (2)$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \Rightarrow \boxed{-1 < m < 2} \quad (3)$$

(۱)  $\cap$  (۲)  $\cap$  (۳)  $\Rightarrow m$  هیچ مقدار

۱۰۳- نمودارهای دو تابع  $f(x) = 3^{ax+b}$  و  $g(x) = (\frac{1}{9})^x$  در نقطه‌های به طول ۱- متقاطع هستند. اگر  $f(2) = \frac{1}{3}$  باشد، مقدار  $f^{-1}(27)$

کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۳- گزینه ۲

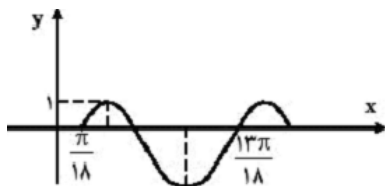
$$f(-1) = g(-1) \Rightarrow 3^{-a+b} = (\frac{1}{9})^{-1} = (3^{-2})^{-1} = 3^2 \Rightarrow \boxed{-a+b=2} \quad (1)$$

$$f(2) = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{2a+b} = 3^{-1} \Rightarrow \boxed{2a+b=-1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \boxed{a=-1, b=1} \Rightarrow f(x) = 3^{-x+1}$$

$$f^{-1}(27): x = 27 \in f^{-1} \Rightarrow y = 27 \in f \Rightarrow 27 = 3^{-x+1} \Rightarrow -x+1=3 \Rightarrow \boxed{x=-2=f^{-1}(27)}$$

۱۰۴- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $y = a - 2\cos(bx + \frac{\pi}{4})$  است.  $a+b$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲) ۱ (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴) ۲

۱۰۴- گزینه ۴

$$T = \frac{12\pi}{18} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=3 \rightarrow b = \pm 3 \xrightarrow{(\frac{\pi}{18}, 0) \in f} b=3 ; y = a - 2\cos(bx + \frac{\pi}{4}) = a + 2\sin bx$$

$$y_{\max} = 1 \Rightarrow 1 = a + 2\sin bx \rightarrow 1 = a + 2 \Rightarrow a = -1 ; a+b = -1+3=2$$

max=1

۱۰۵- اگر عبارت  $ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a$  بر سه جمله‌ای  $x^2 - 2x + 1$  بخش‌پذیر باشد،  $a$  کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۱۰۵- گزینه ۲ در  $x=1$  ریشه مضاعف است. می‌دانیم ریشه مضاعف در معادله و مشتق آن صدق می‌کند. داریم:

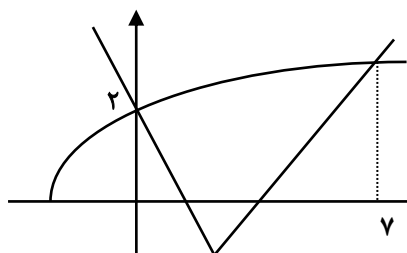
$$y = ax^3 + 4x^2 - 14x + 10 - a \Rightarrow y' = 3ax^2 + 8x - 14 \xrightarrow{y'(1)=0} 0 = 3a + 8 - 14 \rightarrow \boxed{a=2}$$

۱۰۶- اگر مجموعه جواب نامعادله  $\sqrt{3x+4} > 2|x-1| - x$  بازه  $(a, b)$  باشد، طول وسط این بازه،  $a$  و  $b$  کدام است؟

۴ (۴)

 $\frac{7}{2}$  (۳)

۳ (۲)

 $\frac{5}{2}$  (۱)

۱۰۶- گزینه ۳ ابتدا نمودار توابع  $y = \sqrt{3x+4}$  و  $y = 2|x-1| - x$  را رسم می‌کنیم.

$$2|x-1| - x = \begin{cases} x-2, & x \geq 1 \\ -3x+2, & x < 1 \end{cases}$$

به ازای  $x=0$  مقدار هر دو عبارت  $y = \sqrt{3x+4}$  و  $y = 2|x-1| - x$  برابر ۲ می‌باشد، پس نقطه شروع برای پیدا کردن نقطه نهایی کافیست. داریم:

$$x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{3x+4} > x-2 \Rightarrow 3x+4 > x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 7x < 0 \Rightarrow 0 < x < 7 \Rightarrow x_0 = \frac{0+7}{2} = \frac{7}{2}$$

۱۰۷- دامنه تابع  $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$  به کدام صورت بازه‌ها است؟

 $(0, 5)$  (۴) $[-2, 2)$  (۳) $[-2, 0) \cup (3, 5)$  (۲) $[-2, 0) \cup (3, 5]$  (۱)

۱۰۷- گزینه ۱ به ازای  $x=0$  جلوی لگاریتم صفر می‌شود، پس گزینه‌های ۲ و ۳ که شامل  $x=0$  هستند حذف می‌شوند.

همچنین به ازای  $x=1$  جلوی لگاریتم منفی می‌شود، پس گزینه ۴ که شامل  $x=1$  است حذف می‌شود.

۱۰۸- مجموع تمام جوابهای معادله مثلثاتی  $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x$ ، در بازه  $[0, \pi]$ ، برابر کدام است؟

 $\frac{11\pi}{3}$  (۴) $\frac{5\pi}{2}$  (۳) $\frac{9\pi}{4}$  (۲) $\frac{7\pi}{4}$  (۱)

۱۰۸- گزینه ۳

$$\sin^2 x = -\cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$x = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right\} \xrightarrow{+} \frac{5\pi}{2}$$

۱۰۹- نمودار تابع  $y = \cos(\tan^{-1} x)$ ، و خط به معادله  $y = mx$ ، به ازای کدام مجموعه مقادیر  $m$ ، در یک نقطه مشترک هستند؟

 $(0, +\infty)$  (۴) $(-\infty, 0)$  (۳) $(-\infty, +\infty)$  (۲) $(-\infty, +\infty) - \{0\}$  (۱)

۱۰۹- گزینه ۱

$$y = \cos(\tan^{-1} x) = \cos \alpha, \tan \alpha = x, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

نمودار  $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  به صورت بوده و فقط به ازای  $m=0$  خط  $y = mx = 0$ ، نمودار را قطع نمی‌کند.

۱۱۰- حد عبارت  $[\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 3x + [\tan^2 x]$  وقتی  $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$  کدام صورت است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) حد ندارد

۱۱۰- گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} [\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 3x + [\tan^2 x] = [0^-] \times -1 + [(3)^-] = (-1) \times (-1) + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} [\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 3x + [\tan^2 x] = [0^+] \times -1 + [(3)^+] = (0) \times (-1) + 3 = 3$$

۱۱۱- تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه  $f(x) = [x^2]$ ، در بازه  $[-1, 2]$ ، کدام است؟

(۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۱۱۱- گزینه ۳

$$x^2 = k \rightarrow x = \pm k \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$$

بجز صفر در سایر نقاط ناپیوسته است، پس ۵ نقطه ناپیوستگی در این بازه دارد.

۱۱۲- به ازای کدام مقدار  $m$  خط به معادله  $(m+2)y = mx$ ، موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی  $y = \sqrt{1+x^2}$  است؟

(۱)  $m > -1$  (۲)  $m < -1$  (۳)  $m > 1$  (۴)  $m < 1$

۱۱۲- گزینه ۱

$$\text{شیب} = \frac{m}{m+2}, y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{m}{m+2}$$

در کسر  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  صورت از مخرج کوچکتر است، پس  $|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}| < 1$  بوده و داریم:  $\boxed{m > -1}$

۱۱۳- دنباله  $\left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + 2} \right\}$  چگونه است؟

(۱) غیریکنوا - واگرا (۲) غیریکنوا - همگرا (۳) نزولی - همگرا (۴) صعودی - واگرا

۱۱۳- گزینه ۲

همگرا و کراندار  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$ ، از طرفی با توجه به جملات، دنباله نه صعودی و نزولی است:  $\frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{5}{20}, \frac{8}{20}, \dots$

۱۱۴- حد عبارت  $(1 - x^2) \left[ \frac{1}{x^2} \right]$  وقتی  $x \rightarrow 0$ ، کدام است؟ (نماد [ ] به مفهوم جزء صحیح است.)

(۱) صفر (۲) ۱ (۳)  $\infty$  (۴) حد ندارد

۱۱۴- گزینه ۴

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} (1 - x^2 \left[ \frac{1}{x^2} \right]) \right) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \left[ \frac{1}{x^2} \right] = ?$$

تابع  $y = u - [u]$  در بازه  $(0, 1)$  می باشد و مقدار دقیقی ندارد.

۱۱۵- بزرگترین کران پایین دنباله  $\left\{ \frac{2n+1}{3n+1} \right\}$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{5}{7}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴) ۱

۱۱۵- گزینه ۱

دنباله نزولی است و  $\inf = \frac{2}{3}$  و  $\sup = \frac{3}{4}$  است.

۱۱۶- خط مجانب منحنی به معادله  $y = \sqrt[3]{8x^3 + 2x^2}$  محور  $y$ ها را با کدام عرض قطع می کند؟

(۱)  $\frac{1}{6}$       (۲)  $\frac{1}{3}$       (۳)  $\frac{2}{3}$       (۴)  $\frac{5}{6}$

۱۱۶- گزینه ۱

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} \rightarrow y = 2x + \frac{1}{6} \xrightarrow{x=0} y = \frac{1}{6}$$

۱۱۷- اگر  $f(x) = \frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2 + 4})$  باشد، حاصل  $f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x})$ ، کدام است؟

(۱)  $2x$       (۲)  $\frac{2}{x}$       (۳)  $x^2 - 1$       (۴) صفر

۱۱۷- گزینه ۴ کفایت به  $x$  عدد دلخواه بدهیم، مثلاً  $x = 1$ ، می دانیم  $f^{-1}(1)$  یعنی در تابع  $f$  به جای  $y$  عدد یک بگذاریم، داریم:

$$y = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2 + 4}) \Rightarrow \boxed{x=0}; f^{-1}(1) + f^{-1}(\frac{1}{1}) = 0 + 0 = 0$$

هر عدد دیگر را هم قرار دهیم به صفر می رسیم.

۱۱۸- خط مماس بر نمودار تابع  $f(x) = (x+2)e^{1-x}$  در نقطه  $x = 1$  با خطی که این نقطه تماس را به مبدأ مختصات وصل کند زاویه  $\alpha$

می سازد.  $\tan \alpha$  کدام است؟

(۱)  $0/5$       (۲)  $1$       (۳)  $1/5$       (۴)  $2$

۱۱۸- گزینه ۲  $f'(x) = e^{1-x} - (x+2)e^{1-x} \xrightarrow{x=1} f'(1) = 1 - 3 = \boxed{-2 = m}$ ،  $x = 1 \rightarrow y = 3 \rightarrow A \Big|_{\frac{1}{3}} \Rightarrow m' = 3$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{-2 - 3}{1 + (-6)} \right| = 1$$

۱۱۹- خط به معادله  $y = 3x - 2$  در نقطه  $x = 2$  بر منحنی پیوسته  $y = f(x)$  مماس است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x) - 4f'(x)}{x - 2}$  کدام است؟

(۱)  $3$       (۲)  $6$       (۳)  $12$       (۴)  $15$

۱۱۹- گزینه ۳

روش ۱  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x) - 4f'(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(f'(x) - 4)}{1(x - 2)} = f(2) \times f'(2) = 4 \times 3 = 12$

روش ۲  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f''(x) - 4f'(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)f'(x) - 4f'(x)}{1} = 2f(2) \times f'(2) - 4f'(2) = 2 \times 4 \times 3 - 4 \times 3 = 12$

۱۲۰- طول نقطه عطف نمودار تابع  $y = (\Delta - x)\sqrt[3]{x^2}$ ، کدام است؟

(۱)  $-1$       (۲) صفر      (۳)  $1$       (۴)  $2$

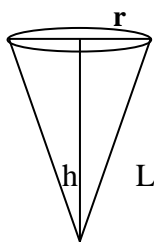
۱۲۰- گزینه ۱

$$y = (\Delta - x)\sqrt[3]{x^2} = (\Delta - x) \times x^{\frac{2}{3}} = \Delta x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} \Rightarrow y' = \frac{1}{3}\Delta x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y'' = -\frac{1}{9}\Delta x^{-\frac{4}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$$

$y'' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{9}\Delta x^{-\frac{4}{3}}(1 + x^1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$  نقطه با طول صفر نمی تواند نقطه عطف باشد، چون ریشه مضاعف مشتق دوم است.

۱۲۱- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم  $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می شود؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       (۲) ۱      (۳)  $\sqrt{2}$       (۴)  $\sqrt{2}$

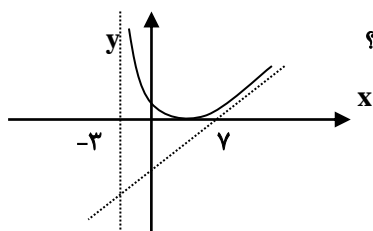


۱۲۱- گزینه ۳

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{h}} \quad ; \quad L = \sqrt{r^2 + h^2} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{1}{h} + h^2}$$

$$S = \pi r L \rightarrow S = \pi \sqrt{\frac{1}{h}} \sqrt{\frac{1}{h} + h^2} \Rightarrow S = \pi \sqrt{\frac{1}{h^2} + h}$$

$$S' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{h^2} = 0 \Rightarrow h = \sqrt[3]{2}$$



۱۲۲- شکل روبه رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$  است. کدام است؟

- (۱) ۱      (۲) ۴  
(۳) ۶      (۴) ۹

۱۲۲- گزینه ۲

$x = -c = -3$  مجانب قائم است، پس  $c = 3$ ، از طرفی برای مجانب مایل داریم:

$$x^2 + ax + b \mid x + 3$$

$$-x^2 - 3x \quad x + a - 3 \Rightarrow y = x + a - 3 \quad \text{مجانب مایل}$$

$$\frac{(a-3)x}{\vdots}$$

نقطه  $(7, 0)$  در مجانب مایل صدق می کند، پس:  $0 = 7 + a - 3 \Rightarrow a = 4$

از طرفی منحنی بر محور  $x$  مماس است، پس صورت ریشه مضاعف دارد و  $\Delta = 0$  است، بنابراین:  $\Delta = 0 \rightarrow 16 - 4b = 0 \rightarrow b = 4$

۱۲۳- مقدار میانگین تابع  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2}$  بر بازه  $[2, 4]$ ، کدام است؟

- (۱)  $\frac{5}{8}$       (۲)  $\frac{11}{16}$       (۳)  $\frac{3}{4}$       (۴)  $\frac{7}{8}$

۱۲۳- گزینه ۳

$$\int_2^4 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) dx = x + \frac{2}{x} \Big|_2^4 = \left(4 + \frac{2}{4}\right) - \left(2 + 1\right) = \frac{3}{2}$$

$$\bar{y} = f(c) = \frac{1}{4-2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

۱۲۴- حاصل  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2 \sin^2 x} dx$  کدام است؟

- (۱)  $1 - \sqrt{2}$       (۲)  $1 - \frac{\pi}{4}$       (۳)  $\frac{\pi}{2} - 1$       (۴)  $\frac{3}{4}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2x}{2 \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x}{2 \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cot^2 x - 1) dx = -\cot x - x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

۱۲۴- گزینه ۲