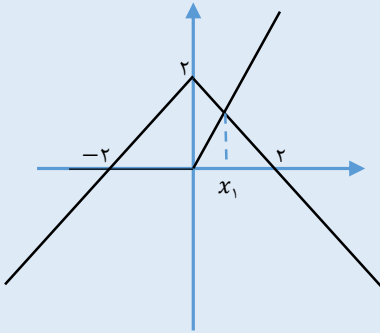


پاسخ: ۱۲۶-

$$a_1 = 1 = 2^0 - 1, a_2 = 3 = 2^2 - 1, a_3 = 7 = 2^3 - 1, \dots, a_n = 2^n - 1 = 255$$

پاسخ: ۱۲۷-



$$x > 0 \rightarrow 2 - x = x + x \rightarrow x_1 = \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

پاسخ: ۱۲۸-

$$\log_{2^3} 2x^2 + 1 - \log_{2^3} x + 2 = 1 \Rightarrow \log_{2^3} \frac{2x^2 + 1}{x + 2} \rightarrow 2^3 = \frac{2x^2 + 1}{x + 2} \rightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0 \rightarrow x = -1, \frac{3}{2}$$

$$\log_{2^3} 2x - 1 = \log_{2^3} 2 \times \frac{3}{2} - 1 = \log_{2^3} 3 = \log_{2^3} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

پاسخ: ۱۲۹-

$$(A \times B)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$$

پاسخ: ۱۳۰-

$$d_{\text{نامعلوم}} = 360^\circ - (100^\circ + 30^\circ + 70^\circ + 75^\circ) = 85^\circ \rightarrow \frac{32}{d_{\text{نامعلوم}}} = \frac{80}{360} \times x_{\text{کل}} \rightarrow x_{\text{کل}} = 144$$

$$x_B = \frac{75}{360} \times 144 = 30$$

پاسخ: ۱۳۱-

$$\bar{x} = E(x_i) = 15, CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{3} \rightarrow \sigma = 5 \rightarrow \sigma^2 = E(x_i^2) - E(x_i)^2 \rightarrow E(x_i^2) = 3^2 + 15^2 = 234$$

پاسخ: ۱۳۲-

تعداد کل حالات برابر ۱۰ = $\binom{5}{3}$ خواهد بود (برداشت کارت بدون اهمیت دادن به ترتیب آن)
زمانی عدد سه کارت برداشته شده مضرب ۳ است، که مجموعه ارقام بر ۳ بخش پذیر باشد. کل حالت‌های مطلوب را می‌شماریم:

$$P = \frac{4}{10} : \text{پس: ۴ حالت: } 030, 039, 309, 390$$

پاسخ: ۱۳۳-

$$\left| \frac{2-x}{2x-3} \right| > 1 \rightarrow |2-x| > |2x-3| \rightarrow (2-x)^2 > (2x-3)^2 \rightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x^2 - 12x + 9$$

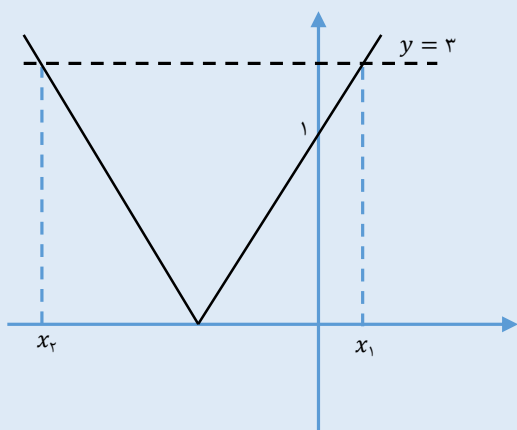
$$\rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0$$

ریشه‌های معادله برابرند با: $\frac{5}{3}, 1$. علامت بین دو ریشه منفی خواهد بود، لذا: $1 < x < \frac{5}{3}$

پاسخ: ۱۳۴-

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-2\alpha) = -2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان دو}} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2} - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow -2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{4}$$



پاسخ: ۱۳۵-

$$g \circ f(x) = \sqrt{f(x^2 + x) + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1| = 3$$

$$\rightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$$

$$S = \frac{(3) \times (1 + 2)}{2} = \frac{9}{2}$$

پاسخ: ۱۳۶-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 8}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a + 2)x}{2x} = \frac{8}{2} \rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a + \frac{\lambda x}{2\sqrt{4x^2 + 8}}}{2} = \frac{a + \frac{-\lambda}{2 \times 2}}{2} = \frac{8}{6}$$

پاسخ: ۱۳۷-

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} (\sqrt{\cos x} - 1)}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} (\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 + \cos x)(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sqrt{\cos x}}{(1 + \cos x)(1 + \sqrt{\cos x})} = -\frac{1}{4}$$

پاسخ: ۱۳۸-

بنا به تعریف مشتق، حاصل حد داده شده برابر مشتق تابع f در نقطه $x = 2$ خواهد بود:

$$f'(x) = 3 \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)' \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right) = 3 \left(\frac{x+2}{2x-3} \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x+2}{2x-3} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{x+2}{2x-3} \right)'$$

$$= 3 \left(\frac{x+2}{2x-3} \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x+2}{2x-3} \right)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{(2x-3) - 2(x+2)}{(2x-3)^2} \right) \rightarrow f'(2) = 3 \times 4 \times \left(\frac{1}{2} (4)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(\frac{-7}{1} \right) = -21$$

پاسخ: ۱۳۹-

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{9}{100} \times \frac{8}{100} = \frac{72}{10000}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{100} + \frac{8}{100} - \frac{72}{10000} = \frac{98}{10000}$$

پاسخ: ۱۴۰-

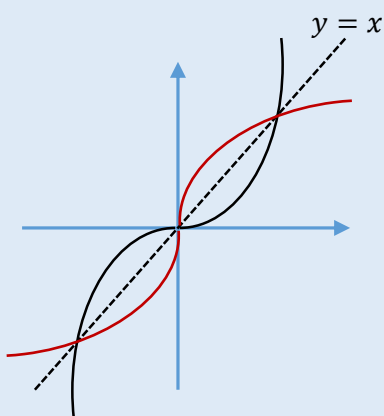
$$P(x = 4) = \binom{6}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^2 \left(\frac{1}{4} \right)^2 = 15 \times \frac{9}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{135}{64}$$

$$P(x = 3) = \binom{6}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^3 \left(\frac{1}{4} \right)^3 = 20 \times \frac{27}{64} = \frac{540}{64}$$

$$\frac{P(x = 4)}{P(x = 3)} = \frac{15 \times \frac{9}{16}}{20 \times \frac{27}{64}} = \frac{15 \times 9 \times 4}{20 \times 27} = \frac{9}{4}$$

پاسخ: ۱۴۱- شکل نمودار را کشیده و نسبت به خط $y = x$ تقارن می‌دهیم:

$$x > 0 \rightarrow f(x) = x^2, x < 0 \rightarrow f(x) = -x^2$$



پاسخ: -۱۴۲

دنباله ترولیست پس $0 < q < 1$ ، لذا $q^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$)

ضمناً هر جمله نصف مجموع جملات بعدی است، پس:

$$t_1 = \frac{1}{r}(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = \frac{1}{r}(S_n - t_1) = \frac{1}{r}\left(\frac{t_1(1 - q^n)}{1 - q} - t_1\right) \rightarrow 1 = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{1 - q} - 1\right) \rightarrow q = \frac{2}{3}$$

پاسخ: -۱۴۳

$$2 \sin^2 x + 3 \cos x = 0 = 2(1 - \cos^2 x) + 3 \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, 2$$

$$\rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

پاسخ: -۱۴۴

نقطه‌ی پای عمود را (a, a^2) می‌نامیم ($a > 0$). مشتق در این نقطه از منحنی برابر است با $2a$. لذا شیب خط عمود خواهد شد:

$$-\frac{1}{2a}$$

$$m = -\frac{1}{2a} = \frac{a^2 - \frac{9}{2}}{a - 0} \rightarrow -\frac{1}{2} = a^2 - \frac{9}{2} \rightarrow a = 2$$

پاسخ: -۱۴۵

خط مماس بر منحنی عمود بر نیمساز ربع اول است، پس شیب خط برابر -1 خواهد بود، یعنی: $y' = -1$ ، از معادله منحنی مشتق می‌گیریم:

$$1 + \frac{y + xy'}{2\sqrt{xy}} + y' = 0 = 1 + \frac{y - x}{2\sqrt{xy}} - 1 \rightarrow y = x$$

عبارت به دست آمده را در معادله منحنی جایگزین می‌کنیم:

$$x + \sqrt{xy} + y = 12 = x + \sqrt{x^2} + x \rightarrow 2x + |x| = 12 \rightarrow x = 4$$

پاسخ: -۱۴۶

$$f'(x) = x^2 - 2x - 18 = (x - 1)^2 - 19 = 0 \rightarrow x = -3, 8$$

$$f(-3) = 27, f(-4) = \frac{68}{3}, f(8) = -48 \rightarrow \min = -48, \max = 27$$

پاسخ: -۱۴۷

$$f(-4) = 0 = (-4)^2 + a(-4)^3 + b(-4) \rightarrow 16a + b = 64$$

$$f'(0) = 0 = 4x^3 + 3ax^2 + b \rightarrow b = 0 \rightarrow a = 4$$

برای یافتن مینیمم مشتق را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow f(-3) = (-3)^2 + 4(-3)^3 = -27$$

پاسخ: -۱۴۸

شعاع دایره برابر است با فاصله‌ی مرکز یعنی نقطه‌ی $(2, -1)$ تا خط $l: x - y - 1 = 0$

$$r = \frac{|2 - (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \rightarrow C: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2 = 2, y = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 1 \rightarrow x = 1, 3$$

پاسخ: -۱۴۹

$$kx^2 - 2y^2 + 4y = 4 \rightarrow kx^2 - 2(y - 1)^2 = 2 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{2}{k}} - \frac{(y - 1)^2}{1} = 1 \rightarrow a^2 = \frac{2}{k}, b^2 = 1 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

$$= \frac{k + 2}{k} \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{k + 2}{k}}}{\sqrt{\frac{2}{k}}} = \sqrt{\frac{k + 2}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow k = 4$$

پاسخ: -۱۵۰

$$\int_{-1}^1 (|3x| - [x]) dx = 2 \int_0^1 3x dx - \int_{-1}^0 -dx = (3x^2)' - (-1) = 4$$

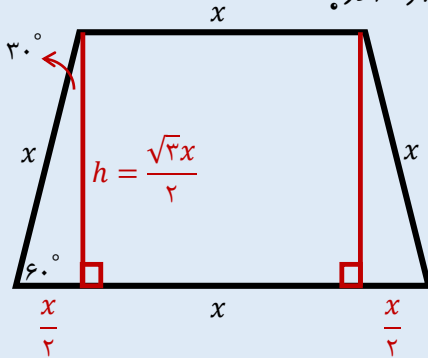
۱۵۱- پاسخ:

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x})}{x^2} dx = \int \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}) dx = 2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + C = 2\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}(2x + 2) + C \rightarrow f(x) = 2x + 2$$

۱۵۲- پاسخ:

شکل رو می کشیم، همه چیز مشهود است! با استفاده از ویژگی های مثلث قائم الزاویه ی ۳۰ و ۶۰ درجه



طول قاعده ی بزرگ رو به دست می آریم. محیط برابر است با:

$$2x + 2 \times \frac{x}{2} = 5x = 30 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$$

$$S = \frac{3\sqrt{3}(6+2)}{2} = 27\sqrt{3} \text{ با: } S = 27\sqrt{3}$$

۱۵۳- پاسخ:

راه اول: آخی! چه طراح خوبی. خواسته باشی که داده شمارو راهنمایی کنه!!! هر چند بدون این راهنمایی هم می شه سوال رو حل کرد، اما طراح ممنون...!

خط موازی AC خط DF موازی AB رسم شده (خودمون فهمیدیم)، پس $AEDF$ متوازی الاضلاع و چون $\hat{A} = 90^\circ$ پس

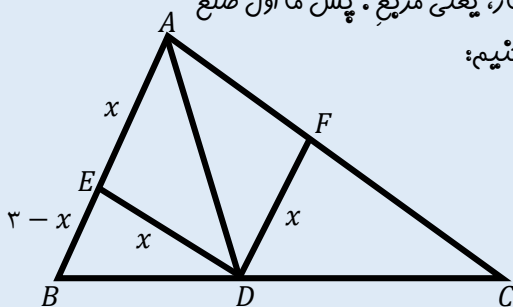
$AEDF$ مستطیل می شه. AD قطر این مستطیل! پس به مستطیل داریم که قطرش شده نیمساز، یعنی مربع. پس ما اول ضلع

مربع رو به دست می آریم و بعد قطرش رو ... ضلع مربع رو x می نامیم و از تالس استفاده می کنیم:

$$ED \parallel AC \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow \frac{3-x}{3} = \frac{x}{7} \Rightarrow$$

$$7(3-x) = 3x \Rightarrow x = \frac{21}{10}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{21}{10}\sqrt{2} = 2.1\sqrt{2}$$



راه دوم: این راه رو پیش تر بچه های ریاضی می فهمن.

$$BC = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{7} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج } 10} \frac{BD}{\frac{BC}{\sqrt{58}}} = \frac{3\sqrt{58}}{10}, \quad CD = \frac{7\sqrt{58}}{10}$$

$$AD = \sqrt{AB \cdot AC - BD \cdot DC} = \sqrt{3 \times 7 - \frac{3\sqrt{58}}{10} \times \frac{7\sqrt{58}}{10}} = \sqrt{21 - \frac{21 \times 58}{100}} = \sqrt{\frac{21 \times 100 - 21 \times 58}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{21 \times 42}{100}} = \sqrt{\frac{21 \times 21 \times 2}{100}} = \frac{21}{10}\sqrt{2}$$

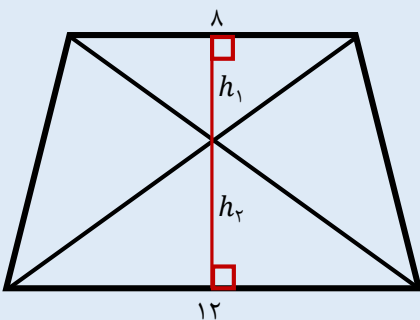
۱۵۴- پاسخ:

می دونیم در هر دو زونقه مثلث های پایین و بالایی متشابه هم هستن و دو مثلث مجاور به ساق ها، هم مساحتن.

$$S_{\text{کل}} = \frac{10(\lambda + 12)}{2} = 100, \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{\lambda}{12} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج } 10} \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{2}{5} \Rightarrow h_1 = 4, h_2 = 6$$

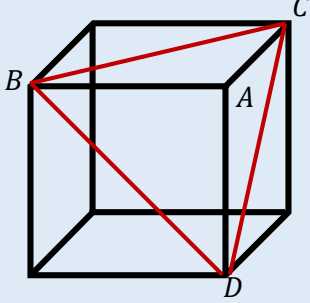
$$\Rightarrow S_{\text{مثلث بالا}} = \frac{4 \times \lambda}{2} = 16, S_{\text{مثلث پایین}} = \frac{6 \times 12}{2} = 36$$

$$\Rightarrow S_{\text{مثلث مجاور ساق}} = \frac{100 - 16 - 36}{2} = \frac{48}{2} = 24$$



۱۵۵- پاسخ:

با کمی هوشمندی می‌بینیم سؤال از ما مساحت مثلث BCD رو می‌خواه که البته متساوی‌الاضلاع! چون هر سه ضلعش، قطر وجوه مکعب هستند.



$$BC = CD = BD = 4\sqrt{2} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$$



سایت کنکور