پاسخ سوالات هندسه‌ی تحلیلی –گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی   مهندس یاسین گیلاسی

سوال ۱۳۳: (سطح سوال: ساده)

برای بردار دوم داریم:

$$\alpha = \beta = ۶۰^\circ \to cos\alpha = cos\beta = \frac{۱}{۲} \to cos^۲\gamma$$
$$= ۱ - cos^۲\alpha - cos^۲\beta = ۱ - \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} \to cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\xrightarrow{\text{زاویه سوم حاده}} cos\gamma = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

لذا بردار دوم برابر است با:

$$\vec{b} = k\left(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) \xrightarrow{k=۲} \vec{b} = \left(۱,۱,\sqrt{۲}\right)$$

تصویر بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر است با:

$$\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^۲}\vec{b} = \frac{\left(۷,۳,-\sqrt{۲}\right).\left(۱,۱,\sqrt{۲}\right)}{\left|\left(۱,۱,\sqrt{۲}\right)\right|}\left(۱,۱,\sqrt{۲}\right) = \frac{۷+۳-۲}{۱+۱+۲}\left(۱,۱,\sqrt{۲}\right) = \left(۲,۲,۲\sqrt{۲}\right)$$

سوال ۱۳۴: (سطح سوال: متوسط)

برای پیدا کردن فاصله‌ی نقطه‌ی P تا یک خط مانند l، نقطه‌ای مانند $P_۰$ روی آن خط می‌یابیم و از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{فاصله} = \frac{\left|\overrightarrow{P_۰P} \times \vec{u}_l\right|}{\left|\vec{u}_l\right|}$$

پس ابتدا یک نقطه روی فصل مشترک دو صفحه می‌یابیم:

صفحه‌ی اول xoy، در نتیجه $z = ۰$. با جایگذاری در صفحه‌ی دوم داریم $۲x - y = ۴$. بنابراین به صورت دلخواه $y = ۰$ در نظر گرفته و $x = ۲$ به دست می آید. بنابراین: $P_۰(۲,۰,۰)$!

ضمناً بردار هادی فصل مشترک هم برابر است با:

$$\vec{u}_l = \vec{n}_۱ \times \vec{n}_۲ = (۰,۰,۱) \times (۲,-۱,-۱) = (۱,۲,۰)$$
$$\overrightarrow{P_۰P} = P - P_۰ = (۱,۳,۲) - (۲,۰,۰) = (-۱,۳,۲) \to \overrightarrow{P_۰P} \times \vec{u}_l = (-۱,۳,۲) \times (۱,۲,۰)$$
$$= (-۴,۲,-۵)$$
$$\text{فاصله} = \frac{|(-۴,۲,-۵)|}{|(۱,۲,۰)|} = \frac{\sqrt{۱۶+۴+۲۵}}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{\sqrt{۴۵}}{\sqrt{۵}} = ۳$$

سوال ۱۳۵: (سطح سوال: ساده)

مرکز دایره‌ای به معادله‌ی $x^۲ + y^۲ + ax + by = c$ برابر است با: $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$

بنابراین مرکز دایره‌ی داده شده برابر است با: $O\left(۱,-\frac{۱}{۲}\right)$

خطی که در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود باشد، از مرکز دایره می‌گذرد. لذا نقطه‌ی $O\left(۱,-\frac{۱}{۲}\right)$ باید بر روی خط $۳x + ۲y = a$ قرار بگیرد. لذا:

$$a = ۳ \times ۱ + ۲ \times \left(-\frac{۱}{۲}\right) = ۲$$

سوال ۱۳۶: (سطح سوال: متوسط)

ابتدا زاویه‌ی مناسب دوران برای استاندارد سازی معادله‌ی مقطع مخروطی داده شده را به دست می‌آوریم.

طبق فرمول برای معادله‌ی $AX^۲ + BY^۲ + CX + DY + EXY = F$ داریم:

$$tan۲\theta = \frac{E}{B-A} = \frac{\sqrt{۳}}{۰-۱} = -\sqrt{۳} \rightarrow ۲\theta = -۶۰^\circ \rightarrow \theta = -۳۰^\circ$$

حال تبدیل را انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} X &= -\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + \frac{۱}{۲}y \\ Y &= -\frac{۱}{۲}x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}y \end{aligned} \right\}$$

$$X^۲ + \sqrt{۳}XY = \frac{۳}{۲} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + \frac{۱}{۲}y\right)^۲ + \sqrt{۳}\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}x + \frac{۱}{۲}y\right)\left(-\frac{۱}{۲}x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}y\right)$$

$$= \frac{۳}{٤}x^۲ + \frac{۱}{٤}y^۲ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}xy + \sqrt{۳}\left(\frac{\sqrt{۳}}{٤}x^۲ + \frac{۳}{٤}xy - \frac{۱}{٤}xy - \frac{\sqrt{۳}}{٤}y^۲\right)$$

$$= \frac{۳}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۲}y^۲ = \frac{۳}{۲} \rightarrow x^۲ - \frac{y^۲}{۳} = ۱$$

بنابراین معادله‌ی استاندارد شده نشان دهنده‌ی یک هذلولی افقی است که مشخصات آن به شرح زیر است:

مرکز: $(۰,۰)$ و $a = ۱$ و $b = \sqrt{۳}$ در نتیجه: $c = \sqrt{a^۲ + b^۲} = ۲$

بنابراین کانون‌های این هذلولی برابر است با: $F(۲,۰), F'(-۲,۰)$

سوال ۱۳۷: (سطح سوال: ساده)

$$A = \underbrace{\frac{A + A^T}{۲}}_{\text{متقارن}} + \underbrace{\frac{A - A^T}{۲}}_{\text{پاد متقارن}}$$

$$\rightarrow \frac{A + A^T}{۲} = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۷ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} ۵ & ۳ & ۰ \\ ۳ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۷ \end{vmatrix}$$

$$= (۵ \times ۳ \times ۷ + ۰ + ۰) - (۰ + ۳ \times ۳ \times ۷ + ۵ \times ۲ \times ۲)$$

$$= ۱۰۵ - ۶۳ - ۲۰ = ۲۲$$

سوال ۱۳۸: (سطح سوال: ساده)

با توجه به ویژگی‌های دترمینان یک ماتریس داریم:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ٤ & ٤ \\ ٥ & a+۱ & ۷ \\ ۳ & b+۱ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ٤ \\ ٥ & a & ۷ \\ ۳ & b & ٦ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ٤ \\ ٥ & ۱ & ۷ \\ ۳ & ۱ & ٦ \end{vmatrix}$$

بنابراین مقدار افزوده شده برابر است با:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ٤ \\ ٥ & ۱ & ۷ \\ ۳ & ۱ & ٦ \end{vmatrix} = (۱۲+۲۱+۲۰)-(۱۲+۳۰+۱٤) = ٥۳-٥٦ = -۳$$

سوال ۱۳۹: (سطح سوال: ساده)

$$R_\theta = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \rightarrow R_{۱٥^\circ} = \begin{bmatrix} cos۱٥^\circ & -sin۱٥^\circ \\ sin۱٥^\circ & cos۱٥^\circ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow R_{-۱٥^\circ} = \begin{bmatrix} cos۱٥^\circ & sin۱٥^\circ \\ -sin۱٥^\circ & cos۱٥^\circ \end{bmatrix} \rightarrow \left(R_{-۱٥^\circ}\right)^{۱۲} = R_{-۱۲\times۱٥^\circ} = R_{-۱۸۰^\circ} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I$$

سوال ۱٤۰: (سطح سوال: متوسط)

ابتدا دترمینان ماتریس ضرایب را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۳ \\ ٥ & ٤ & ۱ \end{vmatrix} = (-۲+٤٥-۱۲)-(۱۰+۹+۱۲) = ۳۱-۳۱ = ۰$$

بنابراین تعداد جواب‌های این دستگاه سه معادله و سه مجهول یا بی‌شمار است و یا صفر!

حال ستون ماتریس معلومات را جایگزین یکی از ستون‌های ماتریس ضرایب می‌کنیم و مجدداً دترمینان را محاسبه می‌کنیم (به طور مثال جایگزین ستون اول)

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} ۷ & ۳ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۳ \\ ۹ & ٤ & ۱ \end{vmatrix} = (-۱٤+۸۱-۱۲)-(۱۸+۹+۸٤) = ٥٥-۱۱۱ = ٥٦ \neq ۰$$

$\Delta = ۰$ و $\Delta_x \neq ۰$ بنابراین دستگاه جوابی ندارد. لذا فصل مشترک دو به دوی این صفحات با یکدیگر موازی هستند.