پاسخ تشریحی کنکوری سراسری ۹۷ - رشته ریاضی

هندسه پایه

دکتر یاسین گیلاسی

سوال ۱۲۵: (فوق‌العاده ساده!!!)

$$A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}A = 7x + 6x + 5x = 360^\circ \to x = \frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$$

$$\to A\hat{O}B = 140^\circ, B\hat{O}C = 120^\circ, C\hat{O}A = 100^\circ$$

نکته: در مثلث ABC اگر نیمسازهای دو زاویه‌ی داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند آنگاه: $B\hat{O}C = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$

حالا بر طبق این نکته که حتی اگر حفظ هم نباشیم به راحتی قابل حصول هست، برای بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث ABC خواهیم داشت:

$$A\hat{O}B = 140^\circ = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2} \to \hat{C} = 100^\circ$$

سوال ۱۲۶: (فوق‌العاده ساده!!!)

پاره‌خط رسم شده در ذوزنقه‌ی موجود، پاره‌خط میانگین هست و می‌دونیم که:

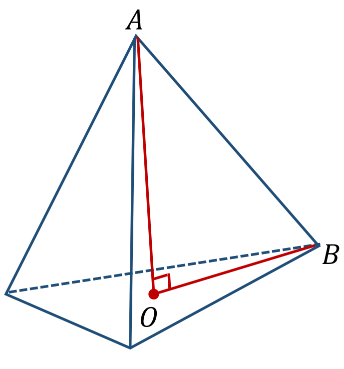
نکته: اگر پاره‌خط میانگین در ذوزنقه، قطرهای آن را در نقاط E و F قطع کند آنگاه EF برابر است با نصف تفاضل طول قاعده‌های ذوزنقه.

$$AB = x\,, CD = 3x \to EF = \frac{CD - AB}{2} = \frac{3x - x}{2} = x$$

بنابراین چهارضلعی $ABEF$ در حالت کلی متوازی‌الاضلاع می‌شه (که البته اینجا مستطیل) و ارتفاعش هم نصف ارتفاع ذوزنقس (به خاطر تالس موجود در شکل). بنابراین داریم:

$$\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{h}{2}x}{\frac{h}{2}(x + 3x)} = \frac{1}{4}$$

سوال ۱۲۷: (فوق‌العاده ساده!!!)



چهار وجهی منتظم، یک هرم منتظم؛ لذا ارتفاعی که از رأس A خارج می‌شه بر مرکز قاعده فرود می‌آد. قاعده هم مثلث متساوی‌الاضلاع، لذا مرکزش می‌شه محل برخورد میانه‌ها و ارتفاع‌ها و نیمسازهاش! بنابراین اولاً مثلث AOB به دلیل رسم ارتفاع AO قائم‌الزاویس؛ ثانیاً OB برابر است با $\frac{2}{3}$ طول یال هرم. (میانه‌های به نسب ۱ و ۲ همدیگر رو قطع می‌کنند)

$$AB = a\,, OB = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

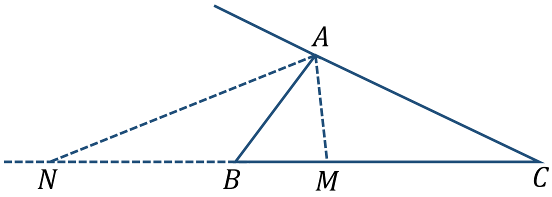
$$\to AO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{3} \times 2\sqrt{6} = 4$$

سوال ۱۲۸: (فوق‌العاده ساده!!!)

چون گفته نیمسازهای A، یعنی نیمساز داخلی و خارجی زاویه‌ی A و باید بدونیم که نیمساز خارجی زاویه‌ی A، از طرف ضلع کوچک‌تر امتداد ضلع مقابلش رو قطع می‌کنه. ضمناً:

نکته: قضیه نیمسازهای داخلی: $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}$

نکته: قضیه نیمسازهای خارجی: $\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC}$



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{CM} \to \frac{۲}{۸} = \frac{BM}{CM} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{۲}{۸+۲} = \frac{BM}{BM+CM} = \frac{BM}{۹} \to BM = \frac{۹}{۵}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC} \to \frac{۲}{۸} = \frac{NB}{NC} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{۲}{۸-۲} = \frac{NB}{NC-NB} = \frac{NB}{۹} \to NB = ۳$$

$$MN = NB + BM = ۳ + \frac{۹}{۵} = ۴/۸$$

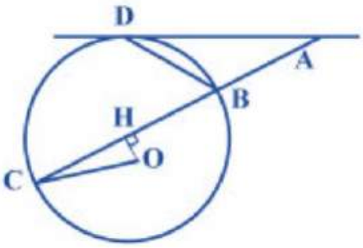
سوال ۱۲۹: (ساده!!!)

$$D\hat{A}C = x \to D\hat{B}C = ۲x \to \overset{\frown}{DC}_{\text{کمان}} = ۴x$$

$$D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{DB}}{۲} \to x = \frac{۴x - \overset{\frown}{DB}}{۲} \to \overset{\frown}{DB}_{\text{کمان}} = ۲x \to \overset{\frown}{CB}_{\text{کمان}} = ۴x + ۲x = ۶x$$

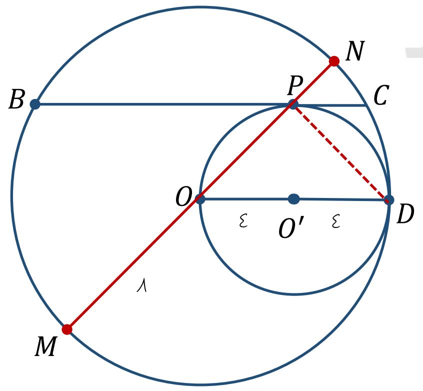
$$C\hat{O}B_{\text{زاویه مرکزی}} = \overset{\frown}{CB} = ۶x$$

نکته: زمانی که از O مرکز دایره به وتر BC عمود می‌کنیم، علاوه بر اینکه وتر نصف می‌شه، زاویه‌ی $C\hat{O}B$ هم نصف می‌شه. لذا:



$$C\hat{O}H = \frac{C\hat{O}B}{۲} = ۳x \to \frac{C\hat{O}H}{D\hat{A}C} = \frac{۳x}{x} = ۳$$

سوال ۱۳۰: (متوسط!!!) مشابه این سوال در کنکور ریاضی خارج از کشور سال ۹۴ اومده!



نکته: شعاع در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمودِ!

$$O'P \perp BC\,, BC \parallel OD \to O'P \perp OD$$

پس نتیجه می‌گیریم $O'P$ عمود منصف OD می‌شه و مثلث OPD متساوی‌الساقین.

از طرفی مثلث OPD قائم‌الزاویه (زاویه‌ی $P = ۹۰^\circ$ محاط و رو به روی قطر دایره‌ی کوچک‌تر است). پس: $OP = PD = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۸ = ۴\sqrt{۲}$

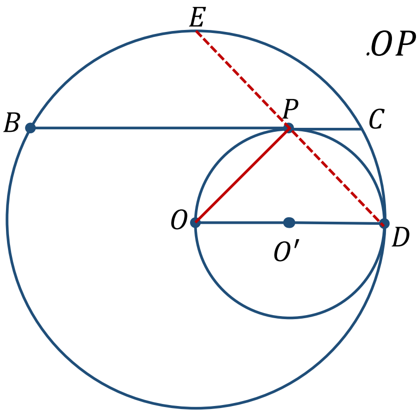
راه اول:

از O به P وصل کرده و ادامش می‌دیم تا دایره‌ی بزرگ رو در نقاط M, N قطع کنه! طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$BP \times PC = PM \times PN = (OP + ۸)(۸ - OP) = ۸^۲ - OP^۲$$

از طرفی مثلث OPD قائم‌الزاویه لذا بر طبق رابطه‌ی فیثاغورس: $OD^۲ - OP^۲ = ۸^۲ - OP^۲ = PD^۲ = \left(۴\sqrt{۲}\right)^۲ = ۳۲$

راه دوم:



پاره‌خط DP رو ادامه می‌دیم تا دایره بزرگ‌تر رو در E قطع کنه. می‌دونیم $P = ۹۰^\circ$ یعنی $OP \perp PE$.

نکته: زمانی که از O مرکز دایره به وتر DE عمود می‌کنیم، وتر نصف می‌شه. پس: $DP = DE$

طبق روابط طولی داریم:

$$BP \times PC = PE \times PD = PD^۲ = ۳۲$$

سوال ۱۳۱: (ساده!!!)

اگر نکتشو بدونین که می‌شه سوال بسیار ساده و اگر ندونین یکم زمان می‌بره برای حلش.

راه اول:

نکته: $y = -x$ نیمساز ربع دوم و چهارم و می‌دونیم که ضابطه‌ی بازتاب نسب به نیمساز ربع دوم و چهارم برابر است با:

$$A(x,y) \rightarrow A'(-y,-x)$$

حالا دو نقطه از خط مورد نظر $(\Delta: ۲y + x = ۶)$ انتقاب می‌کنیم: $A(۶,۰), B(۰,۳)$ بنابراین:

$$A'(۰,-۶)\ , \qquad B'(-۳,۰)$$

حالا یا گزینه‌ها رو چک می‌کنیم و یا با این دو نقطه معادله‌ی خط Δ' رو می‌نویسیم. لذا:

$$m_{\Delta'} = \frac{-۶-۰}{۰-(-۳)} = -۲ \rightarrow \Delta': (y-۰) = -۲\big(x-(-۳)\big) \rightarrow \Delta': y + ۲x = -۶$$

راه دوم: این راه یک نکته‌ی کلی‌تر و زمانی بیش‌تر به درد می‌خوره که محور بازتاب چنین خط خاصی نباشه! بنابراین واسه این سوال راه اول بهترین راه ممکنِ!

نکته: هرگاه در یک بازتاب محوری معادله‌ی استاندارد خط محور تقارن به گونه‌ای بود که ضرایب x, y قدر مطلق برابری داشتند، برای بازتاب نسب به این محور مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

اول: معادله‌ی محور تقارن را بر عددی تقسیم می‌کنیم که ضرایب x, y در معادله‌ی استاندارد یک یا منفی یک باشند. $(\Delta'': x + y = ۰)$

دوم: ابتدا پارامتر x را یک سمت معادله نگه داشته و بقیه‌ی موارد را به طرف دیگر انتقال می‌دهیم: $x' = -y$

سوم: دو نقطه از خط مورد نظر $(\Delta: ۲y + x = ۶)$ انتخاب می‌کنیم: $A(۶,۰), B(۰,۳)$

چهارم: حال از معادله‌ی مرحله‌ی دوم استفاده می‌کنیم:

$$A \rightarrow A': x_{A'} = -y_A = ۰ \qquad B \rightarrow B': x_{B'} = -y_B = -۳$$

پنجم: پارامتر y را یک سمت معادله نگه داشته و بقیه‌ی موارد را به طرف دیگر انتقال می‌دهیم: $y' = -x$

ششم: حال از معادله‌ی مرحله‌ی پنجم استفاده می‌کنیم:

$$A \rightarrow A': y_{A'} = -x_A = -۶ \qquad B \rightarrow B': y_{B'} = -x_B = ۰$$

بنابراین تصویر نقاط A, B یعنی $A'(۰,-۶)$ و $B'(-۳,۰)$ به دست اومد. حالا یا گزینه‌ها رو چک می‌کنیم و یا با این دو نقطه معادله‌ی خط Δ' رو می‌نویسیم. لذا:

$$m_{\Delta'} = \frac{-۶-۰}{۰-(-۳)} = -۲ \rightarrow \Delta': (y-۰) = -۲\big(x-(-۳)\big) \rightarrow \Delta': y + ۲x = -۶$$

راه سوم: استفاده از معادله خط و این جور چیزا... !

سوال ۱۳۲: (ساده!!!) این سوال در کتاب هندسه۲ به عنوان تمرین اومده!

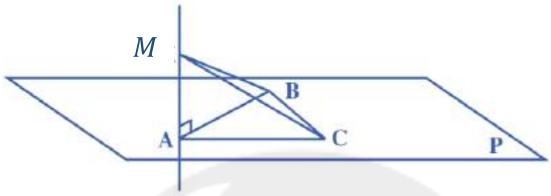
$$\begin{cases} AB = AC \\ MB = MC \\ MA \text{ مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} MAB = MAC \overset{\text{تام}}{\Rightarrow} M\hat{A}B = M\hat{A}C = ۹۰^\circ$$

نکته: اگر خطی بر دو خط متقاطع از صفحه‌ای عمود باشه، بر کل صفحه عمود می‌شه:

$$MA \perp AB \,, MA \perp AC \to MA \perp P$$

نکته: زمانی که یک خط بر صفحه‌ای عمود باشه، بر همه‌ی خطوط اون صفحه هم عمود می‌شه، لذا: $MA \perp BC$

بنابراین تنها گزینه‌ی نادرست این سوال عبارت $MB \perp BC$ خواهد بود.



پاسخ تشریحی کنکور سراسری ۹۷ - رشته ریاضی

هندسه تحلیلی

دکتر یاسین گیلاسی

سوال ۱۳۳: (فوق‌العاده ساده!!!)

می‌دونیم برای یک بردار با زاویه‌های α, β, γ که به ترتیب زوایای بردار با محورهای x, y, z هست داریم:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

چون تأکید کرده γ زاویه حادس، پس $\cos\gamma$ یه مقدار مثبت:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow \cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین بردار یکه‌ی بردار $\vec{a}$ می‌شود: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ بنابراین این بردار بر صفحه‌ای عمود است که با بردار نرمالش موازی باشد و در بین گزینه‌ها، صفحه‌ی $x + y + \sqrt{2}z = 0$ چنین ویژگی‌ای را داراست.

سوال ۱۳۴: (فوق‌العاده ساده!!!)

حجم متوازی‌السطوح بین سه بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ برابر است با: $\vec{c}.(\vec{a} \times \vec{b})$. بنابراین برای سه برداری که داریم حجم متوازی‌السطح می‌شه:

$$(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}|^2$$

$$\vec{a} = (2, -3, 1), \vec{b} = (1, 2, -4) \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (10, 9, 7) \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 230$$

سوال ۱۳۵: (ساده!!!)

برای خط $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ بردار $\vec{u}_1 = (0, 0, 1)$ بردار هادی و برای خط $\frac{x-1}{3} = -y + 4 = \frac{z}{5}$ بردار $\vec{u}_2 = (3, -1, 5)$ بردار هادی است. بنابراین طبق فرمول فاصله‌ی دو خط متنافر داریم: ($P_1(2, 5, 0)$ نقطه‌ای از خط اول و $P_2(1, 4, 0)$ نقطه‌ای از خط دوم است)

$$\text{فاصله} = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}.(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)|}{|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2|} = \frac{|(-1, -1, 0).(1, 3, 0)|}{(1, 3, 0)} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

سوال ۱۳۶: (متوسط!!!)

معادله‌ی داده شده را استاندارد می‌کنیم:

$$2y^2 - 12y + ax + 8 = 0 = 2(y^2 - 6y) + ax + 8 \rightarrow 2(y-3)^2 = -ax - 8 + 18 \rightarrow (y-3)^2$$
$$= -\frac{a}{2}\left(x - \frac{10}{a}\right) \rightarrow -\frac{a}{2} = 4k_{\text{سهمی}} \rightarrow k_{\text{سهمی}} = -\frac{a}{8}$$

معادله‌ی فوق معادله‌ی یک سهمی افقی است که برای پیدا کردن معادله‌ی خط هادی آن $\alpha - k_{\text{سهمی}}$ را محاسبه کنیم:

$$\alpha - k_{\text{سهمی}} = \frac{10}{a} - \left(-\frac{a}{8}\right) = \frac{10}{a} + \frac{a}{8} = \frac{21}{8} \rightarrow \frac{a^2 + 80}{8a} = \frac{21}{8} \rightarrow a^2 - 21a + 80 = 0 \rightarrow a = 5, 16$$

سوال ۱۳۷: (متوسط!!!)

معادله‌ی داده شده را استاندارد می‌کنیم:

$$3x^2 + 4y^2 + 16y + k = 0 = 3x^2 + 4(y^2 + 4y) + k \rightarrow 3x^2 + 4(y+2)^2 = 16 - k$$
$$\rightarrow \frac{3x^2}{16 - k} + \frac{4(y+2)^2}{16 - k} = 1 = \frac{x^2}{\frac{16-k}{3}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{16-k}{4}} = 1$$

معادله‌ی فوق، معادله‌ی یک بیضی افقی است که: $a^2 = \frac{16-k}{3}$ و $b^2 = \frac{16-k}{4}$، پس: $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{16-k}{12}$

با توجه به صورت سوال $2c = 2$، پس $c = 1$. در نتیجه: $\frac{16-k}{12} = 1 \to k = 4$

سوال ۱۳۸: (فوق‌العاده ساده!!!)

فقط کافیِ بدونیم که مثلاً از ضرب ماتریسی سطر اول از ماتریس اول در ستون اول از ماتریس دوم، درایه 1×1 ایجاد می‌شه. بنابراین چهار بار این کار رو برای چهار درایه روی قطر اصلی انجام می‌دیم و حاصل به شکل زیر خواهد بود:

$$C \times C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{bmatrix}$$

بنابراین جمع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس C^2 برابر است با ۱۶.

سوال ۱۳۹: (فوق‌العاده ساده!!!)

بنا به ویژگی‌های دترمینان از سطر سوم، سطر دوم را کم می‌کنیم تا ماتریس کمی ساده‌تر شده و سپس از روش ساروس کمک می‌گیریم:

$$\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ -1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 4(x-3) + 6(x-2)(x+3) - 4(x-3)(x+3)$$
$$= 4x - 12 + 6x^2 + 6x - 36 - 4x^2 + 36 = 2x^2 + 10x - 12 = 0 \to x = 1, -6$$

سوال ۱۴۰: (فوق‌العاده ساده!!!)

با توجه به روش کرامر:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ b & 2 & 4 \\ c & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}$$