

پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی

(ریاضی پایه، حساب دیفرانسیل و انتگرال،

هندسه ۱ و ۲ و هندسه تحلیلی،

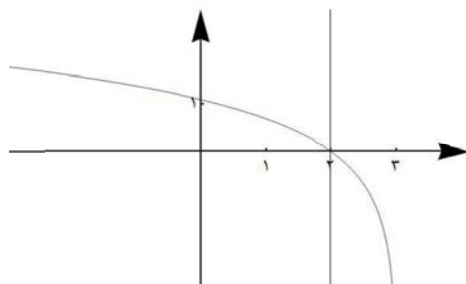
آمار، جبر و احتمال، و ریاضیات گسسته)

سیدامیر ستوده، دبیر ریاضی تهران: ۰۹۱۲۱۶۱۴۲۹۶

سیدعرفان ستوده، دبیر ریاضی تهران: ۰۹۱۲۲۹۶۷۱۸۳

۱۰۱. اگر $f(x) = 3 - e^x$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{xf^{-1}(x)}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۱. برای تعیین دامنه تابع g باید مجموعه جواب نامعادله $xf^{-1}(x) \geq 0$ را به دست آوریم. مجموعه جواب مورد نظر شامل x هایی است که نمودار تابع f^{-1} در ناحیه اول یا سوم دستگاه مختصات باشد، با توجه به این که $f^{-1}(x) = \ln(3-x)$ ، مجموعه جواب فوق برابر است با: $[0, 2]$.



□

۱۰۲. به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a-2)x + 14 - a = 0$ دارای دو ریشه مثبت است؟

پاسخ: گزینه ۴. برای این منظور باید دلتای معادله، جمع ریشه‌ها و ضرب ریشه‌ها همگی مثبت باشند. بنابراین داریم:

$$\Delta = 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0 \Rightarrow 4(a^2 - 4a + 4) - 56 + 4a > 0 \Rightarrow 4a^2 - 12a - 40 > 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0$$



جمع ریشه‌ها:

$$-\frac{-2(a-2)}{1} = a-2 > 0 \Rightarrow a > 2$$

ضرب ریشه‌ها:

$$\frac{14-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 14$$

ناحیه‌ی مطلوب، اشتراک این سه شرط، یعنی بازه‌ی $(2, 14)$ است.

□

۱۰۳. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = a + \log_r(bx - 4)$ از دو نقطه‌ی $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد. a کدام است؟

پاسخ: گزینه ۳.

$$f(2) = 6 \Rightarrow a + \log_r(2b - 4) = 6$$

$$f(12) = 10 \Rightarrow a + \log_r(12b - 4) = 10$$

طرفین تساوی‌های فوق را از هم کم می‌کنیم. داریم:

$$\log_r(12b - 4) - \log_r(2b - 4) = 4 \Rightarrow \log_r \frac{12b - 4}{2b - 4} = 4 \Rightarrow \frac{12b - 4}{2b - 4} = 16$$

$$\Rightarrow 12b - 4 = 32b - 64 \Rightarrow 20b = 60 \Rightarrow b = 3$$

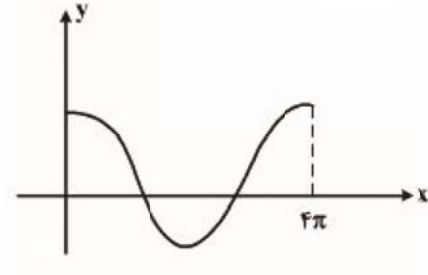
با جایگذاری $b = 3$ در معادله‌ی اول داریم:

$$a + \log_r^3 = 6 \Rightarrow a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5$$

□

۲ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

۱۰۴. شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{1}{2} + 2 \cos mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{16\pi}{3}$ کدام است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۱. با توجه به دوره‌ی تناوب تابع که $T = 4\pi$ است، نتیجه می‌گیریم $m = \frac{1}{2}$. بنابراین، $f(x) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{x}{2}$ و لذا

$$f\left(\frac{16\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{8\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2 \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

□

۱۰۵. نمودارهای دو تابع $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x}$ و $y = 3^x + \frac{1}{3}$ در نقطه‌ی A متقاطع اند. فاصله‌ی نقطه‌ی A از نقطه‌ی $(-1, 1)$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۳. نقطه‌ی تقاطع نمودار دو تابع را به دست می‌آوریم:

$$3^x + \frac{1}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3} = 3^{-x} \Rightarrow (3^x)^2 + \frac{1}{3}(3^x) - 1 = 0$$

از حل این معادله‌ی درجه دوم، معادلات $3^x = 3^{-1}$ و $3^x = -3$ به دست می‌آید که $x = -1$ تنها جواب است. بنابراین، نقطه‌ی تقاطع نمودار دو تابع، نقطه‌ی $(-1, 3)$ است که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $(-1, 1)$ ، دو واحد است.

□

۱۰۶. به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

پاسخ: گزینه‌ی ۴.

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}}} = \sqrt{\frac{m+2}{2}} = 2$$

بنابراین، $\frac{m+2}{2} = 4$ و لذا $m = 6$.

□

۱۰۷. اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع $g \circ f$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \left\{x \neq \pm 1 : 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1\right\} = \{0\}$$

□

۳ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶. رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

۱۰۸. حاصل $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۱.

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

□

۱۰۹. حاصل $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۳.

$$\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{1 - \sin 30^\circ}}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{2}$$

□

۱۱۰. جواب کلی معادله $\sin x \sin 3x = \cos 2x$ مثلثاتی کدام است؟

پاسخ: گزینه ۲.

$$\begin{aligned} \sin x \sin 3x = \cos 2x &\Rightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) = \cos 2x \Rightarrow \cos 2x + \cos 4x = 0 \\ &\Rightarrow 2 \cos\left(\frac{4x - 2x}{2}\right) \cos\left(\frac{4x + 2x}{2}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \cos x \cos 3x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{لذا } x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ یا } x = (2k+1)\frac{\pi}{6} \text{ پس } x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$$

□

۱۱۱. حد عبارت $\frac{\sqrt{\cos 3x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۱.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 3x} - \sqrt{\cos x}}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\cos 3x} - \sqrt{\cos x})(\sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\cos x})}{x^2(\sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{x^2(\sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(2x) \sin x}{x^2(\sqrt{\cos 3x} + \sqrt{\cos x})} = -2 \end{aligned}$$

□

۱۱۲. مشتق تابع $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \tan^{-1} \frac{x}{2}\right)$ در نقطه $x = 2\sqrt{3}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۲.

۴ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶. رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow f'(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{4}$$

□

۱۱۳. دنباله‌ی $\left\{ \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$ چگونه است؟ $n = 1, 2, 3, \dots$

پاسخ: گزینه ۴. دنباله به صورت $1, 0, -1, 0, \dots$ است که واگراست.

□

۱۱۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x]: & x \notin \mathbb{Z} \\ a; & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است؟

پاسخ: گزینه ۱.

$$f(x) = \begin{cases} [x] + [-x]: & x \notin \mathbb{Z} \\ a; & x \in \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

اگر $a = -1$ آن‌گاه $f(x) = -1$ که بر مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

□

۱۱۵. عرض از مبدأ خط مجانب منحنی $y = x \sqrt{\frac{4x-3}{x-1}}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ۲.

$$y = x \sqrt{\frac{4x-3}{x-1}} = \sqrt{\frac{4x^2 - 3x^2}{x-1}} = \sqrt{4x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}}$$

واضح است که y به خط $\sqrt{4}\left(x + \frac{1}{2 \times 4}\right)$ یعنی $2x + \frac{1}{4}$ میل می‌کند. پس عرض از مبدأ مجانب مایل آن $\frac{1}{4}$ است.

□

۱۱۶. کوچک‌ترین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^3 - 3x + 1 = 0$ در کدام بازه است؟

پاسخ: گزینه ۳.

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - 1 + 1 > 0 \\ f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{8}{125} - \frac{6}{5} + 1 = -\frac{17}{125} < 0 \end{cases}$$

ریشه‌ی f در بازه‌ی $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right)$ قرار دارد.

□

۵ پاسخ تشریحی درس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

۱۱۷. اگر θ زاویه‌ی بین دو مماس چپ و راست در نقطه‌ی گوشه‌ی نمودار تابع $y = |\ln x|$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟
پاسخ: گزینه‌ی ۴. تابع در $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است.

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln 1 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+h} = 1$$

و

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\ln 1 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1}{1+h} = -1$$

واضح است که دو نیم‌مماس در نقطه‌ای به طول $x = 1$ از نمودار تابع بر هم عمودند.

□

۱۱۸. اگر تابع f در $x = 4$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = -\frac{3}{2}$ باشد، آن‌گاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$ کدام است؟
پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{3}{2}, \quad f(4) = -7$$

مشتق تابع $g(x) = \frac{f(2x)}{x}$ را در $x = 2$ به دست می‌آوریم:

$$g'(x) = \frac{2xf'(2x) - f(2x)}{x^2} \Rightarrow g'(2) = \frac{4f'(4) - f(4)}{4} = \frac{4 \times (-\frac{3}{2}) - (-7)}{4} = \frac{1}{4}$$

□

۱۱۹. تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \ln x$ مفروض است. معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} ، در نقطه‌ی تلاقی آن با نیمساز ربع اول کدام است؟
پاسخ: گزینه‌ی ۴.

$$x + \ln x = x \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

معادله‌ی خط مماس بر نمودار f^{-1} در $(1,1)$ عبارت است از:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}$$

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow 2y - x = 1$$

□

۱۲۰. عرض از مبدأ خط قائم بر نمودار $x^2 + y^2 = 3xy + 3$ در نقطه‌ی $(1,2)$ کدام است؟
پاسخ: گزینه‌ی ۴.

$$x^2 + y^2 - 3xy - 3 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} \Big|_{(1,2)} = -\frac{3 - 6}{12 - 3} = \frac{1}{3}$$

معادله‌ی خط قائم بر نمودار در نقطه‌ی $(1,2)$ به صورت زیر است:

۶ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

$$y - 2 = -3(x - 1) \Rightarrow y - 2 = -3x + 3 \Rightarrow y = -3x + 5$$

بنابراین، عرض از مبدأ خط قائم ۵ + است.

□

۱۲۱. حجم کره‌ای با آهنگ ثابت ۳ سانتی‌متر مکعب در ثانیه افزایش دارد. در لحظه‌ای که قطر کره ۸ سانتی‌متر باشد، سطح کره چند سانتی‌متر مربع در ثانیه افزایش دارد؟
پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{4\pi r^2} = \frac{3}{4\pi r^2}$$

پس

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dr} \times \frac{dr}{dt} = (8\pi r) \times \frac{3}{4\pi r^2} = \frac{6}{r} \Rightarrow \left. \frac{ds}{dt} \right|_{r=4} = \frac{6}{4} = 1.5$$

□

۱۲۲. نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos^2 x - 2 \cos x$; $x \in [0, 2\pi]$ در کدام بازه نزولی و تفرع آن رو به پایین است؟
پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$f(x) = \cos^2 x - 2 \cos x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin x \cos x + 2 \sin x < 0 \Rightarrow \sin x (1 - \cos x) < 0 \\ \Rightarrow \sin x < 0$$

برای این که تابع f نزولی باشد باید $\sin x < 0$ ، یعنی کمان x باید در ناحیه‌ی سوم یا چهارم دایره‌ی مثلثاتی باشد.

$$f''(x) = -2 \cos 2x + 2 \cos x = -2(2 \cos^2 x - 1 - \cos x) < 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos x < 1$$

برای این که تفرع تابع f رو به پایین باشد باید $-\frac{1}{2} < \cos x < 1$. اشتراک جواب‌های به دست آمده از دو شرط فوق بازه‌ی $(\pi, \frac{4\pi}{3})$

است.

□

۱۲۳. سطح محدود به منحنی $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$ و محور x ها در یک طاق آن کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$\int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \int_0^\pi \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \int_0^\pi \sqrt{2} \sin x dx = -\sqrt{2} \cos x \Big|_0^\pi = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

□

۱۲۴. حاصل انتگرال $\int_0^4 |1 - \sqrt{x}| dx$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

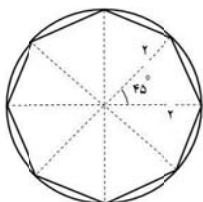
$$\int_0^4 |1 - \sqrt{x}| dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - 1) dx = x - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1 + \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - x \right]_1^4 = \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + \left(\frac{4}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3} \right) = 2$$

۷ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

□

۱۲۵. مساحت هشت ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۲ واحد کدام است؟

پاسخ: گزینه ۱.

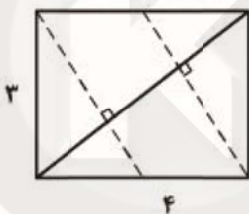


$$S = 8 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \sin 45^\circ \right) = 16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$$

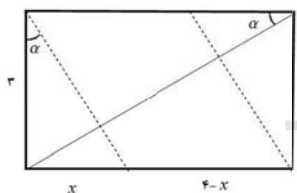
□

۱۲۶. در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر رسم شده است. مساحت

متوازی‌الاضلاع حاصل، کدام است؟



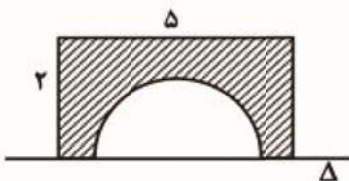
پاسخ: گزینه ۱.



$$\tan \alpha = \frac{3}{4} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \frac{9}{4} \Rightarrow S = \left(4 - \frac{9}{4} \right) \times 3 = \frac{21}{4} = 5,25$$

□

۱۲۷. سطح محدود به مستطیل 2×5 و نیم‌دایره به قطر ۳ واحد، حول خط Δ دوران می‌کند. حجم جسم حاصل، چند برابر π است؟



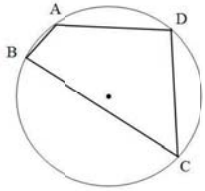
پاسخ: گزینه ۲.

$$(\pi \times 2^2 \times 5) - \left(\frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right) = 20\pi - \frac{9}{2} \pi = \frac{31}{2} \pi = 15,5\pi$$

□

۸ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

۱۲۸. چهارضلعی $ABCD$ محاط در یک دایره است. اگر AB دورترین وتر و BC نزدیکترین وتر نسبت به مرکز این دایره باشد، کدام رابطه بین زاویه‌ها ممکن است برقرار نباشد؟
پاسخ: گزینه ی ۴. چون AB دورترین وتر و BC نزدیکترین وتر به مرکز دایره است پس AB کوتاهترین وتر و BC بزرگترین وتر در بین این چهار وتر است. بنابراین داریم:



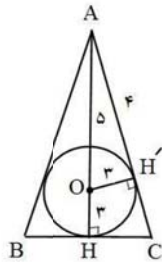
$$\hat{D} = \frac{1}{2}(AB + BC) > \frac{1}{2}(AB + AD) = \hat{C}$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2}(AD + DC) > \frac{1}{2}(AD + AB) = \hat{C}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(BC + DC) > \frac{1}{2}(AD + DC) = \hat{D}$$

□

۱۲۹. در مثلث متساوی‌الساقین، اندازه‌ی ارتفاع وارد بر قاعده ۸ و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن ۳ واحد است. طول قاعده‌ی این مثلث کدام است؟
پاسخ: گزینه ی ۲.



$$AH' = 4$$

$$\triangle AHC \approx \triangle AH'O$$

$$\frac{AC}{AO} = \frac{AH}{AH'}$$

$$\frac{AC}{5} = \frac{8}{4} \Rightarrow AC = 10$$

$$\Rightarrow HC = 6 \Rightarrow BC = 12$$

□

۱۳۰. تصویر دایره‌ی C به مرکز $(1, 2)$ و شعاع ۱ واحد، تحت تبدیل $T(x, y) = (3x, 3y)$ ، دایره‌ی C' است. طول مماس مشترک خارجی این دو دایره کدام است؟

پاسخ: گزینه ی ۳. تصویر دایره‌ی C تحت تبدیل تجانسی $T(x, y) = (3x, 3y)$ دایره‌ی C' به مرکز $(3, 6)$ و شعاع $r' = 3$ است. فاصله‌ی دو مرکز این دایره $d = \sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ است و طول مماس مشترک خارجی دو دایره برابر است با: $TT' = \sqrt{d^2 - (r - r')^2} = \sqrt{20 - (3-1)^2} = 4$.

□

۱۳۱. عکس کدام قضیه در فضا برقرار است؟

- (۱) اگر دو خط d و d' موازی باشند، آن‌گاه هر خط عمود بر d بر خط d' عمود است.
 - (۲) اگر خطی لاقابل با یک خط از صفحه‌ای موازی باشد، آن‌گاه آن خط با صفحه‌ی مفروض موازی است.
 - (۳) اگر دو صفحه‌ی P و Q موازی باشند، آن‌گاه فصل مشترک‌های صفحه‌ی R با آن دو صفحه موازی اند.
 - (۴) اگر دو صفحه‌ی P و Q موازی باشند، آن‌گاه بر روی دو خط متقاطع پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کنند.
- پاسخ: گزینه‌های ۱ و ۲. عکس هر دو گزینه‌ی ۱ و ۲ صحیح است.

□

۹ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

۱۳۲. سه نقطه A ، B و C غیر واقع در یک راستا و خط Δ غیر موازی با صفحه‌ی این سه نقطه، مفروض هستند. تعداد صفحات موازی Δ که هر سه نقطه‌ی مفروض از آن به یک فاصله باشند، کدام است؟
 پاسخ: گزینه‌ی ۳. صفحه‌ای که منصف دو ضلع مثلث $TT' = \sqrt{d^2 - (r - r')^2} = \sqrt{2^2 - (3 - 1)^2} = 4$ است و موازی خط $TT' = \sqrt{d^2 - (r - r')^2} = \sqrt{2^2 - (3 - 1)^2} = 4$ باشد از هر سه نقطه‌ی مفروض به یک فاصله است. بنابراین، تعداد صفحات مطلوب، سه تا است.

□

۱۳۳. تصویر بردار $\vec{a} = 7i + 3j - \sqrt{2}k$ بر روی برداری که با هر یک از محورهای x و y زاویه‌ی 60° و با محور z زاویه‌ی حاده می‌سازد، با کدام مؤلفه‌ها است؟
 پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$\begin{aligned} \vec{b} = (\cos 60^\circ, \cos 60^\circ, \cos \gamma) &\Rightarrow \cos^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 \gamma = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Rightarrow b = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &\Rightarrow \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b} = \frac{(7, 3, -\sqrt{2}) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1} \vec{b} = 4\vec{b} = (2, 2, 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

□

۱۳۴. فاصله‌ی نقطه‌ی $(1, 3, 2)$ از فصل مشترک صفحه‌ی $2x - y - z = 4$ با صفحه‌ی xoy کدام است؟
 پاسخ: گزینه‌ی ۳. فصل مشترک دو صفحه‌ی $2x - y - z = 4$ و صفحه‌ی $z = 0$ خط به معادله‌ی $z = 0$ ، $\frac{x}{1} = \frac{y+4}{2}$ است. برای تعیین فاصله‌ی نقطه‌ی $P = (1, 3, 2)$ از این خط، نقطه‌ی $P_0 = (0, -4, 0)$ را روی خط در نظر می‌گیریم. فاصله‌ی نقطه‌ی P از خط برابر است با:

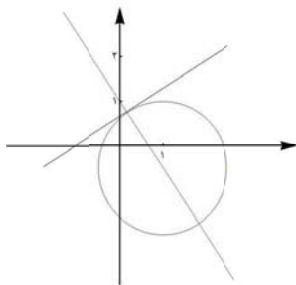
$$\frac{|\vec{P_0P} \times \vec{U}|}{|\vec{U}|} = \frac{|-4i + 2j - 5k|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = 3$$

□

۱۳۵. به ازای کدام مقدار a ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله‌ی $3x + 2y = a$ در نقطه‌ی تلاقی آن‌ها 90° درجه است؟
 پاسخ: گزینه‌ی ۱.

$$y' = -\frac{2x-2}{2y+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow -6x+6 = 4y+2 \Rightarrow 3x+2y=2$$

۱۰ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)



□

۱۳۶. با استفاده از دوران محورهای مختصات به اندازه‌ی مناسب، فاصله‌ی یک کانون تا مرکز مقطع مخروطی $x^2 + \sqrt{3}xy = \frac{3}{2}$ کدام

است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{3}{2} = 0$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{1-0} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 3x'^2 - y'^2 = 3 \Rightarrow \frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{3} = 1$$

پس $a^2 = 1$ و $b^2 = 3$ و در نتیجه $c = 2$ و $c^2 = a^2 + b^2 = 4$. فاصله‌ی کانون تا مرکز هذلولی برابر $c = 2$ است.

□

۱۳۷. ماتریس $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ به صورت مجموع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پادمتقارن نوشته شده است. دترمینان ماتریس

متقارن کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}(A + A^t) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

پس دترمینان این ماتریس برابر با $22 = 5(21-4) - 3(21-0) = 22$ است.

□

۱۱ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

۱۳۸. اگر به تمام درایه‌های ستون دوم ماتریس $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{pmatrix}$ ، یک واحد اضافه شود به مقدار دترمینان ماتریس اولیه، کدام عدد

اضافه می‌شود؟

پاسخ: گزینه‌ی ۱.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3+1 & 4 \\ 5 & a+1 & 7 \\ 3 & b+1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & a & 7 \\ 3 & b & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

اگر به همه‌ی درایه‌های ستون دوم ماتریس A یک واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان اولیه، دترمینان ماتریس زیر اضافه خواهد شد.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2(6-7) - (3 \cdot 0 - 21) + 4(5-3) = -2 - 9 + 8 = -3$$

□

۱۳۹. اگر $\begin{pmatrix} \cos 15^\circ & \sin 15^\circ \\ -\sin 15^\circ & \cos 15^\circ \end{pmatrix}^n = -I$ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی n کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۱.

$$A = R\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow A^n = R(-\pi) = -I$$

□

۱۴۰. سه صفحه با معادلات ماتریسی $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ مفروض است. وضعیت فصل مشترک دویه‌دوی این صفحات کدام

است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۱.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -3R_1+R_2 \rightarrow R_2 \\ -5R_1+R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -11 & 6 & -18 \\ 0 & -11 & 6 & -26 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -11 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

تناقض ایجاد شده در دستگاه نشان می‌دهد فصل مشترک این سه صفحه دو به دو با هم موازی اند.



□

۱۲ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

۱۴۱. داده‌های آماری را که با نمودار ساقه و برگ نشان داده شده است با نمودار جعبه‌ای نشان می‌دهیم. واریانس داده‌های داخل جعبه، کدام

است؟

ساقه	برگ				
۲	۵	۶	۷	۹	
۳	۱	۳	۴	۵	۶
۴	۰	۱	۲	۴	

پاسخ: گزینه‌ی ۴. واریانس داده‌های ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۴۰ را محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{۲۹ + ۳۱ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۴۰}{۷} = ۳۴$$

پس

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(۲۹ - ۳۴)^2 + (۳۱ - ۳۴)^2 + (۳۳ - ۳۴)^2 + (۳۴ - ۳۴)^2 + (۳۵ - ۳۴)^2 + (۳۶ - ۳۴)^2 + (۴۰ - ۳۴)^2}{۷} \\ &= \frac{۲۵ + ۹ + ۱ + ۰ + ۱ + ۴ + ۳۶}{۷} = \frac{۷۶}{۷} \cong ۱۰,۸۵ \end{aligned}$$

۱۴۲. یک جامعه با اندازه‌ی ۱۲ و واریانس ۱۲/۶ با جامعه‌ی دیگری به اندازه‌ی ۲۴ و واریانس ۷/۲ تشکیل جامعه‌ی جدیدی داده‌اند. اگر

میانگین این دو جامعه، یکسان باشد، انحراف معیار جامعه‌ی جدید کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲. مجموع مربعات انحراف از میانگین در جامعه‌ی اول $۱۲ \times ۱۲/۶ = ۱۵۱/۲$ و در جامعه‌ی دوم $۲۴ \times ۷/۲ = ۱۷۲/۸$

است. بنابراین، مجموع مربعات انحراف از میانگین در جامعه‌ی جدید برابر $۳۲۴ = ۱۵۱/۲ + ۱۷۲/۸$ است و لذا واریانس جامعه‌ی جدید

$$\sigma^2 = \frac{۳۲۴}{۳۶} = ۹ \quad \text{است پس انحراف معیار آن } \sigma = ۳ \text{ است.}$$

□

۱۴۳. در دنباله‌ی $\{U_n\}$ با ضابطه‌ی $U_1 = U_2 = ۱$ و $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ با استدلال استقرایی حاصل $(U_n^2 - U_{n+1} \times U_{n-1})$ را

به کدام عدد حدس می‌زنید؟

پاسخ: گزینه‌ی ۴. دنباله‌ی مورد نظر، فیبوناتچی است.

$$U_1 = ۱, \quad U_2 = ۱, \quad U_3 = ۲, \quad U_4 = ۳, \quad U_5 = ۵, \quad U_6 = ۸, \quad \dots$$

با استدلال استقرایی می‌توان حدس زد که در این دنباله $(-۱)^{n+1} \times (U_n^2 - U_{n+1} \times U_{n-1})$ البته این حدس را با استدلال استقرایی می‌توان ثابت

کرد.

□

۱۴۴. در کیسه‌ای ۷ مهره‌ی سفید، ۵ مهره‌ی سیاه، و ۳ مهره‌ی سبز موجود است. دست کم چند مهره از کیسه بیرون آوریم تا مطمئن باشیم

لااقل، ۴ مهره‌ی سفید یا ۳ مهره‌ی سیاه یا دو مهره‌ی سبز بیرون آمده است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲. اگر ابتدا سه مهره‌ی سفید و دو مهره‌ی سیاه و یک مهره‌ی قرمز برداریم به هدف نرسیده‌ایم. اما هر مهره‌ی دیگری که بعد از

این برداریم به هدف می‌رسیم. بنابراین، باید حداقل $۱ + (۳ + ۲ + ۱)$ مهره برداریم تا مطمئن باشیم حداقل ۴ مهره‌ی سفید، یا ۳ مهره‌ی سیاه، یا

۲ مهره‌ی قرمز برداشته شده است.

□

۱۳ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

۱۴۵. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\}$ باشد، مجموعه $(A_n - A_r) \cup A_l$ چند عضو دارد؟

پاسخ: گزینه ۲.

$$\begin{aligned} A_n &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -n, 2^m \leq 2n\} \\ A_l &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -1, 2^m \leq 2\} = \{0, 1\} \\ A_r &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -4, 2^m \leq 8\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ A_n &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m > -8, 2^m \leq 16\} = \{-7, -6, -5, \dots, 3, 4\} \end{aligned}$$

پس

$$(A_n - A_r) \cup A_l = \{-7, -6, -5, -4\} \cup \{0, 1\} = \{-7, -6, -5, -4, 0, 1\}$$

بنابراین، مجموعه $(A_n - A_r) \cup A_l$ شش عضوی است.

□

۱۴۶. رابطه $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid y \leq 2x, |y| \leq 2 - x\}$ دارای چند زوج مرتب است؟

پاسخ: گزینه ۳. با توجه به شکل، ۱۰ نقطه با مختصات صحیح، درون و روی این ناحیه وجود دارد.



□

۱۴۷. دو سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال هر دو سکه «رو» یا تاس ۶ ظاهر می‌شود؟

پاسخ: گزینه ۱.

- A پیشامد آن است که هر دو سکه رو بیاید.

- B پیشامد آن است که تاس ۶ بیاید.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{6 + 4 - 1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

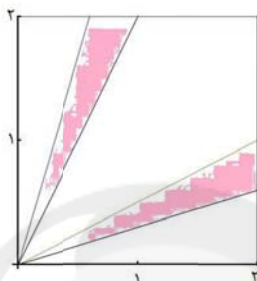
۱۴۸. دو عدد به طور تصادفی بین ۲ و ۵ انتخاب می‌شوند. با کدام احتمال نسبت این دو عدد بین $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{7}$ می‌باشد؟

پاسخ: گزینه ۱.

۱۴ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

$$\begin{cases} \frac{3}{10} < \frac{x}{y} < \frac{5}{10} \Rightarrow y < \frac{10}{3}x, & y > 2x \\ \frac{3}{10} < \frac{y}{x} < \frac{5}{10} \Rightarrow y < \frac{1}{2}x, & \frac{3}{10}x < y \end{cases}$$

ناحیه‌ی مطلوب، ناحیه‌ی سایه‌زده شده در شکل است که مساحت آن $2 \times \frac{(0.4 \times 2)}{2} = 0.8$ است. بنابراین، احتمال مورد نظر $0.2 = \frac{0.8}{4}$ است.

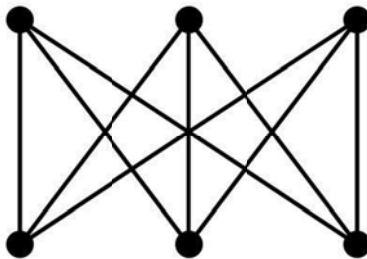


□

۱۴۹. در گراف ۳-منتظم روبه‌روریال چند دور به طول ۴ موجود است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۴. گراف داده شده را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



تعداد دورهای به طول ۴ در این گراف برابر با $9 = \binom{3}{2} \binom{3}{2}$ است.

□

۱۵۰. درجه‌ی رأس‌های غیر ۱، یک درخت به صورت ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۵ می‌باشد. این درخت چند رأس از درجه‌ی ۱ دارد؟

پاسخ: گزینه‌ی ۳. تعداد رأس‌های درجه یک در این درخت برابر است با:

$$2 + (5 - 2) + (4 - 2) + (4 - 2) + (3 - 2) + (3 - 2) + (2 - 2) = 2 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 0 = 11$$

□

۱۵ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

۱۵۱. اگر $(abc)_9 = (cb \circ a)_5$ ، آن‌گاه $a + b + c$ کدام است؟

پاسخ: گزینه ی ۴.

$$(abc)_9 = (cb \circ a)_5 \Rightarrow 81a + 9b + c = 125c + 25b + a \Rightarrow 80a - 16b = 124c$$

$$\Rightarrow 20a - 4b = 31c \Rightarrow 4(5a - b) = 31c \Rightarrow 4 \mid c$$

c باید مضرب ۴ باشد. پس دو حالت ممکن است.

حالت اول: $c = 0$. در این صورت $5a - b = 0$ پس $5a = b$ که برای a و b جوابی یافت نمی‌شود.

حالت دوم: $c = 4$. در این حالت $5a - b = 31$ که دوباره برای a و b جوابی پیدا نمی‌شود.

□

۱۵۲. به ازای چند عدد اول p ، عدد $48p + 1$ مجذور کامل یک عدد طبیعی است؟

پاسخ: گزینه ی ۲. $48p + 1 = a^2 \Rightarrow 48p = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ چون $48p$ عددی زوج است و $a - 1$ و $a + 1$ به

لحاظ زوجیت یکسان اند، پس $a - 1 = 2k$ و $a + 1 = 2k + 2$ و لذا

$$48p = 2k(2k + 2) \Rightarrow 12p = k(k + 1)$$

تنها اعداد اول صادق در تساوی اخیر، $p = 11$ و $p = 13$ اند. پس دو عدد اول می‌توان یافت که $48p + 1$ مربع کامل باشد.

□

۱۵۳. به ازای کدام مقادیر n از عدد طبیعی، عبارت $5^{6n+4} + 5^{2n+2} + 1$ بر عدد ۳۱ بخش پذیر است؟

پاسخ: گزینه ی ۴.

$$5^3 \equiv 1 \Rightarrow 5^{6n} \equiv 1 \Rightarrow 5^{6n+4} \equiv 5^4 \equiv 5$$

$$5^3 \equiv 1 \Rightarrow 5^{2n} \equiv 1 \Rightarrow 5^{2n+2} \equiv 5^2 \equiv 25$$

بنابراین، داریم:

$$5^{6n+4} + 5^{2n+2} + 1 \equiv 5 + 25 + 1 \equiv 0$$

به ازای تمام اعداد طبیعی، همنهشتی فوق صادق است.

□

۱۵۴. شش عدد توپ، تصادفی در ۳ جعبه‌ی متمایز انداخته شده‌اند. با کدام احتمال هیچ جعبه‌ای بدون توپ نمی‌ماند؟

پاسخ: گزینه ی ۱. $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. تعداد جواب‌های طبیعی این معادله $\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$ و تعداد جواب‌های صحیح و

نامنفی این معادله $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$ است. پس احتمال مورد نظر $\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$ است.

□

۱۵۵. یک فضای نمونه متشکل از ۵ برآمد a, b, c, d, e است. اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ و $P(\{a, b, c\}) = \frac{2}{3}$ ، احتمال

$P(\{b, c, e\} \mid \{a, b, c\})$ کدام است؟

۱۶ پاسخ تشریحی دروس ریاضی کنکور سال ۹۶، رشته ریاضی. (سیدامیر ستوده، سیدعرفان ستوده)

پاسخ: گزینه ۳.

$$P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\}) = \frac{P(\{b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

□

