



۱ اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{p}x + 2$ آنگاه مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور x ها قرار می‌گیرند برابر کدام بازه است؟

- (۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-3, 2)$
(۳) $(-2, 1)$ (۴) $(-1, 4)$

۲ اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_p(x^2+2x)$ باشند، دامنه تابع fog کدام است؟

- (۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-2, 0]$
(۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (۴) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

۳ اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع gof کدام است؟

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $\{0\}$
(۳) $(-1, 1)$ (۴) $R - \{1, -1\}$

۴ اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(fog)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $x^2 - 4x + 3$ (۲) $x^2 - 4x + 5$
(۳) $x^2 - 2x + 5$ (۴) $x^2 - 2x + 3$

۵ اگر خروجی از ماشین شکل زیر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

- ورودی $\rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow$ خروجی
- (۱) $\frac{11}{9}$ (۲) $\frac{7}{2}$
(۳) 3 (۴) 4

۶ دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ مفروض اند تابع $g^{-1}of^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\}$ (۲) $\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\}$
(۳) $\{(2, 2), (1, 1), (4, 4)\}$ (۴) $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$

۷ نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

- (۱) $-x + 6; x < -4$ (۲) $-x + 5; x > 2$
(۳) $-\frac{1}{p}x + 1; -4 < x < 3$ (۴) $-\frac{1}{p}x + 1; -4 < x < 10$



۸ تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) غیر متقاطع

۹ نمودار تابع $y = \frac{1}{3}|x| - 2$ را ۴ واحد به طرف x های منفی و یک واحد به طرف y های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار جدید و نمودار اولیه، با کدام طول متقاطع‌اند؟

- (۱) $-\frac{3}{5}$
(۲) $-\frac{3}{5}$
(۳) $-\frac{2}{5}$
(۴) $-\frac{2}{5}$

۱۰ جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله حسابی، می‌توانند سه جمله متوالی از دنباله هندسی باشند. قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$
(۲) $\frac{7}{4}$
(۳) $\frac{9}{4}$
(۴) $\frac{7}{3}$

۱۱ در یک دنباله هندسی، جمله دوم، دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می‌توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چندبرابر کوچک‌ترین آن‌ها است؟

- (۱) $2 + \sqrt{3}$
(۲) $5 + 2\sqrt{3}$
(۳) $5 + 4\sqrt{3}$
(۴) $7 + 4\sqrt{3}$

۱۲ در بیست جمله اول از یک دنباله عددی، مجموع جملات ردیف فرد، ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج، ۱۵۰ است، جمله اول کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۱۳ مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچک تر از ۱۰۱ کدام است؟

- (۱) ۸۱۶
(۲) ۸۵۲
(۳) ۸۶۷
(۴) ۸۸۴

۱۴ به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله اول از یک دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول این دنباله، کدام است؟

- (۱) $\frac{117}{16}$
(۲) $\frac{125}{16}$
(۳) $\frac{63}{4}$
(۴) $\frac{127}{8}$



۱۵ در دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ مجموع چهارده جمله اول، چند برابر مجموع هفت جمله اول آن است؟

- (۱) ۶۵
(۲) ۶۳
(۳) ۱۲۷
(۴) ۱۲۹

۱۶ در شهری با جمعیت ۵۰۰۰۰ با نرخ رشد سالیانه جمعیت $2/5$ درصد، باتوجه به $f(t) = Ae^{it}$ پس از چند سال، جمعیت این شهر ۶۰۰۰۰ نفر می‌شود؟ $(\ln 1/2 = 0/18)$

- (۱) ۶/۲
(۲) ۶/۷
(۳) ۶/۸
(۴) ۷/۲

۱۷ بعد از $12/5$ سال سرمایه یک سرمایه گذار e برابر شده است. نرخ سود مشارکت در این سرمایه گذاری چند درصد مرکب پیوسته است؟

- (۱) ۷
(۲) ۷/۵
(۳) ۸
(۴) ۸/۵

۱۸ نمودارهای دو تابع $y = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}$ و $y = 3^x + \frac{1}{3}$ در نقطه A متقاطع‌اند. فاصله نقطه A از نقطه $(-1, 1)$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) $\sqrt{2}$
(۳) ۲
(۴) $\sqrt{5}$

۱۹ نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{2}}(ax+b)$ محور x ها را در نقطه‌ای به طول -1 و نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه‌ای به عرض -1 قطع کرده است. b کدام می‌باشد؟

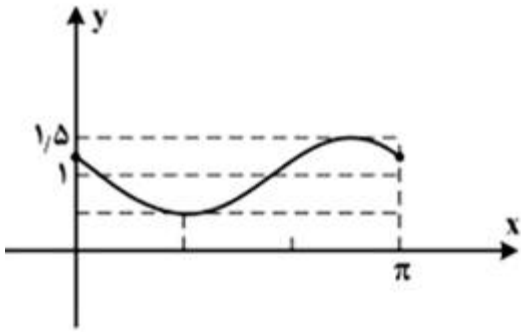
- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) ۲
(۳) $\frac{5}{2}$
(۴) ۳

۲۰ از تساوی $\log_x^{(3x+8)} = 2 - \log_x^{(x-6)}$ مقدار لگاریتم x در پایه ۴، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$
(۲) $\frac{2}{3}$
(۳) $\frac{3}{2}$
(۴) ۲



۲۱ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = 1 + a \sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟



(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

۲۲ حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ ، با فرض $\tan 15^\circ = \frac{1}{2}$ کدام است؟

(۲) $-\frac{9}{16}$

(۴) $\frac{16}{9}$

(۱) $-\frac{16}{9}$

(۳) $\frac{9}{16}$

۲۳ اگر $\tan \theta = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

(۲) $\frac{1}{2}$

(۴) ۳

(۱) -۲

(۳) ۲

۲۴ اگر $\tan(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{5}$ باشد، $\tan 2\alpha$ چقدر است؟

(۲) $\frac{1}{8}$

(۴) $\frac{2}{5}$

(۱) $\frac{1}{5}$

(۳) $\frac{2}{4}$

۲۵ اگر زاویه منفرجه و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{7}$

(۴) ۷

(۱) -۷

(۳) $\frac{1}{7}$

۲۶ اگر $\tan \beta = \frac{1}{4}$ و $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشند، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

(۲) $\frac{5}{6}$

(۴) $\frac{5}{8}$

(۱) $\frac{5}{45}$

(۳) $\frac{5}{75}$



۲۷ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin(x + \pi) \cos(\frac{\pi}{4} + x) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$
 (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$
 (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$
 (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۲۸ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
 (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 (۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$
 (۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲۹ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{2} + x)$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{3}$
 (۲) $\frac{2k\pi}{3}$
 (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$
 (۴) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۳۰ در معادلهٔ مثلثاتی $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \cos 2x(\cos x - \sin x)$ مجموع تمام جواب ها در بازهٔ $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3\pi}{4}$
 (۲) $\frac{5\pi}{4}$
 (۳) $\frac{3\pi}{2}$
 (۴) $\frac{7\pi}{4}$

۳۱ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ به کدام صورت است؟

- (۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$
 (۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$
 (۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$
 (۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

۳۲ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = 1$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{4}$
 (۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
 (۳) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$
 (۴) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۳۳ اگر $A = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A + 2B$ وارون پذیر نیست؟

- (۱) $-7, 5$
 (۲) $-5, 7$
 (۳) $-7, 4$
 (۴) $-3, 5$



۳۴ اگر $A = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A - B)^{-1}$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} (1) \begin{bmatrix} -0/2 & 0/1 \\ 0/3 & 0/2 \end{bmatrix} \\ (2) \begin{bmatrix} 0/3 & -0/2 \\ 0/2 & 0/4 \end{bmatrix} \\ (3) \begin{bmatrix} 0/2 & -0/2 \\ 0/3 & 0/4 \end{bmatrix} \\ (4) \begin{bmatrix} 0/2 & 0/2 \\ -0/3 & 0/2 \end{bmatrix} \end{array}$$

۳۵ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس B از معادله $A \cdot B = 2I$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} (1) \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ (2) \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ (3) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \\ (4) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

۳۶ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول وارون ماتریس $B \times A$ کدام است؟

$$\begin{array}{l} (1) -0/9 \\ (2) -0/1 \\ (3) 0/1 \\ (4) 0/9 \end{array}$$

۳۷ تمام داده‌های نمودار ساقه و برگ زیر را سه برابر کرده، سپس ۴۰ واحد از آن‌ها کم می‌کنیم. میانگین داده‌های جدید کدام است؟

ساقه	برگ
۸	۰ ۱ ۵
۹	۲ ۴ ۶ ۷
۱۰	۰ ۰ ۳ ۴ ۸

- (۱) ۲۴۰
(۲) ۲۴۵
(۳) ۲۵۰
(۴) ۲۵۵

۳۸ در جدول فراوانی تجمعی داده‌های آماری زیر، اگر میانگین جامعه ۴۱ باشد، در نمودار دایره‌ای زاویه‌ی مربوط به دسته $(۳۹, ۴۳)$ چند درجه است؟

نماینده دسته	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
فراوانی تجمعی	۷	۱۷	۳۲	۴۴	a

- (۱) ۹۶
(۲) ۹۸
(۳) ۱۰۲
(۴) ۱۰۸



۳۹ در نمودار جعبه‌ای ۳۶ داده آماری، میانگین داده‌های دو طرف جعبه جداگانه به ترتیب ۲۲ و ۳۰ است. اگر میانگین تمام داده‌ها $27/5$ باشد، آنگاه میانگین داده‌های داخل جعبه کدام است؟

- (۱) ۲۸
(۲) $28/5$
(۳) ۲۹
(۴) $29/5$

۴۰ در ۱۲ داده آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجزورات آن‌ها ۴۸۰ است، ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{2}{9}$
(۳) $\frac{1}{3}$
(۴) $\frac{2}{5}$

۴۱ واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر داده‌های ۱۶، ۲۴ و ۲۶ به آن اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییر نمی‌کند، انحراف معیار ۱۴ داده حاصل کدام است؟

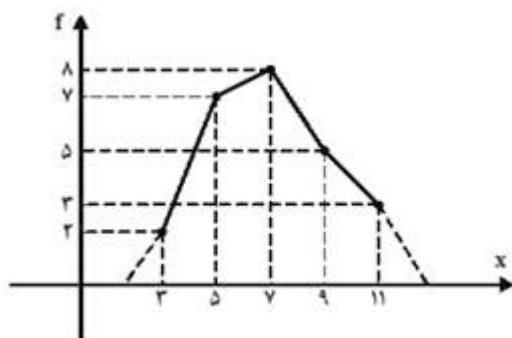
- (۱) $0/75$
(۲) $1/25$
(۳) $1/5$
(۴) ۲

۴۲ در ۲۵ داده آماری، میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ است. اگر داده‌های ناچور ۱۰، ۱۵، ۴۵ و ۵۰ از بین آن‌ها حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده، تقریباً کدام است؟

- (۱) $14/72$
(۲) $14/81$
(۳) $15/33$
(۴) $16/66$

۴۳ داده‌های $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i = 12x_i + 6$ کدام است؟

- (۱) $0/4$
(۲) $0/48$
(۳) $0/52$
(۴) $0/6$



۴۴ با توجه به نمودار چندبر فراوانی مقابل، واریانس کل داده‌ها، کدام است؟

- (۱) $4/5$
(۲) $4/8$
(۳) $4/92$
(۴) $5/12$



۴۵ جدول زیر فراوانی نسبی داده‌های دسته‌بندی شده است با تعیین α ، مقدار واریانس کدام است؟

مرکز دسته	۸	۱۲	۱۶	۲۰
فراوانی نسبی	۰/۱	۰/۲۵	۰/۲	α

$$۱۶/۸ \quad (۲)$$

$$۱۶/۵ \quad (۱)$$

$$۱۷/۶ \quad (۴)$$

$$۱۷/۲ \quad (۳)$$

۴۶ ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند. تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟

$$۲۴ \quad (۲)$$

$$۱۲ \quad (۱)$$

$$۴۸ \quad (۴)$$

$$۳۶ \quad (۳)$$

۴۷ حروف کلمه **LAGRANGE** را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

$$۵۴۰ \quad (۲)$$

$$۳۶۰ \quad (۱)$$

$$۱۴۴۰ \quad (۴)$$

$$۷۲۰ \quad (۳)$$

۴۸ اگر $\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)} = ۲۶$ ، مقدار n کدام است؟

$$۵۳ \quad (۲)$$

$$۵۲ \quad (۱)$$

$$۵۵ \quad (۴)$$

$$۵۴ \quad (۳)$$

۴۹ تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی از مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ شامل عضو a کدام است؟

$$۱۰ \quad (۲)$$

$$۸ \quad (۱)$$

$$۱۵ \quad (۴)$$

$$۱۲ \quad (۳)$$

۵۰ با جابه جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری که رقم‌های ۲، یک‌درمیان قرار بگیرند؟

$$۱۲ \quad (۲)$$

$$۹ \quad (۱)$$

$$۲۴ \quad (۴)$$

$$۱۸ \quad (۳)$$



۵۱ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ است؟

- (۱) $\frac{2}{9}$
 (۲) $\frac{5}{18}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{5}{12}$

۵۲ چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

- (۱) $\frac{19}{48}$
 (۲) $\frac{41}{96}$
 (۳) $\frac{23}{48}$
 (۴) $\frac{55}{96}$

۵۳ در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال این‌که حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب ۳ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{12}$
 (۲) $\frac{1}{6}$
 (۳) $\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{3}$

۵۴ در آزمایشگاهی ۷ موش نگهداری می‌شوند که بر روی ۳ موش آزمون مهارت انجام شده است. اگر ۲ موش از بین آنان تصادفی انتخاب شود، با کدام احتمال لااقل بر روی یکی از آن دو، آزمون انجام شده است؟

- (۱) $\frac{10}{21}$
 (۲) $\frac{4}{7}$
 (۳) $\frac{5}{7}$
 (۴) $\frac{16}{21}$

۵۵ در یک خانواده سه فرزند، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$
 (۲) $\frac{3}{7}$
 (۳) $\frac{4}{7}$
 (۴) $\frac{5}{8}$

۵۶ در جعبه اول ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در جعبه دوم ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟

- (۱) $\frac{31}{168}$
 (۲) $\frac{11}{56}$
 (۳) $\frac{17}{84}$
 (۴) $\frac{13}{56}$

۵۷ در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

- (۱) $\frac{5}{14}$
 (۲) $\frac{3}{7}$
 (۳) $\frac{2}{5}$
 (۴) $\frac{3}{5}$



۵۸ احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند 0.25 و احتمال انتقال به افراد دیگر 0.2 است. $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟

- (۱) 0.13 (۲) 0.14
(۳) 0.15 (۴) 0.16

۵۹ از نوعی بذر 80 درصد آن‌ها جوانه می‌زنند. اگر سه بذر از این نوع کاشته شود، با کدام احتمال لااقل دو بذر جوانه می‌زنند؟

- (۱) 0.512 (۲) 0.784
(۳) 0.864 (۴) 0.896

۶۰ پدر و مادری هر یک دارای یک زن رنگ چشم مغلوب (b) و یک زن رنگ چشم غالب (B) اند و $P(B) = 3P(b)$. اگر این پدر و مادر دارای سه فرزند باشند، با کدام احتمال فقط یکی از فرزندان دارای زن چشم مغلوب‌اند؟

- (۱) $\frac{9}{64}$ (۲) $\frac{9}{32}$
(۳) $\frac{27}{64}$ (۴) $\frac{9}{16}$

۶۱ در آزمایشگاهی ۶ موش سیاه و ۴ موش سفید موجود است. به طور تصادفی ۲ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟

- (۱) $\frac{2}{5}$ (۲) $\frac{7}{15}$
(۳) $\frac{8}{15}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۶۲ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) 1
(۳) 1 و $-\frac{9}{5}$ (۴) $-\frac{9}{5}$ و -1

۶۳ اگر هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، دو برابر معکوس هر ریشه از معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -14 (۲) -12
(۳) -8 (۴) -6

۶۴ اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چقدر است؟

- (۱) 2 (۲) 3
(۳) 4 (۴) 6



۶۵ به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند؟

- (۱) $a < -9$ (۲) $a < -3$
 (۳) $a > -1$ (۴) $-3 < a < 0$

۶۶ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1
 (۳) 1 (۴) 2

۶۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ ، کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

۶۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ ، آنگاه $f(-1)$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) $\frac{3}{2}$
 (۳) 2 (۴) 3

۶۹ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{8}$
 (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۷۰ حد عبارت $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$ ، وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است)

- (۱) $-\infty$ (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) 1 (۴) $+\infty$

۷۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ ، کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{6}$ (۲) $-\frac{1}{12}$
 (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{1}{6}$



۷۲ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & ; x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & ; x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۷۳ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2+x-2|}{x-1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 1$ پیوسته است؟

(۱) هر مقدار a

(۲) -۳

(۳) ۳

(۴) هیچ مقدار a

۷۴ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 3x}{\cos x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin 5x - a & ; \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ بر روی بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۷۵ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟

(۱) $-\frac{1}{4}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) هیچ مقدار a

۷۶ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 3x - [x] & ; x < 2 \\ a & ; x = 2 \\ x + 2 & ; x > 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

(۴) هیچ مقدار a



۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۱	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۱۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۴۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۴۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۵۵	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۱۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۶	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۱۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۱۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۴۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

۶۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷۱	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶۳	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					
۶۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					
۶۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					
۷۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					



سایت کنکور



گزینه ۱

۱

گام اول

برای پاسخ گویی به این تست داشتن ضابطه تابع $gof(x)$ الزامی است. برای رسیدن به این منظور کافی است در ضابطه تابع $g(x)$ به جای متغیر x ضابطه تابع $f(x)$ را قرار دهیم. حالا ببینیم منظور تابع از جمله "مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع gof که در بالای محور x قرار می گیرند" چیست؟ اگر قرار باشد تابع gof بالای محور x قرار بگیرد باید مقدار y تابع بزرگ تر از صفر باشد. بنابراین باید مجموعه جواب نامعادله $gof(x) > 0$ را تعیین کنیم.

گام دوم

تعیین ضابطه $gof(x)$ و حل نامعادله $gof(x) > 0$:

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 2, f(x) = x^2 + 3x$$

$$gof(x) = g(f(x)) = -\frac{1}{2}(x^2 + 3x) + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

$$gof(x) > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 > 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 < 0 \Rightarrow$$

$$(x + 4)(x - 1) < 0 \Rightarrow -4 < x < 1$$

بنابراین در بازه $(-4, 1)$ مقادیر تابع $gof(x)$ بزرگ تر از صفر بوده و در نتیجه نمودار این تابع روی این بازه بالای محور x قرار می گیرد.

گزینه ۴

۲

برای به دست آوردن D_{fog} اول از همه باید D_f و D_g تعیین شود. سپس با استفاده از رابطه $D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$ دامنه تابع fog را تعیین کنیم.

$$f(x) = \sqrt{3-x} \Rightarrow 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$g(x) = \log_p^{(x^2+2x)} \Rightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -2$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$

حالا سراغ تعیین D_{fog} می رویم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fog} = \{x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) | \log_p^{(x^2+2x)} \leq 3\}$$

$$\log_p^{(x^2+2x)} \leq 3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 2^3 \Rightarrow x^2 + 2x \leq 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{fog} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$



گزینه ۲

۳

گام اول

دامنه تابع $g \circ f$ از رابطه $D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$ به دست می‌آید.

گام دوم

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x-x^2} \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\} | \frac{1+x^2}{1-x^2} \in [0, 1]\}$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \quad (1) \\ \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2 - 1 + x^2}{1-x^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \leq 0 \Rightarrow 1-x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \cup \{0\} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) : x \in \{0\}$$

گزینه ۳

۴

دو ضابطه $g(x)$ و $f(g(x))$ به ما داده شده است. برای به دست آوردن ضابطه $f(x)$ از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $g(x)$ برابر t باشد. در این صورت x را بر حسب t به دست آورده و در نهایت $f(t)$ را مشخص می‌کنیم. حالا تابع $f(x)$ به صورت مستقل به دست آمده است.

$$g(x) = 2x - 3 = t \Rightarrow 2x = t + 3 \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{(t+3)^2}{4} - 2(t+3) + 5\right) \Rightarrow$$

$$f(t) = (t+3)^2 - 8(t+3) + 20 = t^2 + 6t + 9 - 8t - 24 + 20 \Rightarrow$$

$$f(t) = t^2 - 2t + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$



گزینه ۳

۵

گام اول

به شکل ماشین داده شده خوب دقت کنید:

ورودی $\rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow$ خروجی

متغیر ورودی را x در نظر می‌گیریم. وارد دستگاهی می‌شود که این متغیر را دو برابر کرده و از آن دو واحد کم می‌کند. ما این دستگاه را $f(x)$ فرض می‌کنیم. دستگاه بعدی را هم $g(x)$ در نظر می‌گیریم. بنابراین شکل دستگاه را به صورت زیر تکمیل می‌کنیم:

ورودی $\xrightarrow{x} \underbrace{2x-2}_{f(x)} \rightarrow \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x+1}}}_{g(x)} \rightarrow$ خروجی $\xrightarrow{g(f(x))}$

خروجی به ازای متغیر ورودی x برابر $\frac{4}{3}$ شده است، یعنی $g(f(x)) = \frac{4}{3}$ است.

گام دوم

حالا با داشتن $f(x)$ و $g(x)$ می‌توانیم $g(f(x))$ را تعیین کرده و در نهایت مقدار x را محاسبه کنیم:

$$f(x) = 2x - 2, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{f(x)+1}} = \frac{2x-2}{\sqrt{2x-2+1}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3(2x-2) = 4\sqrt{2x-2+1}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2x-2}=t} 3t^2 = 4t + 4 \Rightarrow 3t^2 - 4t - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$(3t+2)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow \sqrt{2x-2}=2 \Rightarrow 2x-2=4 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3 \\ t=-\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{2x-2}=-\frac{2}{3} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین ورودی این ماشین $x=3$ به دست آمد.

گزینه ۴

۶

با جابه جا کردن مؤلفه های اول و دوم هر یک از زوج مرتب های تشکیل دهنده دو تابع f و g ، توابع f^{-1} و g^{-1} را به صورت مجموعه ای از زوج مرتب ها مشخص می‌کنیم، سپس تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا به سراغ تابع f^{-1} می‌رویم، سپس با خروجی هایی که به ما می‌دهد بررسی می‌کنیم که تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ تشکیل می‌شود یا خیر.

$$f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\} \Rightarrow f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (4, 3)\}$$

$$g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$$

$$D_{f^{-1}} = \{2, 3, 5, 4\}$$

$$x=2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(2)) = g^{-1}(1) = 2 \Rightarrow (2, 2) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x=3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 2 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(3)) = g^{-1}(2) = 3 \Rightarrow (3, 3) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x=5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 4 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(4) = 5 \Rightarrow (5, 5) \in g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$x=4 \Rightarrow f^{-1}(4) = 3 \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(4)) = g^{-1}(3) \rightarrow \text{تعریف نمی‌شود}$$

بنابراین تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ به صورت $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$ در می‌آید.



گزینه ۴

۷

در حل تست به نکات زیر توجه داشته باشید:

الف) در توابع شامل قدرمطلق ابتدا با توجه به ریشه های عبارت درون قدرمطلق، ضابطه تابع را به صورت ساده شده می نویسیم.

ب) تعیین می کنیم تابع در کدام بازه اکیداً نزولی است.

ج) برای تعیین ضابطه تابع معکوس، x را بر حسب y به دست آورده و در نهایت به جای x $f^{-1}(x)$ و به جای y ، x را جایگزین می کنیم. به این نکته توجه کنید که دامنه تابع معکوس برابر برد تابع اصلی است.

$$f(x) = |2x - 6| - |x + 4| + x = \begin{cases} x < -4 : -(2x - 6) + (x + 4) + x = 10 \\ -4 \leq x \leq 3 : -(2x - 6) - (x + 4) + x = -2x + 2 \\ x > 3 : (2x - 6) - (x + 4) + x = 2x - 10 \end{cases}$$

تابع در بازه $[-4, 3]$ اکیداً نزولی است. ضابطه تابع معکوس را به دست می آوریم:

$$y = -2x + 2 \Rightarrow y - 2 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}y + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

در ضابطه تابع اصلی وقتی $-4 \leq x \leq 3$ باشد، $-4 \leq y \leq 10$ است. پس دامنه تابع معکوس به صورت $[-4, 10]$ در می آید. پس گزینه ۴ درست است.

گزینه ۴

۸

اگر تابع $f(x)$ یک تابع اکیداً صعودی باشد، برای تعیین نقاط تلاقی نمودارهای f و f^{-1} یا همان جواب های معادله $f^{-1}(x) = f(x)$ کافی است جواب های معادله $f(x) = x$ را تعیین کنیم. (توجه کنید این نکته در مورد توابع اکیداً نزولی کاربرد ندارد.) تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ با دامنه $(-1, +\infty)$ یک تابع اکیداً صعودی روی دامنه تعریف شده است. بنابراین برای تعیین نقاط تلاقی f و f^{-1} معادله $f(x) = x$ را حل می کنیم.

$$f(x) = x \Rightarrow (x + 1)^2 = x \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 < 0 \rightarrow \text{این معادله فاقد ریشه است}$$

بنابراین نمودارهای دو تابع f و f^{-1} غیر متقاطع هستند.

گزینه ۲

۹

با مساوی قرار دادن معادله $y - 1 = \frac{1}{2}|x + 4| - 2$ با معادله مفروض داریم:

$$\begin{cases} y - 1 = \frac{1}{2}|x + 4| - 2 \\ y = \frac{1}{2}|x| - 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}|x + 4| - 1 = \frac{1}{2}|x| - 2 \Rightarrow |x + 4| - 2 = |x| - 4 \Rightarrow x = -3$$



گزینه ۴

۱۰

جمله اول دنباله حسابی مفروض را a_1 و قدر نسبت آن را d در نظر می‌گیریم. در این صورت، باتوجه به اینکه $a_n = a_1 + (n-1)d$ داریم $a_2 = a_1 + d$ و $a_5 = a_1 + 4d$ و $a_{12} = a_1 + 11d$

از طرفی می‌دانیم که اگر x, y و z به ترتیب جمله‌های متوالی یک دنباله هندسی باشند، آنگاه $y^2 = x \cdot z$ ؛ پس باتوجه به فرض سؤال داریم:

$$a_5^2 = a_2 \cdot a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d) \times (a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1d + 11d^2 \Rightarrow 5d^2 = 4a_1d \xrightarrow{d \neq 0} a_1 = \frac{5}{4}d (*)$$

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d & (*) \\ a_5 = a_1 + 4d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{5}{4}d + d = \frac{9}{4}d \\ a_5 = \frac{5}{4}d + 4d = \frac{21}{4}d \end{cases}$$

قدر نسبت دنباله هندسی، از تقسیم دو جمله متوالی آن به دست می‌آید، یعنی اگر قدر نسبت دنباله هندسی مورد نظر سؤال را q در نظر بگیریم، آنگاه:

$$q = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{21}{4}d}{\frac{9}{4}d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

گزینه ۴

۱۱

$$a_2, 2a_5, a_8 \rightarrow aq, 2aq^4, aq^7$$

تشکیل تصاعد

$$\rightarrow aq + aq^7 = 2(2aq^4) \Rightarrow q^7 - 4q^4 + q = 0$$

حسابی می‌دهند

$$q(q^6 - 4q^3 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 0 \\ q^6 - 4q^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{q^3 = t} t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow q^3 = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\frac{aq^7}{aq} = q^6 = (q^3)^2 = (2 + \sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

گزینه ۱

۱۲

گام اول

الف) اطلاعات سؤال را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19} = 135$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 150$$

ب) در عبارت‌های نوشته شده، سطر اول تشکیل یک دنباله عددی با جمله اول a_1 و قدرنسبت $2d$ می‌دهد. سطر دوم هم تشکیل یک دنباله عددی با جمله اول a_2 و قدرنسبت $2d$ می‌دهد که هر کدام ده جمله دارند.

گام دوم

مجموع ده جمله اول را برای هر کدام از دنباله‌ها به دست می‌آوریم:

$$a_1 \text{ جمله اول } 2d \text{ قدرنسبت } S = \frac{10}{2}(2a_1 + 9(2d)) = 5(2a_1 + 18d) = 135 \Rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

$$a_2 \text{ جمله اول } 2d \text{ قدرنسبت } S = \frac{10}{2}(2a_2 + 9(2d)) = 5(2a_2 + 18d) = 150 \Rightarrow 2a_2 + 18d = 30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_2 + 18d = 30 & (-) \\ 2a_1 + 18d = 27 \end{cases} \rightarrow 2(a_2 - a_1) = 3 \xrightarrow{a_2 - a_1 = d} 2d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$2a_1 + 18d = 27 \xrightarrow{d = \frac{3}{2}} 2a_1 + 18\left(\frac{3}{2}\right) = 27 \Rightarrow 2a_1 + 27 = 27 \Rightarrow a_1 = 0$$



گزینه ۳

۱۳

گام اول

اعداد طبیعی فرد بخش پذیر بر ۳ و کوچک تر از ۱۰۱ تشکیل یک دنباله عددی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۶ می دهند.

گام دوم

با توجه به رابطه:

$$\text{تعداد جملات} = \frac{\text{جمله اول} - \text{جمله آخر}}{\text{فاصله دو جمله}} + 1$$

ابتدا تعداد جملات را محاسبه و سپس مجموع جملات را حساب می کنیم:

جملات دنباله : ۳, ۹, ۱۵, ..., ۹۹

$$\text{تعداد جملات} = \frac{99-3}{6} + 1 = \frac{96}{6} + 1 = 16 + 1 = 17$$

$$S_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) = \frac{17}{2}(3 + 99) = \frac{17}{2} \times 102 = 17 \times 51 = 867$$

گزینه ۴

۱۴

گام اول

الف) اگر سه جمله متوالی از یک تصاعد هندسی را داشته باشیم، جمله وسط، واسطه هندسی دو جمله دیگر است و داریم:

$$(2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2)$$

ب) دنباله هندسی نزولی است اگر قدرنسبت آن عددی بین ۰ و ۱ باشد.

گام دوم

$$(2x)^2 = (x^2 + 4)(x^2 - 2) \Rightarrow 4x^2 = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

به ازای هر کدام از مقادیر $x = 2$ و $x = -2$ بررسی می کنیم دنباله هندسی نزولی تشکیل می شود یا خیر. داریم:

$x = 2 \rightarrow$ جملات دنباله : ۸, ۴, ۲, ...

دنباله هندسی نزولی با قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$

$x = -2 \rightarrow$ جملات دنباله : ۸, -۴, ۲, ...

دنباله نوسانی بوده و نزولی نیست.

حال مجموع هفت جمله اول یک تصاعد هندسی نزولی با جمله اول $a_1 = 8$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ را به دست می آوریم.

$$S_7 = \frac{a_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{8(1-(\frac{1}{2})^7)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8(\frac{127}{128})}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{8}$$



گزینه ۴

۱۵

در دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ محاسبه می شود. بنابراین نسبت $\frac{S_{14}}{S_7}$ برابر است با:

$$\frac{S_{14}}{S_7} = \frac{\frac{a_1(1-q^{14})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}} = \frac{1-q^{14}}{1-q^7} = \frac{(1-q^7)(1+q^7)}{1-q^7} = 1+q^7$$

قدرنسبت تصاعد را از رابطه $q = \frac{a_2}{a_1}$ تعیین کرده و سپس مقدار $\frac{S_{14}}{S_7}$ را محاسبه می کنیم:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{S_{14}}{S_7} = 1+q^7 \xrightarrow{q=2} \frac{S_{14}}{S_7} = 1+2^7 = 1+128 = 129$$

گزینه ۴

۱۶

گام اول

الف) ابتدا ضریب ثابت A را پیدا می کنیم. جمعیت اولیه شهر ۵۰۰۰۰ نفر است، پس $f(0) = 50000$ در نظر گرفته می شود.
ب) با تعیین مقدار A و با در نظر گرفتن $i = \frac{2}{100}$ معادله $f(t) = 60000$ را تشکیل داده و t را محاسبه می کنیم.

گام دوم

$$f(0) = Ae^0 = A \Rightarrow A = 50000$$

$$f(t) = Ae^{it} \Rightarrow f(t) = 50000e^{\frac{2}{100}t}$$

$$\Rightarrow 60000 = 50000e^{\frac{2}{100}t} \Rightarrow e^{\frac{2}{100}t} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$\ln e^{\frac{2}{100}t} = \ln 1.2 \Rightarrow \frac{2}{100}t = 0.18 \Rightarrow t = \frac{0.18 \times 100}{2} = 9$$

گزینه ۳

۱۷

گام اول

الف) فرض می کنیم $f(t) = f(0)e^{kt}$ باشد. $f(t)$ سرمایه سرمایه گذار بعد از t سال و $f(0)$ سرمایه اولیه اوست.
ب) بعد از ۱۲.۵ سال سرمایه گذاری، سرمایه اولیه e برابر شده است. یعنی $f(12/5) = ef(0)$ با حل این معادله نرخ سود مشارکت را به دست می آوریم. (نرخ سود مشارکت همان k است که باید به درصد بیان شود).

گام دوم

$$f(t) = f(0)e^{kt} \Rightarrow f(12/5) = f(0)e^{12/5 k} \xrightarrow{f(12/5)=ef(0)} ef(0) = e^{12/5 k} f(0)$$

$$\Rightarrow e = e^{12/5 k} \Rightarrow 12/5 k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{12/5} = \frac{1}{2.4} = \frac{2}{2.4} = \frac{1}{1.2} \xrightarrow{\times 100} k = \%8$$

بنابراین نرخ سود مشارکت ۸ درصد است.



گزینه ۳

۱۸

گام اول

دو تابع در نقطه A متقاطع هستند؛ بنابراین در این نقطه با یکدیگر برخورد می‌کنند. با مساوی قرار دادن ضابطه دو تابع نقطه برخورد را تعیین می‌کنیم.

گام دوم

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{2x} &= 3^x + \frac{1}{3} \Rightarrow \left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^{2x} = 3^x + \frac{1}{3} \\ \Rightarrow 3^{-x} &= 3^x + \frac{1}{3} \xrightarrow{3^{-x}=t} t = \frac{1}{t} + \frac{1}{3} \xrightarrow{\times t} t^2 = 1 + \frac{1}{3}t \\ \xrightarrow{\times 3} 3t^2 &= 3 + t \Rightarrow 3t^2 - t - 3 = 0 \\ \Delta &= (-1)^2 - 4(3)(-3) = 1 + 36 = 37 \\ \begin{cases} t_1 = \frac{1+10}{6} = \frac{11}{6} = 3 \Rightarrow 3^{-x} = 3 \Rightarrow x = -1 \\ t_2 = \frac{1-10}{6} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ غ.ق.ق} \\ x = -1 &\Rightarrow y = 3^{-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 3 \end{aligned}$$

بنابراین نقطه برخورد دو تابع نقطه A(-1, 3) است.

فاصله نقطه (-1, 3) از نقطه (-1, 1) برابر با 2 = 3 - 1 است.

گزینه ۱

۱۹

نکته: هر نقطه روی نیمساز ربع دوم و چهارم به صورت $(\alpha, -\alpha)$ است.

$$\begin{cases} y(-1) = 0 \\ y(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}^{(-a+b)} = 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}^{(a+b)} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b = 1 \\ a+b = 2 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

گزینه ۳

۲۰

$$\begin{aligned} \log_x^{(3x+8)} + \log_x^{(x-6)} &= 2 \Rightarrow \log_x^{(3x+8)(x-6)} = 2 \Rightarrow x^2 = 3x^2 - 10x - 48 \Rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0 \\ \Rightarrow (x-8)(x+3) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \Rightarrow \log_8^8 = \log_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \\ x = -3 \text{ غ.ق.ق} \end{cases} \end{aligned}$$



گزینه ۳

۲۱

دوره تناوب تابع برابر π و ماکزیم مقدار آن ۱.۵ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \quad (I)$$

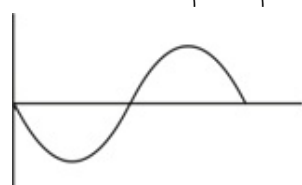
$$\text{ماکزیمم تابع} = 1 + |a| = 1.5 \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2} \quad (II)$$

از طرفی عرض نقطه تماس نمودار با محور y ها بزرگتر از یک است.

$$x = 0 : y = 1 + a \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 1 - \frac{a}{2} > 1 \Rightarrow \frac{a}{2} < 0 \Rightarrow a < 0 \xrightarrow{(II)} a = -\frac{1}{2}$$

باتوجه به اینکه ضریب \sin در تابع منفی است و باتوجه به شکل زیر، نتیجه می‌گیریم باید b (ضریب x) مثبت باشد (حالت اول)؛ یعنی $b = 2$ قابل قبول است.

$$a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

نمودار $y = -\sin x$ نمودار $y = -\sin(-x)$

گزینه ۱

۲۲

گام اول

با توجه به اینکه در صورت سؤال مقدار $\tan 15^\circ$ داده شده است، سعی می‌کنیم تمام زوایا را بر حسب زاویه 15° به دست آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} = \frac{\cos(270^\circ + 15^\circ) - \sin(270^\circ - 15^\circ)}{\sin(540^\circ - 15^\circ) - \sin(90^\circ + 15^\circ)} \\ &= \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} \end{aligned}$$

برای این که در کسر داده شده $\tan 15^\circ$ ایجاد شود، صورت و مخرج کسر را بر $\cos 15^\circ$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} \\ &= \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} = \frac{0.28 + 1}{0.28 - 1} = \frac{1.28}{-0.72} = -\frac{128}{72} = -\frac{16}{9} \end{aligned}$$



گزینه ۴

۲۳

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، عبارت‌های صورت و مخرج کسر را به ساده‌ترین شکل ممکن می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \theta\right) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(3\pi + \theta) = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} = \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \sin \theta}$$

باتوجه به اینکه مقدار $\tan \theta$ در صورت سؤال داده شده است، صورت و مخرج کسر را بر $\cos \theta$ تقسیم می‌کنیم تا کسر داده شده بر حسب $\tan \theta$ به دست آید.

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta + 1}{2 \tan \theta} = \frac{0/2 + 1}{2(0/2)} = \frac{1/2}{0/4} = 3$$

گزینه ۳

۲۴

گام اول

(الف)

(ب)

گام دوم

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

باتوجه به صورت سؤال و قسمت (الف) از گام اول، مقدار $\tan \alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan \alpha = 5(1 - \tan \alpha) \Rightarrow 1 + \tan \alpha = 5 - 5 \tan \alpha \Rightarrow 6 \tan \alpha = 4$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

اکنون باتوجه به قسمت (ب) از گام اول مقدار $\tan 2\alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2\left(\frac{2}{3}\right)}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{12}{5} = 2/4$$



گزینه ۳

۲۵

گام اول

الف) $\sin \alpha$ را داریم، با استفاده از رابطه $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ می توانیم $\cos \alpha$ را محاسبه کنیم.
 ب) زاویه ای منفرجه است پس در ناحیه دوم مثلثاتی قرار داشته و مقدار $\cos \alpha$ منفی است. در محاسبه $\cos \alpha$ از روی $\sin \alpha$ به این نکته توجه داشته باشید.
 ج) با داشتن $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ مقدار $\tan \alpha$ را محاسبه کرده و در نهایت $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ را به دست می آوریم.

گام دوم

ابتدا $\cos \alpha$ و به دنبال آن $\tan \alpha$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 &\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} &\xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{4}{5} \\ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

حالا حاصل $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ را محاسبه می کنیم:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7}$$

گزینه ۲

۲۶

گام اول

اگر $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ باشد، می توان نتیجه گرفت $\alpha = \beta + \frac{\pi}{4}$ است. با معلوم بودن مقدار $\tan \beta$ حاصل $\tan \alpha$ را به دست می آوریم.

گام دوم

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan \alpha = \tan\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\tan \beta + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \beta \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

پس حاصل $\sin^2 \alpha$ برابر است با:

$$\sin^2 \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 3}{1 + (3)^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

گزینه ۳

۲۷

ظاهر سؤال ممکن است کمی سخت به نظر برسد، ولی با انجام تغییرات زیر حل آن بسیار ساده می شود:

$$\begin{aligned} \sin(\pi + x) &= -\sin x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \quad \sin(\pi - x) = \sin x \\ \sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 &= 0 \\ \Rightarrow (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 &= 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \\ \Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 &\Rightarrow \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



گزینه ۴

۲۸

گام اول

الف) با استفاده از اتحاد مزدوج سمت چپ معادله مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x$$

ب) با دانستن رابطه $\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ و $\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ معادله را حل کرده و جواب کلی آن را به دست می آوریم.

گام دوم

$$\begin{aligned} \sin^2 x - \cos^2 x &= -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos 2x \\ \sin^6 x - \cos^6 x = -\cos 2x &= \sin^2 \frac{5\pi}{4} \xrightarrow{\sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}} -\cos 2x = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} &\Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

گزینه ۲

۲۹

برای حل سؤال به دو رابطه زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) &= -\cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin^2 x - \cos^2 x &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \Rightarrow -\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos x \\ \Rightarrow 2x &= 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

جواب کلی که هر دو جواب $x = 2k\pi$ و $x = \frac{2k\pi}{3}$ را شامل شود به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}$ است.

گزینه ۲

۳۰

از فرمول های کمان $(\alpha + \beta)$ می دانیم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

معادله مثلثاتی را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} \sin 2x(\sin x + \cos x) &= \cos 2x(\cos x - \sin x) \\ \Rightarrow \sin 2x \sin x + \sin 2x \cos x &= \cos 2x \cos x - \cos 2x \sin x \\ \Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \end{aligned}$$

با توجه به فرمول های کمان $(\alpha + \beta)$ داریم:

$$\sin(2x + x) = \cos(2x + x) \Rightarrow \sin 3x = \cos 3x \xrightarrow{\div \cos 3x \neq 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 1 \Rightarrow \tan 3x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \tan \frac{\pi}{4}$$

جواب معادله مثلثاتی $\tan x = \tan \alpha$ از رابطه $x = k\pi + \alpha$ به دست می آید.

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

جواب های معادله در بازه $[0, \pi]$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} k = 0 &\Rightarrow x = \frac{\pi}{12}, \quad k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}, \quad k = 2 \Rightarrow x = \frac{9\pi}{12} \\ \text{مجموع جواب ها} &= \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$



گزینه ۱

۳۱

به فرمول های 2α توجه کنید:

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x &= 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 + 2 \sin x \cos x = 0 \\ \Rightarrow \cos 2x + \sin 2x &= 0 \Rightarrow \sin 2x = -\cos 2x \xrightarrow{\div \cos 2x} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{\cos 2x}{\cos 2x} \\ \Rightarrow \tan 2x &= -1 \Rightarrow \tan 2x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

گزینه ۴

۳۲

نکته: $\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1 \xrightarrow{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 1$$

$$\Rightarrow \sin 3x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

چون $\sin x \neq 0$ بنابراین جواب $x = k\pi$ غیر قابل قبول است.

گزینه ۱

۳۳

گام اول

الف) ماتریس A وارون پذیر است هرگاه $|A| \neq 0$ باشد.

ب) دترمینان ماتریس مربعی $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

برابر است با:

$$|A| = ad - bc$$

گام دوم

برای اینکه ماتریس $A + 2B$ وارون پذیر نباشد باید مقداری از a را تعیین کنیم که به ازای آن دترمینان ماتریس برابر صفر می شود.

$$A + 2B = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس $A + 2B$ را برابر صفر قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} |A + 2B| = 0 &\Rightarrow (a-2)(a+4) - 27 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a - 8 - 27 = 0 \\ &\Rightarrow a^2 + 2a - 35 = 0 \Rightarrow (a+7)(a-5) = 0 \Rightarrow a = -7, a = 5 \end{aligned}$$

گزینه ۴

۳۴

$$A - B = \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - B)^{-1} = \frac{1}{(2)(2) - (-2)(3)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/2 & 0/2 \\ -0/3 & 0/2 \end{bmatrix}$$



گزینه ۱

۳۵

مطابق عبارت زیر، طرفین معادله $AB = 2I$ را در ماتریس A^{-1} ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1} \times AB = A^{-1} \times 2I \Rightarrow \underbrace{(A^{-1} \times A)}_I B = 2A^{-1} \Rightarrow B = 2A^{-1}$$

حال ماتریس A^{-1} را پیدا می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2-4} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = 2 \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

گزینه ۲

۳۶

وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ برابر است با $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -10 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (B \times A)^{-1} = \left(\frac{1}{-10-0} \right) \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌ی سطر اول و ستون اول وارون ماتریس $B \times A$ $\frac{-1}{10}$ است.

گزینه ۲

۳۷

میانگین داده‌های نمودار برابر است با:

$$\text{مجموع داده‌ها} = 3 \times 80 + 4 \times 90 + 5 \times 100 + (1 + 5 + 2 + 4 + 6 + 7 + 3 + 4 + 8) = 1140$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1140}{12} = 95$$

$$\bar{y} = 3 \times 95 - 40 = 245$$

میانگین داده‌های جدید برابر است با:

گزینه ۴

۳۸

جدول فراوانی متناظر با داده‌های مفروض به صورت زیر است:

x_i	۳۳	۳۷	۴۱	۴۵	۴۹
f_i	۷	۱۰	۱۵	۱۲	$a - 44$

میانگین جامعه برابر ۴۱ است، پس داریم:

$$41 = \frac{7 \times 33 + 10 \times 37 + 15 \times 41 + 12 \times 45 + (a - 44) \times 49}{a}$$

$$\Rightarrow 1756 + 49a - 2156 = 41a \Rightarrow 8a = 400 \Rightarrow a = 50$$

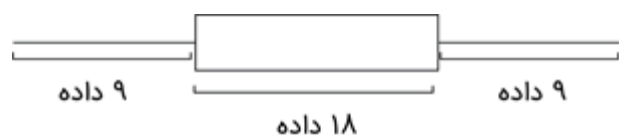
می‌دانیم زاویه متناظر با داده x_i در نمودار دایره‌ای برابر است با حاصل ضرب فراوانی نسبی آن دسته در 360° ، پس زاویه مربوط به دسته $(39, 43)$ برابر است با:

$$\frac{15}{50} \times 360^\circ = 108^\circ$$



گزینه ۳

۳۹



در هریک از دو طرف جعبه، $\frac{1}{3}$ داده‌ها یعنی ۹ داده قرار دارد و نصف داده‌ها یعنی ۱۸ داده درون جعبه قرار دارد. اگر میانگین داده‌های درون جعبه را m در نظر بگیریم، داریم:

$$\Rightarrow 990 = 9 \times 22 + 18m + 9 \times 30$$

$$990 = 468 + 18m \Rightarrow 18m = 522 \Rightarrow m = 29$$

گزینه ۳

۴۰

$$\text{میانگین داده‌ها: } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{72}{12} = 6$$

$$\text{واریانس داده‌ها: } \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{480}{12} - 36 = 4$$

$$\Rightarrow \text{ضریب تغییرات داده‌ها: } CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۴

۴۱

چون واریانس برابر صفر است نتیجه می‌گیریم تمام داده‌ها باهم برابرند و چون با افزودن ۲۴ و ۱۶ و ۲۶ میانگین تغییر نمی‌کند میانگین این ۳ عدد برابر یازده داده قبلی است.

$$\bar{x} = \frac{24+16+26}{3} = 22$$

بنابراین باید انحراف معیار داده‌های زیر را حساب کنیم:

$$22, \dots, 22, 16, 24, 26, \bar{x} = 22$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(22-16)^2 + (24-22)^2 + (26-22)^2}{14}} = 2$$

گزینه ۴

۴۲

$$\text{میانگین داده‌ها با حذف داده‌های ناچور: } \bar{x} = \frac{25 \times 30 - (50 + 45 + 15 + 10)}{25 - 4} = \frac{750 - 120}{21} = \frac{630}{21} = 30$$

با حذف داده‌ها، میانگین تغییری نکرد، بنابراین برای محاسبه واریانس داده‌های باقی‌مانده، کافی است جملات مربوط به داده‌های ناچور را از واریانس حذف کنیم:

$$\sigma^2 = (8)^2 = 64 \Rightarrow (\sigma')^2 = \frac{64 \times 25 - [(10 - 30)^2 + (15 - 30)^2 + (45 - 30)^2 + (50 - 30)^2]}{25 - 4}$$

$$= \frac{1600 - 1250}{21} = \frac{350}{21} = 16\frac{2}{3}$$



گزینه ۱

۴۳

گام اول

اگر n داده x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، ضریب تغییرات این داده‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

که \bar{x} میانگین داده‌هاست و داریم:

و σ انحراف معیار داده‌هاست و داریم:

گام دوم

با دو روش می‌توان ضریب تغییرات u_i ها را محاسبه کرد.
روش اول:

$$u_i = 12x_i + 6 \Rightarrow u_i = 18, 30, 42, 54, 66$$

$$\bar{x} = \frac{18+30+42+54+66}{5} = \frac{210}{5} = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(18-42)^2 + (30-42)^2 + (42-42)^2 + (54-42)^2 + (66-42)^2}{5} = \frac{576+144+0+144+576}{5} = 288$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

$$CV = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2\sqrt{2}}{7} \approx \frac{2 \times 1.4}{7} = 0.4$$

بنابراین ضریب تغییرات u_i ها برابر است با:

روش دوم:

نکته ۱: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه میانگین داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه میانگین داده‌ها نیز با آن عدد ثابت جمع می‌شود.

نکته ۲: اگر تمام داده‌ها را در یک عدد ثابت ضرب کنیم آنگاه انحراف معیار داده‌ها نیز در آن عدد ثابت ضرب می‌شود و اگر تمام داده‌ها با یک عدد ثابت جمع شود آنگاه انحراف معیار داده‌ها تغییری نمی‌کند.

ابتدا با استفاده از روابط گام اول، میانگین و انحراف معیار x_i ها را به دست می‌آوریم، سپس با توجه به دو نکته بالا، میانگین و انحراف معیار u_i ها و در آخر ضریب تغییرات آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$x_i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = 12\bar{x} + 6 = 12(3) + 6 = 42$$

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = 12\sigma = 12(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$CV_{\text{جدید}} = \frac{\sigma_{\text{جدید}}}{\bar{x}_{\text{جدید}}} = \frac{12\sqrt{2}}{42} \approx \frac{2 \times 1.4}{7} = 0.4$$



گزینه ۴

۴۴

گام اول

اگر کل داده‌ها در n دسته قرار داشته باشند به طوری که x_i مرکز دسته i ام و f_i فراوانی این دسته باشد، آنگاه میانگین (\bar{x}) و واریانس (σ^2) کل داده‌ها از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

$$\sigma^2 = \frac{f_1 (x_1 - \bar{x})^2 + f_2 (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + f_n (x_n - \bar{x})^2}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

گام دوم

با توجه به نمودار چندبر فراوانی داده‌شده، ابتدا جدول فراوانی مربوط به داده‌ها را رسم می‌کنیم:

x_i	۳	۵	۷	۹	۱۱
f_i	۲	۷	۸	۵	۳

با استفاده از روابط گام اول، میانگین و سپس واریانس داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{2(3) + 7(5) + 8(7) + 5(9) + 3(11)}{2 + 7 + 8 + 5 + 3} = \frac{175}{25} = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{2(3-7)^2 + 7(5-7)^2 + 8(7-7)^2 + 5(9-7)^2 + 3(11-7)^2}{2 + 7 + 8 + 5 + 3} = \frac{512}{25}$$

گزینه ۴

۴۵

$$0/1 + 0/25 + 0/2 + \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0/45$$

$$\bar{x} = 8 \times 0/1 + 12 \times 0/25 + 16 \times 0/2 + 20 \times 0/45 = 16$$

$$\sigma^2 = 0/1 \times (8-16)^2 + 0/25(12-16)^2$$

$$+ 0/2(16-16)^2 + 0/45(20-16)^2 = 17/6$$

گزینه ۳

۴۶

گام اول

الف) چون در صورت تست گفته شده رقم‌های فرد کنار هم باشند، پس ارقام ۵ و ۳ و ۱ را کنار هم قرار داده و آن‌ها را در یک بسته در نظر می‌گیریم.
 ب) ارقام ۵ و ۳ و ۱ می‌توانند به حالت‌های مختلف کنار هم قرار بگیرند پس تعداد جای‌گشت‌های این سه رقم هم محاسبه می‌شود (۳! حالت داریم).
 ج) سه رقم ۵ و ۳ و ۱ را در کنار هم به عنوان یک عدد جدید فرض می‌کنیم. باید تعداد حالت‌های قرارگیری این عدد جدید در کنار دو رقم ۲ و ۴ را هم حساب کنیم (۳! حالت داریم).

گام دوم

تعداد کل حالت‌های قرارگیری این ۵ عدد با شرط گفته شده برابر است با:

$$\text{تعداد کل حالت ها} = \underbrace{3!}_{\text{جابجایی بسته ارقام با ۲ و ۴}} \times \underbrace{3!}_{\text{جابجایی ارقام ۵، ۳ و ۱}} = 6 \times 6 = 36$$



گزینه ۳

۴۷

گام اول

الف) در این کلمه دو حرف یکسان **A** و دو حرف یکسان **G** مشاهده می‌شود. این حروف یکسان باید کنار هم باشند.
 ب) با قرار دادن حروف یکسان در کنار هم ۶ حرف متمایز داریم. تعداد حالت‌های قرارگیری این ۶ حرف را در کنار هم حساب می‌کنیم.
 ج) دقت کنید دو حرف یکسان در کنار هم فقط به یک حالت می‌توانند قرار بگیرند و دیگر بین آن‌ها جایجایی نخواهیم داشت.

گام دوم

حروف ما به این صورت در می‌آیند :

LAA GGRNEتعداد حالت‌ها $= 6! = 720$

گزینه ۱

۴۸

در حل تست به دو نکته زیر توجه کنید.

الف) $P(n, r)$ یعنی تبدیل r شیء از میان n شیء که از رابطه $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ محاسبه می‌شود.ب) $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ یعنی ترکیب r شیء از بین n شیء که از رابطه $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ به دست می‌آید. $P(n, 4)$ و $C(n-1, 4)$ را جایگذاری کرده و مقدار n را به دست می‌آوریم:

$$\frac{P(n, 4)}{C(n-1, 4)} = \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-1-4)! \times 4!}} = \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-5)! \times 4!}} = \frac{n! \times (n-5)! \times 4!}{(n-4)! \times (n-1)!} = \frac{n \times (n-1)! \times (n-5)! \times 24}{(n-4) \times (n-5)! \times (n-1)!} = 26$$

$$\Rightarrow \frac{24n}{n-4} = 26 \Rightarrow 24n = 26n - 104 \Rightarrow 2n = 104 \Rightarrow n = 52$$

گزینه ۲

۴۹

گام اول

زیرمجموعه سه عضوی موردنظر باید شامل عضو **a** باشد. بنابراین تکلیف یک عضو از این سه عضو مشخص است. دو عضو باقی مانده را باید از بین ۵ عضو دیگر مجموعه انتخاب کنیم.

گام دوم

باتوجه به این که تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه n عضوی از رابطه $\binom{n}{r}$ مجاسبه می‌شود، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی با شرط حضور

عضو **a** برابر است با:

$$\binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$



گزینه ۲

۵۰

گام اول

سه رقم ۲ و سه رقم غیر ۲ داریم (۶ و ۷ و ۵). اگر قرار باشد این ارقام به صورت یک‌درمیان کنار هم قرار بگیرند، دو حالت وجود دارد:
حالت اول این است که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ شروع شود و حالت دوم این‌که عدد شش رقمی ما با رقم ۲ تمام شود. در هرکدام از حالت‌ها سه رقم باقی مانده
یعنی ۶ و ۷ و ۵ می‌توانند به ۳! حالت در جاهای خالی قرار گیرند.

گام دوم

حالت اول : $2 \circ 2 \circ 2 \circ$ تعداد حالت‌ها : $3 \times 2 \times 1 = 6$ و ۶ و ۷ در سه دایره باقی مانده ۵حالت دوم : $\circ 2 \circ 2 \circ 2$ تعداد حالت‌ها : $3 \times 2 \times 1 = 6$ و ۶ و ۷ در سه دایره باقی مانده ۵

پس در مجموع ۱۲ عدد داریم که در آن ارقام ۲ به صورت یک‌درمیان قرار گرفته باشند.

گزینه ۳

۵۱

گام اول

الف) تعداد کل حالت‌ها $(n(S))$ در پرتاب دو تاس برابر ۳۶ است.
ب) مجموع اعداد ظاهر شده در پرتاب دو تاس عددی بین ۲ و ۱۲ خواهد بود. بنابراین پیشامد مورد نظر شامل حالت‌هایی می‌شود که جمع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ است.
ج) احتمال پیشامد A را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

حالت‌هایی که مجموع دو تاس برابر ۴، ۸ یا ۱۲ شود را مشخص می‌کنیم:

مجموع دو تاس برابر ۴ : $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ مجموع دو تاس برابر ۸ : $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ مجموع دو تاس برابر ۱۲ : $(6, 6)$ بنابراین $n(A) = 9$ و $n(S) = 36$ داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$



گزینه ۲

۵۲

گام اول

الف) به واژه حداقل در صورت تست دقت کنید. حداقل دو نفر از ۴ نفر ماه تولد یکسان داشته باشند یعنی یا دو نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند، یا سه نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند و یا چهار نفر.

ب) اگر پیشامد A چنین تعریف شود که حداقل دو نفر از میان ۴ نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند آن گاه پیشامد متمم (A') یعنی هیچ دو نفری از میان ۴ نفر ماه تولدشان یکسان نباشد و همگی در ماههای متفاوت به دنیا آمده باشند.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

گام دوم

$$P(A') = P(\text{هیچ دو نفری متولد یک ماه نباشند}) = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} = \frac{55}{96}$$

$$P(A) = P(\text{حداقل دو نفر در یک ماه به دنیا آمده باشند}) = 1 - P(A') = 1 - \frac{55}{96} = \frac{41}{96}$$

گزینه ۳

۵۳

گام اول

الف) اگر قرار باشد حداقل یکی از سکه‌ها رو بیاید، می‌تواند یک سکه رو و دیگری پشت بیاید و یا اینکه هر دو رو بیایند.

ب) اگر قرار باشد عدد تاس مضرب ۳ باشد، عدد رو شده ۳ یا ۶ است.

ج) اگر A پیشامد مطلوب خواسته شده باشد احتمال افتادنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم

تعداد کل حالت‌ها در پرتاب دو سکه و یک تاس برابر است با:

$$n(S) = 2 \times 2 \times 6 = 24$$

حالت‌های مطلوب به صورت زیر است:

$$A = \{(3, 3, 3), (3, 3, 6), (3, 6, 3), (6, 3, 3), (3, 6, 6), (6, 3, 6)\}$$

$$n(A) = 6$$

احتمال مورد نظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$



گزینه ۳

۵۴

گام اول

الف) چون در صورت تست گفته شده لااقل بر روی یکی از دو موش انتخاب شده آزمایش صورت گرفته باشد، یعنی یا یکی از موش‌ها یا هر دوی آن‌ها مورد آزمایش قرار بگیرند.
ب) اگر پیشامد A را مورد آزمایش واقع شدن لااقل یکی از موش‌ها تعریف کنیم، A' یعنی هیچ موشی آزمایش نشده باشد.

گام دوم

روش اول:

$$n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{42}{2} = 21$$

$$n(A) = (\text{هر دو موش آزمایش شده باشند}) + (\text{یکی از موش‌ها آزمایش شده باشد}) = \binom{3}{1} \binom{4}{1} + \binom{3}{2}$$

$$= 12 + 3 = 15$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

روش دوم: حل تست با استفاده از احتمال پیشامد متمم

$$P(A') = P(\text{هیچ موشی آزمایش نشده باشد}) = \frac{n(A')}{n(S)}$$

$$= \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

گزینه ۲

۵۵

گام اول

با این شرط که می‌دانیم یکی از فرزندان خانواده سه فرزندی پسر است، فضای نمونه‌ای جدید را تعریف کرده و پیشامد مطلوب را از میان آن مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, د), (پ, د, پ), (پ, د, د), (د, پ, پ), (د, پ, د), (د, د, پ), (د, د, د)\}$$

در واقع حالتی که تمام فرزندان دختر باشد، حذف شده است. پس در حالت جدید داریم:

$$n(S) = 7$$

پیشامد A که داشتن دو دختر از میان سه فرزند را بیان می‌کند، ۳ عضو دارد.

$$A = \{(پ, د, د), (د, پ, د), (د, د, پ)\}$$

$$n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{7}$$



گزینه ۱

۵۶

گام اول

الف) احتمال انتخاب هر یک از جعبه‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.

ب) احتمال سفید بودن دو مهره خارج شده از هر یک از جعبه‌ها را تعیین کرده و با استفاده از نمودار درختی احتمال کل را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم



$$P(\text{هر دو مهره سفید}) = P(\text{جعبه اول و سفید}) + P(\text{جعبه دوم و سفید})$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{21}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{36}\right) = \frac{31}{168}$$

گزینه ۳

۵۷

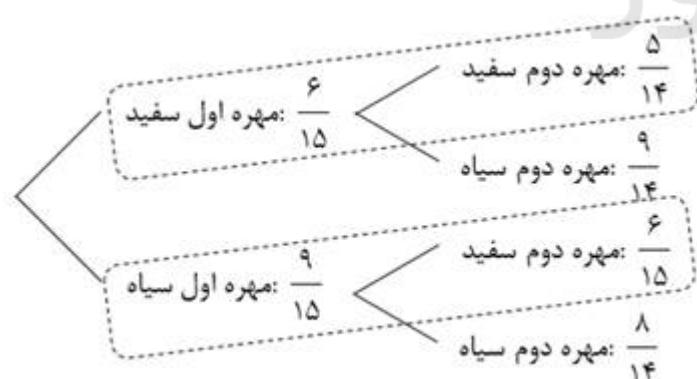
گام اول

الف) مهره اول خارج شده می‌تواند سفید یا سیاه باشد. احتمال سفید بودن مهره دوم بر اساس حالت مهره اول قابل محاسبه است.

ب) از نگاهی دیگر، چون رنگ مهره اول را نمی‌دانیم فرض می‌کنیم هنوز مهره‌ای خارج نشده و احتمال سفید بودن مهره دوم را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

روش اول:



بنابراین داریم:

$$P(\text{دو مهره سفید}) = \left(\frac{6}{15} \times \frac{5}{14}\right) + \left(\frac{9}{15} \times \frac{6}{14}\right) = \frac{30+54}{210} = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}$$

روش دوم:

بدون توجه به رنگ مهره اول و با فرض این‌که هنوز مهره‌ای خارج نشده، احتمال سفید بودن رنگ مهره دوم برابر $\frac{2}{5}$ است.



گزینه ۱

۵۸

گام اول

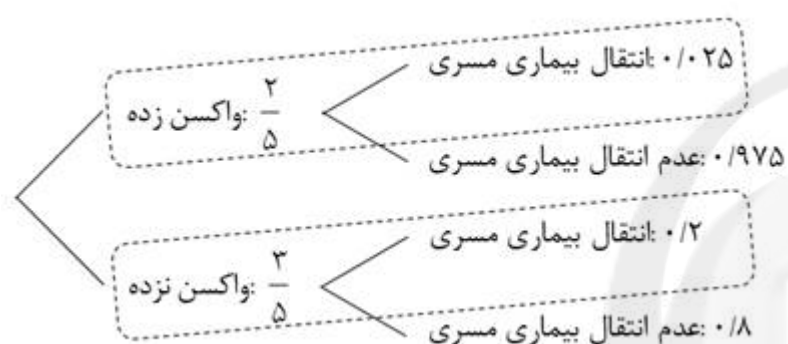
الف) هر یک از کارگران کارگاه می‌توانند واکسن زده باشند یا واکسن نزنند. احتمال این که کارگری واکسن زده باشد $\frac{2}{5}$ و احتمال این که واکسن نزنده باشد $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ است.

ب) هر فرد واکسن زده با احتمال $\frac{2}{5}$ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $0.975 = 1 - 0.025$ بیمار نمی‌شود.

ج) هر فردی که واکسن نزنده باشد با احتمال $\frac{3}{5}$ بیماری مسری را می‌گیرد و با احتمال $0.8 = 1 - 0.2$ بیمار نمی‌شود.

گام دوم

با استفاده از نمودار درختی احتمال این که یک کارگر به بیماری مسری مبتلا شود را محاسبه می‌کنیم.



$$P(\text{انتقال بیماری به کارگر}) = P(\text{انتقال به واکسن زده}) + P(\text{انتقال به واکسن نزنده}) = \left(\frac{2}{5} \times 0.025\right) + \left(\frac{3}{5} \times 0.2\right) = 0.01 + 0.12 = 0.13$$

گزینه ۴

۵۹

گام اول

الف) هر بذر با احتمال $\frac{8}{10}$ جوانه می‌زند و با احتمال $\frac{2}{10}$ جوانه نمی‌زند.
ب) چون گفته شده لااقل دو بذر از سه بذر کاشته شده جوانه بزنند پس باید احتمال جوانه زدن دو بذر از سه بذر یا سه بذر از سه بذر موجود محاسبه شود.

گام دوم

می‌توان مسئله را با استفاده از توزیع احتمالی دو جمله‌ای، با تعریف جوانه زدن به عنوان پیروزی حل کرد.

الف) احتمال جوانه زدن دو بذر از سه بذر: $p = 0.8, q = 0.2, n = 3, x = 2$

$$P_1 = P(x = 2) = \binom{3}{2} (0.8)^2 (0.2)^1 = 3 \times 0.64 \times 0.2 = 0.384$$

ب) احتمال جوانه زدن سه بذر از سه بذر: $p = 0.8, q = 0.2, n = 3, x = 3$

$$P_2 = P(x = 3) = \binom{3}{3} (0.8)^3 (0.2)^0 = 1 \times 0.512 \times 1 = 0.512$$

$$P(\text{جوانه زدن لااقل دو بذر از سه بذر}) = P_1 + P_2 = 0.384 + 0.512 = 0.896$$



گزینه ۳

۶۰

گام اول

الف) هر فرزند یا دارای ژن غالب B است یا ژن مغلوب b . بنابراین $P(b) + P(B) = 1$ از طرفی $P(B) = 3P(b)$ یعنی احتمال این که فرزند ژن غالب داشته باشد سه برابر احتمال این است که ژن مغلوب را داشته باشد.

ب) می توان با استفاده از توزیع دو جمله ای و تعریف داشتن ژن مغلوب به عنوان پیروزی، $P(k=1)$ را محاسبه کرد.

گام دوم

ابتدا از دو معادله $P(B) = 3P(b)$ و $P(b) + P(B) = 1$ مقدار $P(b)$ و $P(B)$ را حساب می کنیم.

$$P(B) + P(b) = 1 \Rightarrow 3P(b) + P(b) = 1 \Rightarrow 4P(b) = 1 \Rightarrow P(b) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = 3P(b) = 3 \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

حالا با استفاده از توزیع دو جمله ای داریم:

$$p = \frac{1}{4}, q = \frac{3}{4}, n = 3, k = 1$$

$$P(k=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{4} \right)^1 \left(\frac{3}{4} \right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{9}{16} = \frac{27}{64}$$

گزینه ۳

۶۱

گام اول

در آزمایشگاه $10 = 6 + 4$ موش وجود دارد که از بین آن ها فقط ۲ موش خارج می شود. پس X می تواند سه مقدار $X=0$ و $X=1$ و $X=2$ داشته باشد. هدف پیدا کردن بیشترین مقدار $P(X)$ به ازای مقدارهای مختلف X است.

گام دوم

$P(X=0)$ و $P(X=1)$ و $P(X=2)$ را محاسبه می کنیم. تعداد کل حالت هایی که می توان ۲ موش را از میان ۱۰ موش انتخاب کرد چنین به دست می آید:

$$n(S) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{2}}{45} = \frac{1 \times 15}{45} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{1}}{45} = \frac{4 \times 6}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{0}}{45} = \frac{6 \times 1}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

با توجه به مقادیر محاسبه شده، بیشترین مقدار توزیع به ازای $X=1$ به دست آمد. بنابراین $\frac{8}{15}$ پاسخ تست است.



گزینه ۱

۶۲

گام اول

الف) اگر α و β ریشه های معادله درجه دو داده شده، باشد می دانیم $\alpha + \beta = 6$ است. $\alpha + \beta$ برابر است با:

$$\alpha + \beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = 6$$

ب) در صورتی که $\Delta > 0$ باشد معادله درجه دو، دو ریشه حقیقی دارد و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله فاقد ریشه است.

گام دوم

$$mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{m+3}{m} \\ P = \alpha\beta = \frac{5}{m} \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \xrightarrow{\times m^2}$$

$$m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \Rightarrow (5m+9)(m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0 \rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی} \\ m = -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{9}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \rightarrow \text{دارای دو ریشه حقیقی} \end{cases}$$

پس فقط به ازای $m = -\frac{9}{5}$ معادله دو ریشه حقیقی دارد.

گزینه ۱

۶۳

گام اول

الف) اگر ریشه های معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ را α و β فرض کنیم، آنگاه ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ ، برابر با $\frac{2}{\alpha}$ و $\frac{2}{\beta}$ است.

ب) $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ تعیین کرده و با استفاده از آن مقدار a را در معادله دوم مشخص می کنیم.

گام دوم

فرض کردیم α و β ریشه های معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشند. داریم:

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{7}{4} \\ \alpha\beta = \frac{3}{4} \end{cases} \quad (I)$$

برای تعیین مقدار a باید حاصل جمع ریشه های معادله دوم را به دست آوریم:

$$3x^2 + ax + b = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها } \frac{2}{\alpha} \text{ و } \frac{2}{\beta}} \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = -\frac{a}{3} \Rightarrow \frac{2\alpha + 2\beta}{\alpha\beta} = -\frac{a}{3} \Rightarrow \frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = -\frac{a}{3}$$

$$\xrightarrow{(I)} \frac{2\left(\frac{7}{4}\right)}{\frac{3}{4}} = -\frac{a}{3} \Rightarrow \frac{14}{3} = -\frac{a}{3} \Rightarrow a = -14$$



گزینه ۳

۶۴

اول عبارت $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ را ساده می کنیم تا مشخص شود برای حل تست به چه اطلاعاتی نیاز داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$\alpha\beta$ حاصل ضرب ریشه های معادله است و به راحتی محاسبه می شود. برای به دست آوردن $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow A = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$4x^2 - 12x + 1 = 0 \xrightarrow[\text{معادله}]{\text{ریشه های } \alpha \text{ و } \beta} \begin{cases} \alpha + \beta = -(-\frac{12}{4}) = 3 \\ \alpha\beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

پس حاصل $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ برابر است با:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

گزینه ۱

۶۵

گام اول

الف) نمودار تابع محور x ها را در دو نقطه قطع می کند. معادله $f(x) = 0$ دارای دو ریشه بوده و $\Delta > 0$ است.
ب) هر دو ریشه معادله منفی است، بنابراین حاصل جمع ریشه ها منفی و حاصل ضرب ریشه ها مثبت در نظر گرفته می شود.
ج) مجموعه مقادیر قابل قبول برای a اشتراک بین سه مجموعه جواب به دست آمده است.

گام دوم

$$f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$$

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4(a)(-1) > 0 \Rightarrow (a+3)^2 + 4a > 0 \Rightarrow a^2 + 6a + 9 + 4a > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$$

$$\Rightarrow (a+9)(a+1) > 0 \Rightarrow a < -9 \text{ یا } a > -1 \quad (I)$$

$$2) S = x_1 + x_2 = -\frac{a+3}{a} < 0 \Rightarrow \frac{a+3}{a} > 0 \Rightarrow a < -3 \text{ یا } a > 0 \quad (II)$$

$$3) P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0 \quad (III)$$

مجموعه مقادیر قابل قبول برای a عبارت است از:

$$(I) \cap (II) \cap (III) : a < -9$$



گزینه ۲

۶۶

وقتی $x \rightarrow 2$ صورت کسر برابر صفر می‌شود؛ اما حاصل حد وقتی $x \rightarrow 2$ مخالف صفر است بنابراین باید به ازای $x = 2$ مخرج کسر هم برابر صفر شود؛ یعنی:

$$ax + b = 0 \xrightarrow{x=2} 2a + b = 0 \quad (I)$$

اکنون حاصل حد $\frac{0}{0}$ و مبهم است. با استفاده از قاعده هوییتال رفع ابهام کرده و مقادیر a و b را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{2 \times 2}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

با استفاده از رابطه (I) مقدار b برابر است با:

$$2 \left(\frac{1}{2} \right) + b = 0 \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$$

گزینه ۱

۶۷

گام اول

$$\text{می‌دانیم: } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ و } \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

گام دوم

وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ حاصل حد به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌شود. با توجه به گام اول، کسر را تا حد امکان ساده کرده و حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x}}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2})} = -1$$



گزینه ۴

۶۸

گام اول

صورت و مخرج کسر یک عبارت چندجمله‌ای است پس حاصل حد آن در بی‌نهایت از تقسیم بزرگ‌ترین جمله صورت بر بزرگ‌ترین جمله مخرج به دست می‌آید. ازطرفی چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت یک عدد ثابت شده است پس بزرگ‌ترین درجه صورت و بزرگ‌ترین درجه مخرج کسر باهم برابر است.

گام دوم

طبق گام اول داریم: $n = 2$

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{3x^2} = \frac{a}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2$$

اکنون با مشخص شدن مقدار a حاصل $f(-1)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} \Rightarrow f(-1) = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 1}{3(-1)^2 - 1} = \frac{2 + 3 + 1}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

گزینه ۲

۶۹

گام اول

الف) در تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ برابر $\frac{1}{4}$ است. چون حاصل حد وقتی $x \rightarrow +\infty$ یک عدد شده است، پس بزرگ‌ترین درجه صورت کسر با بزرگ‌ترین درجه مخرج کسر باید برابر باشد. بزرگ‌ترین درجه x در صورت کسر ۱ است، پس $n = 1$ است.

ب) حاصل حد را وقتی که $x \rightarrow +\infty$ با استفاده از هم‌ارزی $\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{a}x + \frac{b}{2a}$ تعیین کرده و مقدار a را محاسبه می‌کنیم.

گام دوم

$$n = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{1|x + (\frac{-3}{x})|}}{ax - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + x - \frac{3}{2}}{ax - 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \frac{3}{2}}{ax - 6} = \frac{3}{a} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} = \frac{0}{0}$$

برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} \times \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{2x - \sqrt{x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - x^2 + 3x}{-6(x+1)(2x - \sqrt{x^2 - 3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x(x+1)}{-6(x+1)(2x - \sqrt{x^2 - 3x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x}{-6(2x - \sqrt{x^2 - 3x})}$$

$$= \frac{-3}{-6(-2-2)} = \frac{-3}{(-6)(-4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

سایت کنکور



گزینه ۲

۷۰

می‌دانیم: $[۲^-] = ۱$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2(1)}{2-x} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x(x-2)} + \frac{2}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-2x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۲

۷۱

با استفاده از اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2 - \sqrt[3]{x+6})(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})}{\sqrt{(x-2)^2}(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)}{(x-2)(4 + 2\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{(x+6)^2})} = -\frac{1}{4+4+4} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2-4x+4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{هویتال}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{|x-2|} &\xrightarrow{x-2>0} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{1}{3}(x+6)^{-\frac{2}{3}}}{1} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}(2+6)^{-\frac{2}{3}}}{1} = -\frac{1}{3 \times 4} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

سایت کنکور



گزینه ۳

۷۲

گام اول

الف) تابع $f(x)$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است هرگاه در همه نقاط این مجموعه پیوسته باشد.
 ب) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

گام دوم

تابع $f(x)$ بر روی دو بازه $x > 2$ و $x < 2$ به صورت یک تابع چندجمله‌ای بوده و پیوسته است، بنابراین کافی است پیوستگی تابع را در نقطه $x = 2$ بررسی کنیم.
 باتوجه به قسمت (ب) از گام اول، حد چپ و راست تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 2$ محاسبه کرده و با مقدار تابع در این نقطه مساوی قرار می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ax + b = 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + bx - 1 = 4 + 2b - 1 = 3 + 2b$$

$$f(2) = 5 \Rightarrow 2a + b = 3 + 2b = 5$$

$$3 + 2b = 5 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$2a + b = 5 \Rightarrow 2a + 1 = 5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

داریم:

سایت کنکور



گزینه ۴

۷۳

گام اول

الف) تابع $f(x)$ در نقطه $x = x_0$ پیوسته است هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

ب) می‌دانیم:

$$|u| = \begin{cases} u & ; u \geq 0 \\ -u & ; u < 0 \end{cases}$$

گام دوم

ضابطه تابع شامل یک عبارت قدر مطلق است، پس ابتدا این عبارت را تجزیه و تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -2 & 1 & \\ \hline x^2 + x - 2 & + & - & + \end{array}$$

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ به صورت زیر می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x \leq -2 \\ \frac{-x^2 - x + 2}{x - 1} & ; -2 < x < 1 \\ a & ; x = 1 \\ \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & ; x > 1 \end{cases}$$

اکنون باتوجه به قسمت (الف) از گام اول، پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 - x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x - 2) = -1 - 2 = -3$$

باتوجه به اینکه حد چپ و راست تابع در نقطه $x = 1$ مساوی نیستند، پس این تابع به ازای هیچ مقدار a در نقطه $x = 1$ پیوسته نخواهد بود.



گزینه ۴

۷۴

گام اول

الف) برای اینکه تابع $f(x)$ در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته باشد، باید بر روی تمام نقاط این بازه پیوسته باشد. نقطه مرز ضابطه‌ها، یعنی $x = \frac{\pi}{3}$ نقطه‌ای است که پیوستگی در مورد آن باید بررسی شود.

ب) شرط پیوستگی در $x = \frac{\pi}{3}$ به صورت زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

گام دوم

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{\cos 3x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} \frac{-\sin(\frac{\pi}{3} - 3x)}{\sin(\frac{\pi}{3} - x)}$$

$$\xrightarrow{x - \frac{\pi}{3} = t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sin(3t)}{\sin t} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \sin \Delta x - a = \sin \frac{\Delta \pi}{3} - a = 1 - a$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 1 - a = -3 \Rightarrow a = 4$$

شرط پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

گزینه ۱

۷۵

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^3 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{1 - \cos^3 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = -\frac{1}{4}$$

گزینه ۴

۷۶

باتوجه به ضابطه تابع f ، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - [x]) = 6 - [2^-] = 6 - 1 = 5 \\ f(2) = a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 2) = 4 \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در $x = 2$ پیوسته باشد، باید $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ پس باتوجه به مقادیر به دست آمده در بالا، از آنجاکه $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ بنابراین تابع f در $x = 2$ به ازای هیچ مقداری برای a پیوسته نیست.

تذکر:

$$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} [a^-] = a - 1 \\ [a^+] = a \end{cases}$$



۱ نمودار تابع با ضابطه $y = 2 \left[\frac{x}{2} \right] + 1$ $x \in [-2, 6)$ از چند پاره خط مساوی هم، تشکیل شده است؟

- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

۲ برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $2[\sqrt{n^2 - 2n}] - 2[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}]$ کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۴

۳ کدام یک از دنباله های زیر صعودی و همگرا است؟

$$U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (۱)$$

$$U_n = \left[\frac{(-1)^n}{n}\right] \quad (۳)$$

$$U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \quad (۲)$$

$$U_n = \frac{2n+1}{n} \quad (۴)$$

۴ دنباله ای با جمله عمومی $a_n = \frac{1+3^n}{5+3^{n-1}}$ چگونه است؟

- (۱) بی کران- صعودی
(۲) کراندار- صعودی
(۳) کراندار- نزولی
(۴) بی کران- نزولی

۵ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو $0/44$ ، از آهنگ لحظه ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

- (۱) $\frac{1}{30}$
(۲) $\frac{1}{24}$
(۳) $\frac{1}{12}$
(۴) $\frac{1}{6}$

۶ در تابع با ضابطه $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ از آهنگ لحظه ای آن در نقطه $x = 4$ چقدر بیشتر است؟

- (۱) $\frac{7}{540}$
(۲) $\frac{11}{540}$
(۳) $\frac{7}{270}$
(۴) $\frac{11}{270}$

۷ اندازه مشتق تابع $y = \ln e^{\sqrt{\sin x}}$ در نقطه ای به طول $x = \frac{\pi}{6}$ واقع بر آن، کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
(۲) $\frac{\sqrt{6}}{8}$
(۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
(۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$



۸ مقدار مشتق $\sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}}$ ، به ازای $x = \frac{3}{\pi}$ کدام است؟

(۲) $\frac{-2\pi^2}{9}$
(۴) $\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

(۱) $\frac{-2\pi^2\sqrt{3}}{9}$
(۳) $\frac{2\pi^2}{9}$

۹ در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

(۲) $\frac{5}{24}$
(۴) $\frac{7}{16}$

(۱) $\frac{7}{48}$
(۳) $\frac{7}{24}$

۱۰ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x - \cos 2x & ; 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ a \tan x + b \sin 2x & ; \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر است. b کدام است؟

(۲) $-\frac{1}{2}$
(۴) ۱

(۱) -۱
(۳) $\frac{1}{2}$

۱۱ خط قائم بر منحنی $y = xe^{x^2-4}$ ، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۲) ۱۶
(۴) ۲۰

(۱) ۱۰
(۳) ۱۸

۱۲ در نقاطی از منحنی به معادله $x^2 - 4xy + 3y^2 + 1 = 0$ خط مماس بر منحنی موازی محور x ها است. طول نقاط تماس، کدام است؟

(۲) ۲ و -۲
(۴) ۲ و -۱

(۱) ۱ و -۲
(۳) ۱ و -۱

۱۳ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \ln \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3}$ ، در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

(۲) $\frac{8}{9}$
(۴) $\frac{10}{3}$

(۱) $\frac{5}{9}$
(۳) $\frac{5}{3}$

۱۴ از نقطه $A(0, 4/5)$ خطی بر منحنی $y = x^2$ عمود شده است. طول پای عمود با علامت مثبت، کدام می‌باشد؟

(۲) ۲
(۴) ۲/۵

(۱) $\sqrt{3}$
(۳) $\sqrt{5}$



۱۵ در کدام بازه، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ صعودی و تقعر نمودار آن، روبه پایین است؟

- (۱) $(-2, 0)$ (۲) $(-2, 1)$
 (۳) $(-1, 2)$ (۴) $(0, 1)$

۱۶ اگر تابع‌هایی به صورت $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 8x$ دارای ماکزیمم و مینیمم با طول‌های منفی باشند، آنگاه مجموعه طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

- (۱) $(-5, -\frac{1}{2})$ (۲) $(-4, -1)$
 (۳) $(-\infty, -2)$ (۴) $(-\infty, -4)$

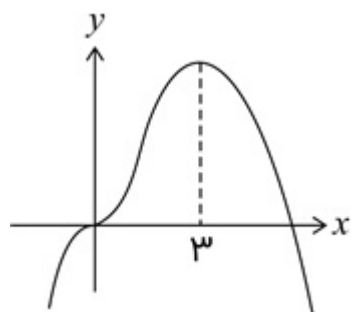
۱۷ کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ کدام است؟

- (۱) -36 (۲) -32
 (۳) -24 (۴) -18

۱۸ اگر نقطه عطف نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ باشد، آنگاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

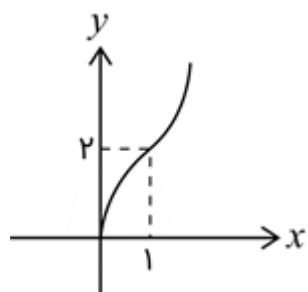
- (۱) 3 (۲) 4
 (۳) 5 (۴) 6

۱۹ شکل زیر، نمودار تابع $y = ax^4 + 2x^3 + bx^2$ می‌باشد. a کدام است؟

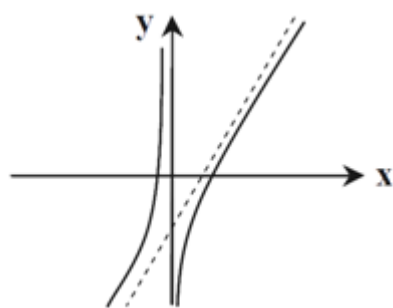


- (۱) -1
 (۲) $-\frac{1}{2}$
 (۳) $-\frac{1}{4}$
 (۴) $\frac{1}{4}$

۲۰ شکل زیر، نمودار تابع $y = ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{1}{2}}$ است، b کدام است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
 (۲) 1
 (۳) $\frac{3}{2}$
 (۴) 2



۲۱ شکل زیر نمودار تابع $y = \frac{x^2+ax-2}{x+b}$ می‌باشد. مقادیر a و b چگونه است؟

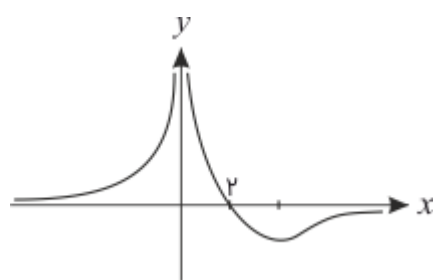
(۱) $b < 0, a < 0$

(۲) $b > 0, a = 0$

(۳) $b = 0, a > 0$

(۴) $b = 0, a < 0$

۲۲ شکل زیر، نمودار تابع $f(x) = \frac{ax+2}{x^2+b}$ است. با تعیین a و b ، مینیمم نسبی این تابع کدام است؟



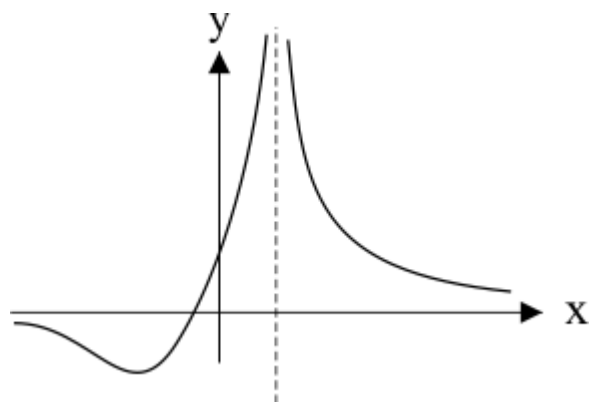
(۱) $-\frac{1}{8}$

(۲) $-\frac{1}{4}$

(۳) $-\frac{3}{8}$

(۴) $-\frac{1}{2}$

۲۳ شکل زیر، نمودار تابع $y = \frac{x+a}{x^2+bx+4}$ می‌باشد. مقادیر a و b چگونه است؟



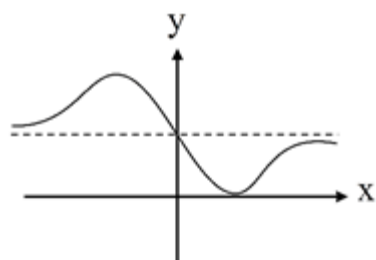
(۱) $b = 4$ و $a < 0$

(۲) $b = -4$ و $a < 0$

(۳) $b = 4$ و $a > 0$

(۴) $b = -4$ و $a > 0$

۲۴ شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2+bx+8}{x^2+4}$ است. $a+b$ کدام است؟



(۱) -7

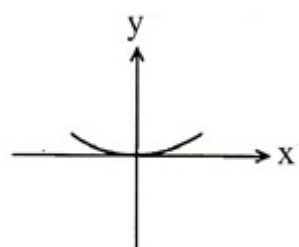
(۲) -6

(۳) 9

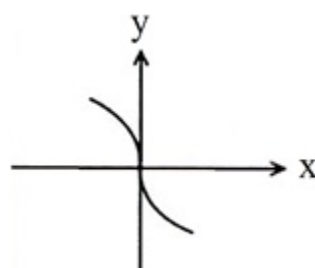
(۴) 10



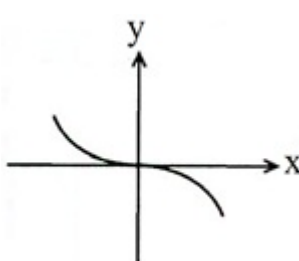
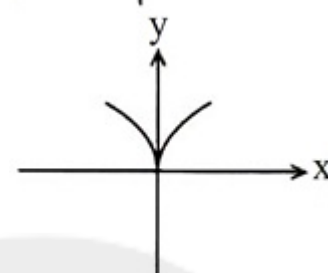
۲۵ نمودار تابع $y = x^{\frac{8}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟



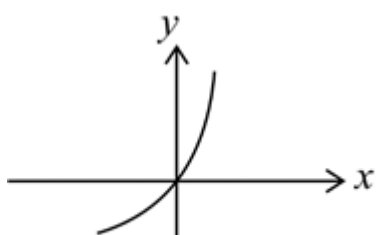
(۱) (۲)



(۳) (۴)



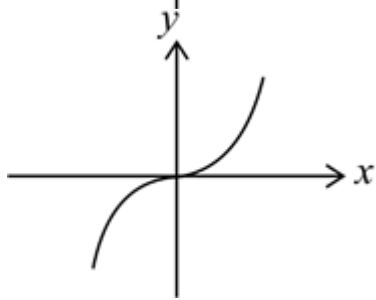
۲۶ نمودار تابع $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ در حوالی مبدأ مختصات چگونه است؟



(۱) (۲)



(۳) (۴)



۲۷ اگر $f(x) = \frac{x+3}{2x+1}$ و $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ ، آنگاه نقطهٔ تلاقی مجانب‌های تابع $f \circ g$ کدام است؟

(۱) $(-1, 0)$ (۲) $(-1, 1)$

(۳) $(-2, 2)$ (۴) $(0, 1)$

۲۸ اگر محور y ها، تنها مجانب قائم نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3+ax-2}{x^2-x}$ باشد، آنگاه معادلهٔ مجانب مایل آن کدام است؟

(۱) $y = x - 2$ (۲) $y = x - 1$

(۳) $y = x + 1$ (۴) $y = x + 2$

۲۹ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-2, 0)$ از خط مجانب منحنی به معادلهٔ $y = x - \sqrt{x^2 - 2x}$; $x \leq 0$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲

(۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{2}$



۳۰ به ازای کدام مقدار m ، دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب است؟

- (۱) -۲
(۲) -۱
(۳) ۳
(۴) هیچ مقدار m

۳۱ نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- (۱) (۱, ۵)
(۲) (۳, ۴)
(۳) (۳, ۵)
(۴) (۴, ۳)

۳۲ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{8}$
(۲) $\frac{9}{4}$
(۳) $\frac{25}{8}$
(۴) $\frac{25}{4}$

۳۳ مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ ، کدام است؟

- (۱) ۶
(۲) $\frac{6}{5}$
(۳) ۷
(۴) $\frac{7}{5}$

۳۴ دایره‌ای از دو نقطه $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام می‌باشد؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) ۳

۳۵ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$
(۲) ۲
(۳) $\sqrt{5}$
(۴) ۳

۳۶ به ازای کدام مقدار a دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله $x + 3y = 0$ مماس است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{5}{2}$
(۳) ۳
(۴) ۵



۳۷ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

- (۱) مماس داخل
(۲) مماس خارج
(۳) متقاطع
(۴) متداخل

۳۸ در یک هذلولی افقی معادلهٔ مجانب‌ها به صورت $y = 2x - 4$ و $y = -2x$ هستند، خروج از مرکز این هذلولی، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
(۲) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$
(۳) $\sqrt{3}$
(۴) $\sqrt{5}$

۳۹ در هذلولی به معادلهٔ $4x^2 - y^2 - 8x - 4y = 4$ ، فاصلهٔ هر کانون از خط مجانب هذلولی، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) ۲
(۴) ۳

۴۰ در هذلولی به معادلهٔ $x^2 - 3y^2 - 2x = 2$ اندازهٔ وتر گذرنده از کانون و عمود بر محور کانونی آن کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) ۳
(۴) $2\sqrt{3}$

۴۱ مقادیر مینیمم و ماکزیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازهٔ $[-4, 3]$ ، کدام است؟

- (۱) -18 و 24
(۲) -45 و 27
(۳) -36 و 27
(۴) -27 و 36

۴۲ اگر نقاط $F(0, 3)$ و $F'(0, -3)$ کانون‌های یک هذلولی با خروج از مرکز $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ باشند، معادلهٔ آن کدام است؟

- (۱) $y^2 - 3x^2 = 4$
(۲) $x^2 - 3y^2 = 4$
(۳) $x^2 - 8y^2 = 8$
(۴) $y^2 - 8x^2 = 8$

۴۳ سهمی با کانون $F(2, 3)$ و خط هادی به معادلهٔ $x = -4$ محور xها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
(۲) $-\frac{1}{4}$
(۳) $\frac{1}{4}$
(۴) $\frac{1}{2}$



۴۴ عمق یک آینه سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعده آن ۶۰ واحد است. فاصله کانون تا رأس آن کدام است؟

(۱) ۱۵

(۲) ۲۰

(۳) ۲۲/۵

(۴) ۲۵

۴۵ بیضی به کانون‌های $(1, -1)$ و $(1, 1)$ و خروج از مرکز $\frac{1}{3}$ ، خط $y = 2x$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

(۱) ۱ و $-\frac{1}{3}$

(۲) ۱ و $-\frac{1}{4}$

(۳) $-\frac{1}{3}$ و ۱

(۴) ۲ و $-\frac{1}{3}$

۴۶ بیضی به معادله $x^2 + 4y^2 + ay + bx + c = 0$ در نقطه‌ای به طول ۳ بر محور x مماس است و از نقطه $(-1, -2)$ می‌گذرد. خروج از مرکز آن، کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(۴) $\frac{3}{4}$

۴۷ در بیضی به معادله $16y^2 + 5x^2 - 10x = 75$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در M و N قطع می‌کند. اندازه MN کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۲/۵

(۳) ۳

(۴) ۳/۵

۴۸ هذلولی به معادله $5y^2 - 4x^2 - 20y = 0$ مفروض می‌باشد. معادله یک بیضی که کانون‌های آن منطبق بر رأس‌های هذلولی و رأس‌های آن در کانون‌های این هذلولی باشد، کدام است؟

(۱) $5y^2 + 9x^2 - 20y = 25$

(۲) $5y^2 + 9x^2 - 10y = 36$

(۳) $4y^2 + 5x^2 - 16y = 4$

(۴) $9y^2 + 5x^2 - 36y = 9$

۴۹ حاصل $\int_{-1}^2 [x] |x| dx$ ، کدام است؟ (نماد $[]$ به مفهوم جزء صحیح است.)

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

۵۰ مقدار انتگرال معین $\int_{-2}^1 (|x| - [x]) dx$ کدام است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است)

(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

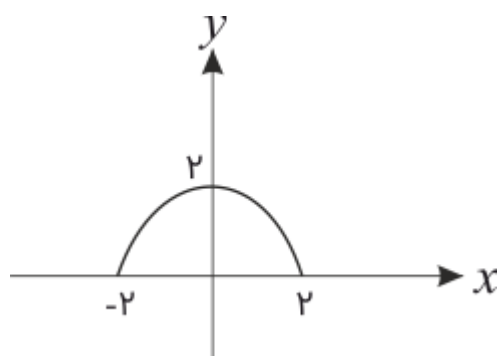
(۴) ۵/۵



۵۱ اگر $f(x) = |x| + |x + 1|$ حاصل $\int_{-1}^2 f(x) dx$ کدام است؟

- (۱) ۵
(۲) ۶
(۳) ۶/۵
(۴) ۷

۵۲ باتوجه به شکل زیر، حاصل $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ کدام است؟



- (۱) $2\pi - 2$
(۲) $\pi + 2$
(۳) 2π
(۴) 4π

۵۳ حاصل $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos x} dx$ کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۶
(۴) ۸

۵۴ حاصل $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + \tan^2 x}}$ برابر کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) ۲
(۳) π
(۴) صفر

۵۵ اگر $\int \frac{5x^2 + 3x}{\sqrt{x}} dx = x\sqrt{x}f(x) + C$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $x + 2$
(۲) $x + 3$
(۳) $2x + 2$
(۴) $2x + 3$

۵۶ اگر $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 3\sqrt[3]{x}f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}x^2 - 2x$
(۲) $\frac{2}{3}x^2 - 1$
(۳) $x^2 - x$
(۴) $x^2 - 2$



۵۷ با شرط $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ حاصل $\int \sqrt{1 + \tan^2 x} \sin 2x dx$ کدام است؟

- (۱) $-2 \cos x + c$
 (۲) $-2 \sin x + c$
 (۳) $2 \cos x + c$
 (۴) $2 \sin x + c$

۵۸ با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ کدام است؟

- (۱) $\sin x + \cos x + c$
 (۲) $\sin x - \cos x + c$
 (۳) $-\sin x + \cos x + c$
 (۴) $-\sin x - \cos x + c$

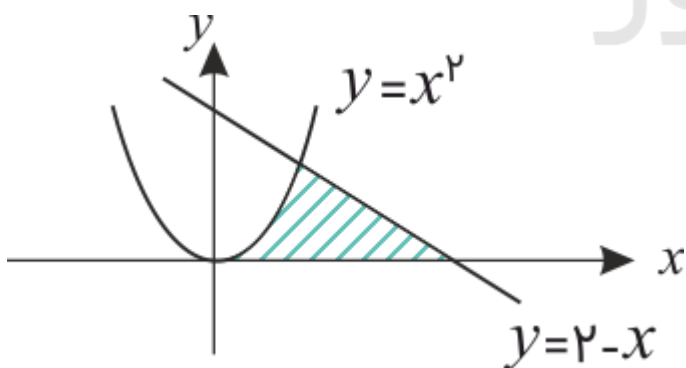
۵۹ اگر $G(x) = \int_2^x \frac{t}{\sqrt{1+t^3}} dt$ ، آنگاه مشتق راست تابع $y = x \cdot G(x)$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
 (۲) $\frac{2}{3}$
 (۳) $\frac{3}{4}$
 (۴) $\frac{5}{4}$

۶۰ مساحت ناحیه محصور بین نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & ; -2 \leq x < 0 \\ x^2 & ; 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ محور xها و دو خط $x = -2$ و $x = 3$ کدام است؟

- (۱) ۸
 (۲) ۹
 (۳) ۱۰
 (۴) ۱۱

۶۱ باتوجه به شکل زیر، مساحت ناحیه سایه زده چقدر است؟



- (۱) $\frac{4}{3}$
 (۲) $\frac{7}{6}$
 (۳) $\frac{5}{6}$
 (۴) $\frac{2}{3}$

۶۲ اگر $f(x) = \int_2^x \frac{t}{t^2+2} dt$ معادله خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $y + 2x - 4 = 0$
 (۲) $y - 3x + 6 = 0$
 (۳) $3y - x = 0$
 (۴) $3y - x + 2 = 0$



۱	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۲۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۱	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۲	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۲	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۳	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۴	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۱۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۵	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳۶	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۱۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	۳۷	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۷	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۸	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۸	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۹	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۲۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳۰	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴۰	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>																									
۶۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>																									





گزینه ۲

۱

گام اول

با توجه به ضابطه تابع که به صورت $y = 2 \left[\frac{x}{2} \right] + 1$ است، محدوده اولیه x را به زیربازه های زیر تقسیم کرده و در هر زیربازه مقدار y را تعیین می کنیم.

$-2 \leq x < 0, 0 \leq x < 2, 2 \leq x < 4, 4 \leq x < 6$

گام دوم

برای پاسخ گویی به تست نیازی به رسم نمودار تابع نیست. به تعداد ضابطه های به دست آمده، پاره خط در نمودار تابع وجود دارد.

$$-2 \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$0 \leq x < 2 \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$2 \leq x < 4 \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$4 \leq x < 6 \Rightarrow 2 \leq \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow \left[\frac{x}{2} \right] = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

پس نمودار تابع از چهار پاره خط مساوی به طول ۲ تشکیل شده است.

گزینه ۳

۲

بعضی از تست های جزء صحیح را با یک عددگذاری ساده می توانیم حل کنیم. حال این تست را به دو روش اصلی و عددگذاری حل می کنیم.

روش اول:

به ازای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 3n + 1 < 4n^2 \Rightarrow (2n-1)^2 < 4n^2 - 3n + 1 < (2n)^2$$

از نامعادله جذر می گیریم

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} 2n-1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] = 2n-1$$

از طرف دیگر وقتی $n > 2$ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$n^2 - 4n + 4 < n^2 - 2n < n^2 - 2n + 1 \Rightarrow (n-2)^2 < n^2 - 2n < (n-1)^2$$

از نامعادله جذر می گیریم

$$\xrightarrow{\text{از نامعادله جذر می گیریم}} n-2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n-1 \Rightarrow [\sqrt{n^2 - 2n}] = n-2$$

پس حاصل عبارت داده شده به ازای $n > 2$ برابر است با:

$$[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] = 2n-1 - 2(n-2) = 2n-1 - 2n+4 = 3$$

روش دوم (روش عددگذاری):

در صورت تست به این نکته اشاره شده که به ازای هر عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ حاصل عبارت یکسان است، کافی است یک عدد طبیعی بزرگ تر از ۲ را انتخاب کرده و حاصل عبارت داده شده را به ازای آن محاسبه کنیم. برای حل آسان تر، n را ۳ در نظر می گیریم:

$$A = [\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}] \xrightarrow{n=3} A = [\sqrt{36 - 9 + 1}] - 2[\sqrt{9 - 6}] \\ = [\sqrt{28}] - 2[\sqrt{3}] = 5 - 2(1) = 5 - 2 = 3$$



گزینه ۲

۳

باید دنباله ای را پیدا کنیم که جملات آن دائماً در حال زیاد شدن بوده و حد همگرایی اش یکتا هم باشد.
بررسی گزینه اول:

$$U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

این دنباله واگراست.

بررسی گزینه دوم:

$$U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n} = 1$$

جملات دنباله: $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, \dots$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مقدار جملات دنباله در حال افزایش است تا در نهایت به حد همگرایی، یعنی ۱ برسد. بنابراین دنباله $U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ صعودی و همگراست.

بررسی گزینه سوم:

$$U_n = \left[\frac{(-1)^n}{n}\right] \Rightarrow \begin{cases} \text{زوج } n: (-1)^n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = 0 \\ \text{فرد } n: (-1)^n = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n}\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{n}\right] = -1 \end{cases}$$

این دنباله هم واگراست.

بررسی گزینه چهارم:

$$U_n = \frac{2n+1}{n} : \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n} = 2$$

$$U_n = \frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$$

$$n \uparrow \Rightarrow \frac{1}{n} \downarrow \Rightarrow 2 + \frac{1}{n} \downarrow$$

با افزایش مقدار n جملات دنباله کاهش می‌یابد پس دنباله نزولی است.

سایت کنکور

گزینه ۲

۴

گام اول

الف) ابتدا حد همگرایی دنباله را وقتی $n \rightarrow +\infty$ تعیین می‌کنیم.

ب) باتوجه به روند تغییرات جملات دنباله وضعیت صعودی یا نزولی بودن آن (وضعیت یکنواختی دنباله) را مشخص می‌کنیم.

گام دوم

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3^n}{5+3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3^n}{5+\frac{3^n}{3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{\frac{3^n}{3}} = 3$$

دنباله $\{a_n\}$ همگرا و در نتیجه کران‌دار است. چون $a_1 = \frac{4}{5}$ و $a_n = 3$ است و همچنین باتوجه به اینکه گزینه‌ای مبنی بر غیر یکنوا بودن دنباله $\{a_n\}$ وجود ندارد، دنباله صعودی در نظر گرفته می‌شود.



گزینه ۴

۵

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 1$ تا $x = 1/44$ را با استفاده از رابطه $\frac{f(1/44)-f(1)}{1/44}$ به دست می‌آوریم.
 ب) برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 1$ باید ضابطه مشتق تابع یا همان $f'(x)$ و سپس $f'(1)$ را محاسبه کنیم. اختلاف آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای به عنوان جواب تست در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(1/44)-f(1)}{1/44} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1/44}} - 1}{1/44} = \frac{1}{\sqrt{1/44}} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{1/2} = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-1}{2\sqrt{x}^3}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

گزینه ۲

۶

گام اول

الف) آهنگ متوسط تغییر تابع از x_1 تا x_2 از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه برابر مقدار مشتق تابع آن نقطه است.

گام دوم

داریم:

$$f(x) = (2x+1)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

ابتدا آهنگ متوسط تغییر تابع از $x = 4$ تا $x = 12$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(12)-f(4)}{12-4} = \frac{\frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{9}}}{8} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{\frac{3-5}{15}}{8} = \frac{-2}{120} = -\frac{1}{60}$$

طبق قسمت ب از گام اول، $f'(x)$ و سپس مقدار $f'(4)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{0 - \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}}{2x+1} = -\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$x = 4 \text{ در آهنگ لحظه‌ای تغییر} = f'(4) = -\frac{1}{(8+1)\sqrt{8+1}} = -\frac{1}{9 \times 3} = -\frac{1}{27}$$

اختلاف آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x) = -\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{27}\right) = -\frac{1}{60} + \frac{1}{27} = \frac{-9+20}{540} = \frac{11}{540}$$



گزینه ۴

۷

گام اول

الف) با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم داریم:

$$1) \log a^n = n \log a$$

$$2) \ln e = \log_e e = 1$$

$$y = \ln e^{\sqrt{\sin x}} = \sqrt{\sin x} \ln e = \sqrt{\sin x} \log_e e = \sqrt{\sin x}$$

باتوجه به نکات گام اول، ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \sqrt{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

اکنون از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{2\sqrt{\sin \frac{\pi}{6}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

بنابراین:

گزینه ۱

۸

گام اول

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ می‌دانیم:}$$

گام دوم

قبل از مشتق‌گیری، بهتر است ضابطه تابع داده‌شده را ساده کنیم:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}}} = \frac{1}{|\cos \frac{1}{x}|}$$

باتوجه به اینکه مقدار مشتق به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ محاسبه می‌شود و داریم:

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow |\cos \frac{1}{x}| = \cos \frac{1}{x}$$

پس:

$$f(x) = \frac{1}{\cos \frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\left(-\frac{1}{x^2}\right)(-\sin \frac{1}{x})}{\cos^2 \frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}}{\cos^2 \frac{1}{x}}$$

اکنون حاصل $f' \left(\frac{\pi}{3} \right)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f' \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} \sin \frac{1}{\frac{\pi}{3}}}{\cos^2 \frac{1}{\frac{\pi}{3}}} = \frac{-\frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi}{3}}{\cos^2 \frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{\pi^2}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{\pi^2 \times \sqrt{3}}{18}}{\frac{1}{4}} = \frac{-4\pi^2 \sqrt{3}}{18} = \frac{-2\pi^2 \sqrt{3}}{9}$$



گزینه ۱

۹

گام اول

می‌دانیم: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ بنابراین حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ برابر $f'(1)$ است.

گام دوم

کافی است مقدار مشتق تابع $f(x)$ را در نقطه $x = 1$ محاسبه کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}} \times \frac{4(x+3) - (4x+5)}{(x+3)^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4+5}{1+3}}} \times \frac{4(1+3) - (4+5)}{(1+3)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} = \frac{7}{32}$$

گزینه ۱

۱۰

گام اول

تابع $f(x)$ در یک نقطه مشتق‌پذیر است هرگاه تابع در این نقطه پیوسته باشد و مشتق چپ و راست تابع نیز در این نقطه موجود و باهم برابر شوند.

گام دوم

ابتدا شرط پیوستگی تابع را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \tan x + b \sin^2 x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \sin^2 x - \cos^2 x = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a \tan \frac{\pi}{4} + b \sin \frac{\pi}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{4} - \cos^2 \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow a(1) + b(1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2} \quad (I)$$

اکنون ضابطه $f'(x)$ را به دست آورده و برابر بودن مشتق راست و چپ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ را بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x & ; 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ a(1 + \tan^2 x) + 2b \cos^2 x & ; \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$f' - \left(\frac{\pi}{4}\right) = f' + \left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2(1) = a(1+1) + 2b(0)$$

$$\Rightarrow 3 = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

با جایگذاری مقدار a در رابطه (I) مقدار b را محاسبه می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(I)} \frac{3}{2} + b = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$



گزینه ۴

۱۱

$$x = 2 \Rightarrow y = 2 \times e^{2^2-4} = 2 \times e^0 = 2, \quad y' = e^{x^2-4} + x \times (2x)e^{x^2-4} = e^{x^2-4}(1+2x^2)$$

$$\Rightarrow y'(2) = e^{2^2-4}(1+8) = 9$$

$$m' = \frac{-1}{m} \Rightarrow m' = \frac{-1}{9} \Rightarrow x = 2 \text{ در } x \text{ قائم بر منحنی در } y - 2 = \frac{-1}{9}(x - 2)$$

$$y = 0 \Rightarrow 18 = x - 2 \Rightarrow x = 20$$

گزینه ۲

۱۲

گام اول

الف) خط مماس بر منحنی در یک نقطه موازی محور x ها است هرگاه مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر باشد.
ب) مشتق تابع ضمنی $y = f(x, y)$ را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\text{مشتق نسبت به } x}{\text{مشتق نسبت به } y}$$

گام دوم

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 1 = 0$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x - 4y}{-4x + 6y} = 0 \Rightarrow 2x - 4y = 0 \Rightarrow 4y = 2x \Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

برای به دست آوردن طول نقاطی که خط مماس در آنها موازی محور x ها باشد، در معادله اصلی به جای y مقدار مساوی آن، یعنی $\frac{x}{2}$ را قرار می‌دهیم؛ بنابراین داریم:

$$x^2 - 4x\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x^2 + \frac{3}{4}x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

گزینه ۲

۱۳

الف) طول نقطه مورد نظر برابر ۲ است. عرض آن را به دست می‌آوریم:

$$y = \ln \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3} \Rightarrow y(2) = \ln \frac{\sqrt{8+1}}{2^2-4+3} = \ln \frac{3}{3} = \ln 1 = 0 \Rightarrow y = 0$$

مقدار مشتق تابع در نقطه‌ای به طول $x = 2$ برابر شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه است:

$$y' = \frac{\frac{f}{2\sqrt{4x+1}}(x^2-2x+3) - (2x-2)\sqrt{4x+1}}{(x^2-2x+3)^2} \cdot \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3}$$

$$m = y'(2) = -\frac{4}{9}$$

بنابراین معادله خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به مختصات $(2, 0)$ و با شیب $m = -\frac{4}{9}$ به صورت زیر است:

$$y - 0 = -\frac{4}{9}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{4}{9}x + \frac{8}{9}$$

عرض از مبدأ خط مماس در نقطه‌ای به طول $x = 2$ برابر $\frac{8}{9}$ است.



گزینه ۲

۱۴

$$\begin{cases} A(0, 4/5) \\ B(x, x^2) \end{cases} \Rightarrow m = \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A} = \frac{4/5 - x^2}{0 - x}$$

$$f' = 2x \xrightarrow{m \times m' = -1} -\frac{4/5 - x^2}{x} \times 2x = -1$$

$$x^2 = 4/5 - 0/5 \Rightarrow x = \pm 2 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

گزینه ۱

۱۵

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow f''(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x^2 + x - 2) = 3(x+2)(x-1)$$

x	-2	1	
f''	+	-	+

اکنون وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)$ را در بازه $(-2, 1)$ بررسی می‌کنیم:

$$f'(x) = x(x^2 + \frac{3}{2}x - 6)$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{4} - 4(-6) = \frac{105}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3 + 10/2\sqrt{15}}{2} \approx 1/81$$

$$x_2 = \frac{-3 - 10/2\sqrt{15}}{2} \approx -3/31$$

$$\Rightarrow (-2, 1) \subseteq (-3/31, 1/81)$$

x	-2	0	1
x	-	+	
$x^2 + \frac{3}{2}x - 6$	-	-	
	+	-	

بنابراین تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ در بازه $(-2, 0)$ صعودی و تقریباً آن رو به پایین است.



گزینه ۳

۱۶

چون تابع یک ماکزیمم و یک مینیمم با طول منفی دارد پس مشتق آن باید دو ریشه منفی داشته باشد:

$$f'(x) = 2x^2 - 2(m-1)x + 8 = 0 \xrightarrow{\div(2)} x^2 - (m-1)x + 4 = 0$$

برای اینکه معادله فوق دو ریشه منفی داشته باشد، باید:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 16 > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 16 \\ \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{1} > 0 \\ \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{1} < 0 \Rightarrow m < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m-1 > 4 \text{ یا } m-1 < -4 \Rightarrow m > 5 \text{ یا } m < -3 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\text{اشتراک} \Rightarrow m < -3$$

از طرفی می‌دانیم طول نقطه عطف تابع درجه سوم از رابطه $x = \frac{-b}{3a}$ محاسبه می‌شود.

$$\text{طول نقطه عطف} = -\frac{-(-m-1)}{3\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{m-1}{2}$$

باتوجه به حدود m ، حدود طول نقطه عطف تابع را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} m < -3 &\Rightarrow m-1 < -4 \Rightarrow \frac{m-1}{2} < -2 \\ &\Rightarrow \text{طول نقطه عطف} < -2 \end{aligned}$$

گزینه ۲

۱۷

کمترین مقدار تابع، همان مینیمم مطلق تابع است. برای یافتن مینیمم مطلق یک تابع پیوسته، مقدار تابع را در نقاط بحرانی آن و نقاط ابتدایی و انتهایی بازه تعریف شده روی آن، می‌یابیم. نقطه بحرانی تابع، نقاطی از دامنه تعریف آن است که به ازای آن‌ها $f'(x) = 0$ یا $f'(x)$ موجود نباشد. ضابطه $f(x)$ یک عبارت چندجمله‌ای و $D_f \in \mathbf{R}$ است. کافی است ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را یافته و مینیمم مقدار تابع را به ازای آن‌ها مشخص کنیم.

$$y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \Rightarrow y' = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x-4)(x+1)$$

$$y' = 0 \Rightarrow x(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(4) = -32 \\ y(-1) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

باتوجه به مقادیر به دست آمده، $y = -32$ کمترین مقدار تابع است.



گزینه ۳

۱۸

گام اول

- (الف) مختصات نقطه A در معادله تابع صدق می‌کند.
 (ب) تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته است.
 (ج) مشتق تابع در نقطه $x = 1$ موجود و یکتا است.
 (د) $f''(1) = 0$ است.

گام دوم

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a$$

$$f(1) = -11 \Rightarrow 1^3 + a(1)^2 + b(1) = -11 \Rightarrow a + b + 1 = -11 \Rightarrow a + b = -12 \quad (I)$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \xrightarrow{(I)} -3 + b = -12 \Rightarrow b = -9$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

با توجه به قسمت (الف) از گام اول داریم:

و با توجه به قسمت (د) از گام اول داریم:

بنابراین:

و $f(-1)$ برابر است با:

گزینه ۲

۱۹

تابع در نقطه‌ای به طول $x = 3$ ماکسیمم نسبی دارد و همچنین خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه، افقی است؛ پس $y'(3) = 0$ می‌شود.

$$y = ax^3 + 2x^2 + bx^2 \Rightarrow D = R$$

$$y' = 3ax^2 + 4x + 2bx$$

$$y'(3) = 0 \Rightarrow 3a(3)^2 + 4(3) + 2b(3) = 0 \Rightarrow 27a + 12 + 6b = 0$$

$$\Rightarrow 9a + 4 + 2b = 0 \quad (I)$$

از طرفی جهت تقعر منحنی تابع در نقطه $x = 0$ عوض می‌شود و چون تابع یک چندجمله‌ای است پس نقطه عطف تابع ریشه معادله $y'' = 0$ خواهد بود؛ بنابراین $y''(0) = 0$ است.

$$y'' = 6ax + 4 + 2b$$

$$y''(0) = 0 \Rightarrow 0 + 4 + 2b = 0 \Rightarrow b = -2$$

طبق رابطه I داریم:

$$9a + 4 + b = 0 \xrightarrow{b=-2} 9a + 2 = 0 \Rightarrow 9a = -2 \Rightarrow a = -\frac{2}{9}$$



گزینه ۳

۲۰

گام اول

الف) نقطه $(1, 2)$ روی نمودار تابع قرار دارد، پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع صدق می‌کند، بنابراین: $y(1) = 2$
 ب) جهت تقعر تابع در نقطه $x = 1$ عوض می‌شود، پس: $y''(1) = 0$

گام دوم

$$y = ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{1}{2}}$$

$$\xrightarrow{y(1)=2} 2 = a(1)^{\frac{3}{2}} + b(1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a + b = 2 \quad (I)$$

$$y' = \frac{3}{2}ax^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}bx^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = \frac{3}{4}ax^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}bx^{-\frac{3}{2}}$$

$$\xrightarrow{y''(1)=0} 0 = \frac{3}{4}a(1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}b(1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}b = 0 \Rightarrow 3a - b = 0 \Rightarrow b = 3a \quad (II)$$

با جایگذاری رابطه II در رابطه I داریم:

$$a + b = 2 \xrightarrow{b=3a} a + 3a = 2 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = 3a \Rightarrow b = 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

گزینه ۴

۲۱

خط $x = 0$ مجانب قائم نمودار است؛ بنابراین داریم:

$$\text{مجانِب قائم } (x + b) = 0 \xrightarrow{x=0} b = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + ax - 2}{x} \Rightarrow y = x + a - \frac{2}{x}$$

با استفاده از رابطه ساده‌شده تابع، مجانب مایل آن را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = x + a \Rightarrow \text{مجانِب مایل: } y = x + a$$

چون عرض از مبدأ مجانب مایل تابع مقداری منفی است، بنابراین $a < 0$ می‌باشد.

سایت کنکور



گزینه ۱

۲۲

گام اول

الف) خط $x = 0$ مجانب قائم تابع است پس باید $x = 0$ ریشهٔ مخرج کسر باشد.
 ب) نمودار تابع از نقطهٔ $(2, 0)$ عبور می‌کند پس $f(2) = 0$ است.
 ج) مشتق تابع در تمام نقاط اکسترمم نسبی، در صورت مشتق‌پذیری، برابر صفر است.

گام دوم

با توجه به قسمت (الف) از گام اول داریم:

$$x^2 + b = 0 \xrightarrow{x=0} 0^2 + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

و با توجه به قسمت (ب) از گام اول داریم:

$$f(2) = 0 \Rightarrow \frac{2a + 2}{2^2} = 0 \Rightarrow \frac{2a + 2}{4} = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

بنابراین:

$$f(x) = \frac{-x + 2}{x^2}$$

برای به دست آوردن مینیمم نسبی تابع، از تابع مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = \frac{-(x^2) - 2x(-x + 2)}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x(x - 4)}{x^4} = \frac{x - 4}{x^3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x - 4}{x^3} = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

مقدار مینیمم نسبی تابع برابر است با:

$$f(4) = \frac{-4 + 2}{4^2} = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۴

۲۳

باتوجه به شکل، تابع دارای یک مجانب قائم است. با صفر قرار دادن مخرج کسر می‌توان معادلهٔ آن را به دست آورد. مخرج کسر چندجمله‌ای درجه دوم است. برای اینکه مطمئن شویم یک ریشه (ریشهٔ مضاعف) دارد، فرض می‌کنیم $\Delta = 0$ باشد.

$$x^2 + bx + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \Delta = b^2 - 4(1)(4) = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$\text{به ازای } b = 4 \text{ داریم: } x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

در این صورت خط $x = -2$ مجانب قائم تابع می‌شود که باتوجه به نمودار قابل قبول نیست اما به ازای $b = -4$ داریم:

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

$$y = \frac{x+a}{(x-2)^2} \text{ پس داریم: } x = 2 \text{ مجانب قائم تابع است، پس داریم:}$$

باتوجه به شکل واضح است که $y(0) > 0$ می‌باشد، پس:

$$y(0) = \frac{0+a}{(0-2)^2} = \frac{a}{4} > 0 \Rightarrow a > 0$$

بنابراین $a > 0$ و $b = -4$ است.



گزینه ۲

۲۴

نمودار و مجانب افقی تابع در نقطه‌ای به طول $x = 0$ برخورد کرده‌اند، بنابراین به ازای $x = 0$ معادلهٔ مجانب افقی تابع به دست می‌آید.

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} \xrightarrow{x=0} f(0) = \frac{0+0+\lambda}{0+4} = \frac{\lambda}{4} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ مجانب افقی}$$

از طرفی برای به دست آوردن مجانب افقی، حد تابع را وقتی $x \rightarrow \pm \infty$ محاسبه می‌کنیم، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{ax^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{ax^2}{x^2} = a \Rightarrow y = a \text{ مجانب افقی}$$

بنابراین $a = 2$ است.

باتوجه به نمودار، مینیمم نسبی تابع بر خط $y = 0$ مماس است، پس معادلهٔ تلاقی خط $y = 0$ و ضابطهٔ تابع ریشهٔ مضاعف دارد:

$$y = 0 \left. \begin{array}{l} f(x) = \frac{2x^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} \\ \Rightarrow b^2 - 64 = 0 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = \pm 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2x^2 + bx + \lambda}{x^2 + 4} = 0 \Rightarrow 2x^2 + bx + \lambda = 0 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{ریشهٔ مضاعف}} b^2 - 4(2)(\lambda) = 0$$

باتوجه به نمودار، نقطهٔ مینیمم نسبی تابع دارای طولی مثبت است؛ بنابراین ریشهٔ مضاعف معادله باید مثبت باشد، پس $b = -8$ قابل قبول است. داریم:

$$a + b = 2 - 8 = -6$$

گزینه ۱

۲۵

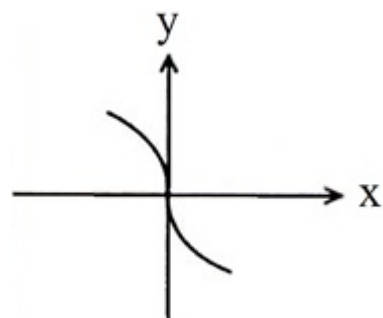
برای تعیین وضعیت نمودار تابع در حوالی مبدأ مختصات، ضابطهٔ y' را نوشته و با تعیین علامت آن وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را مشخص می‌کنیم.

$$y = x^{\frac{1}{5}} - 4x^{\frac{3}{5}} \Rightarrow D = R$$

$$y' = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} - \frac{12}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt[5]{x^3} - \frac{12}{5\sqrt[5]{x^2}} = \frac{\lambda x - 12}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

$x = 0$ ریشهٔ مخرج تابع y' است؛ بنابراین تابع y در این نقطه دارای مماس قائم است (رد گزینه‌های ۲ و ۴).

مخرج تابع y' همواره مثبت و صورت این تابع در یک همسایگی اطراف مبدأ مختصات منفی است؛ بنابراین نمودار y در حوالی نقطهٔ $x = 0$ نزولی بوده و شکل نمودار این تابع به صورت زیر خواهد بود:



سایت کنکور

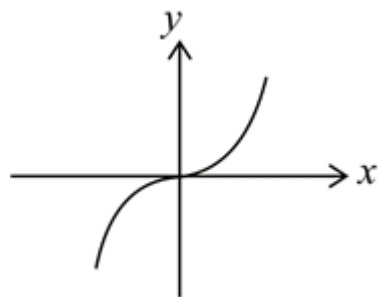
برای تعیین وضعیت یکنوایی تابع در حوالی مبدأ مختصات، ضابطه y' را نوشته و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y = \frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow D = R$$

$$y' = \frac{3x^2(x^2+1) - (2x)x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

به ازای $x = 0$ داریم $y' = 0$ ؛ بنابراین تابع در این نقطه دارای مماس افقی است. همچنین به ازای همه مقادیر $x \neq 0$ ، y' همواره مثبت است، پس نمودار تابع همیشه صعودی است.

باتوجه به توضیحات بالا، نمودار تابع در حوالی مبدأ مختصات به صورت زیر است:



گام اول

الف) یک تابع گویا که درجه صورت کوچک‌تر یا مساوی درجه مخرج باشد، مجانب افقی دارد.

ب) در توابع کسری ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند، به شرط آنکه تابع حداقل در یک بازه یک‌طرفه آن نقطه تعریف شده و در آن نقطه دارای حد نامتناهی باشد.

گام دوم

ابتدا ضابطه تابع fog را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x+3}{2x+1} \\ g(x) &= \frac{2x-1}{x+2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow fog(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+3}{2g(x)+1}$$

$$= \frac{\frac{2x-1}{x+2} + 3}{2 \cdot \frac{2x-1}{x+2} + 1} = \frac{\frac{2x-1+3x+6}{x+2}}{\frac{4x-2+x+2}{x+2}} = \frac{5x+5}{5x} = \frac{\Delta x + 5}{\Delta x}$$

باتوجه به قسمت "الف" از گام اول، تابع دارای یک مجانب افقی است:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} fog(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\Delta x + 5}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \Rightarrow y = 1 \quad \text{مجانب افقی}$$

همچنین خط $x = 0$ مجانب قائم تابع است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} fog(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 5}{\Delta x} = \frac{5}{0} = +\infty$$

نقطه $(0, 1)$ محل تلاقی این دو مجانب است.



گزینه ۳

۲۸

گام اول

الف) در توابع کسری، ریشه‌های مخرج کاندید مجانب قائم هستند به شرط آنکه حداقل در یک بازه یک‌طرفه این نقاط تعریف شده و همچنین در این نقاط دارای حد نامتناهی باشند.

ب) در توابع کسری به شکل $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ که f و g دو چندجمله‌ای هستند، اگر درجه f دقیقاً یک واحد بیشتر از درجه g باشد آنگاه خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج تابع، مجانب مایل آن خواهد بود.

گام دوم

$$y = \frac{x^3 + ax - 2}{x^2 - x} \Rightarrow D = R - \{0, 1\}$$

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

طبق گام اول، دو خط $x = 0$ و $x = 1$ کاندید مجانب قائم تابع هستند اما بر اساس صورت سؤال، تنها مجانب قائم تابع محور y ها به معادله $x = 0$ است؛ بنابراین $x = 1$ حتماً ریشه صورت کسر نیز است، پس داریم:

$$x^3 + ax - 2 = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - x}$$

اکنون با تقسیم صورت بر مخرج کسر، مجانب مایل تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 2 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - x \\ x + 1 \end{array} \right. \\ \hline -(x^2 - x) \\ \hline 2x - 2 \\ \hline -(2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

بنابراین خط $y = x + 1$ مجانب مایل تابع است.

سایت کنکور



گزینه ۳

۲۹

گام اول

الف) می‌دانیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$$

$$d = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ب) فاصله نقطه $A(\alpha, \beta)$ از خطی به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

گام دوم

$$y = x - \sqrt{x^2 - 2x} \quad ; \quad D = (-\infty, 0]$$

باتوجه به دامنه ذکر شده برای تابع، معادله جانب مایل تابع را وقتی $x \rightarrow -\infty$ تعیین می‌کنیم:

$$x \rightarrow -\infty : \sqrt{x^2 - 2x} \sim \sqrt{1} \left| x - \frac{2}{2} \right| = |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$$

$$\Rightarrow \text{مجانِب مایل} : y = x - (-x + 1) = x + x - 1 = 2x - 1$$

معادله جانب را به فرم استاندارد نوشته و باتوجه به گام اول، فاصله نقطه $A(-2, 0)$ از آن را محاسبه می‌کنیم:

$$y = 2x - 1 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2(-2) - 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

گزینه ۲

۳۰

شرط اینکه دستگاه دارای بی‌شمار جواب باشد آن است که دو خط بر هم منطبق باشند یعنی:

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m} \Rightarrow m = -1$$

سایت کنکور



گزینه ۳

۳۱

گام اول

اگر M ، نقطهٔ وسط دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشد آنگاه داریم:

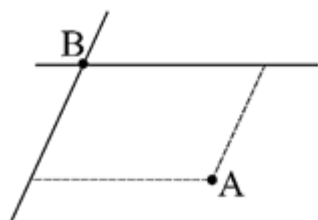
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

گام دوم

مختصات نقطهٔ $A(7, 6)$ در ضابطهٔ هیچیک از دو خط صدق نمی‌کند:

$$2(6) - 3(7) \neq 11 \quad , \quad 3(6) + 4(7) \neq 8$$

بنابراین نقطهٔ برخورد دو خط قطعاً رأس روبه‌رو به رأس A در متوازی‌الاضلاع است.



مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8y - 12x = 44 & + \\ 9y + 12x = 24 & - \end{cases} \rightarrow 17y = 68 \Rightarrow y = 4$$

$$2y - 3x = 11 \xrightarrow{y=4} 8 - 3x = 11 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow B(-1, 4)$$

اکنون باتوجه‌به گام اول، مختصات وسط قطر AB برابر است با:

$$x_M = \frac{7 + (-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow M(3, 5)$$

$$y_M = \frac{6 + 4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

سایت کنکور



گزینه ۳

۳۲

گام اول

فاصله دو خط موازی با معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

گام دوم

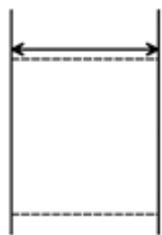
ابتدا شیب دو خط را به دست می‌آوریم:

$$2x - 2y = 3 \Rightarrow m_1 = -\frac{2}{-2} = +1$$

$$y = x + 1 \Rightarrow m_2 = +1$$

دو خط داده شده باهم موازی‌اند؛ بنابراین فاصله این دو خط از هم برابر با طول ضلع مربع خواهد بود.

برای محاسبه فاصله میان دو خط موازی، لازم است معادلات دو خط را به فرم استاندارد بنویسیم. دقت کنید که ضریب x و y در دو خط موازی باهم برابر باشند.



$$2x - 2y = 3 \Rightarrow 2x - 2y - 3 = 0 \xrightarrow{\div -2} -x + y + \frac{3}{2} = 0$$

$$y = x + 1 \Rightarrow y - x - 1 = 0$$

$$d = \frac{\left| \frac{3}{2} - (-1) \right|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{\left| \frac{3}{2} + 1 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{مربع}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \times \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{25}{4 \times 2} = \frac{25}{8}$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

سایت کنکور

گزینه ۲

۳۳

سه رأس داده شده مربوط به مثلث قائم‌الزاویه است، زیرا:

$$\begin{cases} m_{AC} = \frac{3}{2} \\ m_{BC} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$S = \frac{(AC) \times (BC)}{2} \xrightarrow{AC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}, BC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}} S = \frac{\sqrt{13} \times \sqrt{13}}{2} = 6.5$$



گزینه ۳

۳۴

می‌دانیم هر قطر دایره از مرکز دایره عبور می‌کند؛ بنابراین می‌توان مختصات مرکز دایره را به صورت $(\alpha, \alpha - 2)$ در نظر گرفت. از طرفی طبق تعریف دایره، فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز دایره برابر با شعاع دایره است. شعاع دایره را R می‌نامیم. با محاسبه فاصله مرکز دایره از هر یک از نقاط $(0, 1)$ و $(3, 0)$ ، ابتدا مقدار α و سپس R را به دست می‌آوریم.

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (\alpha - 2 - 1)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 3)^2} \\ R &= \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2 - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 3)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2}$$

$$= \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2}$$

به توان ۲

$$\longrightarrow \alpha^2 + (\alpha - 3)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2 \Rightarrow \alpha^2 = (\alpha - 2)^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 \Rightarrow 4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{1^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

گزینه ۳

۳۵

گام اول

معادله گسترده یک دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. در این صورت شعاع دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

سه نقطه A ، B و C روی دایره قرار دارد، پس مختصات این نقاط در معادله دایره صدق می‌کند.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\xrightarrow{A(-1, 0)} (-1)^2 + 0^2 + a(-1) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 1 - a + c = 0 \Rightarrow a - c = 1 \quad (I)$$

$$\xrightarrow{B(3, 0)} 3^2 + 0^2 + a(3) + b(0) + c = 0 \Rightarrow 9 + 3a + c = 0 \Rightarrow 3a + c = -9 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{C(0, -3)} 0^2 + (-3)^2 + a(0) + b(-3) + c = 0 \Rightarrow 9 - 3b + c = 0 \Rightarrow c - 3b = -9 \quad (III)$$

بنابراین سه معادله و سه مجهول داریم. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دو معادله I و II فقط شامل دو مجهول a و c است، پس با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول مقدار a و c را حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ 3a + c = -9 \end{cases} \xrightarrow{+} 4a = -8 \Rightarrow a = -2$$

$$a - c = 1 \xrightarrow{a=-2} c = -2 - 1 = -3$$

با جایگذاری $c = -3$ در معادله (III) مقدار b را هم حساب می‌کنیم.

$$c - 3b = -9 \xrightarrow{c=-3} -3 - 3b = -9 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$$

اکنون باتوجه به گام اول، شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 3} = \sqrt{1 + 1 + 3} = \sqrt{5}$$



گزینه ۲

۳۶

گام اول

الف) هرگاه خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از این خط برابر با شعاع دایره خواهد بود.
 ب) اگر معادله گسترده دایره‌ای را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر بگیریم آنگاه مختصات مرکز این دایره برابر با $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و شعاع آن برابر با

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \text{ است.}$$

ج) هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، معادله تلاقی آن‌ها ریشه مضاعف خواهد داشت.

گام دوم

روش اول:

باتوجه به گام اول، مرکز این دایره نقطه $(1, -2)$ و شعاع آن برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - a} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} - a} = \sqrt{\frac{5}{4} - a}$$

ازطرفی فاصله نقطه $(1, -2)$ از خط $x + 3y = 0$ برابر است با:

$$R = \frac{|1 + 3(-2)|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

بنابراین داریم:

$$\sqrt{\frac{5}{4} - a} = \frac{5}{\sqrt{10}} \xrightarrow{\text{به توان } 2} \frac{5}{4} - a = \frac{25}{10} \Rightarrow 50 - 10a = 25$$

$$\Rightarrow 10a = 25 \Rightarrow a = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

روش دوم:

باتوجه به قسمت (ج) از گام اول، باید معادله تلاقی خط و دایره، ریشه مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y \quad (I)$$

با جایگذاری رابطه I در معادله دایره، به یک معادله درجه دو بر حسب y می‌رسیم که ریشه مضاعف دارد.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \xrightarrow{I} (-3y)^2 + y^2 - 2(-3y) + 4y + a = 0$$

$$\Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 4y + a = 0 \Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 100 - 4(10)a = 0 \Rightarrow 100 - 40a = 0 \Rightarrow 40a = 100 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$$



گزینه ۱

۳۷

گام اول

در یک دایره به معادله $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ نقطه $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ مرکز دایره می‌باشد و شعاع این دایره برابر است با:

$$R = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

گام دوم

برای مشخص کردن وضعیت دو دایره نسبت به هم، مختصات مرکز دو دایره و شعاع آن‌ها را به دست می‌آوریم، سپس فاصله میان مرکز دو دایره (طول خط‌المركزین) را با دو مقدار $|R_1 - R_2|$ و $R_1 + R_2$ مقایسه می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0$$

$$\text{مرکز دایره } O_1\left(-\frac{-2}{2}, -\frac{4}{2}\right) \Rightarrow O_1(1, -2)$$

$$\text{شعاع دایره } R_1 = \sqrt{\left(-\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 13} = \sqrt{1 + 4 + 13} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\text{مرکز دایره } O_2\left(-\frac{2}{2}, -\frac{0}{2}\right) \Rightarrow O_2(-1, 0)$$

$$\text{شعاع دایره } R_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 0 + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

بنابراین داریم:

$$O_1O_2 = \sqrt{(-1-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$R_1 + R_2 = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$|R_1 - R_2| = |3\sqrt{2} - \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$$

بنابراین $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ است و دو دایره نسبت به هم مماس داخل هستند.

سایت کنکور

گزینه ۴

۳۸

گام اول

الف) در هذلولی افقی $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ شیب مجانب‌ها از رابطه $\pm \frac{b}{a}$ به دست می‌آید.

ب) خروج از مرکز هذلولی از رابطه $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ محاسبه می‌شود.

گام دوم

با توجه به معادله مجانب‌های هذلولی، شیب این مجانب‌ها برابر ± 2 است پس داریم:

$$\frac{b}{a} = 2$$

اکنون به راحتی می‌توان خروج از مرکز هذلولی را محاسبه کرد:

$$e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$



گزینه ۳

۳۹

گام اول

در هر هذلولی، فاصله کانون از خطوط مجانب هذلولی برابر با b است.

گام دوم

معادله هذلولی را به فرم استاندارد آن نوشته و مقدار پارامتر b را مشخص می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 4x^2 - y^2 - 4x - 4y = 4 &\Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) - 4 - (y^2 + 4y + 4) + 4 = 4 \\ \Rightarrow 4(x-1)^2 - (y+2)^2 = 4 &\Rightarrow \frac{4(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \\ \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین $b^2 = 4$ و $b = 2$ است.

گزینه ۱

۴۰

نقطه تقاطع وتر گذرنده از کانون و هذلولی، یک مؤلفه مشترک با کانون دارد و چون مختصات نقطه تقاطع در معادله هذلولی صدق می‌کند، پس با جایگذاری در معادله هذلولی به راحتی مؤلفه دیگر آن نیز به دست می‌آید. اندازه وتر برابر با فاصله میان دو نقطه تقاطع وتر و هذلولی است. با استاندارد کردن معادله هذلولی، مقدار پارامترهای مختلف آن و از جمله مختصات کانون هذلولی را تعیین می‌کنیم.

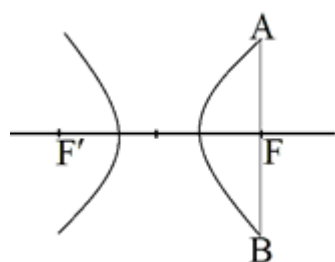
$$\begin{aligned} x^2 - 3y^2 - 2x = 2 &\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3y^2 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 - 3y^2 = 3 \\ \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{3y^2}{3} = 1 &\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{y^2}{1} = 1 \end{aligned}$$

بنابراین یک هذلولی افقی با مرکز تقارن $(1, 0)$ داریم؛ به طوری که:

$$\begin{cases} a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3} \\ b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow c = 2$$

دو نقطه F و F' با مختصات زیر، کانون‌های هذلولی است:

$$F : (1+2, 0) = (3, 0) \quad , \quad F' : (1-2, 0) = (-1, 0)$$



مختصات دو نقطه تقاطع وتر رسم شده از کانون F و هذلولی را تعیین می‌کنیم. طول این دو نقطه برابر با طول F است. پس با جایگذاری $x = 3$ در معادله هذلولی مختصات A و B به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} x^2 - 3y^2 - 2x = 2 &\xrightarrow{x=3} 9 - 3y^2 - 6 = 2 \Rightarrow -3y^2 = -1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} &\Rightarrow \begin{cases} A(3, \frac{\sqrt{3}}{3}) \\ B(3, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین اندازه وتر AB برابر است با:

$$\sqrt{(3-3)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



گزینه ۲

۴۱

نقاط بحرانی تابع را در فاصله $[-4, 3]$ به دست می‌آوریم. سپس مقدار تابع را در این نقاط همچنین مقدار تابع را در ابتدا و انتهای بازه محاسبه می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 15 \xrightarrow{f'(x)=0} x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3) = 0$$

x		-3		5	
f'	+	0	-	0	+
	↗	max	↘	min	↗

نقاط بحرانی تابع در بازه $[-4, 3]$ = -3

$$f(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = \frac{68}{3}$$

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 9 + 45 = 27$$

$$f(3) = \frac{3^3}{3} - 9 - 45 = -45$$

$$x \in [-4, 3] \rightarrow \begin{cases} y_{\min} = -45 \\ y_{\max} = 27 \end{cases}$$

گزینه ۴

۴۲

گام اول

الف) مرکز تقارن یک هذلولی، دقیقاً وسط پاره‌خطی است که کانون‌ها را به هم وصل می‌کند.

ب) فاصلهٔ میان دو کانون هذلولی برابر با $2c$ است.

ج) خروج از مرکز یک هذلولی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a}$$

گام دوم

باتوجه به مختصات کانون‌ها، یک هذلولی قائم داریم. مرکز این هذلولی نقطه $(0, 0)$ است. همچنین داریم:

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

باتوجه به این که خروج از مرکز هذلولی برابر با $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ است، داریم:

$$\frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow a = \frac{12}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 8 = 1$$

بنابراین معادلهٔ هذلولی به صورت زیر است:

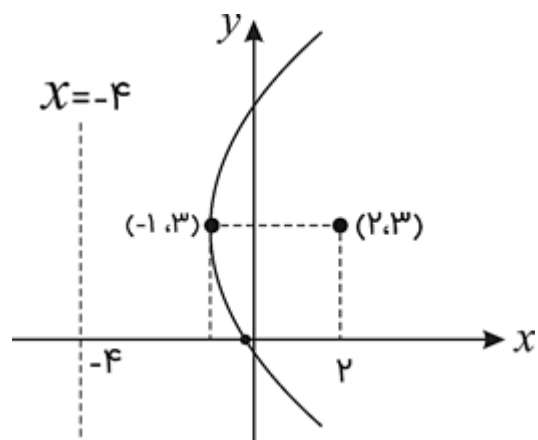
$$\frac{(y-0)^2}{1} - \frac{(x-0)^2}{8} = 1 \Rightarrow y^2 - 8x^2 = 8$$



گزینه ۲

۴۳

سهمی افقی و دهانه به سمت راست باز می‌شود.



$$2P = 6 \Rightarrow P = 3 \Rightarrow S(-1, 3)$$

$$(y - 3)^2 = 12(x + 1) \xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها}]{y=0} 9 = 12(x + 1) \Rightarrow x + 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

گزینه ۴

۴۴

سهمی قائم با رأس: $S(0, 0)$

$$x^2 = 4py \xrightarrow{A(30, 9)} (30)^2 = 4p(9) \\ \Rightarrow 900 = 36p \Rightarrow p = 25$$

گزینه ۱

۴۵

باتوجه به مختصات کانون‌های بیضی، بیضی قائم است، بنابراین مختصات مرکز بیضی به صورت $(1, 0)$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$F(1, -1), F'(1, 1) \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به فرض}} e = \frac{1}{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 2$$

$$\text{قائم بیضی قائم} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4 = b^2 + 1 \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

بنابراین معادله بیضی به مرکز $(1, 0)$ به صورت:

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} + \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y)^2}{4} + \frac{(x - 1)^2}{3} = 1$$

$$\xrightarrow{y=2x} \frac{(2x)^2}{4} + \frac{(x - 1)^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{4x^2}{4} + \frac{(x - 1)^2}{3} = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{(x - 1)^2}{3} = 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x^2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = 1$$



گزینه ۳

۴۶

در معادله گسترده بیضی، خروج از مرکز به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{ضریب کوچکتر } x^2 \text{ یا } y^2 &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \\ \text{ضریب بزرگتر } x^2 \text{ یا } y^2 &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \\ \text{خروج از مرکز بیضی} &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۲

۴۷

گام اول

خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی همان وتر کانونی است. در معادله استاندارد بیضی، اندازه وتر کانونی از رابطه $\frac{2b^2}{a}$ به دست می‌آید.

گام دوم

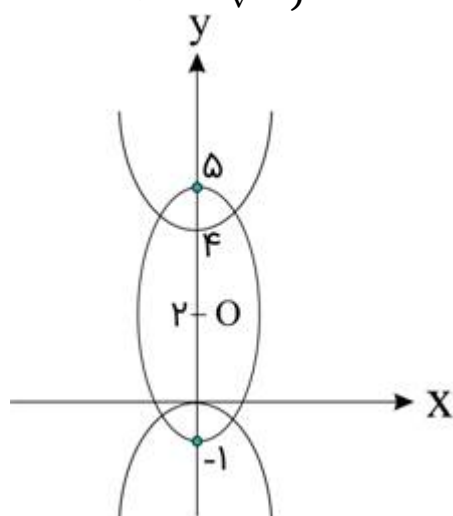
$$\begin{aligned} 16y^2 + 5x^2 - 10x &= 75 \Rightarrow 16y^2 + 5(x^2 - 2x) = 75 \\ \Rightarrow 16y^2 + 5(x-1)^2 - 5 &= 75 \Rightarrow 16y^2 + 5(x^2 - 2x + 1) = 75 + 5 \\ \Rightarrow 16y^2 + 5(x-1)^2 &= 80 \xrightarrow{\div 80} \frac{y^2}{5} + \frac{(x-1)^2}{16} = 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow MN = \frac{2b^2}{a} &= \frac{2 \times 5}{4} = \frac{5}{2} = 2.5 \end{aligned}$$

سایت کنکور

ابتدا معادله را به شکل استاندارد تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 5y^2 - 20y - 4x^2 &= 0 \Rightarrow 5(y^2 - 4y + 4 - 4) - 4x^2 = 0 \\ \Rightarrow 5(y-2)^2 - 20 - 4x^2 &= 0 \Rightarrow 5(y-2)^2 - 4x^2 = 20 \\ \Rightarrow \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} &= 1 \Rightarrow O \Big|_2^0 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \\ b^2 = 5 \Rightarrow b = \sqrt{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = \sqrt{4+5} = 3$$

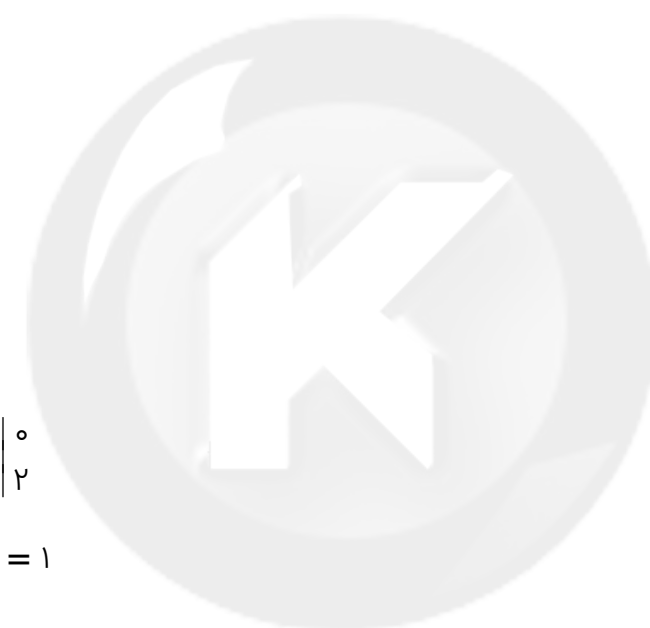


$$O \Big|_2^0 \text{ و } a = 3 \text{ و } c = 2 \Rightarrow b = \sqrt{5} \text{ در بیضی}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-0)^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \text{ بیضی قائم است}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2 - 4y + 4}{9} = 1 \Rightarrow 9x^2 + 5y^2 - 20y + 20 = 45$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 5y^2 - 20y = 25$$



سایت کنکور

گام اول

الف) تابع $y = [x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است.

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases} \text{ ب) می‌دانیم:}$$

گام دوم

با توجه به وجود $[x]$ و $|x|$ ، محدوده انتگرال‌گیری را به سه زیر بازه $(-1, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(1, 2)$ تقسیم می‌کنیم؛ بنابراین داریم:

$$\int_{-1}^2 [x]|x|dx = \int_{-1}^0 [x]|x|dx + \int_0^1 [x]|x|dx + \int_1^2 [x]|x|dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-1)(-x)dx + 0 + \int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 =$$

$$\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$$



گزینه ۴

۵۰

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 (|x| - [x]) dx &= \int_{-2}^{-1} (-x + 2) dx + \int_{-1}^0 (-x + 1) dx + \int_0^1 x dx \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - 2 + \frac{2^2}{2} + 2 \times 2 - 0 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 0 = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

گزینه ۴

۵۱

ابتدا تکلیف عبارتهای قدر مطلق را در بازه $(-1, 2)$ روشن و ضابطه تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} -1 < x < 0 &\Rightarrow 0 < x + 1 < 1 \Rightarrow \begin{cases} |x| = -x \\ |x + 1| = x + 1 \end{cases} \\ 0 < x < 2 &\Rightarrow 1 < x + 1 < 3 \Rightarrow \begin{cases} |x| = x \\ |x + 1| = x + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

اکنون محدوده اصلی انتگرال‌گیری، یعنی بازه $(-1, 2)$ ، را به دو بازه $(-1, 0)$ و $(0, 2)$ تقسیم کرده و حاصل انتگرال را در هر یک از این زیربازه‌ها محاسبه و در نهایت باهم جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (|x| + |x + 1|) dx \\ &= \int_{-1}^0 (|x| + |x + 1|) dx + \int_0^2 (|x| + |x + 1|) dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x + x + 1) dx + \int_0^2 (x + x + 1) dx = \int_{-1}^0 dx + \int_0^2 (2x + 1) dx \\ &= x \Big|_{-1}^0 + (x^2 + x) \Big|_0^2 = (0 - (-1)) + (6 - 0) = 1 + 6 = 7 \end{aligned}$$

گزینه ۳

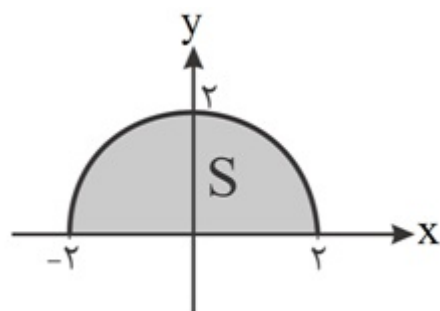
۵۲

گام اول

حاصل انتگرال معین داده‌شده، برابر با مساحت سطح محصور بین نمودار تابع و محور x ها در بازه $[-2, 2]$ است.

گام دوم

نمودار تابع $f(x)$ در بازه $[-2, 2]$ یک نیم‌دایره به شعاع ۲ است. برای محاسبه حاصل انتگرال معین $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ ، کافی است مساحت نیم‌دایره‌ای که بالای محور x ها قرار گرفته است را به دست آوریم. چون سطح محصور بین نمودار تابع و محور x ها بالای محور قرار دارد، پس حاصل انتگرال مثبت است.



$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= S_{\text{نیم‌دایره}} \\ &= \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = \frac{4\pi}{2} = 2\pi \end{aligned}$$



گزینه ۴

۵۳

از رابطه $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ برای ساده‌تر کردن عبارت داخل انتگرال استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos x)} dx &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \left(2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{x}{2}} dx = \int_0^{2\pi} 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right| dx \end{aligned}$$

در فاصله $(0, 2\pi)$ ، $\frac{x}{2}$ در فاصله $(0, \pi)$ قرار دارد و سینوس در این فاصله مثبت است پس:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{x}{2} dx &= -2 \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} \\ &= -4 \cos \frac{x}{2} \Big|_0^{2\pi} = (-4 \cos \pi) - (-4 \cos 0) = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

گزینه ۲

۵۴

گام اول

از روابط مثلثاتی می‌دانیم:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

گام دوم

باتوجه به اینکه $\cos x$ در بازه $(0, \pi)$ چه علامتی می‌تواند بگیرد، مقدار انتگرال معین را در بازه $(0, \pi)$ به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} &\Rightarrow \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} \\ 0 < x < \pi &\Rightarrow |\cos x| = \begin{cases} \cos x & ; 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\cos x & ; \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین حاصل انتگرال معین برابر است با:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos x dx \\ &= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) - (\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2}) \\ &= (1 - 0) - (0 - 1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

گزینه ۳

۵۵

ابتدا حاصل انتگرال داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 + 3x}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{5x^2 + 3x}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int \left(\frac{5x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x}{x^{\frac{1}{2}}} \right) dx = \int \left(5x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx = \\ &= 5 \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \right) + 3 \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + C = 2x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

برای اینکه ضابطه $f(x)$ را به دست آوریم از $x\sqrt{x}$ فاکتور می‌گیریم، داریم:

$$2x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + C = x\sqrt{x} (2x + 2) + C$$

بنابراین ضابطه $f(x)$ به صورت $f(x) = 2x + 2$ است.



گزینه ۳

۵۶

ابتدا عبارت درون انتگرال را به صورت کسره‌های تفکیک شده نوشته، بعد از به دست آوردن حاصل انتگرال نامعین از $\sqrt[3]{x}$ فاکتور می‌گیریم تا ضابطه $f(x)$ مشخص شود.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x^3-4x}}{\sqrt[3]{x^3}} dx &= \int \frac{\sqrt[3]{x^3-4x}}{x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \int \left(\frac{\sqrt[3]{x^3}}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{\sqrt[3]{4x}}{x^{\frac{1}{3}}} \right) dx = \int \left(\sqrt[3]{x^{\frac{2}{3}}} - \sqrt[3]{4} x^{\frac{2}{3}} \right) dx \\ &= \sqrt[3]{x^{\frac{2}{3}+1}} - \sqrt[3]{4} \times \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + c = \sqrt[3]{x^{\frac{5}{3}}} - \sqrt[3]{4} x^{\frac{4}{3}} + c \\ &= \sqrt[3]{x^{\frac{5}{3}}} - \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{x^{\frac{4}{3}}} + c = \sqrt[3]{x^{\frac{5}{3}}} - \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{x^{\frac{4}{3}}} + c \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{x^{\frac{5}{3}}} - \sqrt[3]{4} \sqrt[3]{x^{\frac{4}{3}}} + c = \sqrt[3]{x^{\frac{5}{3}}} f(x) + c \Rightarrow f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x \end{aligned}$$

گزینه ۳

۵۷

گام اول

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} 1) \quad 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ 2) \quad \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

گام دوم

باتوجه به گام اول، حاصل انتگرال نامعین را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \sqrt{1 + \tan^2 x} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|} \\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow |\cos x| = -\cos x \\ \Rightarrow \sqrt{1 + \tan^2 x} &= -\frac{1}{\cos x} \\ \Rightarrow \int \sqrt{1 + \tan^2 x} \sin 2x dx &= \int \left(-\frac{1}{\cos x}\right) (2 \sin x \cos x) dx = \int -2 \sin x dx = 2 \cos x + c \end{aligned}$$

گزینه ۲

۵۸

گام اول

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} 1) \quad \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2) \quad \int \sin ax dx &= -\frac{1}{a} \cos ax + c \\ 3) \quad \int \cos ax dx &= \frac{1}{a} \sin ax + c \end{aligned}$$

گام دوم

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx = \int \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)} dx \\ &= \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + c \end{aligned}$$



گزینه ۳

۵۹

گام اول

الف) مشتق تابع $y = uv$ از رابطه زیر به دست می‌آید: $y' = u'v + v'u$
 ب) اگر تابع $G(x) = \int_a^x g(x)dt$ باشد، در این صورت $G'(x) = g(x)$ است.
 ج) حاصل $\int_a^a f(x)dx = 0$ است.

گام دوم

مشتق راست تابع y را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ به دست می‌آوریم.

$$y = x \cdot G(x) \Rightarrow y' = G(x) + xG'(x)$$

$$G'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$y'_{+}(2) = G(2) + 2G'(2) = 0 + 2 \times \frac{2}{\sqrt{1+8}} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۴

۶۰

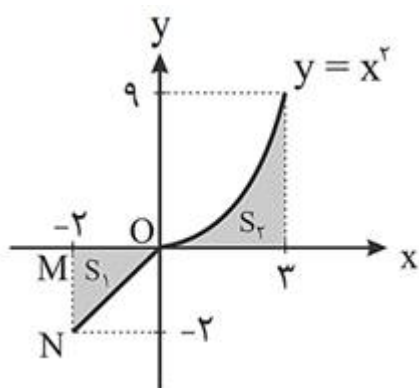
گام اول

الف) ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم می‌کنیم. توجه کنید که نمودار تابع در بازه $-2 \leq x < 0$ خط $y = x$ و در بازه $0 \leq x \leq 3$ منحنی $y = x^2$ است.

ب) سطح محصور بین منحنی و محور x ها را در دو مرحله حساب می‌کنیم. قسمتی که بین خط $y = x$ و محور x ها قرار دارد را با محاسبه مساحت مثلث OMN و قسمت محصور بین منحنی $y = x^2$ و محور x ها را با محاسبه انتگرال معین $\int_0^3 x^2 dx$ به دست می‌آوریم.

گام دوم

دقت کنید که چون مساحت همواره مقداری مثبت است هر دو مساحت محاسبه شده مثبت در نظر گرفته می‌شود.



$$S_1 = S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$S_2 = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3$$

$$= \frac{1}{3} (3^3 - 0^3) = \frac{1}{3} \times 27 = 9 \Rightarrow S_2 = 9$$

$$\text{مساحت کل محصور} = S_1 + S_2 = 2 + 9 = 11$$

سایت کنکور



گزینه ۳

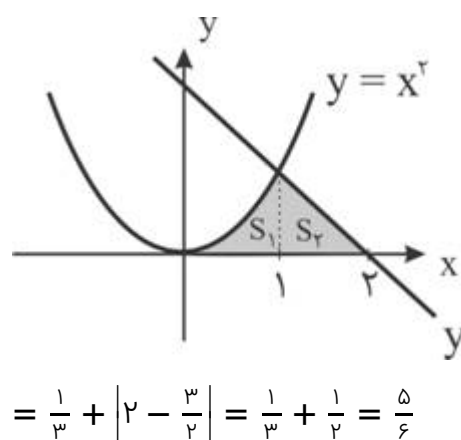
۶۱

گام اول

الف) ابتدا محل برخورد منحنی $y = x^2$ و خط $y = 2 - x$ را مشخص می‌کنیم. حواستان باشد باتوجه به شکل رسم‌شده، ریشه مثبت این معادله باید در نظر گرفته شود. همچنین محل برخورد خط با محور x ها نیز باید مشخص شود.

ب) اگر محل برخورد منحنی و خط نقطه‌ای به طول $x = a$ باشد، در بازه $(0, a)$ سطح محصور بین منحنی $y = x^2$ و محور x ها و در بازه بعدی سطح محصور بین خط $y = 2 - x$ و محور x ها را به دست می‌آوریم.

گام دوم



$$x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{مساحت ناحیه سایه‌زده} = S_1 + S_2 = \left| \int_0^1 x^2 dx \right| + \left| \int_1^2 (2 - x) dx \right|$$

$$y = 2 - x = \left| \frac{1}{3} x^3 \right|_0^1 + \left| \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \right|_1^2 = \left| \frac{1}{3} - 0 \right| + \left| (4 - 2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{3} + \left| 2 - \frac{3}{2} \right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

گزینه ۴

۶۲

گام اول

الف) شیب خط مماس همان $f'(2)$ است. برای به دست آوردن ضابطه $f'(x)$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

ب) عرض نقطه تماس برابر با $f(2)$ است.

گام دوم

$$f(x) = \int_2^x \frac{t}{t^2+2} dt \Rightarrow f(2) = \int_2^2 \frac{t}{t^2+2} dt = 0$$

$$f'(x) = 1 \times \frac{x}{x^2+2} \Rightarrow f'(2) = \text{مماس } m = \frac{2}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

پس معادله خط مماس به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}(x - 2) \xrightarrow{\times 3} 3y = x - 2 \Rightarrow 3y - x + 2 = 0$$

سایت کنکور