

۱-۱ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x|$ و $y = 5 - |x-1|$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

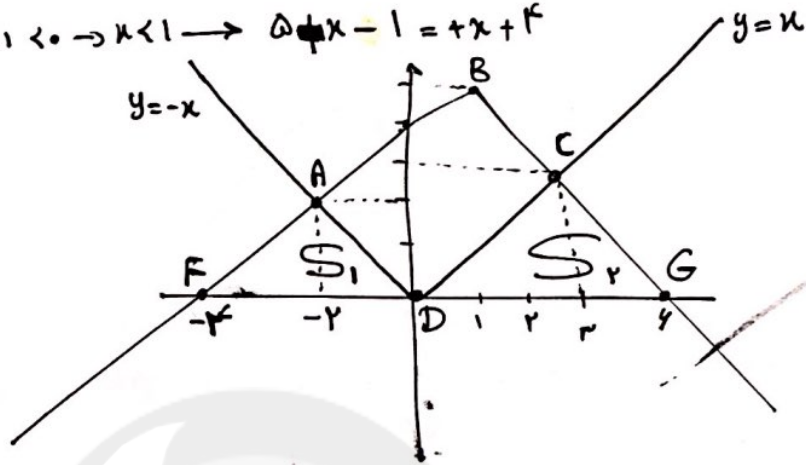
۹ (۲)

۸ (۱)

ابتدا دو تابع را رسم می کنیم

$$y = 5 - |x-1| = \begin{cases} x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow 5-x+1 = 4-x = y \\ x-1 < 0 \rightarrow x < 1 \rightarrow 5-x-1 = 4-x = y \end{cases}$$

$$y = |x| = \begin{cases} x > 0 \rightarrow y = x \\ x < 0 \rightarrow y = -x \end{cases}$$



حل بخورد

تابع $y = 5 - |x-1|$

با محور x ها $\rightarrow 5 - |x-1| = 0 \rightarrow 5 = |x-1| \Rightarrow x-1 = \pm 5$

$$\begin{cases} x-1 = 5 \rightarrow x = 6 \\ x-1 = -5 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

کل بخورد دو طرف $\begin{cases} x = -x+4 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2 \\ -x = x+4 \rightarrow -2x = 4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$ مساحت $\Rightarrow S_{ABCD} = S_{BFG} - S_1 - S_2$

$$S_{BFG} = \frac{5 \times 10}{2} = 25 \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \\ S_2 = \frac{4 \times 4}{2} = 8 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 25 - 8 - 8 = 9 \rightarrow \text{گزینه ۴}$$

۱-۲ یک قایق کاملاً بادی، روزانه ۵ درصد بادش را از دست می دهد. باد این قایق پس از چند روز، به نصف باد روز اول می رسد؟ $(\log 19 = 1,287, \log 2 = 0,301)$

۲۵ (۴)

۲۱,۵ (۳)

۱۸,۵ (۲)

۱۷ (۱)

روز اول $a \left(\frac{95}{100}\right)$ روز دوم $\left(\frac{95}{100}\right)^2 a$ روز سوم $\left(\frac{95}{100}\right)^3 a$... روز n $\left(\frac{95}{100}\right)^n a$

\Rightarrow روز $n = \frac{a}{P}$ صورت سوالات $\frac{a}{P} = \left(\frac{95}{100}\right)^n a \Rightarrow \frac{1}{P} = \left(\frac{95}{100}\right)^n \Rightarrow P = \left(\frac{100}{95}\right)^n$

$\xrightarrow{\log} \log P = \log \left(\frac{100}{95}\right)^n = n \log \frac{100}{95} = n (\log 100 - \log 95) = n (2 - \log 95)$

$\Rightarrow 1,301 = n (2 - \log 95) \Rightarrow 1,301 = 0,018 n \Rightarrow n = 21,5 \rightarrow \text{گزینه ۳}$

۲ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندس خاکن ۰۹۱۳۰۹۱۳۵۵۷

۱۰۳- از رابطه $\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$ مقدار لگاریتم $\log(x+5)$ در پایه ۴ کدام است؟
 (۱) ۰٫۵ (۲) ۰٫۷۵ (۳) ۱٫۲۵ (۴) ۱٫۵

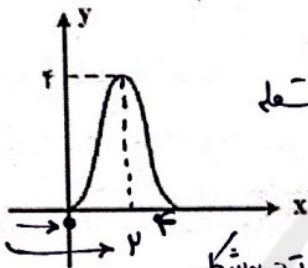
$$\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1) \Rightarrow \log(x+2)(2x-1) = \log(4x+1)$$

$$\Rightarrow (x+2)(2x-1) = 4x+1 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 4x+1 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$$

باقی بهمانه ← وق $\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 49 \rightarrow x_1 = \frac{+1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2$

$x_2 = \frac{-1-7}{4} = -2 \rightarrow \log\left(\frac{2(-2)-1}{-4}\right) \rightarrow -1$

گزینه ۴ $\Rightarrow \log_4(2x+5) = \log_4 2\left(\frac{2}{4}\right) + 5 = \log_4 8 = \log_4 2^3 = \frac{3}{4} \log_4 2^4 = \frac{3}{4} = 0,75$



۱۰۴- شکل زیر نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ در بازه $(0, 4)$ است. b کدام است؟

مرکز بازه ۲ است که نقطه max می باشد
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

باقی به صورت مساله

$$\begin{cases} f(0) = 0 \rightarrow x=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = a + b \cos 0 = a + b \\ f(2) = 4 \rightarrow x=2 \rightarrow y=4 \Rightarrow 4 = a + b \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right) \end{cases}$$

باقی به شکل

$$\Rightarrow a - b = 4 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 4 \end{cases} \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \rightarrow 2 + b = 0 \rightarrow b = -2$$

گزینه ۲

۱۰۵- معادله $(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) = 2$ چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

از تغییر متغیر استفاده می کنیم

$$\boxed{x^2 - 2x = t} \Rightarrow t^2 - t = 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \rightarrow x^2 - 2x = -1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ t = 2 \rightarrow x^2 - 2x = 2 \rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-2) = 12 \end{cases}$$

سه دوریه متمایز

در کل ۳ ریشه ← گزینه ۳

۳ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندسی خارکن ۵۵۷ ۰۹۱۳ ۰۹۱۳

۱-۶ اگر $f(x) = x + |x|$ و $g(x) = |x+1| + 1$ ؛ آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $[0, 2)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

اگر $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{x+(-x)}{|x+1|+x} = \frac{x-x}{|x+1|+x} = \frac{0}{|x+1|+x} = 0$

اگر $x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow \frac{f}{g} = \frac{x+x}{x+1+1} = \frac{2x}{x+1} = 2 \frac{x}{x+1} = 2 \frac{x+1-1}{x+1} = 2(1 - \frac{1}{x+1})$

$2(1 - \frac{1}{x+1}) = 2 - \frac{2}{x+1}$
 حواره کمتر از ۲
 $f(0) = 0$
 $f(\infty) = 2 - 0 = 2$
 $\Rightarrow R_f = [0, 2)$

۱-۷ کدام یک از تابع های زیر، یک به یک است؟

- (۱) $f(x) = x + \sqrt{x}$ (۲) $g(x) = x - \sqrt{x}$ (۳) $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$ (۴) $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$

اگر تابع حواره معکوس یا حواره تروی باشد 2 تا 1 یک به یک می باشد و اگر تابع طرای مشق

مشق یا غیره معنی باشد یک به یک است
 یک به یک \rightarrow حواره \rightarrow $D_f: x > 0$
 $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 گزینه ۱

در بعضی نقاط $g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 معنی در بعضی نقاط $+f$
 $h'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$
 $h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^3}$
 $h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
 گزینه ۲

۱-۸ جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x + \sin 4x + \sin^2 2x = 1$ کدام است؟

- (۱) $k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۲) $(2k+1)\frac{\pi}{6}$ (۳) $k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۴) $\frac{k\pi}{6}$

نکته $\sin^2 a \sin^2 b = \frac{1}{4} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
 $\cos - \alpha = \cos \alpha$
 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 2x \sin^2 4x = \frac{1}{4} [\cos(-2x) - \cos 6x] = \frac{1}{4} [\cos 2x - \cos 6x]$

$\sin^2 2x \sin^2 4x + \sin^2 x = 1$
 $\frac{1}{4} [\cos 2x - \cos 6x] + \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$
 $\frac{1}{4} [\cos 2x - \cos 6x] = \cos^2 x$
 $\cos 2x - \cos 6x = 4 \cos^2 x$

نکته $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$
 $2 \cos^2 x - 1 - \cos 6x = 4 \cos^2 x$

$\Rightarrow \cos 6x = -1 \rightarrow 6x = (2k+1)\pi \rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{6}$

۱۰۹ - حاصل $\cos^{-1}(\frac{2}{3} \cot \frac{11\pi}{3})$ کدام است؟

$\frac{5\pi}{6}$ (۴) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $-\frac{\pi}{6}$ (۲) $-\frac{\pi}{3}$ (۱)

\checkmark $\cos^{-1} - \alpha = \pi - \cos^{-1} \alpha$

$\cos^{-1}(\frac{2}{3} \cot \frac{11\pi}{3}) = \cos^{-1}(\frac{2}{3} \cot(2\pi - \frac{\pi}{3})) = \cos^{-1}(\frac{2}{3} x - \cot \frac{\pi}{3}) = \cos^{-1}(\frac{2}{3} x - \frac{\sqrt{3}}{3})$

$\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = \pi - \cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \rightarrow$ \checkmark $\frac{5\pi}{4}$

۱۱۰ - حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ کدام است؟

$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\sin x + \cos x)^2 \rightarrow \sqrt{1 + \sin 2x} = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x|$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{2}}{|\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}|} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{0 - 2 \tan \frac{\pi}{2} (1 + \tan^2 \frac{\pi}{2})}{\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{-2(-1)(1+(-1)^2)}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$= \frac{+4}{-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$

تابع \sin و \cos در ربع دوم به ترتیب نزولی و صعودی هستند.

۱۱۱ - اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - |x| + |x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

$\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

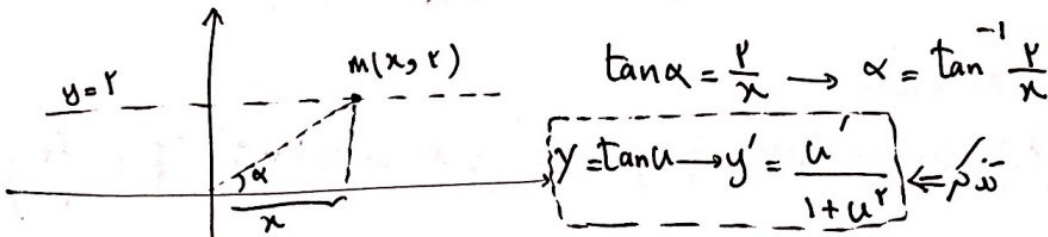
$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \xrightarrow{\text{منحصر}} f'_+(1)$ مشتق راست در نقطه $x=1$

\checkmark $x > 1 \rightarrow |x| = x \quad [x] = 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 1 + x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 - 1 + x}}$

$\rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2} \rightarrow$ \checkmark $\frac{3}{2}$

۵ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندسی خارکن ۵۵۷ ۹۱۳ ۰۹۱۳

۱۱۲ - نقطه $M(x, y)$ بر روی خط $y = 2$ متغیر است. زاویه خطی که نقطه M را به مبدأ مختصات وصل کند با جهت مثبت محور x ها، $\alpha(x)$ است. آهنگ تغییرات α نسبت به تغییر x در لحظه $x = 4$ کدام است؟
 -۰٫۲ (۱) -۰٫۱ (۲) ۰٫۰۵ (۳) ۰٫۱۵ (۴)



طبق تذکره $\rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \xrightarrow{x=4} \frac{d\alpha}{dt} = -0.1 \rightarrow$ گزینه ۲

۱۱۳ - به ازای اعداد طبیعی $n \geq n_0$ فاصله نقاط دنباله $\left\{ \frac{2n^2+1}{n^2+2n} \right\}$ از نقطه همگرایی خود، کمتر از 0.02 است.

کوچکترین مقدار n_0 کدام است؟

۹۹ (۴)

۹۸ (۳)

۹۷ (۲)

۹۶ (۱)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+2n} = 2 \leftarrow$ نقطه همگرایی $\Rightarrow \left| \frac{2n^2+1}{n^2+2n} - 2 \right| < \frac{\epsilon}{100}$

$\Rightarrow \left| \frac{2n^2+1-2n^2-4n}{n^2+2n} \right| < \frac{1}{25} \rightarrow \frac{4n-1}{n^2+2n} < \frac{1}{25} \rightarrow n^2+2n > 100n-25$

با چک کردن گزینه ها کمترین n ای $n - 98n + 25 > 0 \rightarrow$

که فاصله بین آن به تکرار است $n=98$ می باشد \leftarrow گزینه ۳

۱۱۴ - دنباله $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \right\}$ به کدام عدد همگرا است؟

$\frac{1}{e}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{e}$ (۲)

\sqrt{e} (۱)

فرض کنید جواب حد A است $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \ln A$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n}} \stackrel{H}{=} \frac{0 - \frac{2}{n^3}}{\frac{-1}{n^2}} = \frac{2n^2}{n^3+n}$

$\Rightarrow \lim = 0 \Rightarrow 0 = \ln A \Rightarrow A = 1 \rightarrow$ گزینه ۳

۱۱۵- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-|x|}{x^2-x-6} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در بازه $(2, 3)$ پیوسته است؟

(۱) $\frac{1}{11}$ (۲) $\frac{1}{9}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{6}$

چون می خواهیم تابع در بازه $(2, 3)$ پیوسته باشد باید در نقطه $x=2$ پیوستگی راست داشته باشد

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{x - [x^+]}{x^2 - x - 6} = \frac{x - 2}{x^2 - x - 6} \stackrel{H}{=} \frac{1}{2x-1} \xrightarrow{x=2} \frac{1}{11}$$

$$f(2) = a \Rightarrow a = \frac{1}{11} \rightarrow \text{گزینه ۱}$$

۱۱۶- تعداد نقاط ناپیوسته نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2 - \sqrt{x+4}}{1 + \sqrt{x+1}} + \frac{1}{x+5}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

نقاط ناپیوستگی توابع کسری دیشه های مخرج که داخل دامنه باشد است

$$\sqrt{x+4} \rightarrow x+4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 \quad \text{یا} \quad [-4, \infty)$$

$$1 + \sqrt{x+1} = 0 \rightarrow \sqrt{x+1} = -1 \quad \text{به توان ۳} \rightarrow x+1 = -1 \rightarrow x = -2 \rightarrow \text{داخل دامنه}$$

$$x+5 = 0 \rightarrow x = -5 \notin [-4, \infty)$$

فقط $x = -2$ یک نقطه

۱۱۷- خط راستی بر نمودار تابع $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ مماس شده و از آن عبور می کند شیب این خط کدام است؟

(۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{5}{3}$

خطی که هم در تابع مماس و هم از آن عبور می کند خط مماس در نقطه عطف می باشد

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x \rightarrow y' = 3x^2 - 4x + 3 \rightarrow y'' = 6x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$y'(\frac{2}{3}) = 3(\frac{2}{3})^2 - 4(\frac{2}{3}) = \frac{5}{3} \rightarrow \text{گزینه ۴}$$

نقطه عطف

۷ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندس خارکن ۵۵۷ ۰۹۱۳ ۰۹۱۳

۱۱۸ - خط قائم بر نمودار $f(x) = \frac{\cos 2x}{2 - \sin x}$ در نقطه تلاقی منحنی با محور y ها، نیمساز ناحیه اول را با کدام طول قطع

می کند؟

۰/۵ (۲) ۰/۳ (۳) ۰/۲ (۲) ۰/۱ (۱)

$$\Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{\cos 0}{2 - \sin 0} = \frac{1}{2} \rightarrow (0, \frac{1}{2}) \quad y' = \frac{-2 \sin 2x (2 - \sin x) - \cos 2x (-\cos x)}{(2 - \sin x)^2}$$

$$\Rightarrow y(0) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{شیب قائم} = -f \rightarrow \text{معادله خط قائم} \quad y - \frac{1}{2} = -f(x-0) \Rightarrow y = -\epsilon x + \frac{1}{2}$$

حلی برخورد با نیمساز ربع اول $y=x$

$$\begin{cases} y=x \\ y = -\epsilon x + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = -\epsilon x + \frac{1}{2} \Rightarrow \omega x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{گزینه ۱}$$

۱۱۹ - از رابطه $x + xy^2 + x = y$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $(1, 2)$ کدام است؟

۳/۲ (۴) ۶/۵ (۳) ۴/۵ (۲) ۳/۴ (۱)

$$\frac{0 + y^2 + 1}{\text{شتق نسبت به } x} + \frac{y' + 2xyy'}{y} + 0 = 0 \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=2}} \epsilon + 1 + y' + \epsilon y' = 0 \Rightarrow \omega y' = -5 \Rightarrow y' = -1$$

$$\text{مشتق دوم} \quad \frac{2yy'}{y} + \frac{2yy' + y'' + 2xy'y' + 2xyy''}{y} = 0 \quad \substack{x=1 \\ y=2 \\ y'=-1}$$

$$\Rightarrow -f + y'' + -f + 2 + \epsilon y'' = 0 \Rightarrow \omega y'' = 4 \Rightarrow y'' = \frac{4}{5}$$

۱۲۰ - تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \mathbb{R} مشتق پذیر از مرتبه دوم است. به ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(4-x^2)$ است.

اگر $f^{-1}(1) = -5$ و $f''(1) = -1$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{3})$ کدام است؟

۳ (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

در صورت سوال اشکال ناییبی است $f'(1) = -5$

$$g'(x) = \underbrace{(-2x)}_{\text{اولی}} \underbrace{f'(4-x^2)}_{\text{دومی}}$$

$$g''(x) = \underbrace{-2}_{\text{مشتق اولی}} x \underbrace{f'(4-x^2)}_{\text{دومی}} + \underbrace{(-2x)}_{\text{اولی}} \underbrace{(-2x) f''(4-x^2)}_{\text{مشتق دومی}}$$

$$g''(\sqrt{3}) = \underbrace{-2 \times (-5)}_{-2 \times -5} + \underbrace{(-2\sqrt{3})(-2\sqrt{3}) f''(4-3)}_{-1}$$

$$+10 + (-12) = -2 \rightarrow \text{گزینه ۳}$$

۸ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندس خارکن ۵۵۷ ۰۹۱۳ ۰۹۱۳

۱۲۱- نقطه $M(x,y)$ بر روی منحنی به معادله $y = x\sqrt{x}$ طوری حرکت می کند که فاصله آن از مبدأ مختصات، با

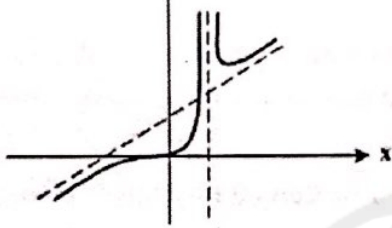
سرعت $\frac{1}{3}$ واحد در ثانیه، زیاد می شود. مقدار $\frac{dx}{dt}$ در نقطه ای به طول ۸، کدام است؟

$$M(x,y) = M(x, x\sqrt{x}) = M(x, x^{\frac{3}{2}}) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (x^{\frac{3}{2}})^2} = \sqrt{x^2 + x^3} \rightarrow x$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx} \times \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{dr}{dx} = \frac{2x + 3x^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x^2 + x^3}} = \frac{x(2 + 3\sqrt{x})}{2x\sqrt{1+x}} = \frac{2 + 3\sqrt{x}}{2\sqrt{1+x}} \quad x=8 \rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{2+3\sqrt{8}}{2\sqrt{9}} = \frac{14}{3}$$

۱۲۲- شکل زیر، نمودار تابع $y = \frac{x^2 + ax^2}{x^2 + bx + 1}$ است. مقدار مینیمم نسبی تابع، کدام است؟



- ۴,۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۶,۲۵ (۳)
- ۶,۷۵ (۴)

۱) چون یک جواب داریم $\Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4 = 0 \rightarrow b = \pm 2$

$b=2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow (x+1)^2 = 0 \rightarrow x = -1$
جواب نامعتبر با طول منفی که مخالف شکل است

۲) $x=0$ تنها نقطه ای است که تابع محور x را قطع می کند

$$y = \frac{x^2(x+a)}{x^2+bx+1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

$x+a=0 \rightarrow x = -a$ این هم غیر باشد $x=0$ محور x را قطع می کند

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3}{(x-1)^2} \rightarrow y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3}{(x-1)^4} = 0 \rightarrow 3x^2(x-1)^2 - 2(x-1)x^3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)(3(x-1) - 2x) = 0 \rightarrow x^2(x-1)(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$$

مقدار متوسط (میانگین) تابع $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$ بر بازه $[1, 4]$ ، کدام است؟

- $\frac{1}{3}$ (۴)
- $\frac{22}{9}$ (۳)
- $\frac{7}{3}$ (۲)
- $\frac{17}{9}$ (۱)

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{4-1} \int_1^4 \frac{2x-1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3} \int_1^4 \left(\frac{2x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$\frac{1}{3} \int_1^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \frac{1}{3} \left(\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_1^4 = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - 4 \cdot 2 \right) = \frac{17}{9}$$

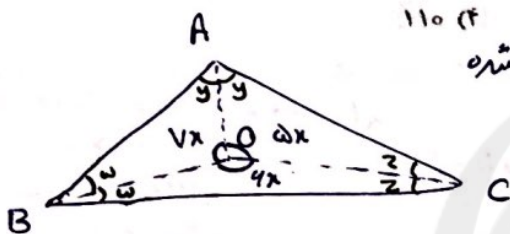
$$\frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - 4 \right) - \left(\frac{4}{3} - 2 \right) = \frac{17}{9} \rightarrow \frac{17}{9}$$

۱۲۴- اگر $F(x) = x \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x^2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ باشد، $F'(\sqrt{3})$ کدام است؟

$$F'(x) = 1 \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x^2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + x \left(2x \frac{1}{\sqrt{(x^2)^2-1}} - 0 \right)$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow F'(\sqrt{3}) = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-1}} = 3 \rightarrow \text{گزینه ۱}$$

۱۲۵- در مثلث ABC نیمسازهای زاویه داخلی، در نقطه O متقاطع اند. اگر زاویه های AOB و BOC و COA متناسب با اعداد ۷ و ۶ و ۵ باشند، بزرگترین زاویه این مثلث چند درجه است؟



چون نسبت زاویه های AOB و BOC و COA در صورت سوال داده شده است می توان آن ها را به ترتیب ۷x، ۶x، ۵x در نظر گرفت

$$7x + 6x + 5x = 360 \Rightarrow 18x = 360 \rightarrow x = 20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{AOB} = 7x = 7(20) = 140 \\ \hat{AOC} = 5x = 5(20) = 100 \\ \hat{BOC} = 6x = 6(20) = 120 \end{cases}$$

$$A+B+C = 180 \Rightarrow 2y + 2w + 2z = 180 \rightarrow y + w + z = 90 \dots (1)$$

$$\hat{AOB} + \hat{BOA} + \hat{BAO} = 180 \Rightarrow 140 + w + y = 180 \rightarrow w + y = 40 \dots (2)$$

$$\hat{AOC} : y + 5x + z = 180 \rightarrow y + z = 140 \dots (3)$$

$$\hat{BOC} : w + 6x + z = 180 \rightarrow w + z = 120 \dots (4)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow z = 50 \Rightarrow \hat{C} = 2z = 100$$

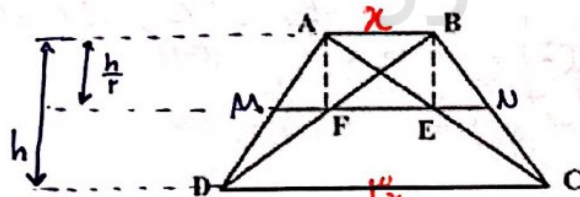
$$(1) \text{ و } (3) \Rightarrow w = 10 \Rightarrow \hat{B} = 2w = 20$$

$$(1) \text{ و } (4) \Rightarrow y = 30 \Rightarrow \hat{A} = 2y = 60$$

بزرگترین زاویه C = 100 → گزینه ۳

۱۲۶- در دوزنقه ABCD، نسبت قاعده ها $\frac{1}{p}$ ، خط واصل به اوساط ساق ها، اقطار دوزنقه را در F و E قطع کرده است.

مساحت چهار ضلعی ABEF، چند برابر مساحت دوزنقه اولیه است؟



- $\frac{2}{9}$ (۱)
- $\frac{1}{6}$ (۲)
- $\frac{2}{16}$ (۳)
- $\frac{1}{4}$ (۴)

طبق خاصیت تقییه ای در دوزنقه MN موازی AB و DC می باشد (صورت مشابه سال ۱۱۰۰)

$$AB \parallel EN, \triangle ABC \xrightarrow{\text{بالتقیه ای}} EN = \frac{1}{p} AB \quad (1)$$

$$FN \parallel DC, \triangle BDC \xrightarrow{\text{بالتقیه ای}} DC = p FN \rightarrow FN = \frac{1}{p} DC \rightarrow FE + EN = \frac{1}{p} DC$$

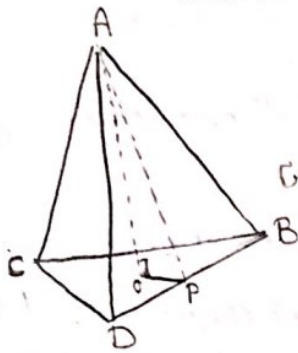
$$(1) \rightarrow FE + \frac{1}{p} AB = \frac{1}{p} DC \rightarrow FE = \frac{1}{p} (DC - AB) \rightarrow FE = \frac{1}{p} (px - x) = x$$

$$\frac{S_{ABEF}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{p} (x+x) \times \frac{h}{p}}{\frac{1}{p} (x+px) h} = \frac{hx}{\cancel{p} hx} = \frac{1}{p} \rightarrow \text{گزینه ۴}$$

۱۰ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندس خارکن ۰۹۱۳۰۹۱۳۵۵۷

۱۲۷- در یک چهار وجهی منتظم، هر وجه آن مثلث متساوی الاضلاع است. طول هر یال آن $2\sqrt{6}$ واحد است. ارتفاع این

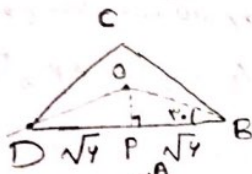
هرم، کدام است؟



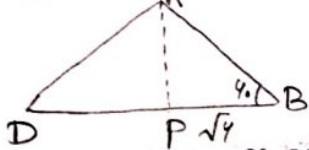
چون هر وجه هر مثلث متساوی الاضلاع است پس در هر وجه میانه ارتفاع و نیم سازهایی می باشد

ارتفاع $h = AO = ?$

$\Delta AOP : AO^2 = AP^2 - OP^2 = (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 = 14 \Rightarrow AO = \sqrt{14}$
گزینه ۴



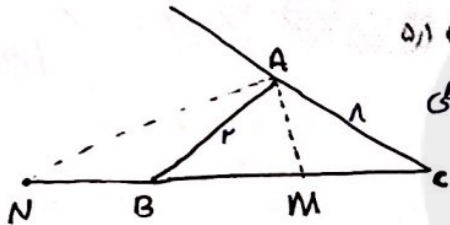
$\tan 30^\circ = \frac{OP}{PB} = \frac{OP}{\sqrt{4}} \rightarrow OP = \sqrt{2}$



$\tan 40^\circ = \frac{AP}{PB} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{AP}{\sqrt{4}} \Rightarrow AP = 3\sqrt{2}$

۱۲۸- در مثلث ABC، طول اضلاع BC=9 و AC=8 و AB=2 است. نیمسازهای زاویه A ضلع BC را در M و N

قطع می کنند. اندازه MN، کدام است؟



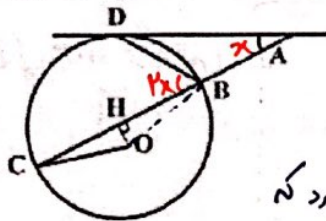
$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{BM}{BM+2} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{BM}{BM+2} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{BM}{9} \Rightarrow BM = \frac{9}{5}$

مقیاس نیمسازهای خارجی $\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC} \rightarrow \frac{2}{8} = \frac{NB}{NC} \rightarrow \frac{2}{8} = \frac{NB}{NC-NB} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{NB}{9} \Rightarrow NB = \frac{9}{2}$

$\Rightarrow NB = \frac{9}{2} \quad NM = NB + MB = \frac{9}{2} + \frac{9}{5} = \frac{15+9}{5} = \frac{24}{5} = 4.8 \rightarrow$ گزینه ۳

۱۲۹- در شکل زیر، AD مماس بر دایره به مرکز O و OH عمود بر AC است. اگر $\widehat{DBC} = 2\widehat{DAC}$ باشد، زاویه

\widehat{COH} چند برابر زاویه \widehat{DAC} است؟



- ۲/۵ (۱)
- ۳ (۲)
- ۳/۵ (۳)
- ۴ (۴)

حل: \widehat{DAB} را x نام گذاری می کنیم
چون OH عمود بر CB است می توان ثابت کرد که زاویه \widehat{COH} نصف \widehat{COB} می باشد حال \widehat{COB} را بدست می آوریم

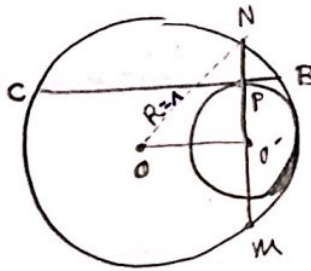
$\widehat{CD} = 2\widehat{B} \Rightarrow \widehat{CD} = 4x$
زاویه مرکزی

زاویه منتهای $\widehat{DAC} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow x = \frac{4x - \widehat{DB}}{2} \Rightarrow \widehat{DB} = 2x \Rightarrow \widehat{CDB} = \frac{\widehat{CD} + \widehat{DB}}{2} = \frac{4x + 2x}{2} = 3x$

زاویه مرکزی $\widehat{COB} \Rightarrow \widehat{COB} = \widehat{CDB} = 3x \Rightarrow \widehat{COH} = \frac{\widehat{COB}}{2} = \frac{3x}{2} = 1.5x = 1.5\widehat{DAB} \rightarrow$ گزینه ۲

11 | حل سوال های کنکور 97 مهندس خارکن 557 913 913

120- دو دایره به شعاع های 4 و 8 واحد، در نقطه A مماس درونی هستند. وتر BC از دایره بزرگ، موازی خط مرکزین و بر دایره کوچک در نقطه P مماس است. اندازه PB x PC کدام است؟



و لغیح است که حاصل دو مرکز $OO' = 8 - 4 = 4$
 و چون BC بر دایره کوچکتر مماسی P مانده است و همچنین $OO' \parallel BC$ پس $O'N = 4$ و $ON = 8$
 و به خاطر اینکه $OO' \perp BC$ و $PM \perp BC$ است آن را لغیح می کنند $O'N = 4$ و $ON = 8$
 و به خاطر اینکه $OO' \parallel BC$ و $PM \perp BC$ است آن را لغیح می کنند $O'N = 4$ و $ON = 8$
 و به خاطر اینکه $OO' \parallel BC$ و $PM \perp BC$ است آن را لغیح می کنند $O'N = 4$ و $ON = 8$

$PB \times PC = PN \times PM$ (رابطه طولی در دایره)

$ON = 8$ و $O'N = 4$ پس $PN = 8 - 4 = 4$ و $PM = 8 + 4 = 12$
 پس $PB \times PC = 4 \times 12 = 48$

شعاع دایره کوچکتر $OP = 4$

121- بازتاب خط Δ به معادله $2y + x = 6$ نسبت به خط $y = -x$ است. معادله خط Δ' کدام است؟

$y - 2x = 8$ (1) $y + 2x = -2$ (2) $y + 2x = 2$ (3) $y + 2x = -6$ (4)

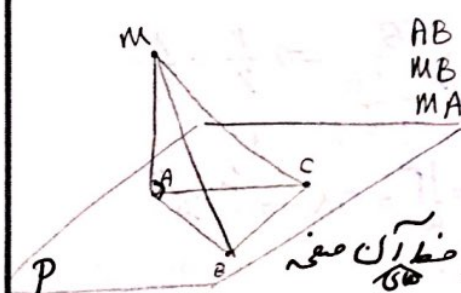
معادله بازتاب نسبت به خط $y = -x$

$R(x, y) = (-y, x) \rightarrow$ بین دو خط به جای y و $-x$ و به جای x و $-y$ قرار می دهیم
 $\Rightarrow -2x - y = 6$
 $\Rightarrow 2x + y = -6$

گزینه 4

122- مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) در صفحه P است. نقطه M خارج صفحه P است. به طوری که $MA \perp AB$ و $MB = MC$ کدام نتیجه گیری نادرست است؟

- MA \perp BC (1)
- MA \perp P (2)
- MA \perp AC (3)
- MA \perp BC (4)



$AB = AC$
 $MB = MC$
 MA مشترک
 $\Rightarrow \Delta MAB \cong \Delta MAC$
 $\Rightarrow \hat{MAB} = \hat{MAC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow MA \perp AC$ (گزینه 3)

وقتی خطی (MA) بر دو خط متقاطع (AB و AC) از صفحه ای (P) عمود باشد بر آن صفحه عمود است $\leftarrow MA \perp P$ و همچنین بر تمام خط های آن صفحه عمود است $\leftarrow MA \perp BC$ (گزینه 4)

123- بردار a با هر یک از دو محور Ox و Oy زاویه 60 درجه و با محور z ها زاویه حاده می سازد. این بردار عمود بر صفحه ای با کدام معادله است؟

$2x + 2y + \sqrt{2}z = 0$ (1)
 $x - \sqrt{2}y + z = 0$ (2)
 $x + y + \sqrt{2}z = 0$ (3)

زاویه α با محور Ox $\rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (\sqrt{2})^2}} = \frac{2}{3}$
 زاویه β با محور Oy $\rightarrow \cos \beta = \frac{2}{3}$
 زاویه γ با محور Oz $\rightarrow \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{3}$

همان صورت سوال منفرد

وقتی برداری بر صفحه عمود باشد باید در تمام آن صفحه موازی است که تنها گزینه صحیح گزینه 3 می باشد

۱۳۴- اگر $a = (2, -3, 1)$, $b = (1, 2, -4)$ باشند. حجم متوازی السطوحی که بر روی سه بردار a و b و $a \times b$ ساخته شود، کدام است؟

۲۲۵ (۱) ۲۳۰ (۲) ۲۴۵ (۳) ۲۵۰ (۴)

جمع متوازی السطوح = حجم
بانه بردار a و b و $\frac{a \times b}{c}$

$$V = |a \cdot (b \times c)| \Rightarrow V = |(a \times b) \cdot \frac{(a \times b)}{c}| = |a \times b|^2$$

$$a \times b = (2, -3, 1) \times (1, 2, -4) = (1, 9, 7) \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{1 + 81 + 49} \Rightarrow |a \times b| = 10 \Rightarrow 100 \Rightarrow 225$$

۱۳۵- کوتاهترین فاصله بین دو خط به معادلات $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ و $\frac{x-1}{3} = -y+4 = \frac{z}{5}$ ، کدام است؟

۲۱ (۱) $\frac{4}{\sqrt{10}}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴)

خط اول $\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \rightarrow A(2, 5, 1)$
خط دوم $\begin{cases} u_2 = (3, -1, 5) \\ B(1, 4, 0) \end{cases}$

کوتاهترین فاصله بین دو خط موازی
همان طول عمود مشترک می باشد
دو خط باید در جای هادی
 u_1 و u_2 و نقاط A و B

$$\text{طول عمود مشترک} = \frac{|AB \cdot (u_1 \times u_2)|}{|u_1 \times u_2|}$$

استاده از فرمول

$$\Rightarrow \frac{|(1, 4, 0) \cdot (1, 3, 0)|}{|(1, 3, 0)|} = \frac{4}{\sqrt{10}} \rightarrow 21$$

۱۳۶- به ازای کدام مقدار a خط هادی سهمی $0 = x^2 - 12y + ax + 8$ ، به معادله $x = \frac{21}{8}$ است؟

۱۲ و ۳ (۱) ۱۶ و ۲ (۲) ۱۲ و ۵ (۳) ۱۶ و ۵ (۴)

$$2(y^2 - 4y + 9 - 9) = -ax - 8 \Rightarrow 2(y - 3)^2 - 18 = -ax - 8 \Rightarrow 2(y - 3)^2 = -ax + 10$$

$$(y - 3)^2 = \frac{-a}{2}x + \frac{5}{1}$$

$$(y - 3)^2 = \frac{-a}{2}(x - \frac{10}{a})$$

سهمی افقی $\Rightarrow (a-5)(a-14) = 0 \Rightarrow a=5$ یا $a=14$

نقطه $P(x, y)$ $\Rightarrow x = \alpha - \beta \Rightarrow \frac{21}{8} = \frac{10}{a} + \frac{a}{2}$

۱۳۷- به ازای کدام مقدار a فاصله کانون های مقطع مخروطی $0 = 3x^2 + 4y^2 + 16y + a$ برابر ۲ می باشد؟

۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

استاده از فرمول
به فرم استاندارد

$$3x^2 + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) = a \rightarrow 3x^2 + 4((y+2)^2 - 4) = a$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 4(y+2)^2 = a + 16 \Rightarrow \frac{3x^2}{a+16} + \frac{4(y+2)^2}{a+16} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\frac{a+16}{3}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{a+16}{4}} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 1 = \frac{a+16}{3} - \frac{a+16}{4} = \frac{-4a+44+3a-16}{12} = \frac{-a+28}{12}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{-a+28}{12} \Rightarrow a = 16$$

۱۳ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندس خارکن ۵۵۷ ۰۹۱۳ ۰۹۱۳

۱۳۸- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟

$A \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) ۲۴
 $B \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (۴) ۲۴
 $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (۸) ۴۸
 برای محاسبه درایه های قطر اصلی C^2 کافی است سطر اول در ستون اول + سطر دوم در ستون دوم + سطر سوم در ستون سوم + سطر چهارم در ستون چهارم را حساب کنیم.

گزینه ۱ $\rightarrow 14 = 14 \times 1 \Rightarrow$ جمع درایه ها + سطر چهارم \times ستون چهارم را حساب کنیم

۱۳۹- مقادیر x از رابطه $\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟

$\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$
 نسبت به سطر اول $\Rightarrow - (x-2) \{ 0 - 1 - 6(x+2) \} + (x-2)(4)(x+3) = 0$
 $- (x-2)x^2(x+2) + 4(x^2+x-4) = 0$
 $\Rightarrow -4(x^2-x-4) + 4(x^2+x-4) = 0$
 $\Rightarrow 2x^2 + 10x - 12 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 5x - 6 = 0 \rightarrow (x-1)(x+6) = 0 \rightarrow x = -6, x = 1$

۱۴۰- سه صفحه با معادلات ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر $\begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ b & 2 & 2 \\ c & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$ باشد، سه صفحه با کدام طول متقاطع اند؟

بفرستیم معادله سه مجهول \Rightarrow طول متقاطع صاف \Rightarrow حل شود $\leftarrow x$
 $x = \frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 3 \\ b & 2 & 2 \\ c & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}$
 گزینه ۳

۱۴ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندس خارکن ۰۹۱۳۰۹۱۳۵۵۷

۱۴۱- داده های آماری دو رقمی مفروض را با نمودار جعبه ای نشان می دهیم. اختلاف میانه از میانگین داده های داخل جعبه کدام است؟

ساله	برج							
۴	۰	۱	۱	۳	۴	۵	۸	۹
۵	۱	۲	۲	۴	۶	۷	۸	
۶	۰	۲	۳	۳	۴	۶		

ابتدا داده ها را بصورت زیر مرتب می کنیم چون تعداد داده ها فرد (۲۱) است داده ۱۱ ام میانه یا همان Q_2 می باشد همچنین میانگین داده پنجم ام و ششم ام میانه داده های کمتر از Q_2 یا همان Q_1 است همچنین میانگین داده ۱۲ و ۱۳ یعنی یعنی Q_3 میانه داده های بیشتر از Q_2 هستند پس مطابق زیر داده های داخل جعبه به ترتیب: ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱

حال برای راحتی حسابات از تمام اعداد داخل جعبه عددی دلخواه مثلاً ۵۰ کم می کنیم و سپس میانگین را صادر کرده و با حاصل آن اضافه می کنیم (حالت میانگین) و روش سریع میانگین داخل جعبه = $\frac{-7-4-3-1+0+2+4+3+6+8}{11} = \frac{10}{11} = 0.9 \rightarrow \bar{x} = 52 + 0.9 = 52.9$ از میانگین $Q_1 = 44.5$ و $Q_3 = 41$

۱۴۲- در جدول فراوانی داده های آماری زیر، انحراف معیار، با روشی سریع، کدام است؟

x	۲۷	۲۹	۳۱	۳۳	۳۵
f	۴	۷	۱۰	۱۳	۹

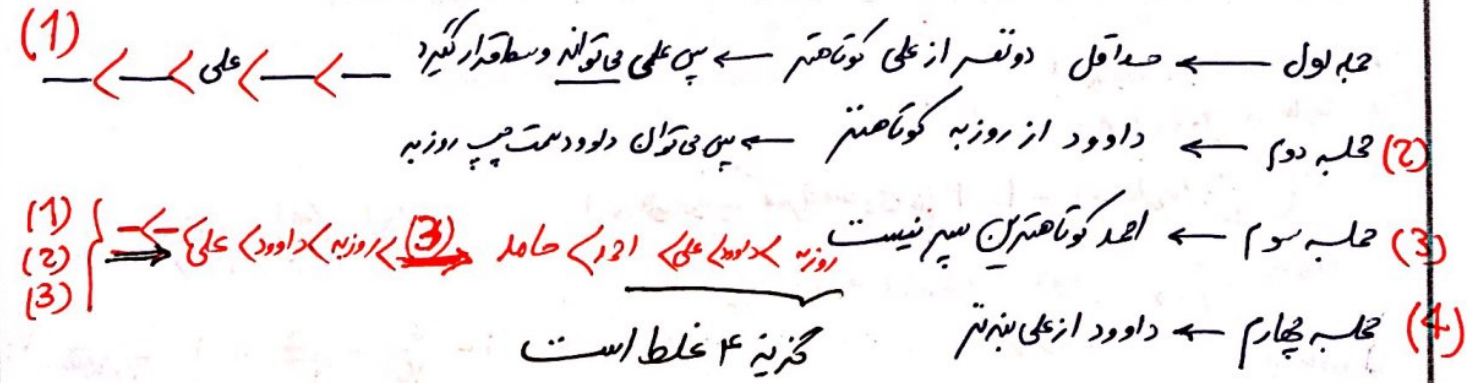
ابتدا از داده ها ۳۱ (یعنی میانه) کم می کنیم

$$\bar{x} - 31 = \frac{-4 \times 7 + (-2) \times 10 + 0 \times 13 + 2 \times 11 + 4 \times 9}{50} = \frac{10}{50} = 0.2 \rightarrow \bar{x} = 31 + 0.2 = 31.2$$

$$s^2 = \frac{(-6)^2 \times 7 + (-2)^2 \times 10 + (0)^2 \times 13 + (1)^2 \times 11 + (3)^2 \times 9}{50} = \frac{338}{50} = 6.76 \Rightarrow s = \sqrt{6.76} = 2.6 \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

حسابات بدون کمک ماشین حساب!!!

۱۴۳- علی، احمد، روزبه، داود و حامد بر حسب اندازه قد مرتب می شوند. می دانیم که حداقل دو نفر آنان از علی کوتاهتر هستند - داود از روزبه کوتاهتر است - احمد کوتاهترین پسر نیست - داود از علی بلندتر است. کدام نتیجه گیری نادرست است؟
 (۱) روزبه بلندتر از علی (۲) داود بلندتر از احمد (۳) احمد بلندتر از حامد (۴) احمد بلندتر از علی



۱۵ | حل سوال های کنکور ۹۷ مهندس خاکن ۵۵۷ ۰۹۱۳ ۰۹۱۳

۱۴۴- اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه $(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B'))$ برابر کدام است؟

تاریخچه

$(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B'))$
 $(A \cap B) \cup (A \cap A') \cup (B \cap A') \cup (B \cap B')$
 $(A \cap B) \cup \emptyset \cup (B - A) \cup \emptyset$
 $(A \cap B) \cup (B - A) = B$

گزینه ۳

۱۴۵- رابطه $R = \{(a, b) : |2a - b| \leq 3\}$ بر روی مجموعه $A = \{1, 3, 5, 7\}$ تعریف شده است. تعداد عضوهای این رابطه، کدام است؟

نسبتاً a را یکی از حالت در نظر می گیریم و بار بار بررسی می کنیم

$a = 1 \rightarrow |2 - b| \leq 3 \rightarrow b = 1, 5$ (۲ عضو)
 $a = 3 \rightarrow |6 - b| \leq 3 \rightarrow b = 3, 5, 7$ (۳ عضو)
 $a = 5 \rightarrow |10 - b| \leq 3 \rightarrow b = 7$ (۱ عضو)

مجموعاً ۷ عضو
گزینه ۲

۱۴۶- مجموعه $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ را به چند طریق می توان، به دو مجموعه سه عضوی و یک مجموعه تک عضوی افراز کرد. به طوری که فاقد $\{a\}$ باشد؟

مرحله سوم (۳) ۵۶
مرحله دوم (۲) ۵۰
مرحله اول (۱) ۴۵

وقت کمینه منتهی کنه که a در مرحله دوم
به مرحله سوم انتخاب شود
اگر a در مرحله سوم انتخاب می شه

$\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 20 \times 3 \times 1 = 60$
 $\binom{6}{3} \times \binom{2}{2} \times \binom{1}{1} = 20 \times 1 \times 1 = 20$

گزینه ۲

۱۴۷- ظرف A شامل ۵ مهره با شماره های یک رقمی فرد و ظرف B دارای ۴ مهره با شماره های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال حاصل ضرب آن ها از ۱۰ بیشتر است؟

$P(A) = \frac{1}{20}$ (۱)
 $P(B) = \frac{1}{10}$ (۲)
 $P(B) = \frac{3}{20}$ (۳)
 $P(A) = \frac{7}{20}$ (۴)

$P(\text{حاصل ضرب کمتر یا مساوی ۱۰}) = 1 - P(\text{حاصل ضرب بیشتر از ۱۰})$
 $P(\text{حاصل ضرب بیشتر از ۱۰}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
 $P(\text{حاصل ضرب کمتر یا مساوی ۱۰}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$

گزینه ۴

۱۴۸- سه نفر مشغول رمزگشایی یک پیام هستند. احتمال موفقیت آن‌ها به ترتیب $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{4}$ است. با کدام احتمال

لااقل یکی از آنان موفق می‌شود؟

راه اول $\frac{23}{24}$ (۴) $\frac{11}{12}$ (۳) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{19}{24}$ (۱)

$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - (1 - \frac{2}{3})(1 - \frac{3}{4})(1 - \frac{1}{4}) = \frac{23}{24}$

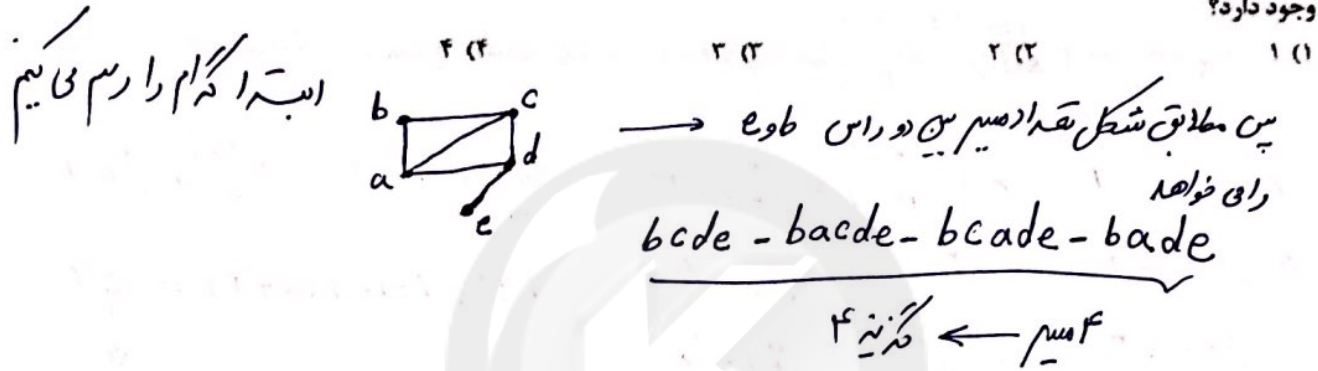
لااقل یکی قبول شود
همگی کلام قبول نشوند
گزینه ۴

۱۴۹- دنباله درجه رأس‌های یک گراف به صورت ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ می‌باشد. چند مسیر متمایز بین دو رأس با درجه‌های ۱ و ۲ وجود دارد؟

راه دوم $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \dots$

ملازمتی
در این مسائل

ب e
↑ ↑
۱۴۹- دنباله درجه رأس‌های یک گراف به صورت ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ می‌باشد. چند مسیر متمایز بین دو رأس با درجه‌های ۱ و ۲ وجود دارد؟



۱۵۰- عدد پنج رقمی $N = a746b$ مضرب ۳۶ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم بزرگ‌ترین عدد N بر ۱۱، کدام است؟

عددی مضرب ۴ است که در رقم آخر آن مضرب ۴ باشد

$N = \overline{a746b} \rightarrow$ مضرب ۳۶ \rightarrow مضرب ۴ $\rightarrow 4 \mid b \rightarrow b=0, 4, 8$

مضرب ۹ \rightarrow مضرب ۳ $\rightarrow a+b+7+4+4+b \equiv 0 \pmod{3}$

$\begin{cases} a+b=1 \rightarrow b=0 \rightarrow a=1 \\ a+b=10 \rightarrow b=4 \rightarrow a=6 \\ a+b=13 \rightarrow b=8 \rightarrow a=5 \end{cases}$

چون ۳ خواص N بزرگترین عدد a را ۴ و b را ۴ انتخاب می‌کنیم (*) $N = 47464$

باقیمانده تقسیم ۱۱ $4-7+4-4+4 = 1$

۱۵۱- باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی A بر عدد ۲۲ برابر ۵ و باقی‌مانده تقسیم دو برابر عدد A بر عدد ۱۷ برابر ۹ می‌باشد. باقی‌مانده تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه رقمی A بر عدد ۱۲، کدام است؟

$A = 22k + 5$ \rightarrow $2A = 44k + 10$

$2A = 17k' + 9$ \rightarrow $2A = 17k' + 9$

$44k + 10 = 17k' + 9 \rightarrow 17k' - 44k = 1$

معادله ساید را حل می‌کنیم

$k' = \frac{44k + 1}{17}$ \rightarrow $k_0 = 7 \Rightarrow k' = 19$

برای حل معادله ساید است. یک جواب دلخواه بدست می‌آوریم

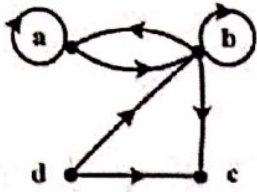
$k = k_0 + \frac{17}{44}q \Rightarrow k = 7 + 17q \rightarrow A = 22k + 5 = 22(7 + 17q) + 5$

$d = (a, b) = (17, -44) = 1$

$\Rightarrow A = 3919 + 44q$ \rightarrow $A = 9481$

بزرگ‌ترین عدد سه رقمی بدست

۱۵۲- شکل زیر، گراف جهت دار رابطه R است. تعداد یک‌ها، در درایه ماتریس مجاورت M(ROR) کدام است؟



- ۷ (۱)
- ۸ (۲)
- ۹ (۳)
- ۱۰ (۴)

نکته $M(ROR) = [M(R)]^2$

$$M(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow [M(R)]^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{۹ درایه یک} \\ \text{گزینه ۳}$$

۱۵۳- تعداد جواب‌های صحیح و غیرمنفی نامعادله $x+y+z \leq 5$ ، کدام است؟

- ۶۰ (۴)
- ۵۶ (۳)
- ۵۴ (۲)
- ۵۰ (۱)

$$\begin{aligned} x+y+z=1 &\rightarrow \binom{1+3-1}{3} = \binom{3}{3} = 1 & x+y+z=0 &\rightarrow \binom{0+3-1}{3} = 1 \\ x+y+z=2 &\rightarrow \binom{2+3-1}{3} = \binom{4}{3} = 4 & & \\ x+y+z=3 &\rightarrow \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10 & & \\ x+y+z=4 &\rightarrow \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20 & & \\ x+y+z=5 &\rightarrow \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35 & & \end{aligned}$$

$1+4+10+20+35 = 70$
گزینه ۴

۱۵۴- یک تاس را به تکرار پرتاب می‌کنیم. احتمال ظاهر شدن عدد ۴ قبل از آمدن عدد ۶، کدام است؟

- $\frac{3}{4}$ (۴)
- $\frac{2}{3}$ (۳)
- $\frac{1}{2}$ (۲)
- $\frac{1}{3}$ (۱)

در اولین پرتاب: $\frac{1}{6}$ یا در دومین پرتاب: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ یا در سومین پرتاب: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ یا در چهارمین پرتاب: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ یا در پنجمین پرتاب: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ یا در ششمین پرتاب: $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \dots = \sum_{\infty} = \frac{a}{1-a}$$

$$\Rightarrow \sum_{\infty} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5} \rightarrow \text{گزینه ۲}$$

۱۵۵- به ازای کدام مقدار a، تابع $P(X=x) = \frac{\binom{5}{x} \binom{4}{3-x}}{a}$ ، یک تابع احتمال است؟

- ۸۴ (۴)
- ۶۴ (۳)
- ۵۶ (۲)
- ۴۸ (۱)

مجموع احتمالها = 1 $\rightarrow P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$

$$\frac{\binom{5}{0} \binom{4}{3}}{a} + \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2}}{a} + \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{1}}{a} + \frac{\binom{5}{3} \binom{4}{0}}{a} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 \times 4 + 5 \times 6 + 10 \times 4 + 10 \times 1}{a} = 1 \rightarrow a = 14 \rightarrow \text{گزینه ۳}$$