

یا من هو عالم بکل شی

**پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و
تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری
ریاضی سال ۱۳۹۵**

توسط

سایت کنکور

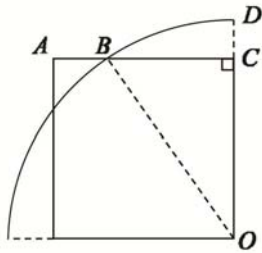
سیدامیر ستوده

دبیر ریاضی مرکز آموزش شهیدبهبشتی شهر ری

(استعدادهای درخشان)

پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۵

۱۲۵. گزینه‌ی ۲ صحیح است.



$$OB^2 = OC^2 + BC^2$$

$$(2,5)^2 = 2^2 + BC^2 \Rightarrow BC = 1,5$$

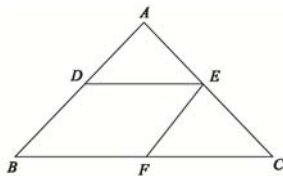
$$AB = 0,5$$

پس

لذا

□

۱۲۶. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



$$\frac{AD}{BD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} AD = 3x \\ BD = 2x \\ EF = 2x \end{cases}$$

$$\triangle ADE \cong \triangle ABC, \quad \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

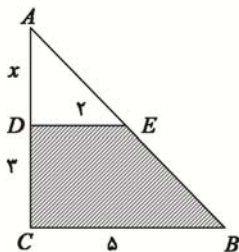
$$\triangle CEF \cong \triangle ABC, \quad \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{EF}{AB}\right)^2 = 4$$

لذا

$$\frac{S_{BDEF}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{CEF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{9}{25} - \frac{4}{25} = \frac{12}{25} = \frac{48}{100}$$

□

۱۲۷. گزینه‌ی ۳ صحیح است.



$$\frac{x}{x+3} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 2$$

V_w منظور حجم حاصل از دوران قسمت سفید است.

V_a منظور حجم حاصل از دوران ABC است.

V_b منظور حجم حاصل از دوران قسمت سیاه است.

$$\frac{V_b}{V_a} = 1 - \frac{V_w}{V_a} = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{117}{125}$$

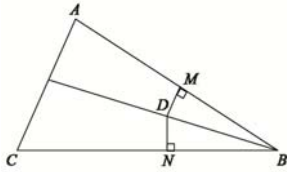
$$V_b = \frac{117}{125} V_a = \frac{117}{125} \times \frac{1}{3} \times \pi \times 5^2 = 39\pi$$

نسبت $\frac{V_w}{V_a}$ برابر نسبت تشابه $\triangle ADE$ و $\triangle ABC$ به توان سه است.

□

پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۵

۱۲۸. گزینه‌ی ۱ صحیح است.



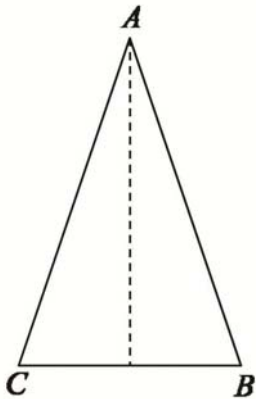
$$\begin{aligned}\hat{A} > \hat{C} &\Rightarrow BC > AB \\ BN + CN &> BM + AM \\ BN + CN &> BN + BN \\ CN &> BN\end{aligned}$$

D روی نیمساز زاویه‌ی ABC است. پس $BM = BN$. از طرفی D روی عمود منصف AB است. در نتیجه $AM = BM$. پس

$$\left. \begin{array}{l} BN = BM \\ AM = BM \end{array} \right\} \Rightarrow BM = AM = BN$$

□

۱۲۹. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



طبق قضیه‌ی سینوس‌ها داریم $\frac{BC}{\sin A} = 2R$. از این طریق مقدار R به دست می‌آید. نقطه‌ی A روی دایره می‌چرخد. مقدار h زمانی بیشینه است که $AB = AC$. در ادامه داریم:

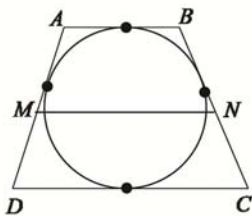
$$\hat{A} = 80^\circ \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 50^\circ$$

$$\tan 50^\circ = \frac{h}{\frac{BC}{2}} \Rightarrow \cot 40^\circ = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \cot 40^\circ$$

□

سایت کنکور

۱۳۰. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



$$MN = 12 = \frac{AB + D}{2} \Rightarrow AB + CD = 24$$

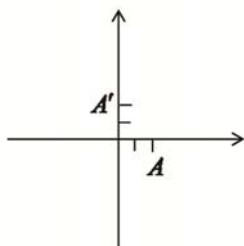
$$AB + CD = BC + AD$$

$$\Rightarrow AB + BC + CD + AD = 2 \times 24 = 48$$

□

پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۵

۱۳۱. گزینه‌ی ۲ صحیح است.



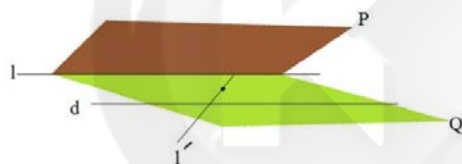
$$A = (2, 0) \in \Delta, A' = (0, 2) \in \Delta', T(0, 2) = (-3, 3)$$

نقطه‌ی $(-3, 3)$ فقط در گزینه‌ی ۲ صدق می‌کند.

□

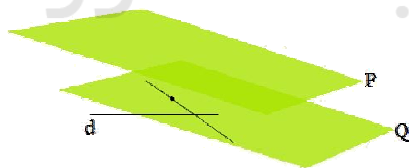
۱۳۲. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

فرض کنیم $d \parallel P$ و $Q \cap P \neq \emptyset$. فصل مشترک دو صفحه‌ی Q و P را l می‌نامیم. در این حالت d موازی خط l است. خط گذرنده از نقطه‌ی A و متقاطع با خط d را l' می‌نامیم. خط l' را قطع می‌کند یعنی l' صفحه‌ی P را قطع می‌کند. و این یعنی خط l' موازی صفحه‌ی P است.



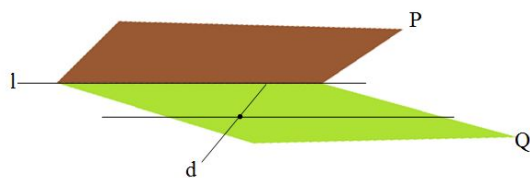
رد گزینه‌ی ۲ و ۴:

اگر $P \cap Q = \emptyset$ واضح است که هر خط گذرنده از نقطه‌ی A و متقاطع با خط d موازی صفحه‌ی P است.



رد گزینه‌ی ۳:

اگر $d \parallel P$ و $Q \cap P \neq \emptyset$ در این صورت خط گذرنده از A و موازی فصل مشترک دو صفحه متقاطع با خط d است و همچنین موازی صفحه‌ی P .



پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۵

۱۳۳. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

دو بردار $a+b$ و $a-b$ زمانی بر هم عمودند که اندازه‌ی دو بردار \vec{a} و \vec{b} با هم برابر باشد. بنابراین داریم:

$$\sqrt{3^2 + m^2 + 5^2} = \sqrt{(3-m)^2 + 7^2 + 0^2}$$

لذا

$$9 + m^2 + 25 = m^2 - 6m + 9 + 49 \Rightarrow m = 4$$

همچنین زاویه‌ی بین دو بردار از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| \times |b|} = \frac{(3, 4, 5) \cdot (-1, 7, 0)}{\sqrt{9+16+25} \times \sqrt{1+49+0}} = \frac{-3+28}{\sqrt{50} \times \sqrt{50}} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

پس $\theta = 60^\circ$.

□

۱۳۴. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

فاصله‌ی نقطه‌ی $P = (0, 0, 0)$ از خط گذرنده از نقطه‌ی $P = (3, -2, 1)$ با بردار هادی $U = (5, -3, 4)$ برابر است با:

$$\frac{|\overline{PP} \times \vec{U}|}{|\vec{U}|} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{|-5i - 7j + k|}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

□

۱۳۵. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

نقطه‌ی $P = (1, -2, 3)$ روی خط و نقطه‌ی $P = (0, 0, 0)$ روی محور z ها را در نظر می‌گیریم. طول عمود مشترک برابر است با:

$$\frac{|\overline{PP} \cdot (U \times K)|}{|U \times K|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{|3+8|}{|3i-4j|} = \frac{11}{5} = 2,2$$

□

پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۵

۱۳۶. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

مرکز هر دو دایره روی خط $y = -x$ قرار دارد و اگر شعاع دایره باشد با توجه به مماس بودن هر دو دایره بر محورهای مختصات، مختصات مرکز به صورت $(r, -r)$ است. معادله‌ی این دایره‌ها عبارت است از

$$(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$$

از طرفی نقطه‌ی $(2, -9)$ نیز نقطه‌ای از دایره‌ها است. پس با قرار دادن مختصات این نقطه در معادله داریم:

$$r^2 - 22r + 85 = 0$$

$$(r-5)(r-17) = 0$$

و لذا $r = 5$ و $r = 17$.

□

۱۳۷. گزینه‌ی ۳ صحیح است.

در هر هذلولی فاصله‌ی یک کانون از خط مجانب آن برابر پارامتر b است.

$$8x^2 - (y^2 - 4y + 4) + 4 = 12$$

پس

$$8x^2 - (y-2)^2 = 8$$

لذا

$$\frac{x^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{8} = 1$$

در نتیجه

$$b^2 = 8 \Rightarrow b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

□

۱۳۸. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$\frac{1}{2}A = R\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow A = 2R\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow A^T - 8R(\pi) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \end{pmatrix}$$

□

۱۳۹. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$\begin{aligned} A(I-A) = I &\Rightarrow A - A^2 = I \Rightarrow A^2 = A - I \Rightarrow A^3 = (A-I)^2 = A^2 - 2A + I \\ &\Rightarrow A^3 = (A-I) - 2A + I \Rightarrow A^3 = -A \end{aligned}$$

پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۵

۱۴۰. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

b برابر با جواب y در دستگاه است. با حل دستگاه به روش کرامر داریم:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 6 & 17 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{50}{10} = 5$$

□

۱۴۱. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{3 \times 2 + 5 \times 7 + 7 \times 8 + 9 \times 5 + 11 \times 3}{2 + 7 + 8 + 5 + 3} = \frac{6 + 35 + 56 + 45 + 33}{25} = \frac{175}{25} = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{2(3-7)^2 + 7(5-7)^2 + 8(7-7)^2 + 5(9-7)^2 + 3(11-7)^2}{25}$$

$$= \frac{32 + 28 + 0 + 25 + 48}{25} = \frac{128}{25} = 5,12$$

□

۱۴۲. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

میانگین داده‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ برابر ۳ است. پس میانگین داده‌های $12x_i + 6$ برابر $12 \times 3 + 6 = 42$

است. انحراف معیار داده‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5}} = \sqrt{2}$$

بنابراین، انحراف معیار داده‌های $12x_i + 6$ برابر $12\sqrt{2}$ است. در نهایت، ضریب تغییرات مورد

نظر برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{x} = \frac{12\sqrt{2}}{42} \cong \frac{12 \times 1,4}{42} = 0,4$$

□

۱۴۳. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$a = 1^2 + 2^2 + \dots + 19^2 = \left(\frac{19 \times 20}{2}\right)^2 = 190^2$$

$$b = 2^2 + 4^2 + \dots + 18^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + \dots + 9^2) = 2^2 \times \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)^2 = 2^2 \times 45^2$$

$$c = 1^2 + 3^2 + \dots + 19^2 = a - b = 190^2 - 2^2 \times 45^2 = 36100 - 16200 = 19900$$

□

پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۵

۱۴۴. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$13 = 2 \times 6 + 1$. اگر تاس ۱۲ بار پرتاب شود حداقل دو نتیجه‌ی یکسان داریم. بنابراین اگر تاس

۱۳ بار پرتاب شود به طور یقین سه بار یا بیشتر نتیجه‌ی یکسان داریم.

□

۱۴۵. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$A = \{2\}$$

$$C = \{\{A, 3, 5\}, 2\}$$

واضح است که $A \notin C$.

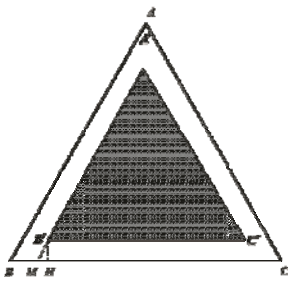
□

۱۴۶. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$\frac{\binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{3!} = \frac{15 \times 6}{6} = 15$$

□

۱۴۷. گزینه‌ی ۱ صحیح است.



$$B'H = \frac{\sqrt{3}}{2} B'M \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times B'M \Rightarrow B'M = 2, \quad MH = 1$$

$$B'C' = BC - 2 \times BH = 8 - 2 \times 3 = 2$$

پس احتمال مورد نظر برابر است با

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2} = \frac{1}{16}$$

□

۱۴۸. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

فرض کنیم A مجموعه‌ی مضارب ۶ و B مجموعه‌ی مضارب ۷ در مجموعه $X = \{51, \dots, 300\}$

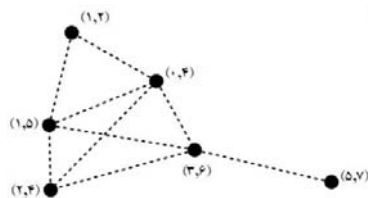
باشد. در این صورت $|A| = 42$ و $|B| = 35$ و $|A \cap B| = 35$. داریم:

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{42}{250} + \frac{35}{250} - 2 \times \frac{35}{250} = 0,26$$

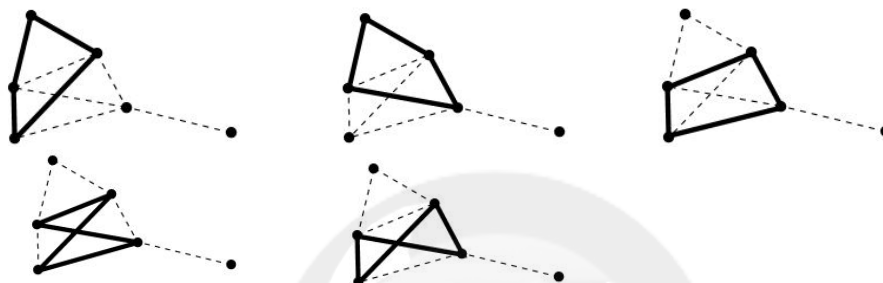
□

پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۵

۱۴۹. گزینه‌ی ۴ صحیح است.



دوره‌های به طول چهار در گراف فوق در شکل زیر نشان داده شده‌اند:



□

۱۵۰. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

$$\begin{pmatrix} & 8 & 9 & & \\ & 4 & 9 & 10 & 8 \\ - & 5 & 3 & 4 & 2 \\ & 1 & 5 & 5 & 3 \\ \hline & 3 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}_6$$

□

سایت کنکور

۱۵۱. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

طبق فرض داریم $N \equiv 26 \pmod{31}$ و همچنین $N = 43q + q$ و $q < 43$. با جایگذاری $N = 44q$ در

رابطه‌ی همنهشتی داریم

$$44q \equiv 26 \pmod{31} \Rightarrow 22q \equiv 13 \pmod{31} \Rightarrow q \equiv 2 \pmod{31}$$

بیشترین تعداد که می‌توان برای q در نظر گرفت $q = 33$ است و لذا بیشترین مقدار ممکن برای

N به صورت زیر است:

$$N = 44 \times 33 = 1452$$

□

پاسخنامه‌ی تشریحی دروس هندسه پایه و تحلیلی و ریاضیات گسسته کنکور سراسری ریاضی سال ۱۳۹۵

۱۵۲. گزینه‌ی ۲ صحیح است.

از اینکه ب.م.م دو عدد ۲۲۱ و ۳۵۷ برابر ۱۷ است معادله به صورت $۱۳x + ۲۱y = ۱$ ساده می‌شود و جواب‌های آن به صورت کلی زیر است:

$$\begin{cases} x = ۱۳ + ۲۱k \\ y = -۸ - ۱۳k \end{cases}$$

از حل نامعادله‌ی $۱۰ \leq ۱۳ + ۲۱k \leq ۹۹$ مقادیر $k = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ به دست می‌آید که پنج مقدار طبیعی دو رقمی برای x به دست می‌آید.

□

۱۵۳. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

از اینکه (c, e) و (b, c) در گراف داده شده است برای تعدی بودن باید (b, e) داشته باشیم. از طرفی چون (e, d) و (d, b) داریم باید (e, b) داشته باشیم که در این صورت با داشتن دو زوج (b, e) و (e, b) رابطه‌ی مورد نظر دیگر پادمتقارن نیست.

□

۱۵۴. گزینه‌ی ۱ صحیح است.

$$\begin{array}{ccccc} \text{اولی سالم} & & \text{دومی سالم} & & \text{سومی خراب} \\ \frac{۶}{۸} & \times & \frac{۵}{۷} & \times & \frac{۲}{۶} = \frac{۵}{۲۸} \end{array}$$

□

۱۵۵. گزینه‌ی ۴ صحیح است.

$$1 - \frac{\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳} + \binom{۳}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}} = \frac{۴۱}{۴۴}$$

□