۱ـ (۱)

ابتدا معکوس $f(x)$ را محاسبه کنیم

$y = 3 - e^x$

$e^x = 3 - y \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(3-x)$

$g(x) = \sqrt{x\ln(3-x)} \Rightarrow D_g: x\ln(3-x) \geq 0$

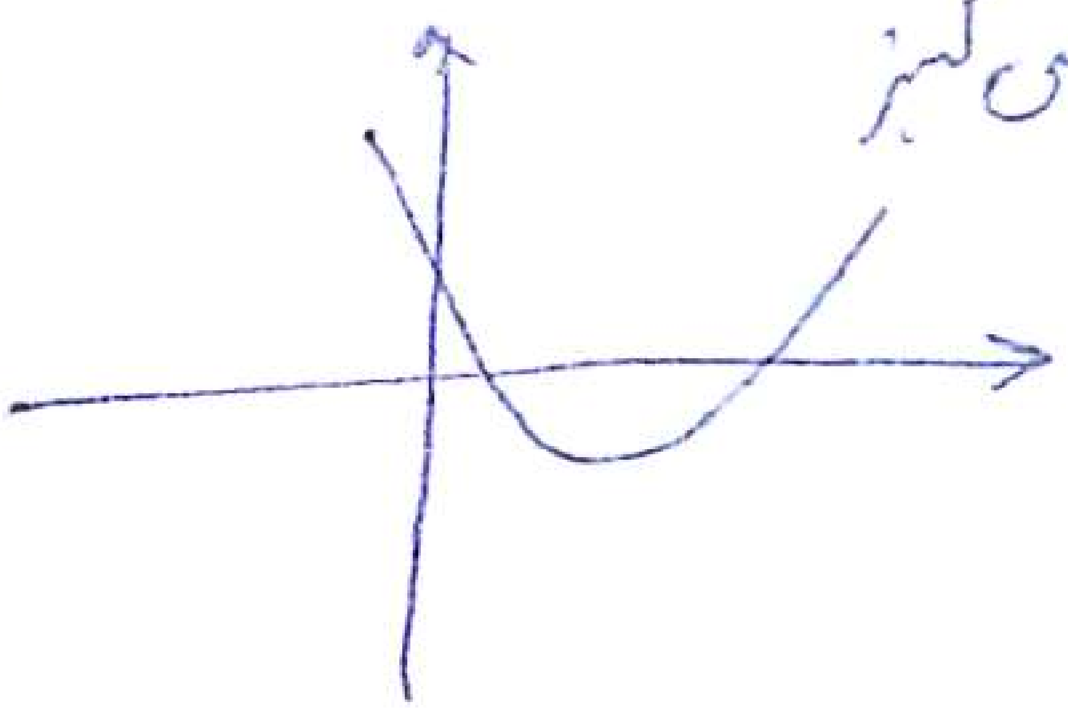
بهتر است از اینجا به بعد از رد گزینه‌ها استفاده کنیم...

$$x\ln(3-x) \geq 0 \begin{cases} x \geq 0 \,,\ \underbrace{\ln(3-x)}_{3-x>0 \Rightarrow x<3} \geq 0 \Rightarrow \ln(3-x) \geq \ln 1 \Rightarrow 2 \geq x \Rightarrow [0,2] \\ \boxed{x \leq 0} \,,\ \ln(3-x) \leq 0 \Rightarrow \ln(3-x) \leq \ln 1 \Rightarrow \boxed{2 \leq x} \\ 3-x>0 \Rightarrow \boxed{x<3} \end{cases}$$

اشتراک

$\varnothing$

۲ـ (۴)



نمودار سهمی مورد نظر به صورت مقابل است. که اگر بخواهیم آن را بررسی کنیم به ترتیب باید داشته باشیم

$$\begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$$

$S > 0 \Rightarrow \dfrac{2(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow \underline{a > 2}$

$P > 0 \Rightarrow \dfrac{14-a}{1} > 0 \Rightarrow \underline{a < 14}$

$\Delta > 0 \Rightarrow 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0$

$a^2 - 4a + 4 - 14 + a > 0$

$a^2 - 3a - 10 > 0 \Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow \underline{a > 5 \,,\ a < -2}$

اشتراک پاسخ‌ها $= \boxed{5 < a < 14}$

۳ـ (۳)

$$\begin{cases} f(2)=6 \Rightarrow a+\log_2(2b-4)=6 \\ f(12)=10 \Rightarrow a+\log_2(12b-4)=10 \end{cases} \Rightarrow -\log_2(2b-4)+\log_2(12b-4)=4$$

$$\Rightarrow \log_2\frac{12b-4}{2b-4}=4 \Rightarrow \frac{12b-4}{2b-4}=16 \Rightarrow 12b-4=32b-64$$

$$60=20b$$

$$\boxed{3=b}$$

$$a+\log_2(6-4)=6 \Rightarrow \boxed{a=5}$$

۴ـ (۱)

با توجه به نمودار دوره‌ی تناوب این تابع کسینوسی $=4\pi$

$$4\pi=\frac{2\pi}{m} \Rightarrow m=1/2$$

$$f\left(\frac{14\pi}{3}\right)=1/2+2\cos\left(\left(\frac{14\pi}{3}\right)\times 1/2\right)=1/2+2\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$=1/2+2\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=1/2+2\times(-1/2)=-1/2$$

۵ـ (۳)

$$3^x+\frac{8}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 3^x=t$$

$$t-1/t+\frac{8}{3}=0 \xrightarrow{\times 3t} 3t^2-3+8t=0 \Rightarrow \Delta=64-4\times(3)(-3)=100$$

$$t_{1,2}=\frac{-8\pm10}{6} \begin{cases} \to t_1=-3 \Rightarrow 3^x=-3 \quad \text{جواب ندارد} \\ \to t_2=1/3 \Rightarrow 3^x=1/3 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$A\left|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix}\right. ,\ B\left|\begin{matrix}-1\\1\end{matrix}\right. \Rightarrow AB=2$$

۶ - (۴)

(معادله ۲)

$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=2 \Rightarrow \alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta=4$

$S+2\sqrt{P}=4$

$\frac{m+1}{2}+2\sqrt{\frac{1/8}{2}}=4$

$\frac{m+1}{2}+2\sqrt{1/16}=4 \Rightarrow \frac{m+1}{2}+1/2=4$

$\frac{m+1}{2}=\frac{7}{2} \Rightarrow m=6$

---

۷ - (۲)

$g\circ f$ را تشکیل داده ساده نمی‌کنیم

$g\circ f=\sqrt{f(x)-f^2(x)} \Rightarrow f(x)(1-f(x))\geq 0$

$\cancel{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}-\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}}$

$0\leq f(x)\leq 1$

$0\leq \frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1$

از اینجا به بعد بهتر است از جایگذاری گزینه‌ها استفاده کنیم

$$\begin{cases}\frac{1+x^2}{1-x^2}\geq 0 \Rightarrow 1-x^2>0 \Rightarrow -1<x<1\\ \frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2-1+x^2}{1-x^2}\leq 0 \Rightarrow 1-x^2<0 \Rightarrow -1<x<1\end{cases}$$

دقت داشته باشید رابطه فوق به ازای $x=1/2$ صحیح نیست

$\frac{1+1/4}{1-1/4}=\frac{5/4}{3/4}=5/3$ $\quad \frac{5}{3}\not\leq 1$

---

۸ (۱)

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\underbrace{\cos^{-1}\left(-\sqrt{3}/2\right)}_{5\pi/6}\right)=\sin(7\pi/6)=-1/2$

-9

$$\frac{1}{\sin 15} - \frac{1}{\cos 15} = t$$

$$\frac{1}{\sin^2 15} - \frac{2}{\sin 15 \cos 15} + \frac{1}{\cos^2 15} = t^2$$

$$\frac{1}{\sin^2 15} + \frac{1}{\cos^2 15} - \frac{2}{\frac{1}{2}\sin 30} = t^2$$

$$\frac{\cos^2 15 - \sin^2 15}{\sin^2 15 \cos^2 15} - \frac{4}{\frac{1}{2}} = t^2$$

$$\frac{\cos 30}{(\frac{1}{2}\sin 30)^2} - 8 = t^2$$

$$\frac{\sqrt{3}/2}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}} - 8 = t^2 \Rightarrow 8\sqrt{3} - 8 = t^2$$

$$8(\sqrt{3} - 1) = t^2$$

10- (2)

جایگذاری گزینه‌ها ساده‌ترین راهه!!

11- (1)

$$\lim \frac{\sqrt{1 - \frac{9}{2}x^2} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{9}{4}x^2 - 1 + \frac{1}{4}x^2}{x^2}$$

$$= -2$$

$$y' = \frac{1/2}{1 + x^2/4} \times \cos\left(\pi/3 + tg^{-1} x/2\right)$$

$$= \frac{1/2}{1 + \frac{12}{4}} \times \cos\left(\pi/3 + tg^{-1} \sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{1/2}{4} \cos\left(\pi/3 + \pi/3\right) = 1/8 \times -1/2 = -1/16$$

۱۱۳ - ④

$$\lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \begin{cases} \text{زوج } n: \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\right] = \left[\frac{1}{\infty}\right] = [0^+] = 0 \\ \text{فرد } n: \lim_{n\to\infty}\left[\frac{-1}{n}\right] = [0^-] = -1 \end{cases}$$

---

۱۱۴ - ①

$$f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] = -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

بعد از ساده‌سازی تابع f به صورت زیر در می‌آید

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

---

۱۱۵ - ②

معادله مایل به صورت $y = ax + b$ است

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{x\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}}{x} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - ax - b = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}} - 2\right) - b = 0$$

$$\lim x\left(\frac{\frac{4x-3-4x+4}{x-1}}{\sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}+2}\right) - b = 0 \Rightarrow \frac{\frac{x}{x-1}}{4} - b = 0$$

عرض از مبدأ $\boxed{b = 1/4}$

۱۱۶ـ (۳)

با توجه به قضیه ریشه اگر تابع f در بازه (a,b) دارای ریشه باشد داریم $f(a)f(b)<0$

$f(0) = 1 > 0$

$f(1/3) = 1/27 - 1 + 1 > 0$ $\Rightarrow$ $(0, 1/3)$ نیست

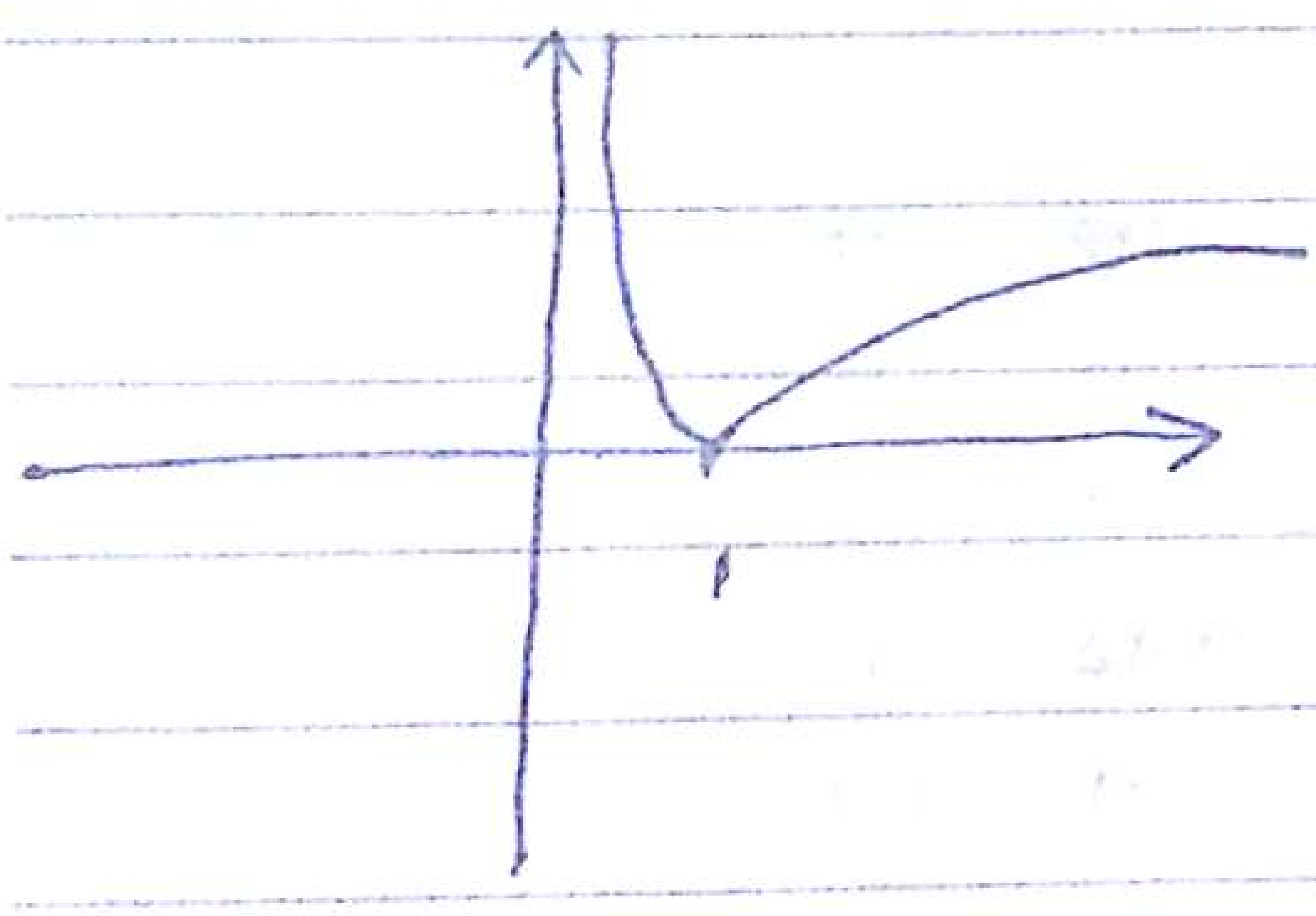
$\Rightarrow$ $(1/3, 2/5)$ هست

$f(2/5) = 8/125 - \frac{6}{5} + 1 = \frac{8}{125} - 1/\frac{1\times 25}{5\times 25} < 0$

۱۱۷ـ (۴)

نمودار $y=|\ln x|$ به صورت مقابل است

نقطه $x=1$ نقطه گوشه است.



$$f(x) = \begin{cases} \ln x & x \geq 1 \\ -\ln x & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1/x & x > 1 \\ -1/x & x < 1 \end{cases}$$

$f'_+(1) = 1$

$\Rightarrow \theta = \pi/2 \ , \ tg\,\theta = \infty$

$f'_-(1) = -1$

(۳) _ ۱۱۸

$$\lim_{x\to ۴}\frac{f(x)+۷}{x-۴}=-۳/۲ \Rightarrow \begin{cases} f(۴)=-۷ \\ f'(۴)=-۳/۲ \end{cases}$$

$$y=\frac{f(۲x)}{x} \Rightarrow y'=\frac{۲\times f'(۲x)\times x-f(۲x)}{x^۲}$$

$$y'_{(۲)}=\frac{۲\times f'(۴)\times ۲-f(۴)}{۴}=\frac{۴\times -۳/۲+۷}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

(۴) _ ۱۱۹

نقاط تلاقی f^{-1} با $y=x$ همان نقاط تلاقی f با $y=x$ است

$$\begin{cases} y=x \\ y=x+\ln x \end{cases} \Rightarrow x=۱ ,\ y=۱$$

$$(f^{-1})'_{(۱)}=\frac{۱}{f'(۱)}=\frac{۱}{۱+۱/x}=۱/۲$$

$$y-۱=۱/۲(x-۱) \Rightarrow ۲y-۲=x-۱ \Rightarrow ۲y-x=۱$$

(۴) _ ۱۲۰

$$F'(x,y)=-\frac{۳x^۲-۳y}{۳y^۲-۳x}=-\frac{۳-۶}{۱۲-۳}=-\frac{-۳}{۹}=۱/۳$$

$$y-۲=-۳(x-۱) \xrightarrow[x=۰]{\text{عرض از مبدا}} \boxed{y=۵}$$

_ ۱۲۱

۱۲۲ _ (۲)

$$\underbrace{f'(x)}_{-} = -2\cos x \sin x + 2\sin x$$

$$= \underbrace{2\sin x}_{-}\underbrace{(-\cos x + 1)}_{+} \Rightarrow$$ گزینه ۲ یا ۴

$$f'(x) = -\sin 2x + 2\,\cancel{\sin x}$$

$$\underbrace{f''(x)}_{-} = -2\cos 2x + 2\cos x$$ جایگذاری گزینه ۲ یا ۴

$$= 2(-\cos 2x + \cos x)$$

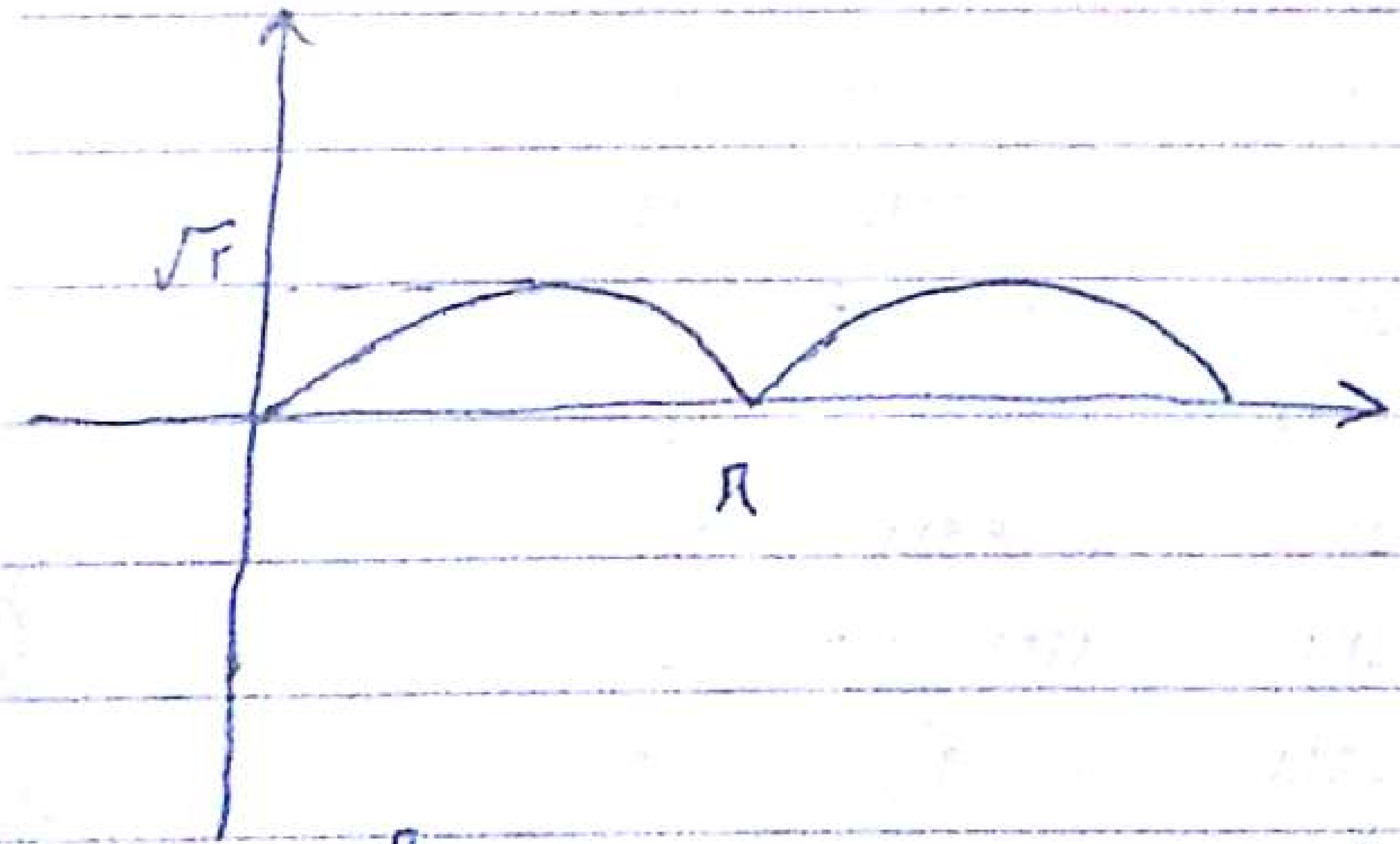
$$x = \pi + \pi/4 \in (\pi, 4\pi/3)$$

$$f''(5\pi/4) = 2\left(-\cos\left(2\pi + 2\pi/4\right) + \cos(\pi + \pi/4)\right)$$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

۱۲۳ _ (۲)

$$y = \sqrt{2\sin^2 x} = \sqrt{2}\,|\sin x|$$



$$\sqrt{2}\int_0^\pi \sin x = -\sqrt{2}\cos x\Big|_0^\pi = -\sqrt{2}(-1-1) = 2\sqrt{2}$$

$$\int_0^4 |\underbrace{1-\sqrt{x}}| \, dx$$

$$1-\sqrt{x}=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\int_0^1 (1-\sqrt{x})dx + \int_1^4 (\sqrt{x}-1)dx$$

$$\int_0^1 (1-x^{1/2})\, dx + \int_1^4 (x^{1/2}-1)\, dx$$

$$x - 2/3\, x^{3/2} \Big|_0^1 + 2/3\, x^{3/2} - x \Big|_1^4$$

$$1 - 2/3 - 0 + 2/3(8) - 4 - 2/3 + 1 = -2 + 4 = 2$$