

پاسخ تشریحی ریاضیات رستهی علوم تجربی کنکور سال ۹۶

سیدعرفان ستوده، دبیر ریاضی تهران: ۰۹۱۲۲۹۶۷۱۸۳

سایت کنکور

۱. پاسخ تشریحی ریاضیات رشته‌ی علوم تجربی کنکور سال ۹۶ (سیدعرفان ستوده)

۱۲۶. دو تابع $f = \{(2,5), (6,3), (3,7), (4,1), (1,9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ آن‌گاه a کدام

است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$f(6) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 6$$

با توجه به فرض $f^{-1}(g(2a)) = 6$ نتیجه می‌شود $g(2a) = 3$ پس $\frac{2a}{2a-1} = 3$ لذا $2a = 6a - 3$ بنابراین $a = \frac{3}{4}$.

□

۱۲۷. از دو معادله‌ی دو مجهولی $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ و $\log y = 2 \log 3 + \log x$ مقدار y کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$\log y = 2 \log 3 + \log x \Rightarrow \log y - \log x = \log 9 \Rightarrow \log \frac{y}{x} = \log 9 \Rightarrow \frac{y}{x} = 9 \Rightarrow y = 9x$$

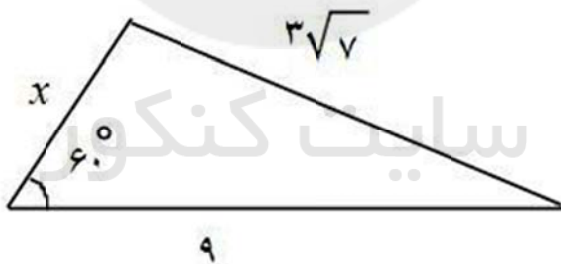
با جای‌گذاری $y = 9x$ در معادله‌ی $2^{x-y} \times 4^{x+y} = 1$ داریم:

$$2^{x-9x} \times (2^2)^{x+9x} = 1 \Rightarrow 2^{-8x} \times 2^{20x} = 1 \Rightarrow 2^{12x-7} = 2^0 \Rightarrow 12x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

□

۱۲۸. در مثلثی یکی از زاویه‌ها ۶۰ درجه و ضلع مقابل به این زاویه $3\sqrt{7}$ واحد است. اگر ضلع دیگر این مثلث ۹ واحد باشد، اندازه‌ی

ضلع سوم کدام است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۱. طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$(3\sqrt{7})^2 = x^2 + 9^2 - 2 \times 9x \cos 60^\circ \Rightarrow 63 = x^2 + 81 - 9x \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 3, \quad x = 6$$

□

۱۲۹. اگر $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ باشند، ماتریس $(2B) \cdot A^{-1}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۴.

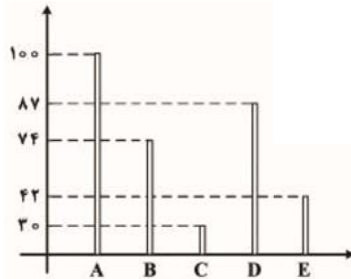
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}(2B) = \frac{1}{2} \times 2 \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ -11 & 15 \end{pmatrix}$$

□

۲ پاسخ تشریحی ریاضیات رشته‌ی علوم تجربی کنکور سال ۹۶ (سیدعرفان ستوده)

۱۳۰. نمودار میله‌ای روبه‌رو تعداد کارکنان با مهارت فنی در ۵ گروه متمایز است. در نمایش آن با نمودار دایره‌ای، زاویه‌ی مربوط به گروه B

چند درجه است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۲. فراوانی نسبی مربوط به گروه B برابر با $\frac{74}{30+42+74+87+100} = \frac{74}{333}$ است. بنابراین، زاویه‌ی مربوط به

گروه B در نمودار دایره‌ای $80 = \frac{74}{333} \times 360$ درجه است.

□

۱۳۱. ضریب تغییرات در داده‌های آماری زیر با فراوانی تجمعی داده شده کدام است؟

مرکز دسته	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴
فراوانی تجمعی	۷	۱۶	۲۳	۴۴	۵۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$\bar{x} = \frac{6 \times 7 + 8 \times 9 + 10 \times 17 + 12 \times 11 + 14 \times 6}{7 + 9 + 17 + 11 + 6} = \frac{500}{50} = 10$$

$$\sigma^2 = \frac{7(6-10)^2 + 9(8-10)^2 + 17(10-10)^2 + 11(12-10)^2 + 6(14-10)^2}{50} = \frac{112 + 36 + 0 + 44 + 96}{50} = \frac{288}{50} = 5,76$$

پس

$$\sigma = \sqrt{5,76} = 2,4 \Rightarrow C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2,4}{10} = 0,24$$

□

۱۳۲. در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی سفید، ۴ مهره‌ی سیاه، و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال،

رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$\frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{5 \times 4 \times 3}{220} = \frac{3}{11}$$

□

۳ پاسخ تشریحی ریاضیات رشته‌ی علوم تجربی کنکور سال ۹۶ (سیدعرفان ستوده)

۱۳۳. مجموعه جواب نامعادله‌ی $3 < \frac{3x+1}{x-3} < -1$ به کدام صورت است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۱.

$$-1 < \frac{3x+1}{x-3} < 3 \Rightarrow -2 < \frac{3x+1}{x-3} - 1 < 2 \Rightarrow -2 < \frac{2x+4}{x-3} < 2 \Rightarrow \left| \frac{2x+4}{x-3} \right| < 2 \Rightarrow |2x+4| < 2|x-3|$$

$$\Rightarrow |x+2| < |x-3| \Rightarrow x^2 + 4x + 4 < x^2 - 6x + 9 \Rightarrow 10x < 5 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

□

۱۳۴. اگر $\tan x = \frac{4}{3}$ باشد، مقدار $\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$\tan x = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \tan \frac{x}{2} = 2 - 2 \tan^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \tan^2 \frac{x}{2} + 3 \tan \frac{x}{2} - 2 = 0$$

پس $\tan \frac{x}{2} = -2$ یا $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$. با فرض $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ نتیجه می‌شود $\cot \frac{x}{2} = 2$. بنابراین

$$\tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

□

۱۳۵. اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۴.

$$g(f(x)) = \frac{2f(x)+2}{2-f(x)} = \frac{2 \times \frac{2x-1}{x+1} + 2}{2 - \frac{2x-1}{x+1}} = \frac{(4x-2) + (2x+2)}{\frac{x+1}{(2x+2)-(2x-1)}} = \frac{6x}{3} = 2x$$

□

۱۳۶. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۱.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-x-3)(x-2)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x-3}{x} = -\frac{5}{2}$$

□

۴ پاسخ تشریحی ریاضیات رشته‌ی علوم تجربی کنکور سال ۹۶ (سیدعرفان ستوده)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}; & x \neq 0 \\ a; & x = 0 \end{cases} \quad \text{تابع ۱۳۷}$$

پاسخ: گزینه‌ی ۴.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \times \frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{1-x} = 2$$

اگر $a = 2$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه تابع f در $x = 0$ پیوسته می‌شود.

□

$$138. \text{ مشتق تابع } y = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \text{ در نقطه‌ی } x = \frac{\pi}{6} \text{ کدام است؟}$$

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \Rightarrow f'(x) = -2 \times 2 \left(-\frac{1}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \\ &\Rightarrow f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) \\ &\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24}\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

□

۱۳۹. در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی

داشته باشند، چند درصد این جمعیت، تحصیلات دانشگاهی دارند؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲. $0,108 + 0,48 = 0,156$. بنابراین ۱۵/۶ درصد این جمعیت، تحصیلات

دانشگاهی دارند.

□

۱۴۰. دانش‌آموزی به ۶ پرسش چهار گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد. با کدام احتمال ۳ پرسش را پاسخ درست داده است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۱.

$$\binom{6}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 20 \times \frac{27}{4^6} = \frac{5 \times 27}{2^{10}} = \frac{135}{1024}$$

□

$$141. \text{ ضابطه‌ی وارون تابع } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}; & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}; & x < 0 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$x \geq 0 \quad y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2$$

$$x < 0 \quad y = -\sqrt{-x} \Rightarrow x = -y^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x^2$$

پس

۵ پاسخ تشریحی ریاضیات رشته‌ی علوم تجربی کنکور سال ۹۶ (سیدعرفان ستوده)

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{\sqrt{}} & x \geq 0 \\ -x^{\sqrt{}} & x < 0 \end{cases} = x \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} = x |x|.$$

□

۱۴۲. کوچکترین کران بالای دنباله‌ی $a_n = \frac{2n^{\sqrt{}} + 1}{2n^{\sqrt{}} + n}$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۴. با توجه به این که همه‌ی جملات دنباله کمتر از $\frac{3}{2}$ هستند و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$ نتیجه می‌شود کوچک‌ترین کران بالای این

دنباله $\frac{3}{2}$ است.

□

۱۴۳. از دو معادله‌ی $\ln(2x+1) + \ln(y-2) - \ln y = \ln 3$ و $\ln(2y-3x) + \ln 2 = 0$ ، مقدار xy کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۴. از معادله‌ی اول $\frac{2x+1}{3} = \frac{y}{y-2}$ و از معادله‌ی دوم $2(2y-3x) = 1$ نتیجه می‌شود. بنابراین داریم:

$$4y - 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{4y-1}{6}$$

$$\frac{2x+1}{3} = \frac{y}{y-2} \Rightarrow \frac{\frac{4y-1}{3} + 1}{3} = \frac{y}{y-2} \Rightarrow \frac{4y+2}{9} = \frac{y}{y-2} \Rightarrow 4y^2 - 8y + 2y - 4 = 9y$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 15y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{15 \pm 17}{8} = 4, -\frac{1}{4}$$

با توجه به دامنه‌ی معادلات اصلی $y = -\frac{1}{4}$ قابل قبول نیست و $y = 4$ قابل قبول است. پس داریم $x = \frac{4(4)-1}{6} = \frac{15}{6}$ و لذا

$$.xy = \frac{60}{6} = 10$$

□

۱۴۴. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow (2 \cos^2 x - 1) + 2 \cos^2 x = 0 \Rightarrow 4 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \tan^2 x = 3 \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ \tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \tan(-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۶ پاسخ تشریحی ریاضیات رشته‌ی علوم تجربی کنکور سال ۹۶ (سیدعرفان ستوده)

بنابراین، جواب‌های این معادله‌ی مثلثاتی به صورت $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ است.

□

۱۴۵. معادله‌ی خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $\sqrt[3]{y} + x\sqrt{x} = 9$ در نقطه‌ی $(4,1)$ کدام است؟
پاسخ: گزینه‌ی ۱.

$$\sqrt[3]{y} + x\sqrt{x} - 9 = 0 \Rightarrow y' = \left. \frac{-\frac{3}{2}\sqrt{x}}{\frac{1}{3\sqrt[2]{y}}}\right|_{(4,1)} = -\frac{3}{1} = -9$$

شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $(4,1)$ برابر -9 است و معادله‌ی خط مماس به صورت زیر است:

$$y - 1 = -9(x - 4) \Rightarrow y = -9x + 37$$

□

۱۴۶. اگر $A = (1, -3)$ نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = ax^3 - x^2 - 3x + b$ باشد، مقدار تابع در نقطه‌ی ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

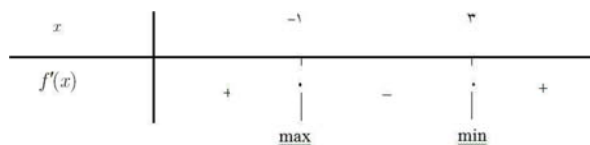
$$y = ax^3 - x^2 - 3x + b \Rightarrow y' = 3ax^2 - 2x - 3 \Rightarrow y'' = 6ax - 2$$

چون $(1, -3)$ نقطه‌ی عطف منحنی است پس داریم:

$$y''(1) = 0 \Rightarrow 6a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$y(1) = -3 \Rightarrow \frac{1}{3}(1)^3 - (1)^2 - 3(1) + b = -3 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

بنابراین $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + \frac{2}{3}$ و داریم: $y' = x^2 - 2x - 3$.



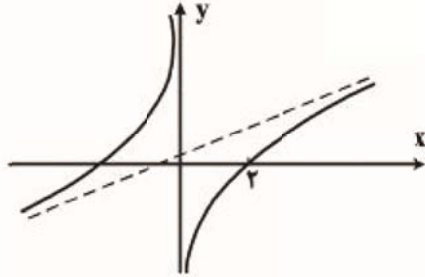
با توجه به جدول تغییرات تابع، $x = -1$ طول ماکسیمم نسبی تابع است و مقدار تابع در $x = -1$ برابر است با

$$y = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3(-1) + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

□

۷ پاسخ تشریحی ریاضیات رشته‌ی علوم تجربی کنکور سال ۹۶ (سیدعرفان ستوده)

۱۴۷. شکل زیر منحنی نمایش تغییرات تابع $y = \frac{ax^r - 1}{x + b}$ است. $a + b$ کدام است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$f(x) = \frac{ax^r - 1}{x + b} \Rightarrow f(r) = 0 \Rightarrow \frac{ra - 1}{r + b} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{r}$$

با توجه به این که محور y ها مجانب قائم تابع است باید $x = 0$ ریشه‌ی منحنی f باشد پس $b = 0$ و لذا $a + b = \frac{1}{r}$.

□

۱۴۸. محور تقارن یک سهمی با رأس $(-1, 3)$ موازی محور x ها است. اگر این سهمی از نقطه‌ی $(5, 9)$ بگذرد، فاصله‌ی کانونی تا خط

هادی آن کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$(y - 3)^2 = 4p(x + 1) \Rightarrow (9 - 3)^2 = 4p(5 + 1) \Rightarrow 36 = 4p \times 6 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$$

فاصله‌ی کانون تا خط هادی سهمی $2p = 3$ است.

□

۱۴۹. در بیضی به معادله‌ی $16y^2 + 5x^2 - 10x = 75$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در M و N قطع

می‌کند. اندازه‌ی MN کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۲.

$$16y^2 + 5x^2 - 10x = 75 \Rightarrow 5(x^2 - 2x + 1) + 16y^2 = 80 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow a^2 = 16, b^2 = 5$$

طول وتر کانونی در بیضی برابر با $2/5$ است. $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 5}{4} = 2/5$

□

۱۵۰. اگر $f(x) = x - |x - 2|$ باشد، حاصل $\int_0^f f(x) dx$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۳.

$$\int_0^f (x - |x - 2|) dx = \int_0^2 (2x - 2) dx + \int_2^f 2 dx = x^2 - 2x \Big|_0^2 + 2x \Big|_2^f = 0 - 0 + 8 - 4 = 4$$

□

۸ پاسخ تشریحی ریاضیات رشته‌ی علوم تجربی کنکور سال ۹۶ (سیدعرفان ستوده)

۱۵۱. اگر $\int (3x + \frac{1}{x})^2 dx = \frac{1}{x} f(x) + C$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۴.

$$\int (3x + \frac{1}{x})^2 dx = \int (9x^2 + \frac{1}{x^2} + 6) dx = 3x^3 - \frac{1}{x} + 6x = \frac{3x^4 + 6x^2 - 1}{x} + c$$

بنابراین $f(x) = 3x^4 + 6x^2 - 1$

□

۱۵۲. در چهارضلعی محدب $ABCD$ رابطه‌ی $\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{12}$ بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه‌ی حاده بین نیمسازهای داخلی

دو زاویه‌ی متقابل A و C چند درجه است؟

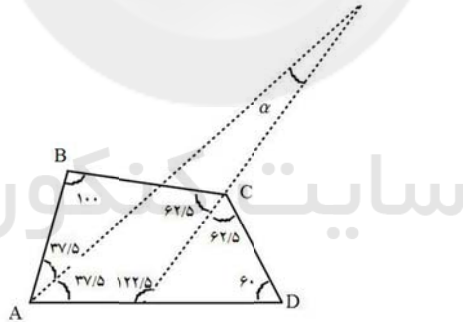
پاسخ: گزینه‌ی ۱.

$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{12} = t \Rightarrow \hat{A} = 3t, \hat{B} = 4t, \hat{C} = 5t, \hat{D} = \frac{12}{5}t,$$

از این‌که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ داریم:

$$3t + 4t + 5t + \frac{12}{5}t = 360 \Rightarrow 14\frac{4}{5}t = 360 \Rightarrow t = 25 \Rightarrow \hat{A} = 75^\circ, \hat{B} = 100^\circ, \hat{C} = 125^\circ, \hat{D} = 60^\circ$$

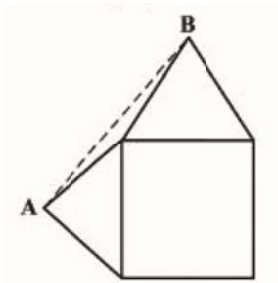
با توجه به شکل، زاویه‌ی مطلوب $\alpha = 20^\circ$ است. زیرا $\alpha = 20^\circ$. $\alpha + 37\frac{1}{2} + 122\frac{1}{2} = 180 \Rightarrow \alpha = 20^\circ$.



□

۱۵۳. بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. فاصله‌ی AB چند واحد است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۴.



طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

۹ پاسخ تشریحی ریاضیات رشته‌ی علوم تجربی کنکور سال ۹۶ (سیدعرفان ستوده)

$$AB^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \cos 150^\circ = 4 + 4 - 8 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8 + 4\sqrt{3}$$

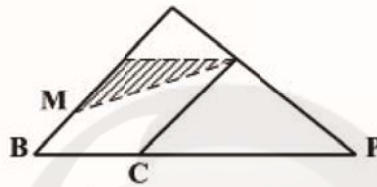
پس

$$AB = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

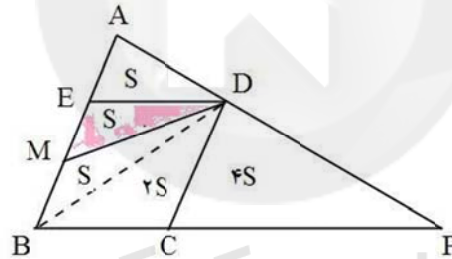
□

۱۵۴. در شکل زیر، نقطه‌ی M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت

بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



پاسخ: گزینه‌ی ۲. برای ساده‌تر شدن مسأله با توجه به $PC = \frac{2}{3}PB$ فرض می‌کنیم $PC = 2$ و $BC = 1$. اگر مساحت مثلث سایه‌زده شده را S در نظر بگیریم آن‌گاه مساحت متوازی‌الاضلاع $4S$ است و



در دو مثلث DPC و DBC نسبت قاعده‌ها ۲ به ۱ است و چون هر دو، ارتفاع مشترک دارند پس نسبت مساحت‌هایشان نیز ۲ به ۱ است و لذا مساحت مثلث DPC برابر $4S$ است. در آخر، با توجه به تشابه دو مثلث DPC و ADE نتیجه می‌شود مساحت مثلث ADE برابر S است. پس نسبت مساحت مثلث هاشور خورده به مثلث اصلی $\frac{1}{9}$ است.

□

۱۵۵. یک ظرف استوانه‌ای مدرج به قطر دهانه‌ی ۸، تا ارتفاع ۱۰ واحد پر از مایع است. اگر یک گوی کروی وزین داخل آن قرار گیرد،

ارتفاع مایع $\frac{2}{3}$ واحد بالا می‌آید. سطح این کره کدام است؟

پاسخ: گزینه‌ی ۴. حجم گوی کروی برابر با حجم آب جابه‌جا شده اس. بنابراین داریم:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = (16\pi) \times \frac{2}{3} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

سطح کره برابر است با

$$4\pi r^2 = 4\pi \times 4 = 16\pi$$

□