

پاسخ تشریحی آزمون سراسری سال ۹۶

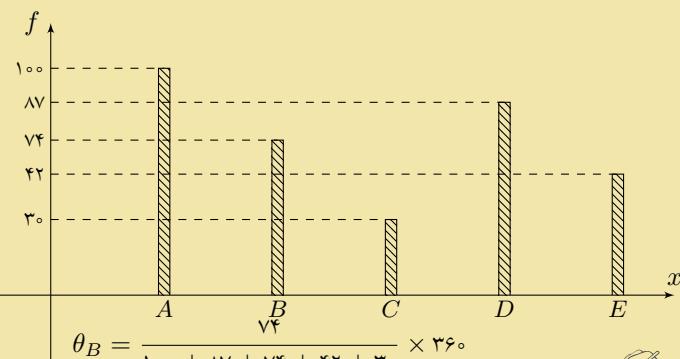
درس ریاضی، رشته علوم تجربی

نگارش:

مهرداد معلمی پور

✉: mehrdad.mdpour@gmail.com

سایت کنکور



گزینه ۲

۱۳۱ - ضریب تغییرات در داده‌های آماری زیر با فراوانی تجمعی داده شده کدام است؟

	۰/۲۸(۴)	۰/۲۴(۳)	۰/۱۸(۲)	۰/۱۶(۱)
مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲
فراوانی تجمعی	۷	۱۶	۳۳	۴۴

برای پیدا کردن میانگین می‌توانیم از همه داده‌ها ۱۰ واحد کم کنیم و سپس میانگین را بدست آوریم، جدول را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$y = x - 10$	-۴	-۲	۰	۲	۴
فراوانی مطلق	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

$$\bar{y} = \frac{-28 - 18 + 0 + 22 + 24}{50} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 10$$

$$\sigma_y^2 = \frac{7 \times 16 + 9 \times 4 + 17 \times 0 + 11 \times 4 + 6 \times 16}{50} =$$

$$\frac{112 + 36 + 44 + 96}{50} = \frac{288}{50} = \frac{2 \times 288}{100} = \frac{4 \times 144}{100}$$

$$\Rightarrow \sigma_y = \sqrt{\sigma_y^2} = \sqrt{\frac{4 \times 144}{100}} = \frac{2 \times 12}{10} = 2.4 = \sigma_x$$

$$\Rightarrow C.V_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{2.4}{10} = 0.24$$

گزینه ۳

۱۳۲ - در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده متفاوت است؟

$$P = \frac{\binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}}$$

متفاوت بودن رنگ مهره‌ها

$$= \frac{5 \times 4 \times 3}{12 \times 11 \times 10} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = \frac{3}{11}$$

گزینه ۲

۱۳۳ - مجموعه جواب نامعادله $\frac{3x+1}{x-3} < -1$ به کدام صورت است؟

$$\frac{1}{2} < x < 3 \quad -\frac{1}{2} < x < 3 \quad x < 3 \quad x < \frac{1}{2}$$

با امتحان کردن ۱ به سادگی گزینه ۱ مشخص می‌شود، ولی پاسخ تشریحی را هم درج می‌کنیم:

$$*\frac{3x+1}{x-3} < 3 \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x+1 - 3x+9}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{9}{x-3} < 0 \Rightarrow x < 3$$

$$** -1 < \frac{3x+1}{x-3} \Rightarrow \frac{3x+1}{x-3} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{4x-2}{x-3} > 0$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > 3 \Rightarrow \text{اشتراک دو جواب} \quad 1$$

۱۲۶ - دو تابع $\{2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (3, 9)$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = \frac{x}{x-1}$ باشد، a کدام است؟

۵/۴

۳/۲

۳/۴

۱/۲

$$f(6) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 6 \Rightarrow g(2a) = 3 = \frac{2a}{2a-1}$$

$$\Rightarrow 6a - 3 = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

گزینه ۲

۱۲۷ - از معادله دو مجهولی $1 = 2 \log 3 + \log x$ و $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ ، مقدار y کدام است؟

۴/۴

۳/۳

۲/۲

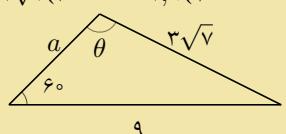
۱/۱

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{x-y} \times 4^{x+y} = 2^{x-y} \times 2^{2x+2y} = 1 = 2^0 \Rightarrow \\ \log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y = \log 9 + \log x = \log 9x \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 0 \\ y = 9x \end{array} \right. \Rightarrow 2 \times \frac{y}{9} + 2y = 0 \Rightarrow y = 3$$

گزینه ۳

۱۲۸ - در مثلثی یکی از زاویه‌ها 60° درجه و ضلع مقابل به این زاویه $3\sqrt{7}$ واحد است اگر ضلع دیگر این مثلث ۹ واحد باشد اندازه ضلع سوم کدام است؟

۳\sqrt{2}, $5\sqrt{2}$ ۴\sqrt{3}, $4\sqrt{3}$ ۴, $7\sqrt{2}$ ۳, $6\sqrt{3}$ 

رابطه‌ی کسینوس‌ها:

$$(3\sqrt{7})^2 = a^2 + b^2 - 2(a)(b)(\cos 60^\circ)$$

$$\Rightarrow 63 = a^2 + b^2 - ab \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 63$$

$$(a-3)(a-b) = 0 \Rightarrow a = 3, b = 6$$

گزینه ۱

۱۲۹ - باشند، ماتریس $A^{-1} \cdot (2B)$ و $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ اگر کدام است؟

$$\begin{bmatrix} 10 & -14 \\ -11 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -9 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -15 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -11 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (2B) = \frac{1}{(12-10)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -14 \\ -11 & 15 \end{bmatrix}$$

گزینه ۴

۱۳۰ - نمودار میله‌ای روپرتو تعداد کارکنان با مهارت فنی در ۵ گروه متمایز است در نمایش آن با نمودار دایره‌ای زاویه مربوط به گروه B چند درجه است؟

۹۲(۴)

۸۴(۳)

۸۰(۲)

۷۵(۱)

۱۳۹ - در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند، چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

$$16/2(4) \quad 15/8(3) \quad 15/6(2) \quad 15/2(1)$$

$$\frac{60}{100} \times \frac{18}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{12}{100} = \frac{156}{1000} = 15.6$$

گزینه ۳

۱۴۰ - دانشآموزی به ۶ پرسش ۴ گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال پرسش را درست پاسخ داده است؟

$$27/512(4) \quad 45/512(3) \quad 125/512(2) \quad 135/1024(1)$$

$$p = \frac{1}{4}$$

توزیع دوجمله‌ای با احتمال پیروزی $\frac{1}{4}$

$$P(X=3) = \binom{6}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{20 \times 27}{4^6} = \frac{125}{1024}$$

گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

$$-x|x|(4) \quad x|x|(3) \quad x^2(2) \quad -x^2(1)$$

و y در تابع f هم علامت هستند، پس در تابع وارون هم باید هم علامت باشند که گزینه ۳ این شرایط را دارد. **گزینه ۳**

$$142 - \text{کوچکترین کران بالای دنباله } a_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + n} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{3}{2}(4) \quad \frac{4}{3}(3) \quad \frac{13}{10}(2) \quad \frac{7}{6}(1)$$

$$142 - \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + n} = \frac{3}{2} \left(\frac{n^2 + \frac{1}{3}}{n^2 + \frac{n}{2}} \right)$$

حد عبارت داخل پرانتز برابر ۱ است. اما این عبارت همواره از ۱ کمتر است؛ چون صورت آن از مخرج کوچکتر است. پس کوچکترین کران بالای آن برابر ۱ می‌شود.

$$142 - \text{به این ترتیب، کوچکترین کران بالای } a_n \text{ برابر } \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \text{ خواهد بود.}$$

$$143 - \text{از دو معادله } \ln(2x+1) + \ln(y-2) - \ln y = \ln^3(2y-3x) + \ln 2 = ۰ \text{ و } \ln(2y-3x) + \ln 2 = ۰ \text{، مقدار } xy \text{ کدام است؟}$$

$$10/4(4) \quad 9/3(3) \quad 8/2(2) \quad 6/1(1)$$

$$143 - \frac{(2x+1)(y-2)}{y} = ۳$$

گزینه ۴

$$(2y-3x)2 = ۱ \Rightarrow ۴y - ۶x = ۱ \Rightarrow ۴y = ۱ + ۶x$$

$$\frac{(2x+1)(4y-8)}{4y} = ۳ \Rightarrow \frac{(2x+1)(1+6x-8)}{1+6x} = ۳$$

$$\frac{(2x+1)(6x-7)}{6x+1} = ۳ \Rightarrow 12x^2 - 8x - 7 = 18x + 3$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 26x - 10 = ۰ \Rightarrow 6x^2 - 13x - 5 = ۰$$

$$\Rightarrow 36x^2 - 12(6x) - 30 = ۰$$

$$\stackrel{6x=t}{\Rightarrow} t^2 - 13t - 30 = ۰ \Rightarrow (t+2)(t-15) = ۰$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = -2 = 6x \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow xy = \frac{1}{12} \\ (t = 15 = 6x \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow xy = 10. \end{array} \right.$$

۱۴۴ - جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = ۰$ کدام است؟

$$k\pi \pm \frac{\pi}{6}(4) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3}(3) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}(2) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}(1)$$

$$144 - \text{اگر } \tan x = \frac{4}{3} \text{ باشد، مقدار } \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{2}{3}(4) \quad \frac{4}{3}(3) \quad -\frac{3}{2}(2) \quad -\frac{3}{4}(1)$$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = A = ۴ - 4A^2$$

$$2A^2 + 2A - ۲ = ۰, \Delta = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow A = \frac{-3 \pm 5}{4} = -2, \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = A - \frac{1}{A} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$145 - \text{اگر } g(x) = \frac{2x+2}{2-x} \text{ و } f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ باشند، ضابطه تابع } g(f(x)) \text{ کدام است؟}$$

$$145 - \text{اگر } g(f(x)) = f(g(x)) \text{ باشند، ضابطه تابع } f(g(x)) \text{ کدام است؟}$$

$$2x(4) \quad x(3) \quad x+1(2) \quad x-1(1)$$

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2 \times \frac{2x-1}{x+1} + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}}$$

$$= \frac{4x-2+2x+2}{2x+2-2x+1} = \frac{6x}{3} = 2x$$

$$146 - \text{حاصل } \lim_{x \rightarrow ۱} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{2}{3}(4) \quad \frac{1}{2}(3) \quad -\frac{3}{2}(2) \quad -\frac{5}{2}(1)$$

$$\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{6}{x(x-2)} - \frac{x+1}{x-2}$$

$$= \frac{6-x^2-x}{x(x-2)} = -\frac{x^2+x-6}{x(x-2)}$$

$$-\frac{(x-2)(x+3)}{x(x-2)} = -\frac{x+3}{x} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$147 - \text{تابع با ضابطه } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases} \text{ به ازای کدام مقدار } a \text{ در } x = ۰ \text{ پیوسته است؟}$$

$$2(4) \quad 1(3) \quad -1(2) \quad -2(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow ۰} f(x) = f(0) = a$$

$$= \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{۰}{0} = \lim_{x \rightarrow ۰} \frac{1}{\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}} = ۲$$

گزینه ۴

$$148 - \text{مشتق تابع } y = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4} \right) \text{ در نقطه } x = \frac{\pi}{6} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(4) \quad \frac{\sqrt{2}}{4}(3) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}(2) \quad -\frac{\sqrt{2}}{4}(1)$$

$$148 - y = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4} \right) = \cos \left(2 \times \left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4} \right) \right) + ۱$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right) + ۱ \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \times (-\sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right))$$

$$= \frac{1}{2} \times \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} \right) \stackrel{x=\frac{\pi}{6}}{=} \frac{1}{2} \times \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

گزینه ۳

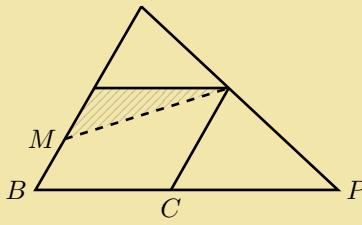
۱۵۴ - در شکل زیر M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد مساحت مثلث سایه‌زده چند برابر مساحت بزرگترین مثلث‌ها است؟

$\frac{3}{36}(4)$

$\frac{1}{8}(3)$

$\frac{1}{9}(2)$

$\frac{1}{12}(1)$

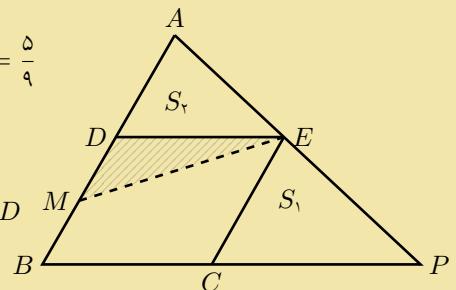


$$\begin{aligned} PC = \frac{2}{3}PB &\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PE}{PA} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AE}{PA} = \frac{1}{3} \\ \frac{S_1}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{4}{9}, \quad \frac{S_2}{S_{\text{کل}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{S_1 + S_2}{S_{\text{کل}}} = \frac{5}{9} \\ \Rightarrow \frac{S_{\text{متوازی‌الاضلاع}}}{S_{\text{کل}}} &= 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = \frac{4}{9}S_{\text{کل}} \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} S_{\text{سایه‌زده}} &= \frac{1}{2}(MD)(DE) \sin D = \frac{1}{2}\left(\frac{BD}{2}\right)(DE) \sin D \\ &= \frac{1}{4}(BD)(DE) \sin D = \frac{1}{4}S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{4}{9}S_{\text{کل}} = \frac{1}{9}S_{\text{کل}} \end{aligned}$$

گزینه ۲



۱۵۵ - یک ظرف استوانه‌ای مدرج به قطر دهانه، ۸، تا ارتفاع ۱۰ واحد پر از مابع است، اگر یک گوی وزین داخل آن قرار گیرد ارتفاع مابع $\frac{2}{3}$ بالا می‌آید. سطح این کدام است؟

۱۶π(۴)

۱۲π(۳)

۸π(۲)

۶π(۱)

حجم آب بالا آمده به اندازه جسم کره است:

$$\frac{4}{3}\pi R^3_{\text{کره}} = \pi R^2_{\text{استوانه}} \Delta h = \pi(16)\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow R^2_{\text{کره}} = 8 \Rightarrow R_{\text{کره}} = 2 \Rightarrow S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 = 16\pi$$

گزینه ۴

شاد و پیروز باشید!

ایمیل: mehrdad.mdpour@gmail.com