پاسخ تشریحی کنکوری سراسری ۹۷ - رشته تجربی

سوالات ریاضی

دکتر یاسین گیلاسی

سوال ۱۲۶: (فوق‌العاده ساده!!!)

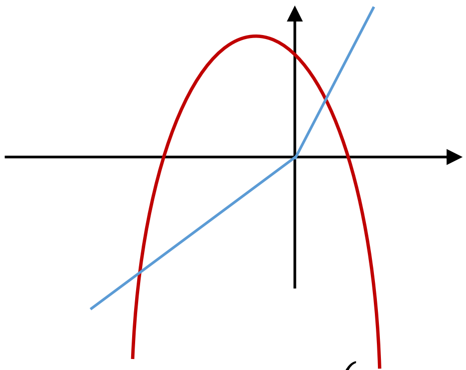
نکته: قرینه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$، جای x و y رو عوض می‌کنه!

$$(x,y)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به خط } y=x}(y,x)=(x',y')\rightarrow\begin{cases}x=y'\\ y=x'\end{cases}$$

$$3y-2x=4\rightarrow 3x'-2y'=4\rightarrow\frac{3x'-4}{2}=y'\rightarrow \text{عرض از مبدا}=-2$$

سوال ۱۲۷: (متوسط)

ابتدا شکل توابع رو رسم می‌کنیم. با توجه به علامت ریشه‌های تابع درجه دوم و جهت تقعر آن، کافیه نقاط تقاطع دو تابع رو به دست بیاریم:



$$y=2x+|x|=\begin{cases}x>0\,;\,y=3x=-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\rightarrow x^2+\frac{7}{2}x-\frac{9}{2}=0\rightarrow x=-\frac{9}{2},1\\ x<0\,;\,y=x=-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\rightarrow x^2+\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}=0\rightarrow x=-3,\frac{3}{2}\end{cases}$$

با توجه به علامت ریشه‌های حاصل، $a=-3$ و $b=1$، در نتیجه نقطه‌ی وسطشون می‌شه: $\frac{-3+1}{2}=-1$

سوال ۱۲۸: (ساده)

فقط یه قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌خواد. توجه کنید قطر بزرگ متوازی‌الاضلاع، می‌افته بین دو ضلعی که با هم زاویه‌ی ۱۲۰ درجه دارن. پس:

$$x^2=\left(5-\sqrt{6}\right)^2+\left(5+\sqrt{6}\right)^2-2\left(5-\sqrt{6}\right)\left(5+\sqrt{6}\right)\cos 120^\circ$$
$$=25+6-10\sqrt{6}+25+6+10\sqrt{6}+(25-6)=62+19=81\rightarrow x=9$$

سوال ۱۲۹: (فوق‌العاده ساده!!!)

$$A^2=\begin{bmatrix}-1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&6\\9&22\end{bmatrix}\rightarrow \text{مجموع درایه ها}=7+6+9+22=44$$

سوال ۱۳۰. (ساده)

مرکز دسته‌ی مورد نظر، ۲۲ هست. لذا کافیِ a رو حساب کنیم. برای سادگی از همه‌ی مرکز دسته‌ها ۱۸ واحد کم می‌کنیم و طبعاً از مقدار میانگین هم ۱۸ واحد کم می‌شه:

$$18-18=0=\frac{2(7-18)+5(12-18)+8(17-18)+a(22-18)+4(27-18)}{2+5+8+a+4}$$
$$=\frac{-22-30-8+4a+36}{19+a}=\frac{4a-24}{19+a}=0\rightarrow a=6\rightarrow \text{درصد فراوانی}=\frac{6\times 100}{19+6}=24\%$$

سوال ۱۳۱: (متوسط)

کافیه فرمولای مربوط رو بنویسیم: (x طول ضلع مربع‌هاست)

$$CV=\frac{\sigma}{E(x)}\rightarrow\frac{6}{100}=\frac{\sigma}{25}\rightarrow\sigma=\frac{3}{2}\rightarrow\sigma^2=\frac{9}{4}=E(x^2)-E(x)^2\rightarrow E(x^2)=\frac{9}{4}+25^2=627/25$$

سوال ۱۳۲: (فوق‌العاده ساده!!!)

مضارب ۴ که بشه با دو تا تاس ساخت اعداد ۴ و ۸ و ۱۲ هستن. برای هر کدوم حالت‌های تشکیلشون رو می‌نویسیم:

$4=1+3,3+1,2+2$ (۳ حالت)

$8=2+6,6+2,5+3,3+5,4+4$ (۵ حالت)

$12=6+6$ (۱ حالت)

کل حالت ها $=6\times6$

احتمال $=\frac{3+5+1}{6\times6}=\frac{1}{4}$

سوال ۱۳۳: (متوسط)

سه تا شرط داره، اول اینکه دلتا مثبت باشه تا دو ریشه حاصل بشه. دوم اینکه جمع ریشه‌ها منفی بشه و سوم اینکه ضرب ریشه‌ها مثبت بشه تا هر دو ریشه منفی باشند:

$$\Delta=(-2m)^2-4(-3)(m-6)=4m^2+12m-72\rightarrow m^2+3m-18>0\rightarrow(m-3)(m+6)>0$$
$$\rightarrow m>3 \text{ یا } m<-6$$

ضرب ریشه ها $>0\rightarrow\frac{c}{a}=\frac{-3}{6-m}>0\rightarrow m-6<0\rightarrow m<6$

جمع ریشه ها $<0\rightarrow-\frac{b}{a}=\frac{2m}{6-m}<0\rightarrow$ چون $6-m<0$ پس $2m>0\rightarrow m>0$

اشتراک هر سه شرط می‌شه: $3<m<6$

سوال ۱۳۴: (ساده)

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}=2\rightarrow\sin x-\cos x=2\sin x+2\cos x\rightarrow\sin x=-3\cos x$$
$$\rightarrow\tan x=-3$$

سوال ۱۳۵: (ساده)

یه تغییر متغیر می‌خواد:

$$2x-3=t\rightarrow x=\frac{1}{2}(t+3)\rightarrow f(t)=4\left(\frac{1}{2}(t+3)\right)^2-14\left(\frac{1}{2}(t+3)\right)+13$$
$$=(t^2+6t+9)+(-7t-21)+13=t^2-t+1$$

سوال ۱۳۶: (ساده)

اگر مشتقتون خوبه که از اول هوپیتال بگیرین و اگر نه، می‌شه به سادگی رفع ابهام کرد. مخرج رو در مزدوجش ضرب کنید و صورت رو تجزیه!

$$\lim_{x\to 4}\frac{3x^2-10x-8}{\sqrt{3-\sqrt{x}}-1}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(3x+2)\left(\sqrt{3-\sqrt{x}}+1\right)}{3-\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(14)(2)}{2-\sqrt{x}}=-112$$

سوال ۱۳۷: (متوسط)

شرط پیوستگی: $f(3^-)=f(3^+)$

$$\to 3a+2^{3-3}=a\log_2 4=2a\to a=-1$$

برای یافتن $f(2)$ از ضابطه‌ی بالا استفاده می‌کنیم:

$$f(2)=2a+2^{2-3}=-2+\frac{1}{2}=-1.5$$

سوال ۱۳۸: (متوسط)

$$(\sin^4 x+\cos^4 x)'=4\sin^3 x\cos x-4\cos^3 x\sin x=4\sin x\cos x\,(\sin^2 x-\cos^2 x)$$
$$=-2\sin 2x\cos 2x=-2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

سوال ۱۳۹: (ساده)

احتمال اثابت تیر برابر است با $\frac{3}{4}$. حداقل ۴ تیر، یعنی یا ۴ تاش برخورد کنه و یکی برخورد نکنه و کلاً هر ۵ تا تیر برخورد کنند. بنابراین داریم:

$$p=\binom{5}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{81}{128}$$

سوال ۱۴۰: (متوسط)

تابع $f(x)=|x-2|+|x-3|$ یک تابع گلدانی شامل سه پاره‌خط به شکل زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} x<2\ ;\ -2x+5\ (\text{آکیداً نزولی}) \\ 2<x<3\ ;\ 1\ (\text{ثابت}) \\ x>3\ ;\ 2x-5\ (\text{آکیداً صعودی}) \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌های حاصل، نقاط برخورد دو تابع در قسمت نزولی اکید قابل محاسبه است:

$$-2x+5=2x^2-x-10\to 2x^2+x-15=0\to x=\frac{-1\pm\sqrt{1+120}}{4}=-3,\frac{5}{2}$$

که با توجه به بازه‌ی $x<2$، تنها مقدار $x=-3$ قابل قبول است.

سوال ۱۴۱: (متوسط)

دنباله‌ی مورد نظر نزولی اکید است. هم میشه با نوشتن چند جمله‌ی اولش به این قضیه پی برد و هم میشه ازش مشتق گرفت:

$$\left(\frac{n^2+n}{3n^2-1}\right)'=\frac{(2n+1)(3n^2-1)-(6n)(n^2+n)}{(3n^2-1)^2}=\frac{-3n^2-2n-1}{(3n^2-1)^2}<0\ (n\in N)$$

بنا براین کران بالای این دنباله جمله‌ی اولش $U_1=1$ و کران پایینش برابر حدش در بینهایت خواهد بود: $\lim_{n\to\infty}U_n=\frac{1}{3}$

بنابراین تفاضل کران پایین و بالا برابر است با: $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

سوال ۱۴۲: (متوسط)

$$f(t)=۴۰=۶۰-۵۰e^{-۰/۲۵t}\to e^{-۰/۲۵t}=۰/۴\to -۰/۲۵t=\ln ۰/۴\to t=-۴\ln ۰/۴=۴\ln ۲/۵$$
$$=۳/۶۴=\text{۳ ماه و ۱۹ روز}$$

سوال ۱۴۳: (متوسط)

$$\tan x\tan ۳x=۱\to \tan x=\frac{۱}{\tan ۳x}=\cot ۳x$$

زوایایی tan و cot با هم برابرن که مجموعشون $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ باشه:

$$x+۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\to x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}$$

سوال ۱۴۴: (متوسط)

شرط مشتق‌پذیری: $f(-۲^-)=f(-۲^+)$ و $f'(-۲^-)=f'(-۲^+)$

$$f(-۲^-)=f(-۲^+)\to -۸-(-۲)=۴a-۲b+۴\to ۲a-b=-۵$$
$$f'(-۲^-)=f'(-۲^+)\to ۳\times ۴-۱=-۴a+b$$
$$\to a=-۳\,,b=-۱\to f(۱)=a+b+۴=۰$$

سوال ۱۴۵: (ساده)

$$\text{مشتق}\to\frac{۱۴x-۲y'}{۲\sqrt{۷x^۲-۲y}}+۲yy'=۰=\frac{۷x-y'}{\sqrt{۷x^۲-۲y}}+۲yy'\xrightarrow{\text{جایگذاری نقطه } (۱,۳)}\frac{۷-y'}{۱}+۶y'=۰\to y'$$
$$=-\frac{۷}{۵}\to \text{شیب خط قائم}=\frac{۵}{۷}$$

سوال ۱۴۶: (سخت)

$$y'=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۴}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}<۰\to\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}\left(۱-\frac{۱}{x}\right)<۰\to\frac{۴(۱-x)}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}\to x<۱$$
$$y''=\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}}+\frac{۸}{۹}x^{-\frac{۵}{۳}}<۰\to\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}}\left(۱+\frac{۲}{x}\right)<۰\to\frac{۴(x+۲)}{۹x\sqrt[۳]{x^۲}}<۰\to -۲<x<۰$$

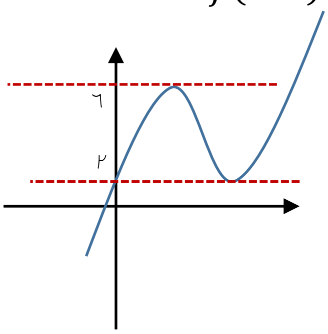
اشتراک میشه $-۲<x<۰$

سوال ۱۴۷: (متوسط)

ابتدا مشتق تابع رو می‌گیریم تا نقاط اکسترممش پیدا بشن و بعدم شکل تقریبی تابع رو ازش به دست می آریم:

$$f'(x)=۰=۳x^۲-۱۲x+۹\to x=۱,۳$$
$$f(+\infty)=+\infty\,,f(-\infty)=-\infty\,,f(۰)=۲\,,f(۱)=۶\,,f(۳)=۲$$

با توجه به شکل، برای $m>۶$ و $m<۲$ معادله‌ی $f(x)=m$ تنها یک جواب خواهد داشت.



سوال ۱۴۸: (متوسط)

$$|MA|^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2 = (2|MO|)^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y = 45 \rightarrow 3(x+1)^2 + 3(y+2)^2 = 45 + 3 + 12 = 60$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 20$$

معادله‌ی فوق، معادله‌ی یک دایره به شعاع $\sqrt{20}$ است که در آن بزرگ‌ترین وتر می‌شه قطر و برابر است با: $2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$

سوال ۱۴۹: (متوسط)

مرکز برابر است با: $O = \frac{F+F'}{2} = (1,2)$

$$2c = |F - F'| = 2\sqrt{5}\,, a = |AO| = 1 \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = 2$$

هذلولی موجود افقی است، پس شیب مجانب‌های آن $\pm\frac{b}{a}$ است و می‌دانیم هر دو مجانب از مرکز هذلولی می‌گذرند. پس داریم:

$$(y-2) = \left(\frac{2}{1}\right)(x-1) = 2x - 2 \rightarrow y = 2x$$

سوال ۱۵۰: (ساده)

یه بخشی از تابع در بازه ۱- تا ۱ فرد است، لذا انتگرال این بخش یا مساحت زیر نمودارش صفر خواهد شود. لذا کافی است مقدار زیر را حساب کنیم:

$$\int_1^5 3dx = 12$$

سوال ۱۵۱: (ساده)

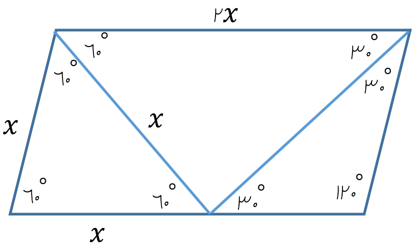
$$\int_1^4 \frac{2x^3 - \sqrt{x}}{x^2}dx = \int_1^4 (2x - x^{-\frac{3}{2}})dx = x^2 + 2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^4 = (16+1) - (1+2) = 14$$

سوال ۱۵۲: (متوسط)

نکته: می‌دونیم در مثلث قائم‌الزاویه زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر می‌شه تفاضل دو زاویه‌ی قائمه‌ی مثلث. البته اگر نکترو هم ندونیم مسئله کاملاً قابل حله!!!

$$\begin{cases}\hat{B} - \hat{C} = 12^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ\end{cases} \rightarrow \hat{B} = 51^\circ\,, \hat{C} = 39^\circ$$

سوال ۱۵۳: (ساده)

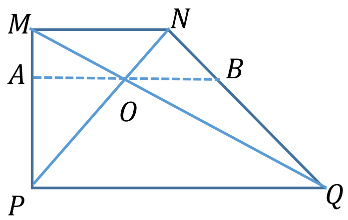


فقط به شکل و زاویه‌هاش توجه کن:

$$\text{محیط} \rightarrow = ۲(x+۲x) = ۶x = ۱۲\sqrt{۳} \rightarrow x = ۲\sqrt{۳}$$

$$S = x \times ۲x \times \sin ۶۰^{\circ} = ۲\sqrt{۳} \times ۴\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

سوال ۱۵۴: (ساده)



$$\frac{MA}{MP} = \frac{NB}{NQ} \rightarrow \text{طبق تالس می دانیم ،}\ \frac{AO}{PQ} = \frac{MA}{MP} ,\ \frac{BO}{PQ} = \frac{NB}{NQ}$$

$$\frac{AO}{PQ} = \frac{BO}{PQ} \rightarrow \frac{AO}{OB} = ۱$$

سوال ۱۵۵: (متوسط)

از بالا به شکل نگاه کنیم یک مربع می‌بینیم که داخل یک دایره محاط شده. لذا قطر مربع و دایره یکسان شده. پس ضلع مربع میشه:

$$۸ = \sqrt{۲}x \rightarrow x = ۴\sqrt{۲} \rightarrow V_{\text{منشور}} = S_{\text{مربع}} h = (۴\sqrt{۲})^{۲} \times ۶ = ۱۹۲$$