

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

حسابان

سال سوم آموزش متوسطه

رشته ریاضی و فیزیک

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

نام کتاب: حسابان - ۲۵۸/۱

اعضای شورای برنامه‌ریزی ریاضی: بهمن اصلاح‌پذیر، علی ایرانمنش، امین باشی‌زاده، ناهید بریری، محمد حسن بیژن‌زاده، طیبہ حمزہ‌بیگی، محسن جمالی، اصغر جوادی، مینو رحیمی، حسین رودسری، احمد شاهورانی، جعفر شهاب‌زاده، وحید عالمیان، سعید قریشی، سمیه سادات میر معینی و محمد کاظم نائینی

مؤلفان: بهمن اصلاح‌پذیر، ناصر بروگردیان، ابراهیم ریحانی، محمد تقی طاهری تنجانی و وحید عالمیان

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۰۹۲۶۶۰۸۸۳، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وب سایت: www.chap.sch.ir

مدیر امور فنی و چاپ: لیدا نیک‌روش

مدیر هنری: مجید ذاکری یونسی

طراح گرافیک و جلد: محمد عباسی

رسام: مریم دهقان‌زاده

صفحه‌آرا: مریم نصرتی

حروفچین: زهرا ایمانی نصر

مصصح: سیف‌الله بیک‌محمددلیوند، رضا جعفری

امور آماده‌سازی خبر: ناهید خیام باشی

امور فنی رایانه‌ای: حمید ثابت کلاچاهی، فاطمه رئیس‌یان‌فیروزآباد

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران - تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

تلفن: ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۰۴۴۹۸۵۱۶، صندوق پستی: ۱۳۹-۳۷۵۱۵

چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هفتم ۱۳۹۵

حق چاپ محفوظ است.

شابک ۹-۱۸۳۷-۵-۹۶۴-۹ ISBN 964-05-1837-9



اگر بخواهید بی خوف و هراس در مقابل باطل
بایستید و از حق دفاع کنید و ابر قدرت‌ها و سلاح‌های
پیشرفته آنان و شیاطین و توطئه‌های آنان در روح شما
اثر نگذارد و شما را از میدان به در نکند خود را به
ساده زیستن عادت دهید و از تعلق قلب به مال و منال
و جاه و مقام بپرهیزید.

امام خمینی (ره)

فهرست

۱	فصل ۱: محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات
۲	مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۶	تقسیم چندجمله‌ای‌ها و بخش پذیری
۸	بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشیدکاشانی
۱۱	بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌ها
۱۵	معادلات
۱۸	ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم
۲۴	معادلات شامل عبارات گویا
۲۸	معادلات شامل عبارات گنگ
۳۱	حل معادلات به روش هندسی
۳۳	قدر مطلق و ویژگی‌های آن
۳۵	معادلات قدر مطلق
۳۹	نامعادلات - نامعادلات قدر مطلق
۴۱	حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)
۴۳	فصل ۲: تابع
۴۴	تابع: یادآوری و تکمیل
۴۸	تساوی دو تابع
۵۰	توابع چند ضابطه‌ای
۵۱	معادلات و توابع
۵۴	رسم نمودار توابع
۶۴	اعمال جبری روی توابع
۶۹	ترکیب توابع

۷۶	توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی
۸۵	توابع یک به یک و تابع وارون
۸۶	توابع یک به یک
۸۹	محاسبه تابع وارون
۹۰	یافتن ضابطه تابع وارون
۹۶	توابع چندجمله‌ای و توابع متناوب
۹۹	توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح
۱۰۳	فصل ۳ : مثلثات
۱۰۴	توابع مثلثاتی
۱۰۶	توابع تانژانت و کتانژانت
۱۱۰	اتحادهای مثلثاتی
۱۱۸	معادلات مثلثاتی
۱۱۹	حل معادلات مثلثاتی
۱۲۴	وارون توابع مثلثاتی
۱۳۱	فصل ۴ : حد و پیوستگی توابع
۱۳۲	حد توابع
۱۳۷	حد چپ و حد راست
۱۴۰	همسایگی‌های یک نقطه
۱۴۵	قضایای حد توابع
۱۵۰	محاسبه حد در توابع کسری
۱۵۴	پیوستگی توابع
۱۵۹	فصل ۵ : مشتق توابع
۱۶۰	خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع
۱۷۰	روش‌های محاسبه مشتق توابع
۱۷۵	آهنگ تغییرات
۱۸۲	مشتق توابع مثلثاتی
۱۸۴	مشتق توابع وارون و توابع مرکب
۱۹۱	تمرین‌های دوره‌ای
۱۹۶	مراجع

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آمان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب
این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۴۸۷۴ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email)
talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفترتالیف کتاب های درسی ابتدایی و متوسطه نظری

سخنی با معلم

کتاب حاضر با کتاب پیشین از لحاظ روش‌های آموزشی تفاوت‌های مهمی دارد. روش آموزش اصلی این کتاب اصطلاحاً «روش حل مسئله» نام دارد. منظور از روش حل مسئله آن است که برای آموزش مفاهیم جدید، مسئله‌ای طرح کنید که در حل آن، مفاهیم مورد نظر حضور داشته باشند و دانش‌آموزان غیر مستقیم آن مفاهیم را تجربه کنند. سپس با یک نامگذاری و کلیت دادن به آن، مفهوم جدید رسماً ارائه می‌شود.

به همین خاطر در این کتاب علامت «حل یک مسئله» بسیار رخ می‌دهد که در اکثر آن‌ها هدف، آموزش یک مفهوم جدید است. در این گونه موارد معمولاً یک فعالیت به همراه حل یک مسئله وجود دارد که انجام آن فعالیت چگونگی حل آن مسئله را روشن می‌سازد. در کتاب مسائلی خاص و فعالیت‌های خاصی برای آموزش مفاهیم ارائه شده است، اما شما می‌توانید با توجه به تجربیات خود و دانش‌آموزانی که با آن‌ها روبه‌رو هستید مسئله‌ای دیگر یا فعالیتی دیگر طرح کنید، اما نهایتاً سعی کنید روش آموزشی کتاب را رعایت کنید و ارزشیابی‌های مستمر و نهایی خود را با اهداف موضوعی و مهارتی کتاب منطبق سازید.

از لحاظ موضوعی از حدود موضوعات مطرح شده در کتاب خارج نشوید و سطح پیچیدگی مسائلی که مطرح می‌کنید بیش‌تر از پیچیدگی‌های مثال‌ها و مسائل در کتاب نباشد. مثلاً در کتاب مفهوم تابع و دامنه و بُرد و ... مطرح شده است و می‌توان نسبت به آن‌ها مسائل پیچیده بسیاری مطرح کرد، اما هدف این کتاب پرداختن به این گونه پیچیدگی‌ها نیست و لازم است که فقط در همان سطحی مسائل طرح شوند که در کتاب به صورت مثال یا مسئله طرح شده است.

هدف اصلی کتاب درک معنادار از مفاهیم ریاضی، توانایی به کارگیری ریاضی در حل مسائل واقعی، یادگیری استراتژی‌های حل مسئله، توانایی استدلال و مباحثه و موشکافی است. سعی کنید طرح درس‌های شما به گونه‌ای باشد که با طرح یک مسئله، مباحثه‌ای را در میان دانش‌آموزان نسبت به آن ایجاد کنید. مشابه این مباحثات در کتاب آمده است که می‌تواند الگویی برای مباحثه در کلاس باشد. در عمل مباحثه اهداف بسیاری برآورده می‌شود و فواید بسیاری در آن است و روش مباحثه‌ای در آموزش، روشی است با آثار آموزشی و اجتماعی عالی. در این روش توانایی‌های زیر تقویت می‌شوند و به کار می‌افتند.

۱- همکاری اجتماعی

۲- دقت در بیان خود و روشن ساختن افکار خود

۳- سعی در درک دیگران

۴- تجزیه و تحلیل و موشکافی

۵- برقرار کردن ارتباطات منطقی بین جملات و داده‌ها

۶- نقادی دیگران و نقدپذیر شدن

۷- استفاده از تجربه دیگران و اصلاح خود

۸- یافتن نقاط ضعف افکار خود و دیگران

آموزش استراتژی‌های حل مسئله نیز از اهداف کتاب است که هیچ‌گاه به طور مستقیم نباید انجام شود. بلکه باید دانش‌آموزان با تجربه خود به آن‌ها دست یابند. بنابراین، با طرح مسائل مناسب و راهنمایی‌های مناسب، معلمین باید دانش‌آموزان را دچار این تجربه‌ها کنند و هر بار با تکرار آن‌ها استراتژی‌های حل مسئله را در درون آن‌ها ملکه کنند. نمونه‌هایی از این آموزش‌ها در کتاب طراحی شده است که در آن‌ها استفاده از تجربیات گذشته، بررسی مسئله در حالت‌های ساده، رسم شکل، آموزش داده شده است.

ارتباط با محیط پیرامونی یکی از اصولی است که در نوشتن این کتاب مورد توجه قرار داشته است. در اکثر موارد مسئله طرح شده در دنیای غیرریاضی بوده است که ابتدا با توصیف مناسب به یک مسئله ریاضی تبدیل می‌شود، سپس در دنیای ریاضی حل می‌شود و نهایتاً جواب‌های به دست آمده باید در دنیای واقعی تفسیر شوند. این روند و تکرار آن در جاهای دیگر از اهداف مهم این کتاب است و لازم است معلمین در طرح درس‌های خود به این گونه مسائل توجه جدی داشته باشند. صرف محاسبات ریاضی هرچقدر هم که پیچیده باشند، نشان‌دهنده درک واقعی از ریاضی نیست. دیدن ریاضی در طبیعت و توانایی به کارگیری ریاضی در حل مسائل واقعی، موجب می‌شود تا دانش‌آموزان درک صحیح‌تری از ریاضی بیابند و نگرش مثبتی نسبت به ریاضی پیدا کنند.

در ارزشیابی از دانش‌آموزان به اهداف اصلی کتاب توجه داشته باشید. شما باید بسنجید که دانش‌آموزان تا چه حد توانایی مدل‌سازی، حل مسئله، تفسیر جواب و محاسبات را نسبت به موضوعات مختلفی که در کتاب طرح شده است یافته‌اند. این ارزشیابی باید کاملاً در سطحی که کتاب به آن پرداخته است صورت بگیرد.

در خاتمه به مدیران مدارس و تمام کسانی که در پیاده‌سازی آموزش نقش دارند توصیه می‌شود که به این تغییرات در نگرش به ریاضی و روش‌های آموزش ریاضی اهمیت بدهند و معلمین را در پیاده‌سازی هرچه بهتر کتاب یاری دهند. در غیر این صورت نمی‌توان انتظار یک تحول آموزشی در یادگیری ریاضی را داشت.

سخنی با دانش آموز

شما اکنون ۱۰ سال است که وارد مدرسه شده‌اید و درباره ریاضی مطالعه کرده‌اید. حتماً متوجه شده‌اید که فقط دروسی را توانسته‌اید به خوبی فراگیرید که فعالانه در مورد آن‌ها تفکر کرده‌اید و درباره آن با دیگران مباحثه کرده‌اید و نسبت به آن محاسباتی را انجام داده‌اید. این تجربه گران قدری است که درک و یادگیری همواره با شرکت فعالانه خود دانش آموز و تجربه کردن و تجزیه و تحلیل کردن و مباحثه کردن و موشکافی کردن و مرتبط کردن مفاهیم جدید با مفاهیم آشنا صورت می‌پذیرد.

روش آموزشی این کتاب بر مبنای عمل فعالانه شما پی‌ریزی شده است. گمان نکنید که با حفظ کردن برخی روش‌ها و راه‌های محاسباتی می‌توانید این کتاب را یاد بگیرید. در این کتاب فعالیت‌های زیادی طراحی شده است که موجب ایجاد یک تجربه مهم ریاضی در شما می‌شود. اگر این تجربیات را به خوبی انجام دهید، درک مفاهیم جدید برای شما بسیار آسان خواهد شد.

هدف این کتاب آن است که شما بتوانید، خوب ببینید، به درستی بیان کنید، مناسب استدلال کنید و خوب نتیجه‌گیری کنید. تمامی این‌ها را باید در حل مسائل انجام دهید. شما در هر جای ریاضی با مسئله‌ای روبه‌رو هستید که باید آن را حل کنید. در این کتاب علامت «حل یک مسئله» را بسیار مشاهده خواهید کرد، زیرا هر مفهوم جدیدی با بروز یک مسئله و سعی در حل آن به وجود می‌آید. بنابراین شما باید بتوانید با یک مسئله درست مواجه شوید و تجربیات خود را در حل آن به درستی به کار برید.

علاوه بر این‌ها باید بتوانید برای پاسخ به سؤالات بیشماری که در ذهن شما ایجاد می‌شود، آن‌ها را به مسائل مناسبی تبدیل کنید و سپس سعی در حل آن‌ها نمایید، یافتن این توانایی‌ها کمک زیادی به توانمند شدن در حل مسائل و مشکلات زندگی شما خواهد کرد و این همان دلیلی است که باعث می‌شود که ما باید ریاضی را بیاموزیم.



فصل ۱



۱. مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۲. تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری
۳. بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی
۴. بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها
۵. معادلات
۶. ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم
۷. معادلات شامل عبارات گویا
۸. معادلات شامل عبارات گنگ
۹. حل معادلات به روش هندسی
۱۰. قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۱۱. معادلات قدرمطلق
۱۲. نامعادلات – نامعادلات قدرمطلق
۱۳. حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

ترجمه فارسی دیباچه مفتاح الحساب

بسم الله الرحمن الرحيم

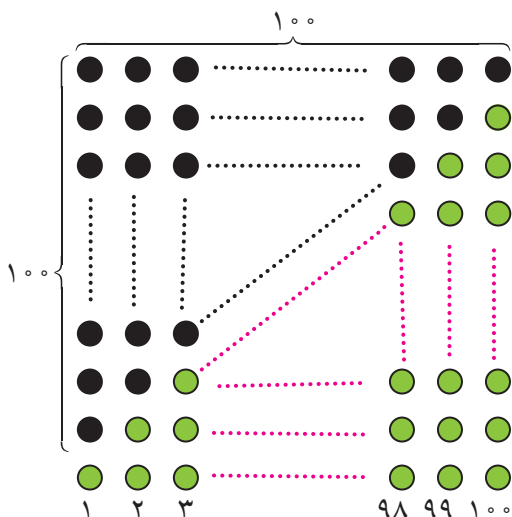
ستایش خداوندی را سزااست که در آفرینش
 آحاد یگانه است، و در به هم پیوستن
 اعداد گوناگون بی‌همتا است. و درود بر
 بهترین آفریده او محمد(ص) که والاترین
 شفاعت کننده روز رستاخیز است، و بر خاندان
 او و فرزندان او که راه‌های رهایی و رستگاری
 را رهنمونند. اما بعد.....

محاسبات جبری،
 معادلات
 و نامعادلات





مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی



گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش‌آموزان از آنها می‌خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به دست آورند. در حالی که دانش‌آموزان مشغول این کار کسل‌کننده بودند، گاوس نتیجه را به سرعت به دست می‌آورد و به معلم ارائه می‌کند.

آیا شما هم می‌توانید این عمل جمع را به سرعت انجام دهید؟ شکل مقابل می‌تواند ایده‌ای برای این کار به شما بدهد.

بحث در کلاس

از شکل بالا چگونه می‌توان استفاده کرد و جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورد؟

تمرین در کلاس



۱- با استفاده از تجربیاتی که در بالا به دست آورده‌اید برای یک عدد طبیعی n نشان دهید:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲- اگر جمله اول یک دنباله حسابی a و قدر نسبت آن d باشد، جملات آن به شکل زیرند:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$$

نشان دهید مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $\frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$.

۳- نشان دهید $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.



بحث در کلاس

می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه اول یک دانه گندم بگذارد و در خانه دوم ۲ گندم بگذارد و در خانه سوم ۴ گندم بگذارد و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم بگذارد و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند گرم گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟

این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی* با روش خاص خود آن را حل کرده است. شما هم سعی کنید راه حلی برای آن بیابید.



حل یک مسئله



طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌زنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

آن مقدار از مساحت مربع (بر حسب متر مربع) که در هر مرحله رنگ می‌شود یک دنباله هندسی به شکل زیر تشکیل می‌دهد.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

بنابراین آن مقدار از مساحت مربع که پس از n مرحله رنگ می‌شود برابر است با

$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$\frac{1}{4}S_n$ شباهت زیادی با S_n دارد. از همین نکته برای محاسبه S_n استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = -\frac{1}{4} + S_n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$$

این تساوی معادله‌ای بر حسب S_n است و از آن نتیجه می‌شود، $S_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

حال باید نامعادله $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{99}{100}$ را حل کنیم.

$$\frac{99}{100} \leq 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow 99 \leq 100 - \frac{100}{4^n} \Rightarrow \frac{100}{4^n} \leq 1 \Rightarrow 100 \leq 4^n$$

حداقل مقدار n که در این نامعادله صدق می‌کند ۷ می‌باشد، یعنی پس از مرحله هفتم حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است.

فعالیت ۱

۱- برای یک عدد طبیعی n و یک عدد حقیقی q قرار دهید $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. با مقایسه S و qS نتیجه بگیرید:

$$(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$$

۲- اگر $q \neq 1$ نشان دهید:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

۳- اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر a و قدر نسبت آن برابر q باشد، جملات این دنباله به شکل زیرند.
 $a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$

نشان دهید در حالت $q \neq 1$ مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

۴- در حالت $|q| < 1$ ، مجموع n جمله اول دنباله هندسی بالا با افزایش n به چه عددی نزدیک می‌شود؟

با انجام فعالیت بالا قضیه زیر به دست می‌آید.

قضیه:

در یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله اول a و قدر نسبت q که $|q| < 1$ ، مجموع تمام جملات آن برابر است با

$$\frac{a}{1 - q}$$

مثال

تویی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد. می‌خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می‌کند؟
ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. روشن است که

$$A_1 = 5, A_2 = \frac{5}{4}, A_3 = \frac{5}{16}, \dots, A_n = \frac{5}{4^{n-1}},$$



بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین عبارت است از:

$$1^\circ, \frac{1^\circ}{4}, \frac{1^\circ}{16}, \dots, \frac{1^\circ}{4^{n-1}}$$

کل مسافت طی شده توسط توپ برابر است با مجموع جملات دنباله بالا. اما دنباله بالا یک دنباله هندسی نامتناهی با

جمله اول 1° و قدر نسبت $\frac{1}{4}$ است و مجموع جملات آن برابر است با

$$\frac{a}{1-q} = \frac{1^\circ}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4^\circ}{3} \approx 1.33 / 3.33$$

یعنی توپ تقریباً $1.33/3.33$ متر تا توقف کامل طی می کند.

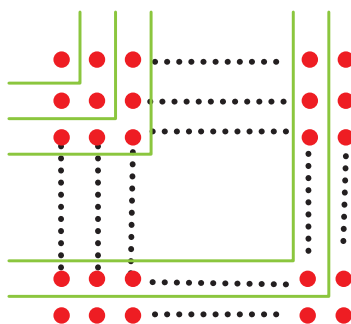


مسائل



۱- در دنباله حسابی $\dots, 11, 8, 5$ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از 50° بیشتر شود؟

۲- به کمک شکل زیر نتیجه بگیرید $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$



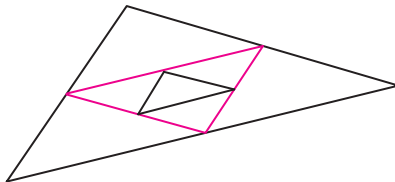
۳- در مسئله شطرنج نشان دهید جایزه مخترع شطرنج بیش از 1000 میلیارد تن گندم خواهد شد.

۴- علی می خواهد پول های خود را پس انداز کند. او روز اول 1000 تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز 9% پول واریزی در روز قبل را در صندوق قرار دهد. پس از 50 روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچ گاه از 100000 تومان بیشتر نخواهد شد.

۵- برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیواکتیو لایه هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آن ها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش 99% درصد کاهش یابد؟



۶- یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به‌طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلث‌های به‌دست آمده (با احتساب مثلث اولیه) چقدر است؟ مجموع مساحت مثلث‌های به‌دست آمده چقدر است؟

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

در سال‌های پیش دیدیم که با تقسیم یک چند جمله‌ای $P(x)$ بر یک چند جمله‌ای ناصفر $B(x)$ یک خارج قسمت $Q(x)$ و باقی مانده $R(x)$ به‌دست می‌آید که $R(x)$ برابر صفر است یا درجه آن از درجه $B(x)$ کمتر خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

این تساوی را رابطه تقسیم می‌نامند.

تمرین در کلاس



- ۱- چند جمله‌ای $P(x) = 4x^4 + 2x^3 + 1$ را بر چند جمله‌ای $B(x) = x^2 - 1$ تقسیم کنید.
- ۲- مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی مانده را مشخص کنید.
- ۳- رابطه تقسیم را بنویسید و به کمک آن مقدار $P(1)$ و $P(-1)$ را به‌دست آورید.

اگر باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $B(x)$ صفر باشد، نتیجه می‌شود، $P(x) = B(x)Q(x)$ در این حالت گوئیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال

چند جمله‌ای $x^3 + 1$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است، زیرا $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.



فعالیت ۲



فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ تقسیم شده است و باقی مانده آن R باشد.

۱- رابطه تقسیم را بنویسید.

۲- درجه باقی مانده تقسیم چیست؟

۳- $P(a)$ را به دست آورید.

۴- اگر $P(a)$ صفر باشد، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

از فعالیت بالا قضیه زیر به دست می‌آید.

قضیه :

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ همان $P(a)$ است. بنابراین اگر $P(a)$ صفر باشد، چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است.

مثال

باقی مانده تقسیم $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 3$ بر $x + 1$ را حساب می‌کنیم.

$x + 1$ را می‌توانیم به صورت $x - (-1)$ بنویسیم، پس $P(-1)$ را حساب می‌کنیم.

$$R = P(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) + 3 = 2 - 5 - 1 + 3 = -1$$

بحث در کلاس

چگونه می‌توانیم باقیمانده تقسیم یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ بر چندجمله‌ای $ax + b$ را به دست آوریم؟

تمرین در کلاس



الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید :

۱- عبارت $2 - 5x + 3x^2$ بر $x - 1$ بخش پذیر است.

۲- چندجمله‌ای $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر است.

۳- چندجمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است.

۴- باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $ax + b$ برابر است با $P(-b)$.

ب) باقی مانده تقسیم $2x^2 - 2x + 1$ بر $2x - 1$ را تعیین کنید.



فعالیت ۳



برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n عبارت $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$ را در نظر بگیرید.

۱- عبارت $aS - S$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

۲- اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید:

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$$

مثال

به کمک اتحادهای بالا عبارت‌های زیر را ساده می‌کنیم.

$$A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1}, \quad B = \frac{(1 + t + t^2 + t^3 + t^4)(1 - t)}{t^5 - 1}$$

صورت و مخرج کسر A را تجزیه می‌کنیم.

$$A = \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

برای ساده کردن B می‌توان نوشت:

$$B = \frac{1 - t^5}{(t^5 + 1)(t^5 - 1)} = \frac{-1}{t^5 + 1}$$

تمرین در کلاس



به کمک اتحاد $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

بسط دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی

در سال‌های قبل با محاسبه مربع و مکعب دوجمله‌ای‌ها آشنا شدید. در حالت کلی نیز می‌توان توان‌های طبیعی دوجمله‌ای‌ها را به دست آورد.





فعالیت ۴



به اتحادهای زیر و ضرایبی که در آنها است توجه کنید.

$(a+b)^0 = 1$	۱
$(a+b)^1 = a+b$	۱ ۱
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	۱ ۲ ۱
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	۱ ۳ ۳ ۱
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
.....	

- ۱- چه الگویی در توان‌های a و b و ضرایب آنها می‌باید؟
- ۲- با توجه به الگوی به دست آمده $(a+b)^6$ برابر چه عبارتی می‌شود؟
- ۳- تعداد جملات هر بسط با توان دو جمله‌ای چه رابطه‌ای دارد؟

هر عبارت به صورت $(a+b)^n$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی و بسط آن را به صورت چندجمله‌ای از a و b بسط دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی می‌نامند زیرا این دانشمند ایرانی از اولین کسانی بوده است که روی آن کار کرده است. این چندجمله‌ای دارای $n+1$ جمله است و هر جمله آن به صورت مضربی از $a^k b^{n-k}$ است و جملات $a^k b^{n-k}$ و $a^{n-k} b^k$ ضریب‌های مساوی دارند.

ضرایب بسط دو جمله‌ای را می‌توان در مثلثی مانند زیر مرتب کرد که به آن مثلث خیام — پاسکال می‌گویند.

		۱		
		۱	۱	
	۱	۲	۱	
	۱	۳	۳	۱
۱	۴	۶	۴	۱
.....				

مرتب نمودن ضرایب به صورت بالا را ابتدا خیام، دانشمند مشهور ایرانی، و سپس پاسکال انجام داد و به همین خاطر به نام هر دوی آنها خوانده می‌شود.



تمرین در کلاس



۱- اعداد هر سطر در مثلث خیام - پاسکال چگونه از طریق اعداد سطر قبل از آن به دست می آیند؟
 ۲- چه ارتباطی بین اعداد هر سطر در مثلث صفحه قبل با بسط دوجمله ای غیاث الدین جمشید کاشانی وجود دارد؟

۳- مجموع ضرایب در هر یک از بسط های $(a+b)^2$ ، $(a+b)^3$ و $(a+b)^4$ را به دست آورید. آیا می توانید مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ را حدس بزنید؟ حدس خود را ثابت کنید.
 ۴- طرف دوم هر یک از عبارات های زیر را به دست آورید.

$$(2x + y)^5 =$$

$$(3x + 2z)^4 =$$

$$(2a - 1)^6 =$$

مسائل

۱- $P(x)$ یک چندجمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. در هر یک از حالت های زیر $P(x)$ را به گونه ای تعیین کنید که در شرایط مورد نظر صدق کند.
 الف) $P(1) = 0$ ، $P(2) = 0$ ب) $P(1) = 1$ ، $P(0) = 0$ ج) $P(2) = -1$ ، $P(-1) = 2$
 ۲- مقدار m را چنان بیابید که چندجمله ای $P(x) = x^3 - mx^2 - x + 4$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد.
 ۳- در چندجمله ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ بوده و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.
 ۴- m و n را چنان بیابید که چندجمله ای $mx^3 + n - 3x^2 - 5x + 6$ بر $x^2 - 5x + 6$ بخش پذیر باشد.
 ۵- نشان دهید عبارت $x - 2$ یک فاکتور (عامل) $x^3 - 6x^2 - 5x - 6$ است. سپس معادله $f(x) = 0$ را حل کنید.
 ۶- a را چنان بیابید که یک جواب معادله $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ برابر ۲ باشد. سپس جواب های دیگر معادله را به دست آورید.

۷- حاصل عبارات های زیر را به دست آورید.

ج) $(2x - 3y)^4$

ب) $(1 + \frac{2}{x})^6$

الف) $(1 - x)^4$

۸- عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$A = x^4 - x^2 y^3 \quad , \quad B = (a^6 + 1)^2 - (a^6 - 1)^2$$





۹- اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد زیر را به دست آورید.

$$1 - x^n = (1+x)(1-x + \dots - x^{n-1})$$

بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله ای ها

در دوره راهنمایی با مفاهیم مقسوم علیه، عدد اول و تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد آشنا شدیم. مشابه این مفاهیم برای عبارت های جبری نیز قابل بررسی است. با مروری بر این مفاهیم به تعمیم آن به عبارات جبری می پردازیم.

تجزیه عدد: هر عدد طبیعی مخالف یک که اول نباشد یک عدد مرکب است. هر عدد مرکب را می توان به حاصل ضرب عامل های اول تجزیه نمود. در حالتی که در تجزیه اعداد عامل های اول تکراری را به صورت توانی بنویسیم به آن تجزیه استاندارد می گوئیم.

برای تجزیه یک عدد به عامل های اول، مرتباً عدد را به عامل های اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... تقسیم می کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم سپس آن را به صورت تجزیه استاندارد می نویسیم.



مثال

عدد 360 را به صورت تجزیه استاندارد می نویسیم.

عدد 360 را مطابق الگوی مقابل به طور متوالی بر مقسوم علیه های اول آن تقسیم می کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم. در نتیجه 360 حاصل ضرب اعداد اول سمت راست هستند.

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

۳۶۰	۲
۱۸۰	۲
۹۰	۲
۴۵	۳
۱۵	۳
۵	۵
۱	



تمرین در کلاس



عددهای 12° و 525 و 47 را به صورت تجزیه استاندارد بنویسید.

می‌دانید که بزرگترین عددی که دو عدد طبیعی a و b بر آن بخش پذیرند بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد نامیده می‌شود که به اختصار با ب.م.م. نشان می‌دهند. برای یافتن ب.م.م. چند عدد می‌توانیم آن‌ها را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های مشترک با کمترین توان، ب.م.م. این اعداد خواهند بود.



مثال

ب.م.م. اعداد 36 و 225 و 405 را تعیین می‌کنیم.

$$\left\{ \begin{array}{l} 36 = 2^2 \times 3^2 \\ 225 = 3^2 \times 5^2 \\ 405 = 3^4 \times 5 \end{array} \right.$$

هریک از اعداد را به صورت استاندارد تجزیه می‌کنیم. تنها عامل مشترک عدد 3 است و

کمترین توان آن 2 است. پس ب.م.م. 3^2 است. روشن است که همه این اعداد بر ب.م.م. خود بخش پذیرند.

تمرین در کلاس



ب.م.م. اعداد 78 و 234 و 156 را به دست آورید.

می‌دانید که کوچکترین عددی که بر دو عدد طبیعی a و b بخش پذیر است را کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد می‌نامند که به اختصار با ک.م.م. نشان می‌دهند. برای یافتن ک.م.م. چند عدد می‌توانیم آن‌ها را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های موجود در این تجزیه‌ها با بزرگترین توان، ک.م.م. این اعداد خواهند بود.



مثال

ک.م.م. اعداد $a = 2^2 \times 5^2$ و $b = 2 \times 5^2 \times 7^2$ و $c = 2^5 \times 5 \times 13$ را تعیین می‌کنیم.

حاصلضرب همه عامل‌های مشترک و غیرمشترک a ، b و c با بیشترین توان را به دست می‌آوریم:

$$2^5 \times 5^2 \times 7^2 \times 13$$

عدد بالا ک.م.م. سه عدد a ، b و c است و روشن است که بر a ، b و c بخش پذیر است.



تمرین در کلاس



- ۱- ک.م.م. اعداد ۱۵ و ۳۵ و ۱۴۰ را به دست آورید.
- ۲- می‌خواهیم سالی به ابعاد ۴۰ و ۳۶ متر را با فرش‌های مربع شکل هم اندازه که اندازه ضلع آن‌ها بر حسب متر عدد طبیعی باشد بپوشانیم. اندازه ضلع فرش‌ها چه عددهایی می‌تواند باشد؟ ضلع فرش‌ها چقدر باشد تا کمترین تعداد فرش برای پوشاندن سالن مورد نیاز باشد بدون آن که فرش‌ها روی هم بیفتند؟
- ۳- ب.م.م. و ک.م.م. هر یک از دسته اعداد زیر را تعیین کنید. (حروف نشان دهنده اعداد اول متمایزند و مخالف ۲، ۳ و ۵ هستند.)

$$\text{الف) } ۳۲a^۳, ۱۶ab^۲, ۸a^۲b^۳ \quad \text{ب) } ۶x^۲y, ۸xy^۲z, ۱۰x^۲y^۲z^۲$$

در چندجمله‌ای‌ها نیز، همانند اعداد، اعمال جمع و ضرب و مفهوم بخش‌پذیری برقرار است. پس می‌توانیم ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها را نیز همانند اعداد تعریف کنیم.



فعالیت ۵



- چندجمله‌ای‌های $P(x) = ۲x^۲ - ۱۶$ و $Q(x) = ۳x^۲ - ۱۲$ را در نظر بگیرید.
- ۱- $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کنید.
- ۲- بزرگترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بنویسید.
- ۳- کوچکترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که هم بر $P(x)$ و هم بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد را بنویسید.

آنچه که در فعالیت بالا انجام دادید یافتن ب.م.م. و ک.م.م. دو چندجمله‌ای بود.

تعریف :

بزرگترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (به اختصار ب.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

کوچکترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که بر چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بخش‌پذیر است را کوچکترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

این تعاریف برای بیش از دو چندجمله‌ای به شکل مشابه انجام می‌شود.



مثال

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌های $P(x) = x^2 + 1$ و $Q(x) = x^6 - 1$ و $R(x) = 4x^2 - 4$ را تعیین می‌کنیم. برای این کار، ابتدا هر یک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم. سپس مشابه آنچه که در مورد ب.م.م. و ک.م.م. اعداد گفته شد عمل می‌کنیم.

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$Q(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$R(x) = 4(x^2 - 1) = 4(x-1)(x+1)$$

تنها عامل مشترک در این تجزیه‌ها $x+1$ است و کمترین توان آن ۱ است، پس $x+1$ ب.م.م. این سه چندجمله‌ای است.

عواملی که در این تجزیه‌ها وجود دارند عبارتند از: $x^2 + x + 1$, $x^2 - x + 1$, $x - 1$, $x + 1$, ۴ و بزرگترین توان آن‌ها ۱ است. بنابراین ک.م.م. این سه چندجمله‌ای عبارت است از:

$$4(x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1) = 4(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 4(x^6 - 1)$$

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها کمک زیادی به کوتاه‌تر شدن و ساده کردن محاسبات در کسرها و جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌کند.


تمرین در کلاس

۱- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{1}{72} + \frac{5}{48} - \frac{1}{16}$$

۲- کسره‌ای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$A = \frac{3x^2 - 3xy}{3(x-y)^2}$$

$$B = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$$

۳- حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a+5}{a-1} - \frac{6}{a^2+a+1} - \frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$$

فصل ۱ محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات



مسائل



۱- سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می‌شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک بار زده می‌شوند. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره با هم زده شوند؟

۲- در دنباله‌های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

$$۱, ۵, ۹, \dots$$

$$۴, ۷, ۱۰, \dots$$

۳- می‌خواهیم ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی کنیم، حداقل تعداد شیشه‌ها کدام است؟ (گنجایش شیشه‌ها را بر حسب لیتر عدد طبیعی فرض کنید.)

۴- حاصل هریک از عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4x} \div \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 2x^2}$

ب) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 10x + 21}$

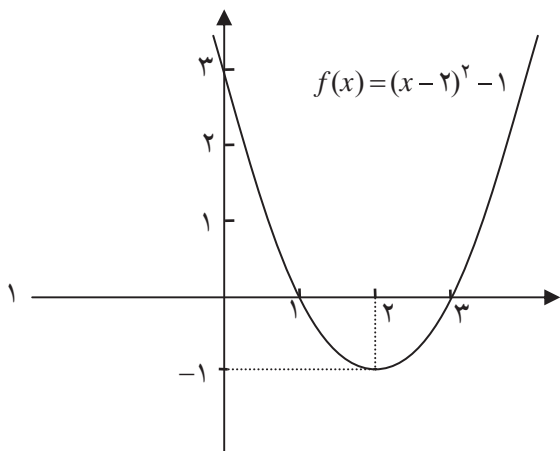
ج) $\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{2a}{a^2 + 2a + 1} - \frac{2}{a + 1}$

د) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{x^2 + 2x - 3}$

معادلات

در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادله درجه اول و درجه دوم آشنا شدید. در این بخش با برخی نکات جدید درباره حل معادلات آشنا خواهیم شد و سپس انواع دیگری از معادلات جبری را بررسی خواهیم کرد.

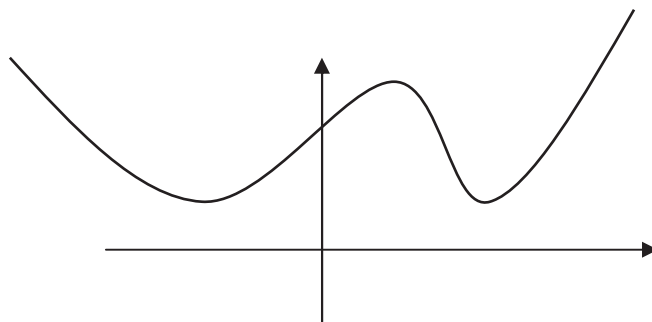
فعالیت ۶



۱- نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ به شکل مقابل است.

جواب‌های معادله $f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$ چه ویژگی از نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کند؟ از طریق نمودار $f(x)$ چگونه می‌توان در مورد جواب‌های معادله $f(x) = 0$ اظهار نظر کرد؟

۲- نمودار تابع $g(x)$ به شکل زیر است. در مورد جواب‌های معادله $g(x) = 0$ چه می‌توانید بگویید؟



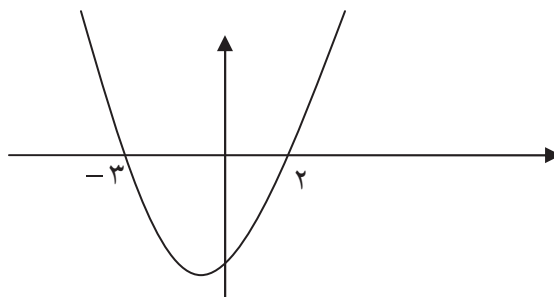
۳- با رسم نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 4$ توضیح دهید چرا معادله $x^2 - 4x + 4 = 0$ فقط یک جواب دارد.

برای یک تابع $f(x)$ جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. صفرهای تابع f آن مقادیری از x هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود. اگر نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f ، طول‌های نقاط تلاقی نمودار f با محور طول‌ها است.



مثال

اعداد ۲ و ۳- صفرهای تابع $f(x) = x^2 + x - 6$ می‌باشند و نمودار f در نقاطی به طول‌های ۲ و ۳- محور طول‌ها را قطع می‌کند.



نمودار توابعی که ضابطه آن‌ها یک چندجمله‌ای درجه دوم است را سهمی می‌نامند. سهمی‌ها شکل‌های مشابه و خواص هندسی مشترکی دارند که در درس هندسه با آن‌ها بیشتر آشنا خواهید شد. در سال‌های قبل دیدیم یک معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ دارای دو جواب به صورت زیر است.

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$



در حالت $\Delta = 0$ داریم $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ در این حالت معادله فقط یک جواب دارد و می‌توان تعبیر کرد که معادله دو جواب مساوی دارد. به همین خاطر در این حالت گوییم معادله یک جواب مضاعف (تکراری) دارد. سال قبل دیدیم که اگر x' و x''

جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ و $x'x'' = \frac{c}{a}$.



حل یک مسئله



مستطیلی بسازید که محیط آن ۲۲ سانتی‌متر و مساحت آن ۲۸ سانتی‌متر مربع باشد.

برای مشخص کردن این مستطیل باید طول و عرض آن را تعیین کنیم. اگر چنین مستطیلی وجود داشته باشد ضلع‌های آن را با x' و x'' نشان می‌دهیم. فرضیات مسئله به معنای آن است که

$$x'x'' = 28, x' + x'' = 11$$

x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دوم $(x - x')(x - x'') = 0$ هستند. از طرف دیگر

$$(x - x')(x - x'') = x^2 - (x' + x'')x + x'x'' = x^2 - 11x + 28$$

بنابراین برای یافتن جواب مسئله کافی است جواب‌های معادله $x^2 - 11x + 28 = 0$ را حساب کنیم. از حل این معادله نتیجه می‌شود: $x' = 4$ و $x'' = 7$.

قضیه:

اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ ، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.



مثال

معادله درجه دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن ۲ و ۳ باشد.

روش اول: داریم $S = x' + x'' = 2 + 3 = 5$ و $P = x' \times x'' = 2 \times 3 = 6$ ، پس ۲ و ۳ جواب‌های معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ هستند.

روش دوم: $(x - 2)(x - 3) = 0$ معادله‌ای است که مستقیماً دیده می‌شود ۲ و ۳ جواب‌های آن هستند. این یک معادله درجه دوم است و پس از انجام عمل ضرب به شکل $x^2 - 5x + 6 = 0$ در می‌آید.

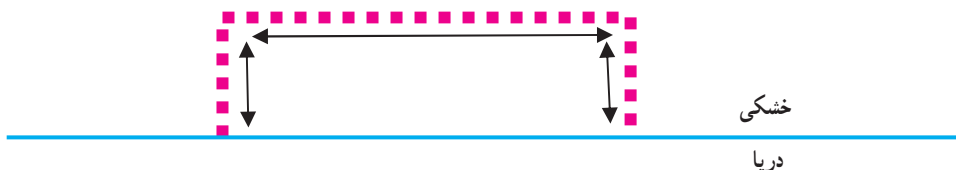


ماکزیم و مینیمم توابع درجه دوم

حل یک مسئله



بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که می‌توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟



برای فهم درست مسئله شکلی مانند بالا رسم می‌کنیم. برای حل مسئله باید تشخیص دهیم چه چیزی را باید به دست آوریم. در اینجا یافتن طول مستطیل برای حل مسئله کافی است. طول این زمین مستطیل شکل را با x نشان

می‌دهیم. پس عرض زمین برابر $\frac{۱۲۰-x}{۲}$ خواهد بود. اگر مساحت این زمین را با A نشان دهیم، داریم:

$$A = x\left(60 - \frac{x}{۲}\right) = -\frac{x^2}{۲} + 60x$$

$$= -\frac{1}{۲}(x^2 - 120x) = -\frac{1}{۲}\left[(x-60)^2 - 3600\right] = -\frac{1}{۲}(x-60)^2 + 1800$$

بیشترین مقدار A وقتی است که $x-60=0$ و در نتیجه $x=60$. پس با انتخاب طول 60 متر بیشترین مساحت ساخته می‌شود که برابر ۱۸۰۰ مترمربع خواهد بود.

فعالیت ۷



تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید که در آن $a \neq 0$.

۱- درستی محاسبات زیر را توضیح دهید.

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

۲- اگر $a < 0$ به ازای چه مقداری از x تابع f بیشترین مقدار را خواهد یافت؟

۳- اگر $a > 0$ به ازای چه مقداری از x تابع f کمترین مقدار را خواهد یافت؟



از فعالیت فوق قضیه زیر به دست می آید.

قضیه :

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ در حالت $a > 0$ به کمترین مقدار (مینیم) و در حالت $a < 0$ به بیشترین مقدار (ماکزیمم) خود می رسد.



مثال

کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ را تعیین می کنیم.

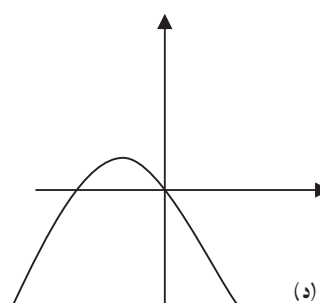
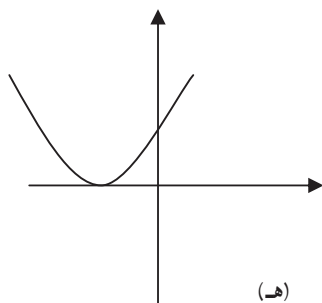
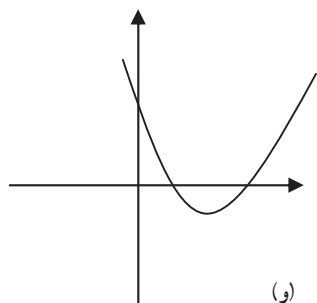
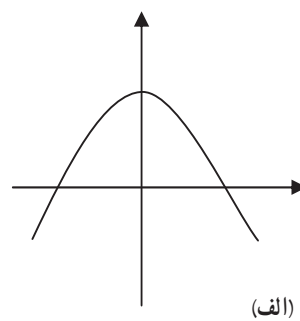
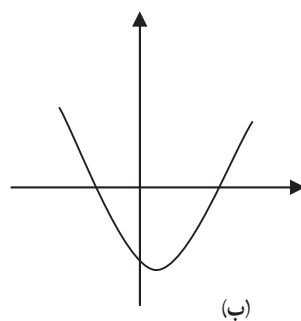
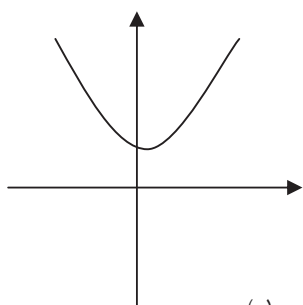
به ازای $x = \frac{12}{6} = 2$ تابع کمترین مقدار را داراست. از آنجا که $f(2) = -7$ ، کمترین مقدار تابع برابر -7 می باشد.

تمرین در کلاس



۱- اگر جمع دو عدد $\frac{7}{6}$ و حاصل ضربشان $-\frac{1}{4}$ باشد آن دو عدد را بیابید.

۲- در هر یک از شکل های زیر سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر مورد علامت ضرایب a, b, c و تعداد جواب های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



۳- نشان دهید در بین مستطیل هایی که محیط شان مقدار ثابتی است، مربع دارای بیشترین مساحت است.



حل یک مسئله



یک معادله چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بیابید که $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ یک جواب آن باشد.

عباس: جواب این مسئله بسیار ساده است کافی است معادله چندجمله‌ای $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 0 - x$ را در نظر بگیریم.

معلم: در این چندجمله‌ای اعداد غیر صحیح به کار رفته است و این جواب مسئله نیست.

حسن: ما چگونه می‌توانیم چنین معادله‌ای بسازیم؟

معلم: بهتر است اول در حالت ساده‌تری این مسئله را حل کنید. مثلاً معادله‌ای با ضرایب صحیح بسازید که $\sqrt{2}$ یک جواب آن باشد.

عباس: ما قبلاً به چنین معادله‌ای برخورد کرده‌ایم. کافی است معادله $x^2 - 2 = 0$ را در نظر بگیریم.

معلم: این معادله را چگونه می‌توانید به دست آورید؟

عباس: کافی است در تساوی $x = \sqrt{2}$ طرفین را به توان ۲ برسانیم. نتیجه می‌شود $x^2 = 2$ و سپس معادله $x^2 - 2 = 0$ به دست می‌آید.

معلم: بله این روش شما کارساز است. البته توجه دارید که معادله ساخته شده جواب‌های دیگری هم دارد. آیا می‌توانید این روش را برای حل مسئله اصلی هم به کار برید؟

عباس: بهتر است این روش را آزمایش کنیم. قرار می‌دهیم $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. با به توان دو رساندن طرفین این تساوی می‌توان نوشت $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. متأسفانه هنوز اعداد غیر صحیح در معادله جدید وجود دارند.

معلم: بله هنوز اعداد غیر صحیح وجود دارند و باز هم باید عملیات دیگری را انجام دهید.

عباس: فکر می‌کنم باز هم باید روش خود را تکرار کنیم. می‌توان نوشت $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ و با به توان دو رساندن طرفین این معادله و ساده کردن آن خواهیم داشت: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. به نظر می‌رسد این معادله جواب مسئله باشد.

معلم: بله شما به جواب مسئله رسیده‌اید. البته این معادله جواب‌های دیگری هم دارد و خوب است بقیه جواب‌های این معادله را هم به دست آوریم. این یک معادله درجه چهار است ولی با در نظر گرفتن $x^2 = z$ می‌توان آن را به یک معادله درجه دوم بر حسب z تبدیل کرد: $z^2 - 10z + 1 = 0$. با حل این معادله خواهیم داشت: $z = 5 \pm 2\sqrt{6}$. حال با حل دو معادله $x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$, $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ خواهیم داشت:

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \Rightarrow x = \pm(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

با همین روش جواب‌های $x = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ برای معادله دیگر به دست می‌آیند. این معادله دارای چهار جواب است. در برخی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید می‌توان آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد.



تمرین در کلاس



معادله $2 - (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1)^4$ را حل کنید.

حل یک مسئله



اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یک چند جمله‌ای درجه n باشد که $a_0 \neq 0$ و از روی آن چند جمله‌ای درجه n ، $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ را بسازیم، آیا رابطه‌ای بین ریشه‌های این دو چند جمله‌ای وجود دارد؟ چند جمله‌ای $Q(x)$ را چند جمله‌ای وارونه $P(x)$ می‌نامند.

یکی از دانش‌آموزان که در مورد چگونگی جواب معادلات چند جمله‌ای فکر کرده بود مسئله بالا برایش مطرح شده بود که آن را با معلم خود در میان گذاشت. معلم نیز این مسئله را برای همه دانش‌آموزان مطرح کرد تا همه درباره آن فکر کنند و راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.

در جلسه بعدی درس، معلم از دانش‌آموزان خواست راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.

علی: به نظر من بهتر است ابتدا در حالت‌های خاص که ساده‌تر است مسئله را بررسی کنیم، مثلاً چند جمله‌ای‌های درجه اول و دوم را بررسی کنیم.

معلم: آفرین، این روش شما کمک زیادی به حل یک مسئله می‌کند. با مشاهده مسئله در حالت‌های خاص می‌توانیم درک بهتری از جزئیات مسئله پیدا کنیم. حال بگو چه پیشنهادی داری؟

علی: من توانستم حدس بزنم که چه رابطه‌ای بین ریشه‌های دو چند جمله‌ای وجود دارد ولی توانستم اثباتی برای آن ارائه کنم.

در حالت چند جمله‌ای‌های درجه اول مانند $P(x) = ax + b$ داریم $Q(x) = bx + a$ و ریشه‌های آن‌ها به ترتیب $-\frac{a}{b}$ و $-\frac{b}{a}$ می‌باشند که وارون یکدیگرند. در حالت چند جمله‌ای‌های درجه دوم محاسبات پیچیده‌تر بود و توانستم فکر خود را تعقیب کنم.

سعید: جالب است اتفاقاً من نیز همین کار را کردم ولی با چند جمله‌ای درجه دوم خاصی که ریشه‌هایشان را می‌دانستم محاسبه کردم و به همین نتیجه رسیدم. من یک چند جمله‌ای ساده مثل $P(x) = (x+3)(x-4)$ را در نظر گرفتم که ریشه‌های آن از قبل می‌دانستم. اگر آن را به صورت استاندارد بنویسیم داریم: $P(x) = x^2 - x - 12$. بنابراین $Q(x) = -12x^2 - x + 1$ و ریشه‌های آن از دستور کلی معادله درجه دوم $\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$ خواهند شد.

معلم: هر دو روش کارهای خوبی برای حل مسئله انجام داده‌اند. در هر دو روش این حدس پیش می‌آید که ریشه‌های دو چند جمله‌ای معکوس یکدیگرند. شما می‌توانید این حدس را در مثال‌های دیگری هم بررسی کنید. حال چگونه می‌توانید این مطلب را برای یک چند جمله‌ای دلخواه ثابت کنید؟ ابتدا بهتر است حدس خود را به شکل دقیق‌تری بیان کنید. مثلاً برای دو چند جمله‌ای

$P(x) = ax^2 + bx + c$ و $Q(x) = cx^2 + bx + a$ اگر r یک ریشه $P(x)$ باشد باید تحقیق کنیم که آیا $\frac{1}{r}$ یک ریشه $Q(x)$ می‌شود؟



علی: پس باید از $P(r) = 0$ بتوانیم نتیجه بگیریم $Q(\frac{1}{r}) = 0$. اما اگر صفر یک ریشه $P(x)$ باشد چنین نتیجه‌گیری امکان‌پذیر نخواهد بود.

معلم: لابد صفر نمی‌تواند ریشه $P(x)$ شود. آیا می‌توانید این مطلب را بررسی کنید؟

سعید: درست است صفر نمی‌تواند ریشه $P(x)$ باشد، زیرا $P(0) = a_0 \neq 0$.

معلم: حالا که مطمئن شدید $P(x)$ ریشه صفر ندارد، سعی کنید از فرض $P(r) = 0$ حکم $Q(\frac{1}{r}) = 0$ را به دست آورید.

عباس: پس فرض کنیم $P(r) = ar^2 + br + c = 0$ اکنون می‌خواهیم $Q(\frac{1}{r})$ را به دست آوریم.

$$Q\left(\frac{1}{r}\right) = c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right) + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{P(r)}{r^2} = 0$$

معلم: آفرین، محاسبه را به درستی انجام دادی. انجام این محاسبه در حالت کلی هم چندان مشکل نیست.

اگر r ریشه‌ای از چندجمله‌ای $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ باشد آن‌گاه $P(r) = 0$ بنابراین:

$$Q\left(\frac{1}{r}\right) = a_0 \left(\frac{1}{r}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{1}{r}\right) + a_n$$

$$= \frac{1}{r^n} (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n) = \frac{1}{r^n} P(r) = 0$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ ریشه $Q(x)$ است.

علی: آیا عکس مطلب هم درست است اگر s ریشه‌ای از $Q(x)$ باشد آیا می‌توان گفت $P(\frac{1}{s}) = 0$ ؟

معلم: این مطلب بدیهی است زیرا اگر از چندجمله‌ای $Q(x)$ شروع کنیم و چندجمله‌ای وارون آن را بسازیم همان $P(x)$

می‌شود.

تذکر:

برهان نهایی این مسئله مانند یک مبحث ریاضی مختصر و رسمی است و نتایج نهایی فرایند فکر ما را نمایش می‌دهد. ولی مطلب مهم آن است که بدانیم با یک مسئله چگونه برخورد کنیم و راه‌حل‌های خود را به دست آوریم؟ اگر به شیوه‌های کار توجه کنید کاری که ما انجام دادیم آزمایش حالت‌های خاص به منظور دیدن یک الگو برای برهان یک مسأله کلی بود. از این روش در حل بسیاری از مسائل می‌توان استفاده کرد.

تمرین در کلاس



با استفاده از فرمول جواب‌های دو معادله $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$ را به دست آورید و نشان دهید جواب‌های آن‌ها عکس یکدیگرند.



۱- در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۲- صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{الف)}$$

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad \text{ب)}$$

۳- معادلات زیر را حل کنید.

$$2x^3 + x^2 + 3x = 0 \quad \text{الف)}$$

$$\frac{3x^2 - 11}{8} + \frac{74 - 2x^2}{12} = 10 \quad \text{ب)}$$

۴- معادله درجه دومی بنویسید که:

الف) جواب‌های آن $\frac{1}{5}$ و $\frac{4}{5}$ باشد.

ب) جواب‌های آن $1 \pm \sqrt{3}$ باشد.

۵- مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = 9x^2 + 6x + 3 \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = 4 + 8x - x^2 \quad \text{ب)}$$

۶- اگر α و β جواب‌های معادله درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد معادله‌ای بنویسید که جواب‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

۷- بدون حل معادله، و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت جواب‌های معادله $5x^2 - 7x - 5 = 0$ بحث کنید.

۸- از دبیر ریاضی کلاس حسابان سنش را پرسیدند. پاسخ داد: ۲۱ سال بعد، سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال سن دارد؟

۹- (مسئله‌ای از کتاب جبر و مقابله خوارزمی) کدام عدد (مثبت) است که چون یک سوم آن را با یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع کنیم و دو حاصل جمع را در هم ضرب کنیم، برابر ۲۰ شود؟

۱۰- در ضرب دو عدد طبیعی که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است؛ اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می‌شود. برای آزمایش، حاصلضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می‌کنند. خارج قسمت ۳۹ و باقی‌مانده آن ۲۲ می‌شود آن دو عدد را پیدا کنید.

۱۱- معادلات زیر را حل کنید.

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \quad \text{الف)}$$

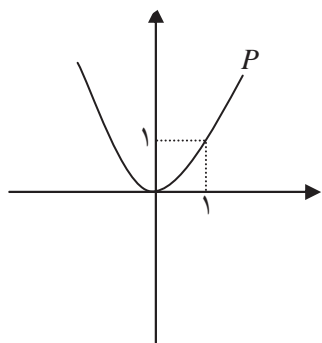
$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0 \quad \text{ب)}$$

$$(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0 \quad \text{ج)}$$

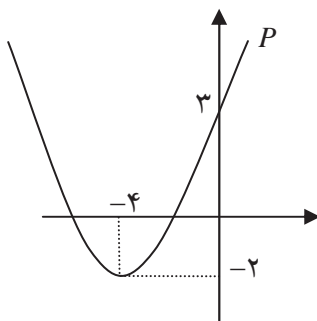


۱۲- کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{2}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید.

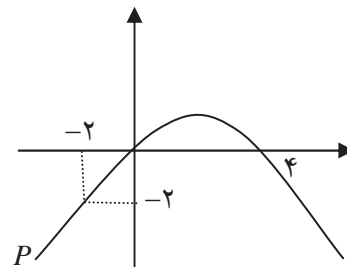
۱۳- در تابع درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ در هر یک از حالت‌های زیر اولاً ضرایب a و b و c ثانیاً علامت $P(x)$ را تعیین کنید.



(ج)



(ب)



(الف)

۱۴- محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. اندازه طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

معادلات شامل عبارات گویا



حل یک مسئله



در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر که با هم کار می‌کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند؟

خانم تقوی دبیر دبیرستان ایمان است. او معمولاً درس خود را با طرح یک مسئله آغاز می‌کند. او امروز مسئله بالا را طرح کرد و به دانش‌آموزان فرصت داد تا روی مسئله کار کنند. سپس از آن‌ها خواست راه حل خود را مطرح کنند. زهرا: فکر می‌کنم مسئله با تشکیل یک معادله حل می‌شود. فرض می‌کنیم کارگر اول در x روز کار را تمام کند، پس کارگر دوم همین کار را در $x+15$ روز تمام می‌کند. باید مفروضات مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم، اما من نتوانستم این کار را انجام دهم. خانم تقوی: این دو کارگر با هم در یک روز چه کسری از کار را انجام می‌دهند؟ دانش‌آموزان: معلوم است $\frac{1}{18}$ کار را.

فصل ۱ محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات



خانم تقوی: حال شما مشخص کنید در یک روز هر کارگر چه میزان از کار را انجام می‌دهد و ببینید چگونه بین این نسبت‌ها می‌توانید ارتباط برقرار کنید.

سارا: فکر کنم بتوانم ارتباط بین این نسبت‌ها را بنویسم سپس از معلم اجازه خواست و پای تابلو نوشت:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18}$$

و توضیح داد که $\frac{1}{x}$ میزان کار کارگر اول در یک روز و $\frac{1}{x+15}$ میزان کار کارگر دوم در یک روز است و مجموع آن‌ها مجموع کار هر دو کارگر در یک روز است که برابر $\frac{1}{18}$ است.

خانم تقوی: شما معادله مورد نظر را پیدا کردید و برای حل مسئله کافی است این معادله را حل کنید. برای حل این معادله باید عبارت متناظر آن را ساده کنیم.

مینا: ما قبلاً برای جمع کسرها از روش هم‌مخرج کردن استفاده می‌کردیم این‌جا هم می‌توانیم از روش کلی هم‌مخرج کردن کسرها استفاده کنیم. یک راه که امسال با آن آشنا شدیم استفاده از کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌هاست، که در این‌جا همان حاصل‌ضرب مخرج‌ها می‌شود.

$$\frac{x+15+x}{x(x+15)} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2x+15}{x^2+15x} = \frac{1}{18} \Rightarrow 18(2x+15) = x^2+15x$$

$$\Rightarrow x^2 - 21x - 270 = 0 \Rightarrow (x-30)(x+9) = 0 \Rightarrow x = 30, x = -9$$

جواب $x = -9$ قابل قبول نیست (چرا؟) و جواب معادله $x = 30$ روز است. یعنی کارگر اول به تنهایی در ۳۰ روز و کارگر دوم به تنهایی در ۴۵ روز کار را تمام می‌کند.



حل یک مسئله



در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می‌شوند. به‌علت تازه کار بودن کارگرها، ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می‌توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند؟

حالت اول: فرض می‌کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی، محلول با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می‌کنیم که در محلول فعلی چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$\frac{4}{100} \times 200 = 8 \text{ کیلو}$$

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب $x + 8$ کیلوگرم می‌شود و وزن کل محلول $x + 200$ کیلو می‌شود،



پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم :

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

با حل این معادله نتیجه می شود $x = \frac{600}{93}$. یعنی تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۲ گرم نمک باید به محلول اضافه شود.
حالت دوم : اگر نمک موجود نباشد و بخواهیم با تبخیر y کیلوگرم از آب، محلول ۷ درصد نمک بسازیم، باید داشته باشیم :

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

با حل این معادله داریم $y = \frac{600}{7}$. یعنی تقریباً ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم آب را باید تبخیر کنیم.

تذکر :

برای حل معادلات شامل عبارات گویا با ضرب طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده، معادله را حل می کنیم. جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند. (چرا؟) همچنین ممکن است برخی از جوابها با شرایط مسئله که از واقعیت می آیند مطابقت نداشته باشند که این جوابها نیز قابل قبول نیستند.

بحث در کلاس

در حل مسئله محلول آب نمک، اگر مقدار نمک موجود در مغازه ۵ کیلوگرم باشد و آن را به محلول اضافه کنیم، چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کنیم تا به هدف مورد نظر برسیم؟



مثال

مجموعه جواب معادله $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$ را به دست آورید.

ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرجها را به دست می آوریم. برای این کار ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می کنیم.

$$\begin{cases} 2x-2=2(x-1) \\ x^2-1=(x-1)(x+1) \\ 2x+2=2(x+1) \end{cases}$$

$K=2(x-1)(x+1)$. م.م.م. مخرجها



طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم.

$$(x+1)(2x+3) - 5 \times 2 = (x-1)(2x-3)$$

$$2x^2 + 3x + 2x + 3 - 10 = 2x^2 - 3x - 2x + 3$$

$$10x - 10 = 0$$

$$x = 1$$

اما $x = 1$ مخرج یکی از کسرهای معادله را صفر می‌کند. پس معادله جواب ندارد.

تمرین در کلاس



هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{3}{2x} = \frac{x+2}{x^2-3x} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{t-1}{t+4} - \frac{2}{t-4} = \frac{7}{6} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \quad (\text{ج})$$

مسائل



هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$1) \frac{6}{p} = 2 + \frac{p}{p+1}$$

$$2) \frac{k}{2-k} + \frac{2}{k} = 5$$

$$3) 2 + \frac{5}{3k-1} = \frac{-2}{(3k-1)^2}$$

$$4) \frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

$$5) \frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m-4}{m^2-4}$$

$$6) \frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+3} = \frac{12}{x^2-9}$$

۷- معلم سؤال کرد مجموعه جواب معادله $\frac{x+3}{x+3} = 1$ چیست؟ برخی از دانش‌آموزان گفتند: همه اعداد. معلم گفت این جواب صحیح نمی‌باشد؟ جواب صحیح چیست؟

۸- آقای عماد چند اسباب بازی یکسان برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آن‌ها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می‌داد او با همان پول ۴ اسباب‌بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی را قبل از تخفیف به دست آورید.



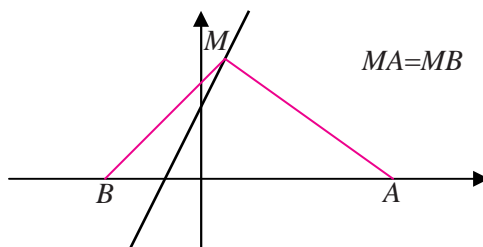
معادلات شامل عبارات گنگ

حل یک مسئله



نقطه‌ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که از دو نقطه $A(3, 0)$ و $B(-1, 0)$ به یک فاصله باشد.

سجاد و صادق دو دانش‌آموز علاقمند هستند که روی این مسئله کار کرده‌اند.
سجاد: مناسب است برای درک بهتر مسئله شکلی رسم کنیم که مشخصات مسئله در آن دیده شود.



صادق: ما می‌توانیم نقطه دلخواهی روی خط $y = 2x + 1$ در نظر بگیریم و فاصله آن را تا A و B حساب کنیم و ببینیم تحت چه شرایطی این فاصله‌ها مساوی می‌شوند.

سجاد: بسیار خوب. اگر این نقطه را M بنامیم چون روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد مختصات آن باید به شکل $M(a, 2a+1)$ باشد.

صادق: همچنین باید داشته باشیم $MA = MB$ ، یعنی

$$MA = \sqrt{(a-3)^2 + (2a+1-0)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a+1-0)^2} = MB$$

با به توان دو رساندن طرفین این رابطه خواهیم داشت:

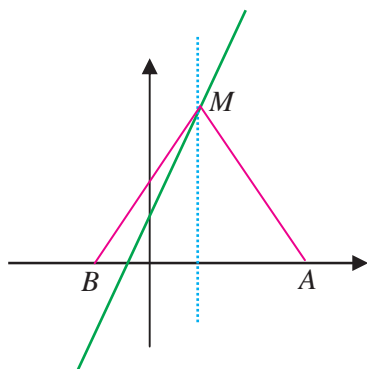
$$(a-3)^2 + (2a+1)^2 = (a+1)^2 + (2a+1)^2$$

$$a^2 - 6a + 9 = a^2 + 2a + 1$$

$$a = 1$$

سجاد: پس جواب مسئله نقطه $M(1, 3)$ است.

صادق: این مسئله را می‌توانیم به صورت هندسی نیز حل کنیم. نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله اند روی عمود منصف پاره خط واصل آن دو نقطه قرار دارند. پس نقطه M روی عمود منصف AB است؛ از طرف دیگر M روی خط $y = 2x + 1$ است، پس محل برخورد این دو خط است.





تذکر :

برخی معادلات دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند که آن‌ها را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آن‌ها با توان رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم تکرار آن و ساده کردن، معادله‌ای بدون عبارت گنگ به دست می‌آید که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کنند.



مثال

معادله $\sqrt{15} + \sqrt{2x+80} = 5$ را حل می‌کنیم.

با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت :

$$15 + \sqrt{2x+80} = 25$$

$$\sqrt{2x+80} = 10$$

دوباره طرفین معادله اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم. خواهیم داشت :

$$2x+80=100 \Rightarrow x=10$$

جواب به دست آمده را در معادله اصلی قرار می‌دهیم :

$$\sqrt{15} + \sqrt{2 \cdot 10 + 80} = \sqrt{15} + 10 = \sqrt{25} = 5$$

تساوی برقرار است و $x=10$ جواب معادله می‌باشد.



مثال

آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد.

اگر عدد مورد نظر را x بنامیم باید تساوی $x + \sqrt{x} = 6$ برقرار شود. یعنی

$$\sqrt{x} = 6 - x$$

با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت :

$$x = 36 + x^2 - 12x$$

با حل این معادله خواهیم داشت :

$$x = 9, \quad x = 4$$



با آزمایش جواب‌ها در معادله اصلی دیده می‌شود، $x=9$ نمی‌تواند مورد قبول واقع شود و تنها جواب معادله $x=4$ می‌باشد.

$$x=9: \quad 9 + \sqrt{9} = 6$$

$$9 + 3 = 6$$

$$12 = 6$$

×

$$x=4: \quad 4 + \sqrt{4} = 6$$

$$4 + 2 = 6$$

$$6 = 6$$

✓

بحث در کلاس

چرا یکی از جواب‌های معادله اخیر در معادله اولیه صدق نمی‌کند؟ این جواب اضافه به چه دلیل ایجاد شده است؟

تمرین در کلاس



هریک از معادلات زیر را حل کنید.

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt{5q-1} + 3 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt{3-3p} = 3 + \sqrt{3p+2} \quad (\text{ج})$$

مسائل



۱- معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x} \quad (\text{ج}) \quad \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x \quad (\text{ب}) \quad \sqrt{1-x^2} = x \quad (\text{الف})$$

۲- بدون حل معادله $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + 3 = 0$ توضیح دهید چرا مجموعه جواب تهی است؟

۳- در هر یک از فرمول‌های زیر متغیر خواسته شده را بر حسب سایر متغیرها بیابید.

$$\text{الف) } V = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad , \quad k = ?$$

$$\text{ب) } F = \frac{1}{2\pi} \sqrt{LC} \quad , \quad L = ?$$





$$\text{ج) } I = \frac{nE}{R+nr}, \quad n=?$$

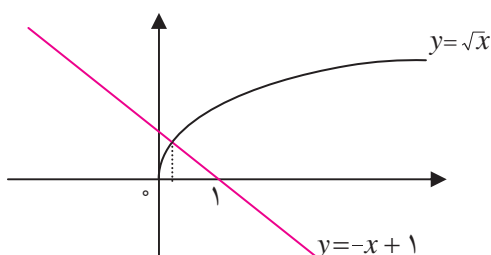
$$\text{د) } \frac{PV_1}{T_1} = \frac{PV_2}{T_2}, \quad T_1=?$$

$$\text{ه) } A = p(1+i)^t, \quad i=?$$

حل معادلات به روش هندسی

تاکنون با حل انواعی از معادلات با روش‌های جبری آشنا شده‌ایم. در اینجا می‌خواهیم با روش دیگری از حل معادلات آشنا شویم که از برخی لحاظ بر روش جبری ارجحیت دارد. در این روش مقدار تقریبی جواب‌ها و تعداد جواب‌ها آسان‌تر مشخص می‌شوند. حتی در برخی مثال‌ها حل جبری امکان‌پذیر نیست ولی حل با روش هندسی امکان‌پذیر است.

فعالیت ۸



نمودار دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = -x + 1$ در روبرو رسم شده است.

۱- اگر طول نقطه تلاقی این دو نمودار a باشد، نشان دهید a یک جواب معادله $\sqrt{x} = -x + 1$ است.

۲- برعکس اگر بدانیم عددی مانند a یک جواب معادله $\sqrt{x} = -x + 1$ است، آیا a طول یکی از نقاط تلاقی دو نمودار است؟

۳- از طریق شکل بالا استدلال کنید که معادله $\sqrt{x} = -x + 1$ فقط یک جواب دارد که در فاصله $[0, 1]$ قرار دارد.

۴- مقدار دقیق جواب معادله $\sqrt{x} = -x + 1$ چیست؟

به کمک فعالیت بالا قضیه زیر به دست می‌آید.

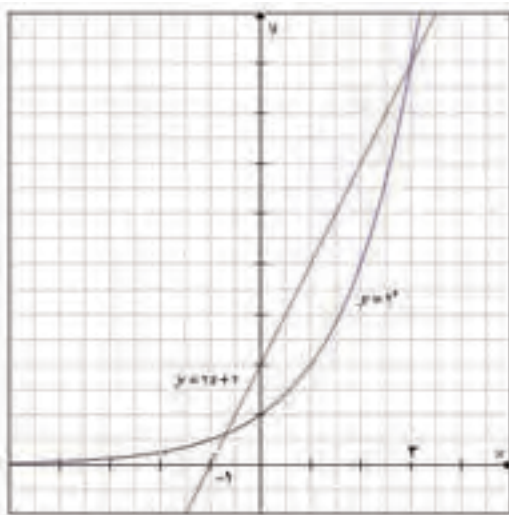
قضیه :

اگر $y = f(x)$ و $y = g(x)$ دو تابع باشند؛ طول نقاط محل تلاقی نمودار این دو تابع جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط محل تلاقی نمودار این دو تابع است.

این شیوه حل معادلات را که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی جواب‌ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامند.

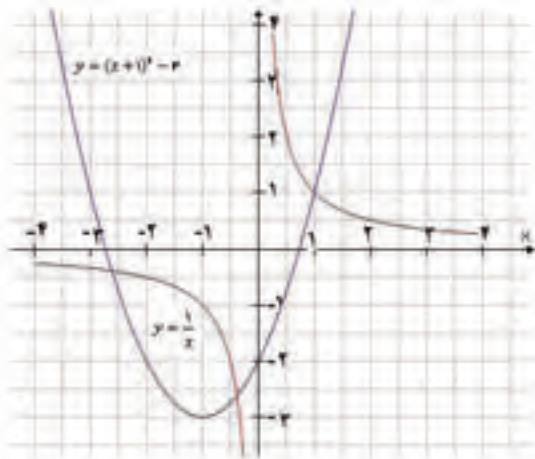


مثال



معادله $2^x = 2x + 2$ را به روش هندسی حل می‌کنیم. کافی است نمودار توابع $y = 2^x$, $y = 2x + 2$ را رسم کنیم و محل تلاقی نمودارها را به دست آوریم. از روی نمودار واضح است که معادله دارای جوابی بین -1 و 0 و یک جواب مثبت است و معادله فقط همین دو جواب را دارد. جواب مثبت این معادله 2 است ولی جواب دیگر را به طور دقیق نمی‌توانیم به دست آوریم اما با روش آزمون و خطا که در سال‌های قبل آموخته‌اید می‌توانید تقریباً اعشار جواب را با دقت مورد نظر به دست آورید.

مثال



تعداد جواب‌های معادله $\frac{1}{x} = x^2 + 2x - 2$ را از طریق هندسی می‌یابیم، سپس با استفاده از روش جبری جواب‌های معادله را به طور دقیق تعیین می‌کنیم.

نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را می‌شناسید. توجه داریم که این تابع در $x = 0$ تعریف نمی‌شود و شامل دو شاخه در ربع اول و سوم می‌باشد. با استفاده از رسم تابع $y = x^2 + 2x - 2$ و انتقال نمودار آن، تابع $y = x^2 + 2x - 2$ را رسم می‌کنیم. توجه داریم که

$$y = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$$

از روی شکل می‌توان حدس زد که یکی از جواب‌ها

1 خواهد شد و با جای‌گذاری $x = 1$ در معادله، درستی این حدس تأیید می‌شود. شکل نشان می‌دهد که این معادله دو جواب دیگر هم دارد که منفی هستند. اگر مقدار دقیق جواب‌ها را بخواهیم ابتدا با ضرب طرفین معادله در x آن را به صورت $0 = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ می‌نویسیم. چون چندجمله‌ای $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ بر $x - 1$ بخش پذیر است، داریم:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\text{در نتیجه } x = 1, \quad x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

فصل ۱ محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات



تمرین در کلاس



- ۱- معادله $\sqrt{x+1} - x^2 = 2x+1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید و جواب‌های به دست آمده را مقایسه کنید.
- ۲- تعداد جواب‌های معادله $x - 2\sin x = 0$ را مشخص کنید.
- ۳- از طریق جبری و هندسی نشان دهید معادله $\sqrt{x} = x+1$ جواب ندارد.



مسائل



- ۱- با روش هندسی به طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کنید و در صورت امکان جواب‌های دقیق را با روش جبری به دست آورید.

$$\frac{2x-1}{x} = 5-x \quad (\text{ب})$$

$$\sqrt{x-1} = x-3 \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt{x} + 2x = x^2 + 2 \quad (\text{د})$$

$$2^x = x^2 \quad (\text{ج})$$

- ۲- به روش نقطه یابی نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید. سپس با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = (x+1)^2$ را رسم کنید و جواب‌های معادله $(x+1)^2 = -3x + 5$ را با روش هندسی به طور تقریبی به دست آورید.

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

در سال‌های قبل با مفهوم قدر مطلق و تابع قدر مطلق آشنا شدید. اگر a عددی حقیقی باشد، قدر مطلق a را با $|a|$ نشان می‌دهیم. اگر a مثبت یا صفر باشد، $|a|$ برابر خود عدد a و اگر a منفی باشد، $|a|$ برابر قرینه a است. این مطلب را به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد.

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

تمرین در کلاس



- ۱- حاصل هر یک از عبارات زیر را بدون علامت قدر مطلق بنویسید.
 - (الف) $| -2 - (-3) |$
 - (ب) $| 1 - \sqrt{2} |$
 - (ج) $| \sqrt{3} - \sqrt{5} |$
- ۲- عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.
 - (الف) $\sqrt{4} - 2\sqrt{3}$
 - (ب) $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$
- ۳- عبارت «فاصله بین دو عدد x و a کمتر از ۱٪ است» را با استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.





با توجه به تعریف قدر مطلق می‌توان عبارات قدر مطلق را ساده نمود.

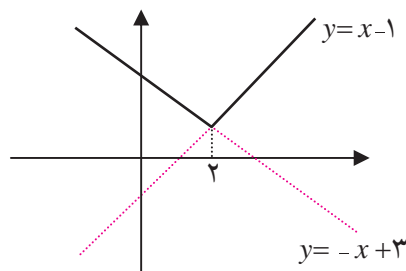
مثال

نمودار $y = |x - 2| + 1$ را رسم می‌کنیم.

با رسم نمودار این تابع از طریق انتقال‌های مناسب نمودار $y = |x|$ آشنا هستید، ولی در اینجا می‌خواهیم با استفاده از مفهوم قدر مطلق و ساده کردن عبارت این کار را انجام دهیم. ابتدا جدول تعیین علامت $x - 2$ را تشکیل می‌دهیم و از طریق آن علامت $x - 2$ را تشخیص می‌دهیم.

x	۲	
$x - 2$	-	+
$ x - 2 $	$-x + 2$	$x - 2$
$ x - 2 + 1$	$-x + 3$	$x - 1$

$$y = |x - 2| + 1 = \begin{cases} -x + 3 & x \leq 2 \\ x - 1 & 2 < x \end{cases}$$



تمرین در کلاس



فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند:

۱- با توجه به این که $\sqrt{a^2} = |a|$ نشان دهید $|ab| = |a||b|$

۲- با فرض $b \neq 0$ و استفاده از قسمت قبل ثابت کنید: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

۳- اگر $|x| \leq c$ ($c \geq 0$) با استفاده از استدلال زیر توضیح دهید چگونه می‌توان نتیجه گرفت: $-c \leq x \leq c$.

$$|x| \leq c \Rightarrow |x|^2 \leq c^2 \Rightarrow x^2 \leq c^2 \Rightarrow x^2 - c^2 \leq 0 \Rightarrow (x - c)(x + c) \leq 0$$



$$\frac{x}{(x-c)(x+c)} \quad \begin{array}{c} -c \quad c \\ + \quad - \quad + \end{array}$$

۴- اگر $c \geq 0$ و $-c \leq a \leq c$ ثابت کنید $|a| \leq c$.



مسائل



۱- برای هر عدد حقیقی a ثابت کنید $|-a| = |a|$ و $|a|^2 = a^2$ و $-|a| \leq a \leq |a|$

۲- برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $-|a|-|b| \leq a+b \leq |a|+|b|$ و نتیجه بگیرید:

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

(خاصیت بالا را خاصیت نامساوی مثلث می‌نامند.)

۳- برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید: $|y| \leq |x| + |y-x|$ و نتیجه بگیرید:

$$|y| - |x| \leq |y-x|$$

۴- اگر $c > 0$ و $|a| > c$ نشان دهید $a > c$ یا $a < -c$.

۵- به کمک تعیین علامت عبارتهای داخل قدر مطلق، ضابطه توابع زیر را بدون استفاده از قدرمطلق

بنویسید.

ج) $y = |x-1| + |x+2|$

ب) $f(x) = |x+1| - 2$

الف) $f(x) = x|x|$

معادلات قدر مطلق



حل یک مسئله



فاصله چه نقاطی روی محور اعداد از نقطه متناظر ۵ برابر ۲ است؟

برای حل این مسئله ابتدا شکل زیر را رسم می‌کنیم.



اگر طول نقطه جواب را x بنامیم شرط مسئله به معنای آن است که $|x-5| = 2$. این یک معادله بر حسب مجهول x است.

شرط $|x-5| = 2$ به معنای آن است که $x-5 = 2$ یا $x-5 = -2$. جواب‌های هر کدام از این دو معادله، جواب معادله $|x-5| = 2$

می‌باشند. در نتیجه $x=7$ و $x=3$ دو جواب آن معادله هستند.



به طور کلی قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

جواب‌های یک معادله به صورت $|f(x)| = |g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ روی هم هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارات قدرمطلق هستند معادلات قدرمطلقى گویند.

برای یافتن جواب این معادلات با استفاده از خواص قدرمطلق و حذف علامت قدرمطلق معادله ساده شده را حل می‌کنیم.



مثال

۱: معادله $|2x - 3| = |x|$ را حل می‌کنیم. جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادله $2x - 3 = \pm x$ هستند که نتیجه می‌شود ۳ و ۱ جواب‌های آن هستند.

۲: معادله $|x + 1| = 4 + 2x$ را حل می‌کنیم.

توجه داریم که سمت چپ عبارت متناظر معادله نامنفی است پس باید داشته باشیم: $4 + 2x \geq 0$ در نتیجه $x \geq -2$. حال دو معادله $x + 1 = \pm(4 + 2x)$ را حل می‌کنیم.

$$x + 1 = 4 + 2x \Rightarrow x = -3$$

این جواب قابل قبول نیست، زیرا باید $x \geq -2$.

$$x + 1 = -(4 + 2x) \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

این جواب قابل قبول است.

تمرین در کلاس



معادلات قدرمطلقى زیر را حل کنید.

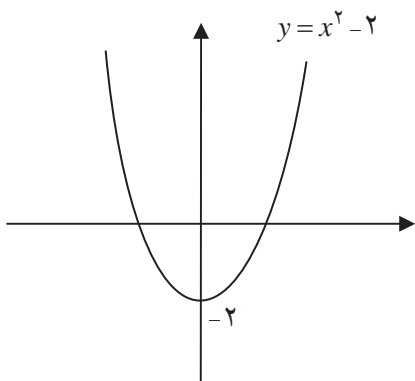
الف) $||x| - 1| = 5$

ب) $|2x - 1| + |x| = 7$

ج) $x|x| = -4$



فعالیت ۹



در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = x^2 - 2$ آمده است.

۱- با توجه به علامت $x^2 - 2$ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2|$ را رسم کنید.

۲- نمودار $y = 2$ را رسم کنید و محل تلاقی آن با نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2|$ را مشخص کنید.

۳- جواب‌های معادله $|x^2 - 2| = 2$ را با استفاده از بند ۲ به‌طور تقریبی تعیین کنید.

۴- به‌روش جبری معادله $|x^2 - 2| = 2$ را حل کرده و با جواب‌های به‌دست آمده در بند ۳ مقایسه کنید.

با توجه به تجربه بالا در رسم نمودار تابع $y = |x^2 - 2|$ می‌توانید رابطه بین نمودار دو تابع $f(x)$ و $|f(x)|$ را به‌دست آورید.

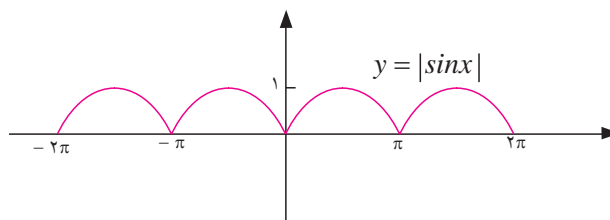
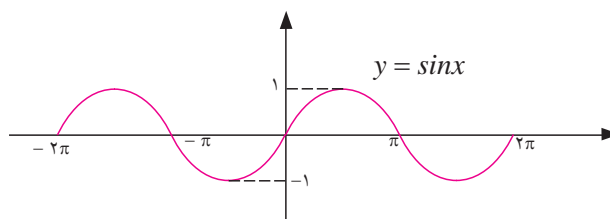
در بازه‌هایی که نمودار $f(x)$ بالای محور x است $f(x)$ مثبت است و $|f(x)| = f(x)$. یعنی در این بازه‌ها نمودار $f(x)$ و $|f(x)|$

بر هم منطبق است. اما در بازه‌هایی که نمودار $f(x)$ پایین محور x است $f(x)$ منفی است و $|f(x)| = -f(x)$. یعنی در این بازه‌ها نمودار $|f(x)|$ تصویر آینه‌ای نمودار $f(x)$ است.

تذکر:

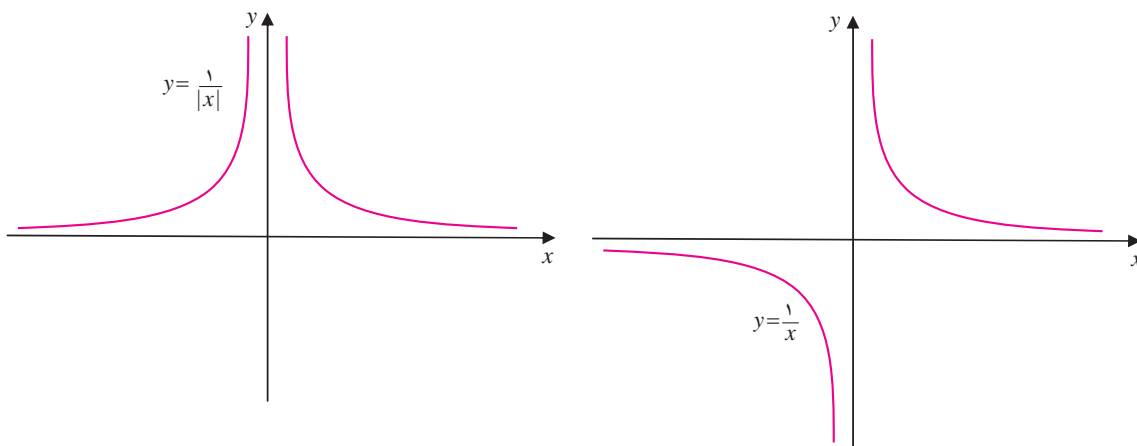
برای رسم نمودار $|f(x)|$ کافی است نمودار $f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور x است

تصویر آینه‌ای نمودار $f(x)$ را رسم کنیم.



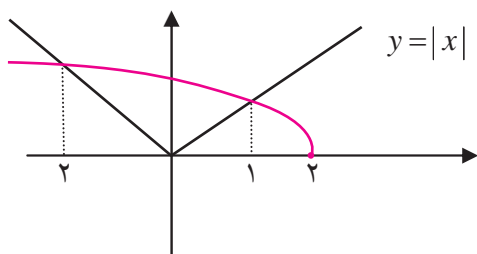
مثال

۱: نمودار تابع $y = \frac{1}{|x|}$ را رسم می‌کنیم.



۲: به روش جبری و نموداری (هندسی) معادله $|x| = \sqrt{2-x}$ را حل می‌کنیم.

در روش جبری با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $x^2 = 2 - x$ در نتیجه $x^2 + x - 2 = 0$



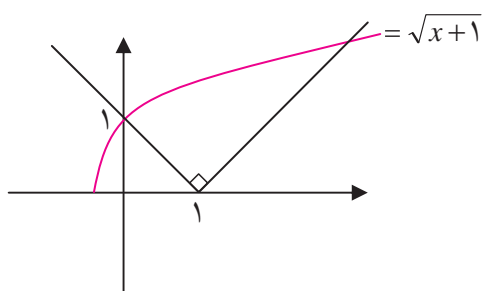
که جواب‌های آن $x = -2$, $x = 1$ هستند که هر دو در معادله اصلی صدق می‌کنند پس معادله دو جواب دارد.

در روش هندسی نمودارهای توابع $y = |x|$ و $y = \sqrt{2-x}$ را رسم می‌کنیم. طول‌های محل تلاقی دو نمودار جواب‌های معادله‌اند.

تمرین در کلاس



۱- به روش هندسی جواب‌های معادله $|\sin x| = \frac{1}{2}$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ به دست آورید.



۲- معادله $|x^2 - 1| = 2x - |x|$ را با روش هندسی حل کنید.

۳- در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ و یک تابع قدرمطلق که نمودار آن نسبت به خط $x=1$ متقارن است دیده می‌شود. معادله‌ای که جواب‌های آن طول نقاط تلاقی این دو منحنی است را تشکیل دهید و به روش جبری آن را حل کنید.



مسائل



۱- هریک از معادلات قدرمطلق زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را مشخص کنید.

$$\text{الف) } |2t-1|-3=0 \quad \text{ب) } |y^2-2|=7 \quad \text{ج) } |2x-3|=3-2x$$

۲- نمودار هریک از روابط زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y=3$ معادله به دست آمده را با روش هندسی و جبری حل کنید.

$$\text{الف) } y = |2x-4| \quad \text{ب) } y = |x| + |1-x| \quad \text{ج) } y = x + \frac{x}{|x|}$$

نامعادلات - نامعادلات قدرمطلق

در سال قبل با تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها و استفاده از آن در حل نامعادله‌های درجه دوم آشنا شدید. هر نامعادله درجه دوم را با استفاده از جدول تعیین علامت و خواص نامساوی‌ها می‌توان حل نمود.

تمرین در کلاس

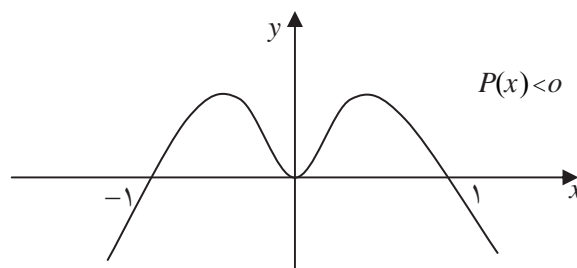
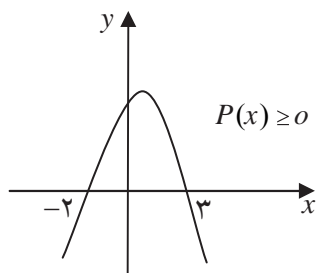


۱- هریک از نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \text{ب) } (1+x^2)(1-x^2) \leq 0$$

$$\text{د) } 1 + \frac{1}{x} < x \quad \text{ج) } (1-x)(x+2) > 2x^2 - 1$$

۲- در هریک از حالت‌های زیر نمودار تابعی، مانند $P(x)$ داده شده است. مجموعه جواب نامعادله داده شده را مشخص کنید.



نامعادلاتی که دارای عبارت‌های قدرمطلق هستند، نامعادلات قدرمطلق می‌نامند. برای حل این گونه نامعادلات عموماً از دو خاصیت مهم قدرمطلق استفاده می‌کنند.

اگر k عددی مثبت باشد، نامساوی $|u| \leq k$ معادل با آن است که $-k \leq u \leq k$.

و نامساوی $|u| \geq k$ معادل است با آن که $u \geq k$ یا $-u \geq k$.

مثال

۱: نامعادله $|2x-1| \leq 7$ را حل می‌کنیم.

$$|2x-1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 2x-1 \leq 7 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4$$

مجموعه جواب بازه $[-3, 4]$ می‌باشد زیرا نتیجه‌گیری‌های بالا در جهت عکس نیز برقرارند.

۲: نامعادله $|6-3x| \geq 5$ را حل می‌کنیم.

مجموعه جواب این نامعادله، اجتماع مجموعه جواب‌های دو نامعادله $6-3x \geq 5$ و $6-3x \leq -5$ است. مجموعه جواب

اولی بازه $[\frac{1}{3}, \infty)$ و مجموعه جواب دومی $(-\infty, \frac{1}{3}]$ است و اجتماع این دو بازه مجموعه جواب نامعادله اصلی است.

۳: نامعادله $|2x+1| \geq 3$ را حل می‌کنیم.

این نامعادله را می‌توان مانند مثال قبل حل کرد. اما از روش دیگری هم می‌توانیم استفاده کنیم. با توجه به مثبت بودن طرفین نامساوی، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

$$(2x+1)^2 \geq 9 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 \geq 9 \Rightarrow 4x^2 + 4x - 8 \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) \geq 0$$

x		-2		1	
$P = (x+2)(x-1)$		+		-	
$0 \leq P$		جواب		جواب	

برای حل نامعادله اخیر از جدول

تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

مجموعه جواب $[-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$

توجه داشته باشید که برای دو عدد

مثبت a و b شرط $a \leq b$ معادل با آن است

که $a^2 \leq b^2$.

تمرین در کلاس



مجموعه جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

(ب) $|2-3x| > 5$

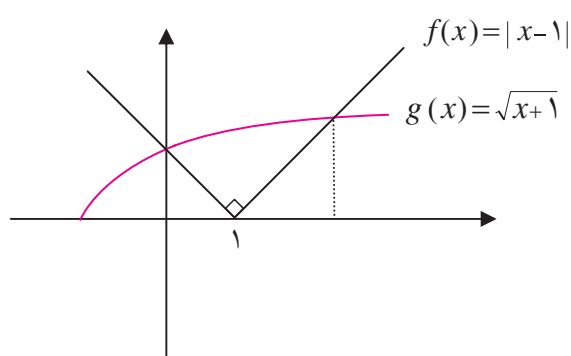
(الف) $|x-1| \leq \sqrt{x+1}$



حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)



فعالیت ۱۰



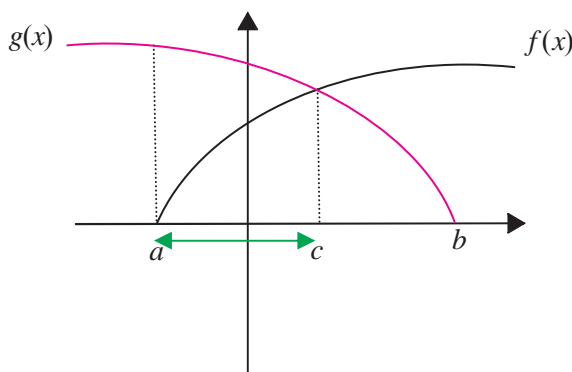
در شکل روبه‌رو نمودار توابع $f(x) = |x-1|$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ رسم شده است.

۱- نقاط x که $f(x) < g(x)$ را از طریق شکل مشخص کنید.

۲- مجموعه نقاط x که در آن نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می‌گیرد را مشخص کنید.

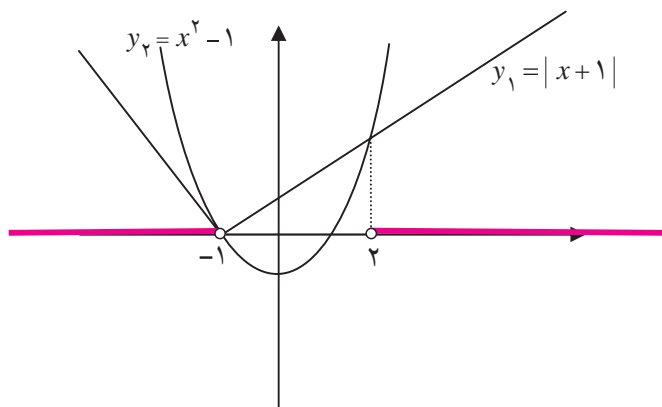
۳- مجموعه نقاط بند (۲) با نقاط بند (۱) چه رابطه‌ای دارند؟

یک نامعادله دلخواه را می‌توان به شکل $f(x) < g(x)$ نوشت که f و g دو تابع می‌باشند. در حالت کلی حل جبری چنین نامعادله‌ای ممکن است بسیار پیچیده و حتی ناممکن باشد. اما اگر بتوانیم نمودارهای این توابع را رسم کنیم، مجموعه جواب این نامعادله دقیقاً برابر مجموعه نقاطی مانند x است که در این نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می‌گیرد. برای مشخص کردن مجموعه جواب نامعادله $f(x) < g(x)$ پس از رسم توابع f و g مقادیری از دامنه مشترک دو تابع را مشخص می‌کنیم که عرض نقاط نمودار تابع f از عرض نقاط نمودار تابع g کمتر باشد. در شکل زیر دامنه مشترک دو تابع $[a, b]$ می‌باشد. فقط در بازه (a, c) ، عرض نقاط نمودار f از عرض نقاط نمودار g کمتر است، پس جواب نامعادله بازه (a, c) می‌باشد.



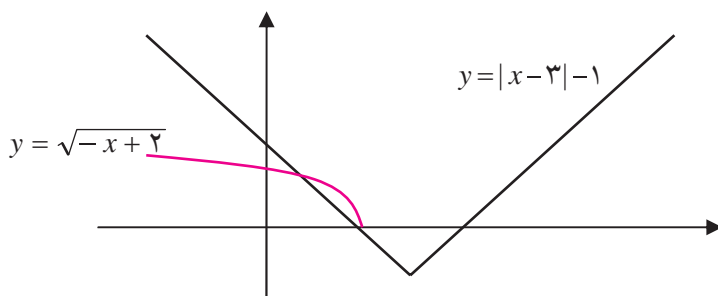
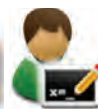


مثال



نامعادله $|x+1| < x^2 - 1$ را با استفاده از روش نموداری (هندسی) حل می‌کنیم. نمودار توابع $y_1 = |x+1|$ و $y_2 = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم. باید مجموعه نقاطی را تعیین کنیم که در آن نقاط نمودار y_1 زیر نمودار y_2 واقع شده باشد. اجتماع دو بازه $(-\infty, -1)$ و $(2, \infty)$ مجموعه جواب نامعادله است.

تمرین در کلاس



باتوجه به نمودارهای رسم شده، نامعادله $\sqrt{-x+2} \geq |x-3| - 1$ را حل کنید.

مسائل

نامعادلات زیر را با روش جبری حل کنید.

$$۱) x^2 - 2x^2 + x \geq 0$$

$$۲) \frac{2x-1}{x} > 1$$

$$۳) \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 2$$

$$۴) |x-2| \leq x$$

نامعادلات زیر را با روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را مشخص کنید.

$$۵) x^2 \leq 2^x$$

$$۶) \sqrt{x-1} < |x-1|$$

$$۷) \frac{1}{x} < \sqrt{x}$$

نامعادلات زیر را با روش هندسی و جبری حل کنید.

$$۸) x+1 < |x|$$

$$۹) |x^2 - 1| \leq |x+1|$$

$$۱۰) |x| + |x-1| \leq 5$$



برق تولید شده توسط توربین‌های بادی تابعی
از سرعت باد است.

$$P(v) = \frac{8v^2}{125}$$



تابع

۱. تابع: یادآوری و تکمیل
۲. رسم نمودار توابع
۳. اعمال جبری روی توابع
۴. ترکیب توابع
۵. توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی
۶. توابع یک به یک و توابع وارون
۷. توابع چند جمله‌ای و توابع متناوب
۸. توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

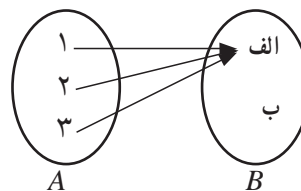
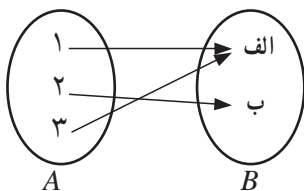
تابع : یادآوری و تکمیل

در سال گذشته با مفهوم تابع و برخی از انواع آن و نیز کاربردهایی از تابع آشنا شدید. همان گونه که دیدید یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. در اینجا تعریف تابع را با دقت بیشتری توضیح می‌دهیم.

تمرین در کلاس



فرض کنید محصولات یک کارخانه از نظر کیفیت در دو نوع «الف» و «ب» دسته بندی شوند.
الف) چرا رابطه‌ای که به هر محصول، کیفیت آن را نسبت می‌دهد یک تابع است؟
ب) فرض کنید سه محصول ۱، ۲ و ۳ از تولیدات این کارخانه را اختیار کرده‌ایم. در زیر دو تا از توابعی که از A به B می‌تواند برقرار شود را نشان داده‌ایم.



بردهای این دو تابع با هم چه تفاوتی دارند؟
ج) همه توابع ممکن از A به B را با نمودار ون نشان دهید. در کدام یک از این توابع برد تابع همان مجموعه B می‌شود؟

تذکر :

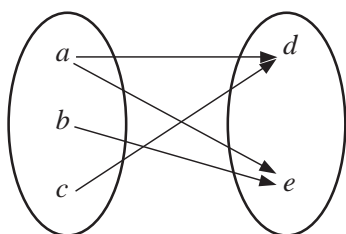
از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد،
الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.
ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن که اصلاً پیکانی وارد نشود.



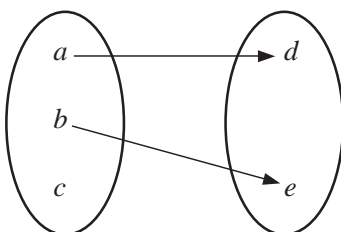
تمرین در کلاس



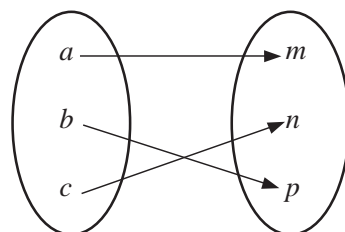
کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می کنند؟



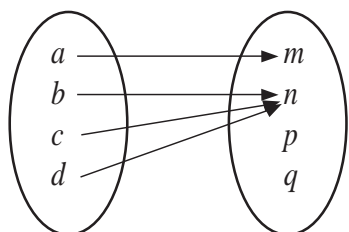
(ا)



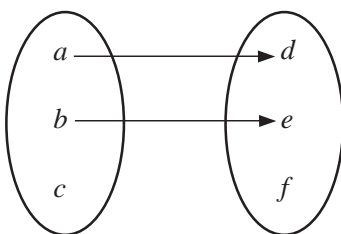
(ب)



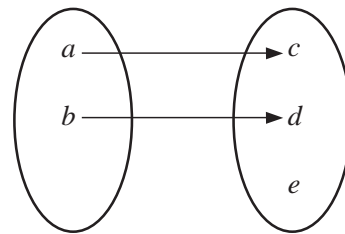
(الف)



(د)



(ه)



(د)

تذکر:

اگر f تابعی از A به B باشد، دامنه آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان مجموعه B باشد. مجموعه B را هم دامنه یا مقصد تابع f می نامند. برد یک تابع زیر مجموعه ای از هم دامنه آن است و ممکن است مساوی هم دامنه نیز بشود.



فعالیت ۱



۱- جدول زیر را کامل کنید و نمودار توابع داده شده را رسم کنید.

تابع	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2$	$h(x) = 4x + 1$	$t(x) = x - 2$	$s(x) = x - 2$
دامنه	اعداد حقیقی مثبت	اعداد حقیقی منفی	IR	IR	$[2, 3]$
برد					

۲- شباهت ها و تفاوت های این توابع را مشخص کنید.



به طور کلی اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می‌نویسیم: $f: A \longrightarrow B$. این نمادگذاری نشان می‌دهد که f تابعی با دامنه A و مقادیر در B است، ولی ضابطه f در این نمادگذاری مشخص نمی‌شود و جداگانه باید ارائه شود. به طور مثال تابع g داده شده در فعالیت صفحه قبل را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نمایش داد:

$$g: IR^- \longrightarrow IR \quad \text{یا} \quad g: IR^- \longrightarrow IR^+ \\ \text{(ب)} \quad g(x) = x^2 \quad \text{(الف)} \quad g(x) = x^2$$

در هر دو نمایش دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی منفی (IR^-) است و در طرف چپ پیکان آمده است. اما در نمایش (الف) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی مثبت (IR^+) است که در طرف راست پیکان آمده است و در نمایش (ب) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی است که در طرف راست پیکان آمده است. در نمایش دوم به جای مجموعه اعداد حقیقی هر مجموعه دیگری را که شامل برد تابع باشد را نیز می‌توان نوشت.

در هر تابع سه ویژگی زیر اهمیت دارند:

- ۱- دامنه ۲- هم دامنه ۳- دستور یا قانونی که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم دامنه را نشان می‌دهد.
- هنگامی که دستور یا قانون تابع در قالب یک عبارت جبری قابل بیان باشد، آن را یک ضابطه جبری می‌نامیم.



مثال

- ۱: همه توابع داده شده در فعالیت قبل دارای ضابطه جبری هستند. توجه داشته باشید که ضابطه یک تابع مشخص نمی‌کند که دامنه آن تابع چه باید باشد و دامنه تابع مستقلاً باید ارائه شود.
- ۲: تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2-x}$ را اگر با دامنه $[0, 1]$ در نظر بگیریم، مقدارهای آن نیز در اعداد مثبت می‌باشند، در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$f: [0, 1] \longrightarrow (0, \infty)$$

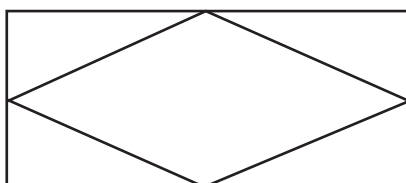
$$f(x) = \sqrt{2-x}$$

برد این تابع مجموعه $[1, \sqrt{2}]$ است.

- موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را صرفاً با ارائه ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود در این موارد طبق قرارداد دامنه تابع، بزرگترین مجموعه‌ای است که ضابطه ارائه شده، روی آن مجموعه تعریف شده است.
- ۳: اگر $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ به عنوان تابع ارائه شده باشد و مستقیماً دامنه ارائه نشده باشد، طبق قرارداد دامنه آن بازه $[-2, 2]$ است. زیرا این بازه بزرگترین مجموعه‌ای است که ضابطه $\sqrt{4-x^2}$ روی آن تعریف شده است. همچنین دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2-x}$ بازه $(-\infty, 2]$ است.



- ۱- اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{p, q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟
- ۲- اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، چند تابع از A به B وجود دارد؟
- ۳- تابعی مثال بزنید که دامنه آن $(-\infty, +\infty)$ باشد.
- ۴- دو تابع مانند f و g بسازید که دامنه هر دو برابر $[2, 5]$ و برد هر دو $[0, 4]$ و f یک به یک باشد ولی g یک به یک نباشد.
- ۵- در مستطیلی به عرض w و محیط 40 متر یک لوزی محاط شده است. هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.



- ۶- اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچکتر بیان کنید.
- ۷- با 150° متر نرده یک زمین مستطیل شکل را محصور و از وسط با نرده مانند شکل آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده ایم. مساحت ناحیه محصور شده را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیابید.



۸- توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f: [1, 2] \rightarrow IR$
 $f(x) = 3x - 1$

ب) $g: [-5, 5] \rightarrow IR$
 $g(x) = |x|$

- ۹- مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۲۵ سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن به دست آورید.

۱۰- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = |x|$ درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(2x) = 2f(x)$

ب) $g(2x) = 2g(x)$

ج) $f(x+2) = f(x) + 2$

د) $g(x+2) = g(x) + 2$

تساوی دو تابع

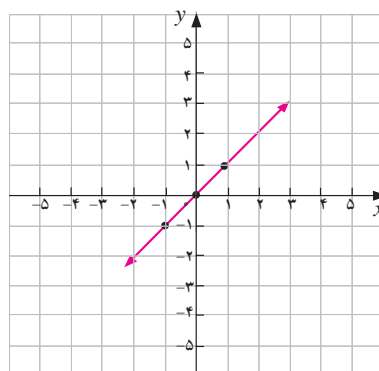
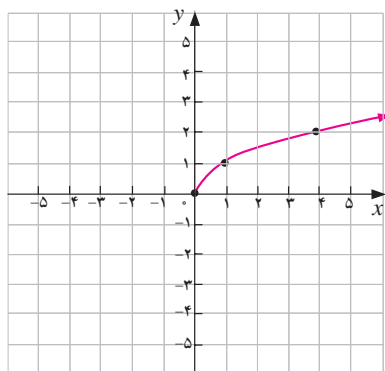
چه وقت دو تابع را مساوی می‌دانیم؟ برای مثال آیا دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \frac{x^2}{x}$ با هم مساویند؟ اگر نمودار این دو تابع را رسم کنیم متوجه می‌شویم از هر نظر برهم منطبقند غیر از آن که تابع g در صفر تعریف نشده است. همین تفاوت نشان‌دهنده آن است که این دو تابع دامنه یکسانی ندارند، پس نمی‌توانند مساوی باشند.

با توجه به ویژگی‌های مشخص‌کننده یک تابع، دو تابع وقتی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها دقیقاً برهم منطبق باشند. به عبارت دیگر هیچ نقطه‌ای یافت نشود که به یکی از نمودارها تعلق داشته باشد ولی روی دیگری واقع نباشد.

با توجه به این تعریف، اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشند هنگامی با هم برابرند که مجموعه‌های زوج‌های مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

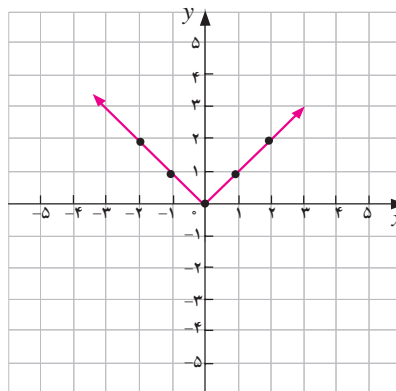
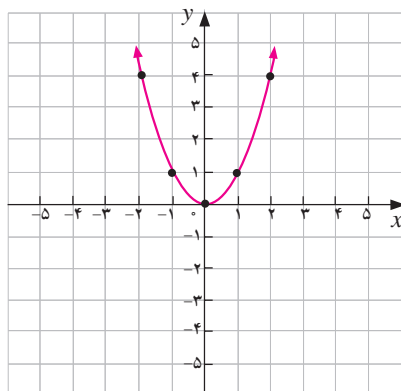
مثال

۱: دو تابع که نمودار آن‌ها در زیر داده شده است مساوی نیستند.



به روشنی دیده می‌شود که این نمودارها یکی نیستند و حتی دامنه و برد این دو تابع با هم فرق می‌کنند.

۲: دو تابع که نمودار آن‌ها در زیر داده شده است مساوی نیستند.





اگر چه دامنه و برد این دو تابع مساوی هستند، ولی نمودارهای این دو تابع با هم تفاوت دارند که نشان می‌دهد ضابطه آن‌ها با هم فرق می‌کنند. توجه داشته باشید که اگر دو تابع دارای دامنه‌ها و بردهای یکسان باشند، لزوماً با هم برابر نیستند.

تعریف:

دو تابع f و g را مساوی نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه f (یا g) $f(x) = g(x)$

تمرین در کلاس



در کدام سطر دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف)	$f = \{(1,2), (5,9)\}$	$g = \{(1,5), (2,9)\}$
ب)	$f: IR \rightarrow IR$ $f(x) = x$	$g: IR \rightarrow IR$ $g(x) = x^2$
ج)	$f: [1,2] \rightarrow [1,4]$ $f(x) = x^2$	$g: IR \rightarrow IR$ $g(x) = x^2$
د)	$f = \{(a,b), (c,d), (e,f)\}$	$g = \{(e,f), (a,b), (c,d)\}$
ه)	$f(x) = x+1$	$g(x) = \frac{2x+2}{2}$
و)	$f(x) = \tan x$	$g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
ز)	$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$	$g(x) = x+2$

توابع چند ضابطه‌ای

فعالیت ۲

یک شرکت حمل و نقل کالا برای محاسبه هزینه حمل کالا، به شکل زیر عمل می‌کند. این شرکت در صورتی که وزن کل از ۲ تن کمتر باشد، به ازای هر کیلوگرم دو تومان کرایه دریافت می‌کند، اگر وزن کالا حداقل ۲ تن ولی از ۳ تن کمتر باشد، شرکت به ازای هر کیلوگرم ۳ تومان و در صورتی که وزن کالا حداقل ۳ تن و حداکثر ۵ تن باشد، شرکت برای هر کیلوگرم ۴ تومان دریافت می‌کند.

الف) کرایه حمل کالایی که $\frac{2}{5}$ تن وزن دارد چقدر است؟
ب) جدول زیر را کامل کنید :

وزن کالا x	کرایه حمل
$0 \leq x < 2000$	$2x$

ج) این جدول تابعی را مشخص می‌کند. نمودار این تابع را با انتخاب مقیاس مناسب رسم کنید.
د) اگر این تابع را f بنامیم با استفاده از (ب) ضابطه تابع را به طور کامل بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 2000 \\ \dots & 2000 \leq x < 3000 \\ \dots & 3000 \leq x \leq 5000 \end{cases}$$

توابعی که در بخش‌های مختلف از دامنه آن، با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چند ضابطه‌ای می‌نامند. قبلاً با نمونه‌هایی از این توابع برخورد داشته‌اید. برای مثال تابع قدر مطلق $f(x) = |x|$ یک تابع چند ضابطه‌ای است که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت.

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x \end{cases}$$

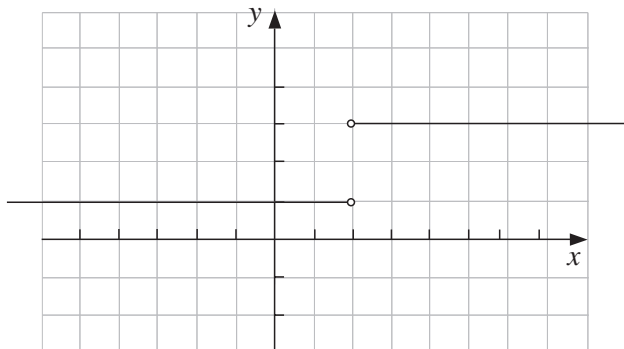




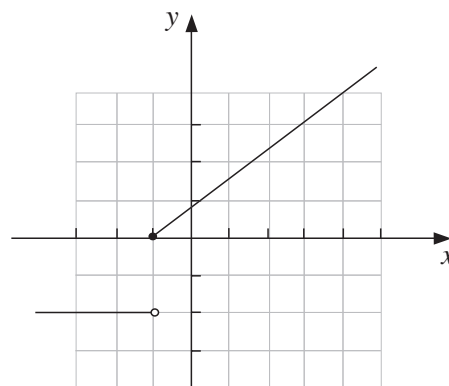
تمرین در کلاس



۱- در زیر نمودارهای دو تابع داده شده است. ضابطه‌های آن‌ها را بیابید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.



(ب)

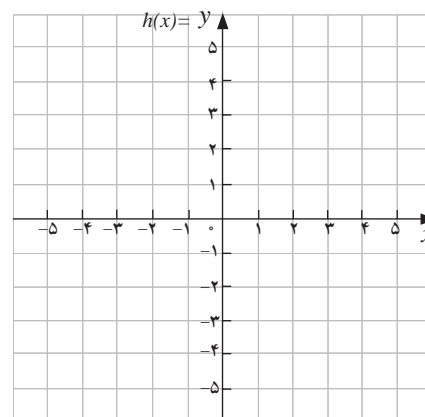
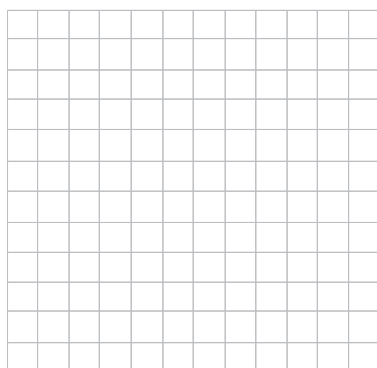
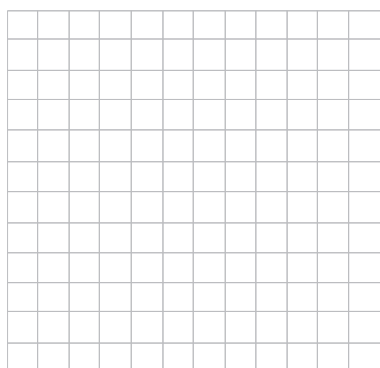


(الف)

۲- نمودار توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را بیابید.

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < 1 \\ x - 4 & 1 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & 2 < x \end{cases}$$



معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x, y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. برخی از این روابط، ضابطه تابعی را معلوم می‌کنند. بسیاری از توابع از طریق یک معادله ارائه می‌شوند اما توجه داشته باشید این طور نیست که یک معادله دو متغیره بر حسب x, y حتماً ضابطه یک تابع را نشان بدهد.

مثال

۱: معادله $x^2 + y = 1$ یک تابع y بر حسب x را نشان می‌دهد. در این گونه موارد مناسب است که y را بر حسب x به دست آوریم:

$$x^2 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x^2$$

می‌بینیم که برای مقدار دلخواه x دقیقاً یک مقدار برای y وجود دارد و در نتیجه y به صورت تابعی از x به دست می‌آید.

۲: معادله $-x + y^2 = 1$ یک تابع y بر حسب x را نشان نمی‌دهد. زیرا با حل این معادله و با یافتن y بر حسب x مقدار یکتایی برای y به دست نمی‌آید.

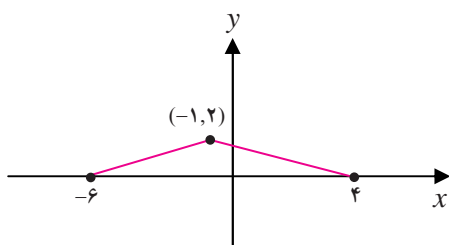
$$-x + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 + x \Rightarrow y = \pm\sqrt{1+x}$$

برای مثال به ازای $x = 8$ داریم $y = \pm 3$ یعنی زوج‌های مرتب $(8, 3)$ و $(8, -3)$ روی نمودار این معادله قرار دارند. بنابراین این معادله نمی‌تواند ضابطه یک تابع را نشان دهد (چرا؟).

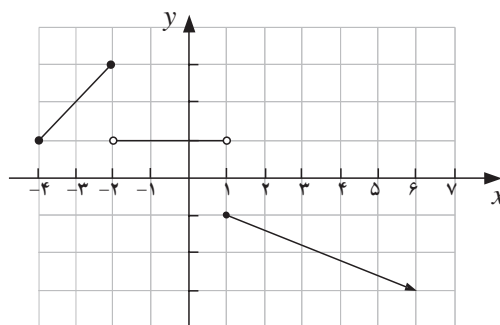
مسائل

۱- تابع $f(x) = |x+1| + |x-1|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

۲- دامنه و برد هر یک از توابع چند ضابطه‌ای زیر را بیابید و ضابطه هر کدام را بنویسید.



(ب)

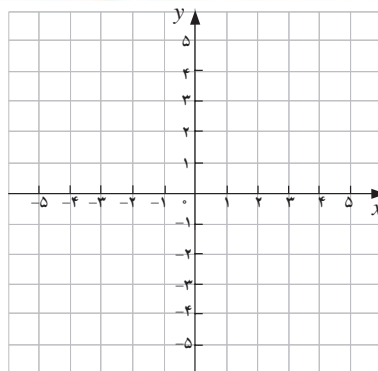


(الف)



۳- اگر

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 8 & x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 5 & -2 \leq x \leq 4 \\ 10 - 2x & 4 < x \end{cases}$$



مقدارهای $f(6)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$ را حساب کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

۴- تابعی چند ضابطه‌ای مانند f بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند، سپس نمودار f را رسم کنید.

الف) دامنه $f = [-3, 5]$ و برد $f = [-2, 7]$

ب) $f(0) = 3$

ج) f یک به یک نباشد.

۵- کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند.

الف) $x^2 + y^2 = 25$

د) $x = |y| + 1$

ب) $y = \begin{cases} x + 3 & x \leq 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$

ه) $y^2 = x^2$

ج) $y = |x| + 1$

و) $x = 1$

۶- تابع f با مشخصات زیر داده شده است.

الف) $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) دامنه f برابر همه اعداد حقیقی است.

ج) تابع f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

د) تابع f به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ه) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور x ها را در نقطه -3 قطع می‌کند.

تابع f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

۷- کدام یک از زوج توابع داده شده با هم مساویند؟

الف) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$

ب) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$, $g(x) = x + 3$



$$\text{ج) } f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

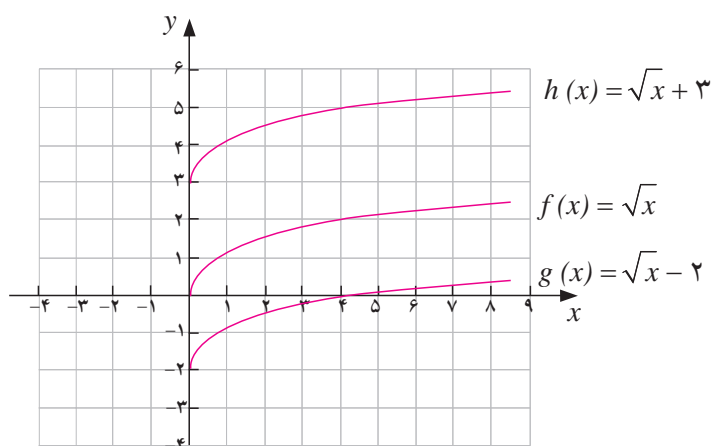
$$\text{د) } f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}}, \quad g(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$$

رسم نمودار توابع

سال قبل دیدیم که با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می‌توانیم نمودار تابع $f(x) + a$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه a واحد در امتداد محور y ها به دست آورد. اگر $a > 0$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $a < 0$ ، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

مثال

۱: در شکل زیر نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $h(x) = \sqrt{x} + 3$ و $g(x) = \sqrt{x} - 2$ رسم شده است.

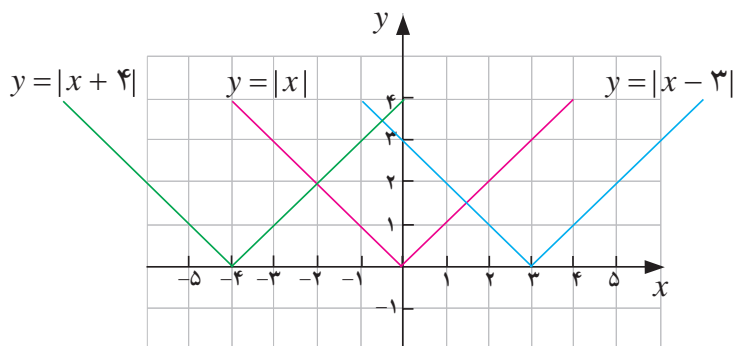


همچنین به کمک مثال‌هایی مشاهده کردید که برای رسم نمودار تابع $y = f(x - a)$ کافی است که نمودار $y = f(x)$ را a واحد در امتداد محور x ها انتقال دهیم. اگر $a > 0$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $a < 0$ ، انتقال در جهت منفی خواهد بود.



مثال

۲: نمودار توابع $y = |x|$ و $y = |x + 4|$ و $y = |x - 3|$ در شکل زیر رسم شده اند.



در این جا می خواهیم با رسم نمودار توابع دیگری که از یک تابع داده شده مانند $f(x)$ ساخته شده اند آشنا شویم.

رسم نمودار $af(x)$

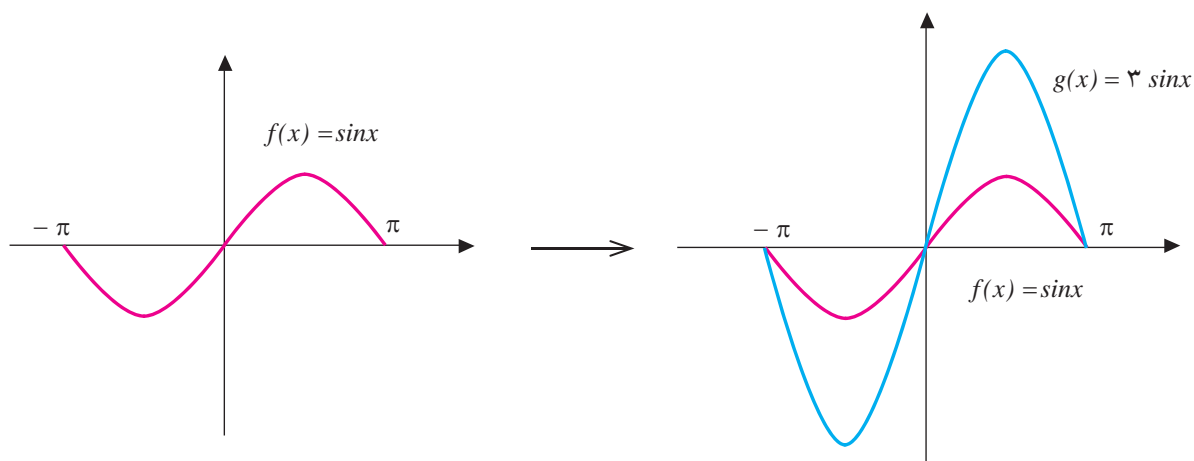
فعالیت ۳



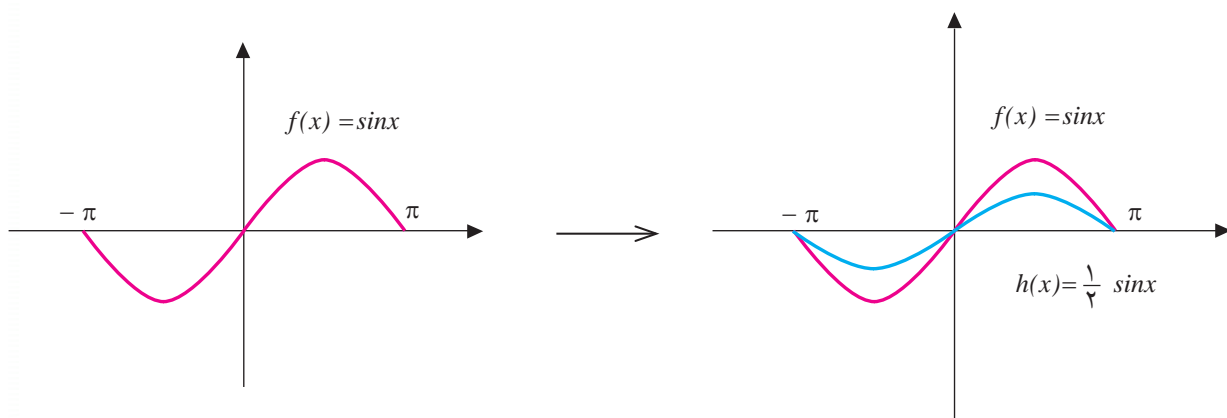
۱- تابع $f(x) = \sin x$ داده شده است. تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = 3f(x)$ تعریف می کنیم. نمودارهای این دو تابع در شکل های زیر در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده اند. با تکمیل جدول توضیح دهید که نمودارها چگونه رسم شده اند. دامنه ها و بردهای دو تابع را با هم مقایسه کنید.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$			0	1	
$3\sin x$			0	3	





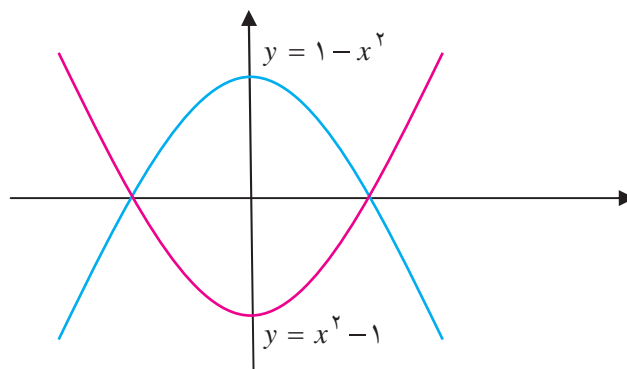
۲- نمودار تابع $h(x) = \frac{1}{4} f(x)$ نیز در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده است. نمودار $h(x)$ چگونه از نمودار $f(x)$ به دست می‌آید؟



نمودار دو تابع $y = f(x)$ و $y = -f(x)$ نسبت به محور x ها قرینه یکدیگرند. برای مثال نمودار دو تابع زیر قرینه یکدیگرند.



عمارت ایل گلی - تبریز



فصل ۲ تابع



تذکر:

نمودار تابع $y = af(x)$ به کمک نمودار تابع $y = f(x)$ به روش زیر به دست می‌آید:

الف) اگر $a > 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a کشیده می‌شود (انبساط عمودی).

ب) اگر $0 < a < 1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب a جمع می‌شود (انقباض عمودی).

ج) اگر $a < 0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور x ها آینه‌وار منعکس می‌شود، سپس با ضریب $|a|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.

تمرین در کلاس



۱- دامنه‌های دو تابع $y = f(x)$ و $y = af(x)$ یکی است. در مورد بردهای این دو تابع چه می‌توانید بگویید؟

۲- نمودار تابع $f(x) = |x+2|$ را در بازه $[-4, 3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $f(x) = -|x+2|$ و $f(x) = \frac{1}{4}|x+2|$ را رسم کنید.

رسم نمودار $f(ax)$

فعالیت ۴



۱- تابع $f(x) = 1 - |x|$ را با دامنه $[-1, 1]$ در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) دامنه تابع $f(2x)$ را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

ب) دامنه توابع $f(\frac{1}{3}x)$ و $f(3x)$ را به دست آورید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

۲- اگر $a > 0$ در مورد رابطه بین دامنه و نمودار تابع $f(ax)$ با دامنه و نمودار تابع $f(x)$ چه حدس می‌زنید؟

مثال

تابع $f(x) = x + 4$ را با دامنه $[-4, 0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ را بررسی می‌کنیم.

روشن است که $f(2x) = 2x + 4$. برای تشخیص دامنه تابع جدید $f(2x) = 2x + 4$ مقدار x باید به گونه‌ای باشد که $-4 \leq 2x \leq 0$ ، یعنی $-2 \leq x \leq 0$. در نتیجه دامنه تابع $f(2x)$ بازه $[-2, 0]$ می‌باشد.

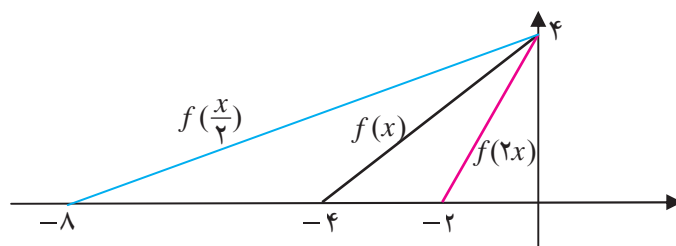


برای تابع $f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 4$ داریم و دامنه این تابع آن مقادیرهایی برای x است که داشته باشیم $-4 \leq \frac{x}{2} \leq 0$ ، یعنی $-8 \leq x \leq 0$. در نتیجه دامنه تابع $f(\frac{x}{2})$ بازه $[-8, 0]$ می باشد. جدول این سه تابع (برای برخی از نقاط) و نمودارهای آن‌ها به شکل زیر است:

x	-4	-3	-2	-1	0
$f(x) = x + 4$	0	1	2	3	4

x	-2	-1/5	-1	-0/5	0
$f(2x) = 2x + 4$	0	1	2	3	4

x	-8	-6	-4	-2	0
$f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{2} + 4$	0	1	2	3	4



همان‌طور که در شکل دیده می‌شود نمودار $f(2x)$ با انقباض نمودار $f(x)$ در امتداد محور x (با ضریب $1/2$) و نمودار $f(\frac{x}{2})$ با انبساط نمودار $f(x)$ در امتداد محور x (با ضریب 2) به دست آمده است.

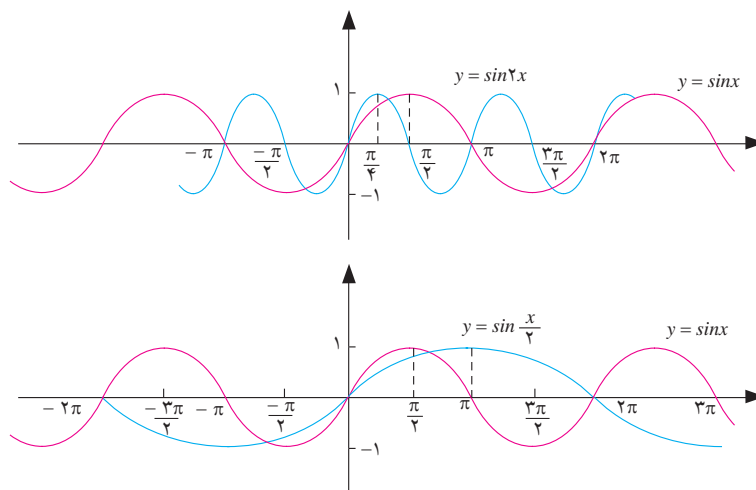
تذکر:

اگر $0 < a$ ، نمودار $y = f(ax)$ را می‌توان با انقباض یا انقباض نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x به دست آورد. در حالتی که $1 < a$ نمودار $y = f(x)$ منقبض با ضریب $\frac{1}{a}$ ، و در حالتی که $0 < a < 1$ نمودار $y = f(x)$ منبسط با ضریب $\frac{1}{a}$ خواهد شد.



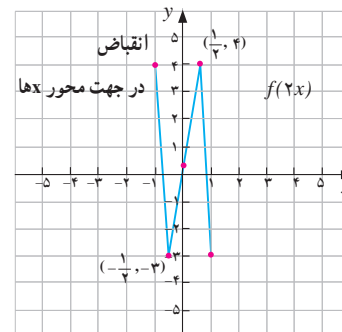
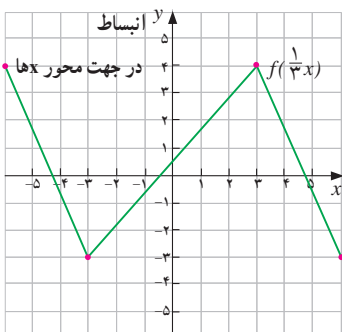
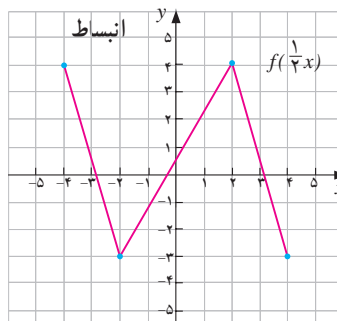
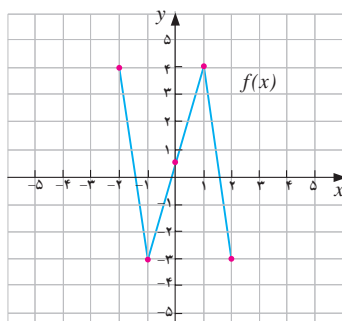
مثال

در شکل‌های زیر نمودارهای تابع $y = \sin 2x$ و $y = \sin \frac{x}{4}$ به کمک نمودار $y = \sin x$ رسم شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $y = \sin 2x$ با فشردن (انقباض) نمودار $y = \sin x$ در امتداد محور x ‌ها و نمودار $y = \sin \frac{x}{4}$ با کشیده شدن (انبساط) نمودار $y = \sin x$ در امتداد محور x ‌ها به دست آمده است.



مثال

نمودار تابع $f(x)$ و توابع $f(2x)$ ، $f(\frac{1}{4}x)$ ، $f(\frac{1}{3}x)$ در زیر رسم شده‌اند.





همان طور که در نمودارها دیده می‌شود برد توابع $f(2x)$ ، $f(\frac{1}{2}x)$ ، $f(\frac{1}{3}x)$ همان برد تابع $f(x)$ است، اما دامنه‌ها کشیده‌تر (منبسط) یا جمع‌تر (منقبض) شده است.

فعالیت ۵



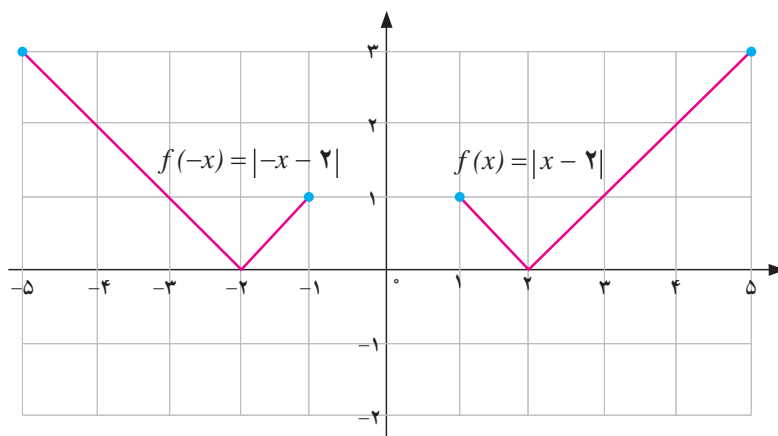
- ۱- با در نظرگیری $f(x) = x + 1$ ، ضابطه تابع $f(-x)$ را به دست آورید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.
- ۲- نمودار این دو تابع چه وضعیتی با هم دارند.
- ۳- برای تابع $g(x) = x^2 - x$ نیز تابع $g(-x)$ را بسازید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت این دو نمودار را نسبت به هم بسنجید.

قضیه :

نمودار تابع $f(-x)$ قرینه نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور y ها است.

مثال

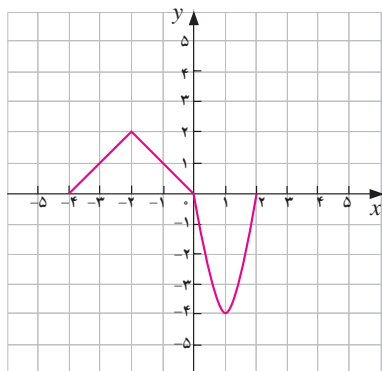
نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ در بازه $[1, 5]$ در سمت راست و نمودار $f(-x) = |-x - 2|$ در سمت چپ شکل زیر رسم شده است. (توجه داریم که $|-x - 2| = |x + 2|$)



همان طور که دیده می‌شود نمودار $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به محور y ها قرینه یکدیگرند.

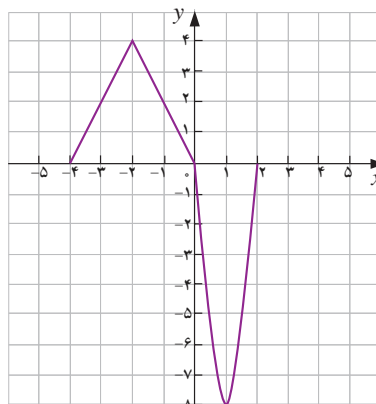
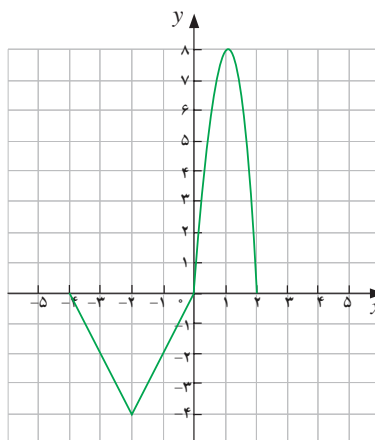
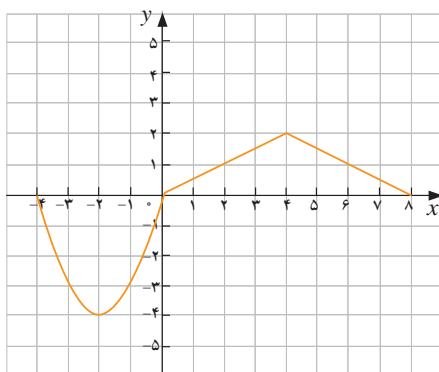
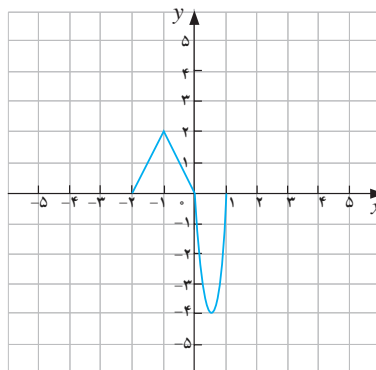
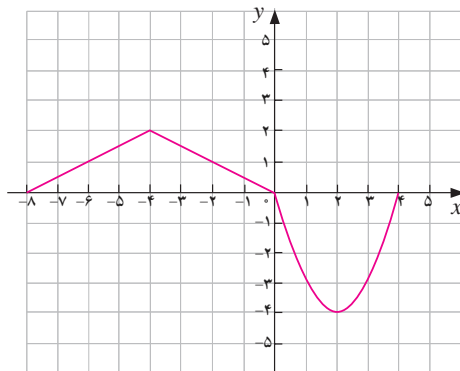


تمرین در کلاس



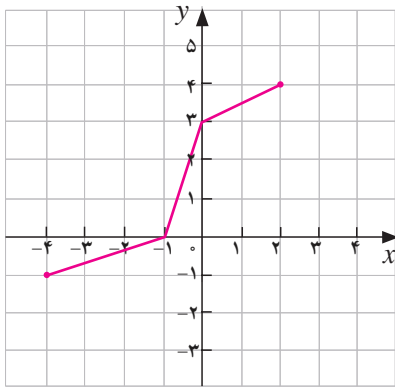
۱- نمودار تابع $g(x)$ به شکل مقابل داده شده است.

به کمک این نمودار، نمودار توابع $g(2x)$ ، $g(\frac{1}{2}x)$ ، $g(-\frac{1}{2}x)$ و $-2g(x)$ رسم شده اند. تعیین کنید که هر یک از نمودارهای زیر نمودار کدام یک از این توابع هستند؟

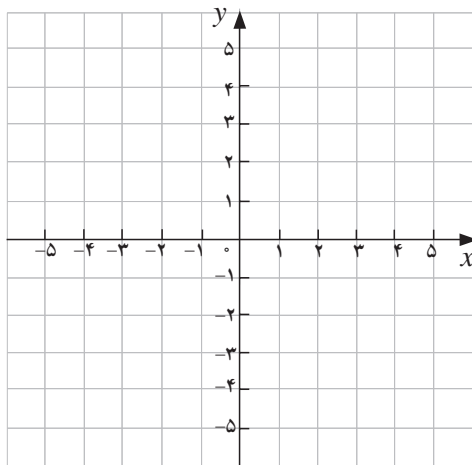




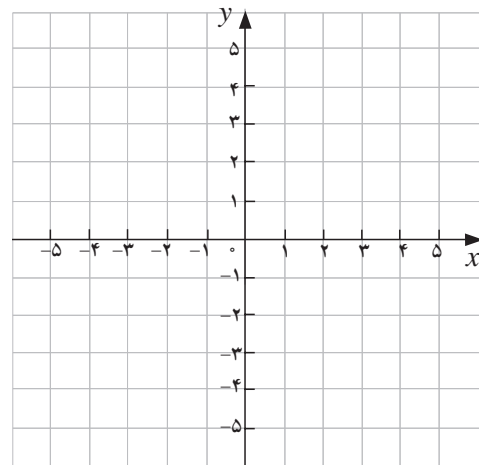
۲- نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل داده شده است.



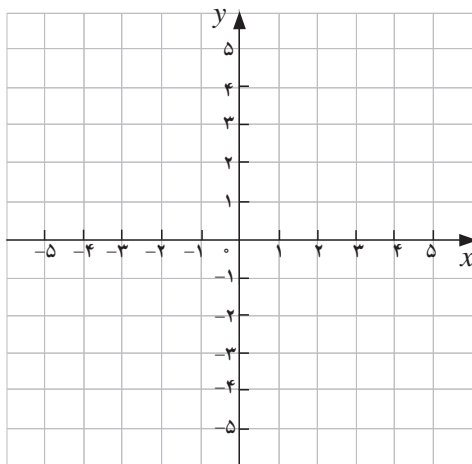
نمودار توابع داده شده زیر را رسم کنید.



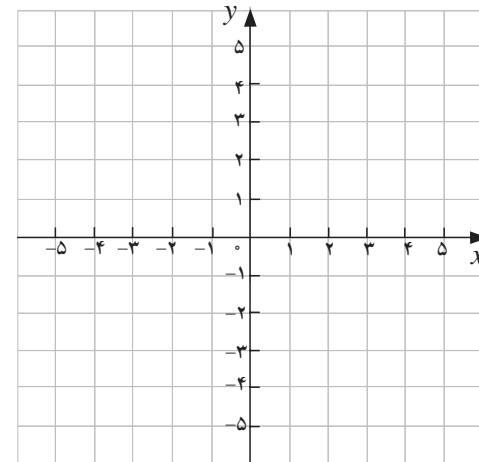
$$y = -f(x-1)$$



$$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$$



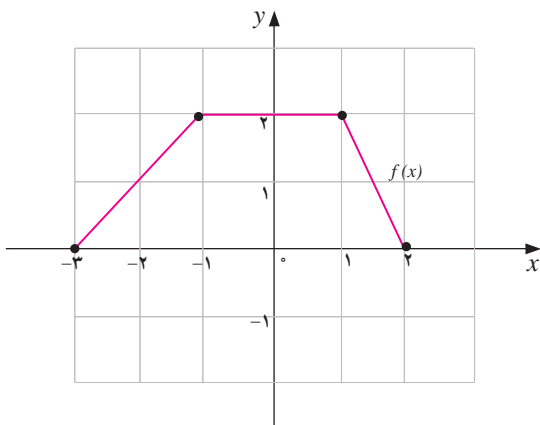
$$y = f(2x)$$



$$y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$$



- ۱- ابتدا نمودار $f(x) = |x|$ را رسم کنید و به کمک آن نمودار $y = -3|x-1| + 2$ را رسم کنید.
- ۲- نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر داده شده است. به کمک این نمودار، نمودار تابع داده شده را رسم کنید.



$$g(x) = \frac{1}{4}f(x) \text{ (الف)}$$

$$g(x) = f(-x) \text{ (ب)}$$

$$g(x) = f(3x) \text{ (ج)}$$

$$g(x) = f\left(-\frac{1}{4}x\right) \text{ (د)}$$

$$g(x) = -2f(x) \text{ (هـ)}$$

$$g(x) = f(x+2) \text{ (و)}$$

- ۳- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

- به کمک نمودار $f(x)$ نمودار توابع $y = f(2x)$ و $y = f(-2x)$ و $y = -f(2x)$ را رسم کنید.

- ۴- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- الف) اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = |x+3| - 3$ ، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست و سپس انتقال سه واحد به پایین به دست آورد.

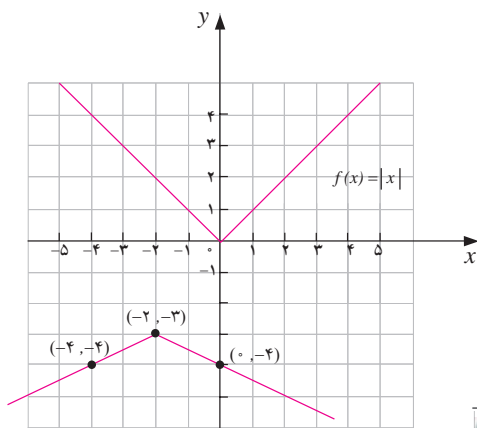
- ب) $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{-x}$ دارای نمودارهای یکسانی هستند.

- ج) اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = -(x-2)^2 + 4$ آن‌گاه نمودار g را می‌توان از نمودار f با یک تغییر مکان به

- میزان دو واحد به راست، سپس انعکاس نسبت به محور x ها و ۴ واحد تغییر مکان به سمت بالا به دست آورد.

- ۵- در شکل روبه‌رو نمودار توابع g و f در یک دستگاه

- مختصات رسم شده‌اند. اگر g از طریق تعدادی عملیات (انقباض و انقباض و انتقال و قرینه) روی f به دست آمده باشد معادله‌ای برای g بیابید.





۶- نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها، انعکاس داده‌ایم، سپس آن را سه واحد در جهت راست و بعد ۵ واحد به پایین حرکت داده‌ایم. ضابطه تابع به دست آمده را بنویسید.

۷- نقطه $(-۸, ۶)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. این نقطه با چه نقطه‌ای از نمودار توابع زیر متناظر می‌شود؟

الف) $g(x) = \frac{1}{4}f(x)$ ب) $g(x) = f(-x)$

ج) $g(x) = f(x) - 3$ د) $g(x) = 3f(x)$

۸- در هر مورد توضیح دهید که نمودار g چگونه از نمودار f به دست می‌آید.

الف) $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{x-1} + 3$

ب) $f(x) = x^2$ ، $g(x) = -2(x+4)^2 - 3$

ج) $f(x) = |x|$ ، $g(x) = -2\left|x - \frac{1}{3}\right| + 1$

۹- اگر $f(x) = \cos x$ مطلوب است نمودار $f(x)$ ، $f(2x)$ ، $f(\frac{1}{4}x)$ ، $-f(x)$ ، $f(-x)$.

۱۰- نمودار دو تابع \sqrt{x} و $\sqrt{-x}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دامنه این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

برد این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ جواب به این سؤالات در مورد دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ چه خواهد بود؟

۱۱- اگر $a < 0$ ، نمودار تابع $f(ax)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه ساخته می‌شود؟

اعمال جبری روی توابع



فعالیت ۶



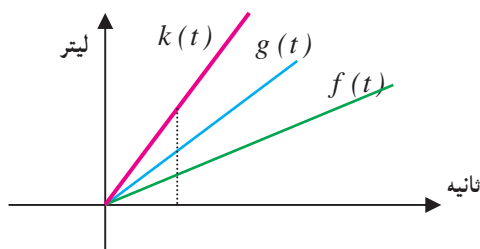
یک حوض آب با دو شیر آب متفاوت پر می‌شود. از شیر اول در هر ثانیه $\frac{1}{4}$ لیتر و از شیر دوم در هر ثانیه ۱ لیتر آب خارج می‌شود. در لحظه $t = 0$ حوض خالی است و دو شیر را با هم باز می‌کنیم.

۱- جدول زیر را که حجم آب موجود در حوض و آب‌های خارج شده از دو شیر را در برخی لحظات نشان می‌دهد تکمیل کنید. زمان بر حسب ثانیه و حجم بر حسب لیتر است.

t	$\frac{1}{2}$	۲	۳	$\frac{7}{2}$	۴	۵
حجم آب خارج شده از شیر اول						
حجم آب خارج شده از شیر دوم						
حجم آب موجود در حوض						



- ۲- توابعی را بنویسید که حجم آب خارج شده از شیر اول و شیر دوم و حجم آب حوض را در هر لحظه دلخواه t نشان دهد. این توابع را به ترتیب f و g و k بنامید.
- ۳- در هر لحظه t بین $f(t)$ و $g(t)$ و $k(t)$ چه رابطه‌ای وجود دارد؟
- ۴- نمودار سه تابع f و g و k در زیر رسم شده‌اند. رابطه بین این توابع را از روی نمودار توضیح دهید.



در سال‌های قبل با جمع اعداد و جمع ماتریس‌ها و جمع چند جمله‌ای‌ها آشنا شدید. توابع را نیز می‌توان با هم جمع کرد و تابع جدیدی به دست آورد. در فعالیت قبل با جمع دو تابع روبرو شدیم و جمع دو تابع را به دست آوردیم. اگر f و g دو تابع باشند که روی دامنه یکسانی مانند A تعریف شده‌اند، به ازای هر مقدار x در A مقدارهای $f(x)$ و $g(x)$ به دست می‌آیند و می‌توانیم مقدار $f(x) + g(x)$ را بسازیم. تابعی که به هر مقدار x در A مقدار $f(x) + g(x)$ را نظیر می‌سازد جمع f و g نامیده می‌شود. جمع f و g را با $f+g$ نشان می‌دهند.

تعریف:

برای دو تابع f و g که روی یک مجموعه A تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی A تعریف شده است و برای هر مقدار x در A داریم:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$



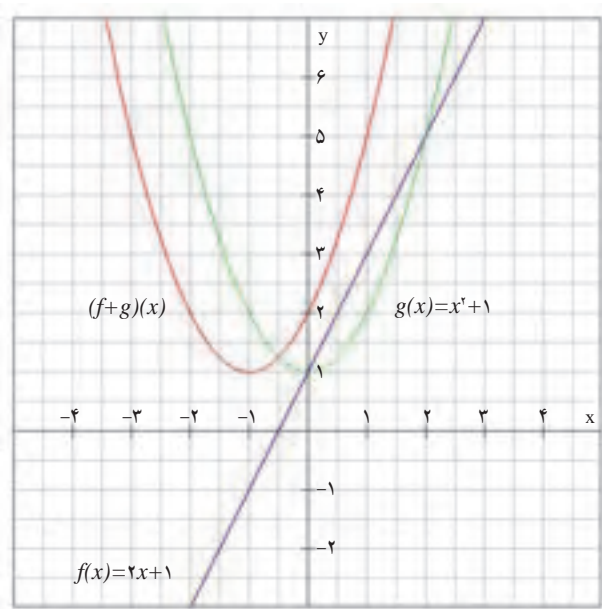
مثال

فرض کنید $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 + 1$. این دو تابع روی IR تعریف شده‌اند، بنابراین $f+g$ نیز روی IR تعریف شده است و برای مثال مقدار این تابع در $x = 3$ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 7 + 10 = 17$$

اما برای یک مقدار دلخواه x مقدار تابع $f+g$ به شکل زیر خواهد بود.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 1 + x^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$$

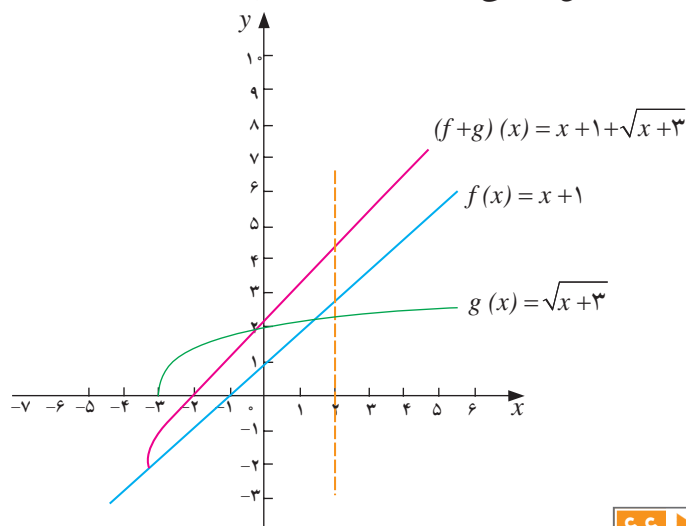


روشن است که چند جمله‌ای
صفحه قبل به ازای $x=3$ برابر ۱۷
خواهد شد. نمودار این دو تابع و
نمودار تابع مجموع آن‌ها در شکل
رسم شده‌اند.

بحث در کلاس

چرا مجموع دو تابع خطی، یک تابع خطی است؟

آیا می‌توانیم دو تابع $f(x) = x+1$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ را با هم جمع کنیم؟ این دو تابع دامنه یکسانی ندارند ولی به ازای x هایی که در دامنه هر دو تابع باشند مقدارهای $f(x)$ و $g(x)$ قابل محاسبه‌اند و می‌توانیم مجموع $f(x) + g(x)$ را حساب کنیم. بنابراین می‌توانیم تابع $f+g$ را روی $D_f \cap D_g$ مانند قبل تعریف کنیم. در این مثال دامنه $D_f = \mathbb{R}$ و $D_g = [-3, \infty)$ بنابراین $f+g$ روی $[-3, \infty)$ تعریف شده است و برای هر x در این مجموعه داریم $(f+g)(x) = x+1 + \sqrt{x+3}$. نمودار این دو تابع و نمودار تابع مجموع آن‌ها در شکل زیر رسم شده‌اند.





تعریف :

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

توجه داشته باشید که در اینجا، عملاً دامنه‌های دو تابع f و g به مجموعه $A = D_f \cap D_g$ محدود می‌شوند و سپس به عنوان دو تابع با دامنه یکسان جمع می‌شوند.



مثال

اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7), (3, -4)\}$ و $g = \{(1, 4), (2, 9), (-2, 3)\}$ تابع $f+g$ فقط برای $x = -2$ و

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 4 = 6 \quad \text{تعریف می‌شود و داریم :}$$

$$(f + g)(-2) = f(-2) + g(-2) = 5 + 3 = 8$$

$$\therefore f + g = \{(1, 6), (-2, 8)\}$$

اعمال تفاضل و ضرب و تقسیم توابع به شکل مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف :

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، تفاضل g از f تابعی است که با $f-g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، حاصل ضرب f و g تابعی است که با $f \cdot g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، تقسیم f بر g تابعی است که با $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ برای x هایی تعریف شده است که $g(x) \neq 0$ ، و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

در اینجا نیز، ابتدا دامنه‌های دو تابع f و g به یک مجموعه یکسان مناسب محدود می‌شوند و سپس به عنوان دو تابع با دامنه یکسان تفاضل، ضرب، یا تقسیم می‌شوند.



مثال

۱ : برای دو تابع $f(x) = x^2 + 2x - 1$ و $g(x) = 3x + 2$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها مشخص می‌کنیم :



دامنه‌های f و g تمام IR هستند، بنابراین دامنه توابع $f+g$ و $f-g$ نیز برابر IR هستند.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x - 1 + 3x + 2 = x^2 + 5x + 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 1 - 3x - 2 = x^2 - x - 3$$

$$(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 2x - 1)(3x + 2)$$

$$= 3x^3 + 2x^3 + 6x^2 + 4x - 3x - 2 = 3x^3 + 8x^2 + x - 2$$

تابع g فقط در $x = -\frac{2}{3}$ صفر است، بنابراین دامنه $\frac{f}{g}$ برابر $IR - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x - 1}{3x + 2} \quad x \neq -\frac{2}{3}$$

۲: برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f \circ g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها مشخص می‌کنیم.

ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم.

$$D_f = \{x | x+2 \geq 0\} = [-2, +\infty) \quad D_g = IR - \{3\}$$

دامنه‌های توابع $f+g$ و $f-g$ و fg مجموعه $D_f \cap D_g$ است و داریم:

$$D_f \cap D_g = [-2, \infty) \cap IR - \{3\} = [-2, 3) \cup (3, \infty)$$

$$(f+g)(x) = \sqrt{x+2} + \frac{1}{x-3}$$

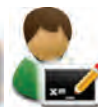
$$(f-g)(x) = \sqrt{x+2} - \frac{1}{x-3}$$

$$(f \circ g)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$$

از آن‌جا که g در هیچ نقطه‌ای از دامنه خود صفر نمی‌شود، دامنه $\frac{f}{g}$ همان $D_f \cap D_g$ است.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\frac{1}{x-3}} = (x-3)\sqrt{x+2}$$

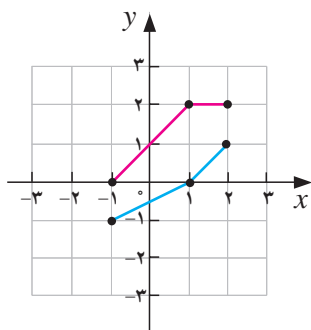
تمرین در کلاس



۱- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x+1$ ، دامنه‌های توابع $f+g$ و $f \circ g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و ضابطه این توابع را مشخص کنید.



۲- نمودار توابع f و g در شکل مقابل رسم شده است.



الف) $(f+g)(1)$ ، $(f+g)(2)$ را حساب کنید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g ، نمودار $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

ج) معادله‌ای برای f و g و $f+g$ بیابید.

د) نمودار $f+g$ را به کمک معادله آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

ترکیب توابع



فعالیت ۷



سنگی به داخل آب یک دریاچه آرام پرتاب می‌شود و باعث ایجاد موج‌هایی به شکل دایره‌های هم مرکز می‌شود. شعاع بزرگ‌ترین دایره تابعی از زمان است و فرض کنید این تابع به صورت $r(t) = 2t$ باشد. t برحسب ثانیه است و زمان پس از برخورد سنگ با آب را نشان می‌دهد و r برحسب سانتی‌متر است. مساحت دایره تابعی از شعاع آن است و به صورت $A(r) = \pi r^2$ می‌باشد.



سی و سه پل - اصفهان



۱- جدول زیر را کامل کنید.

t (زمان)	۱	۲	۳	۴	۵	t
r (شعاع دایره در لحظه t)			۶			$r(t) = 2t$
A (مساحت دایره در لحظه t)			36π			$A(r(t)) = \pi(2t)^2 = 4\pi t^2$

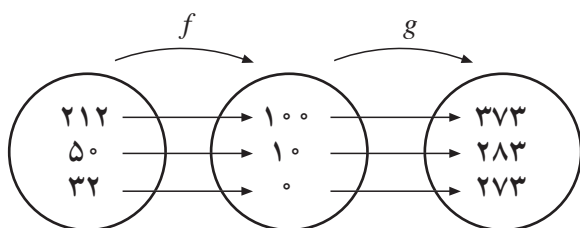
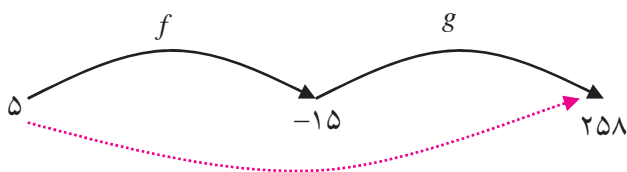
۲- تابعی که مساحت دایره را در هر لحظه t به دست می‌دهد، چگونه از طریق دو تابع $r(t)$ و $A(r)$ ساخته شده است؟

در فعالیت بالا با دو تابع $r(t)$ و $A(r)$ روبرو شدیم. مقدارهای تابع $r(t)$ به صورت ورودی تابع $A(r)$ قرار گرفتند و تابع جدید $A(r(t))$ را به وجود آوردند. این تابع جدید را ترکیب دو تابع می‌نامند.



مثال

۱: تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. مثلاً $f(32) = 0$ یعنی ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است. تابع $g(x) = x + 273$ درجه سانتی‌گراد را به درجه کلون تبدیل می‌کند. برای مثال $g(0) = 273$ یعنی صفر درجه سانتی‌گراد معادل ۲۷۳ درجه کلون است. اگر بخواهیم بدانیم ۵ درجه فارنهایت معادل چند درجه کلون است، ابتدا به کمک تابع f داریم $f(5) = -15$ یعنی ۵ درجه فارنهایت معادل -15 درجه سانتی‌گراد است و سپس به کمک تابع g داریم $g(-15) = 258$ بنابراین ۵ درجه فارنهایت معادل ۲۵۸ درجه کلون است. به عبارت دیگر $g(f(5)) = g(-15) = 258$ نمودار روبه‌رو این فرآیند را نشان می‌دهد.



در نمودار روبه‌رو تبدیل برخی دیگر از درجات فارنهایت به درجات کلون نمایش داده شده است.

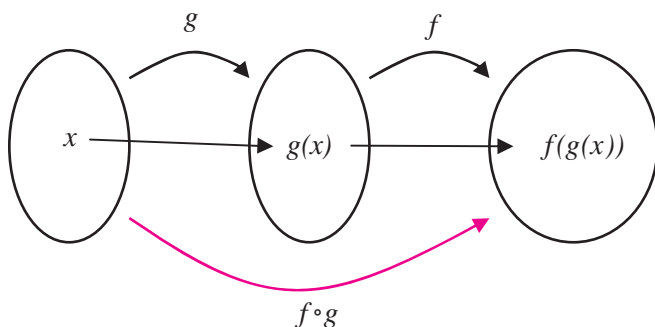
اگر $k(x)$ تابعی باشد که مستقیماً درجه‌های فارنهایت را به درجه‌های کلون تبدیل می‌کند داریم:





$$k(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{5}{9}(x-32)\right) = \frac{5}{9}(x-32) + 273 = \frac{1}{9}(5x + 2297)$$

برای مثال از طریق این تابع دیده می‌شود $k(32) = 273$ ، $k(212) = 373$.
در این مثال تابع k از ترکیب دو تابع f و g ساخته شده است. به خاطر شیوه محاسبه تابع k آن را با $g \circ f$ (بخوانید جی او اف) نشان می‌دهند. بنابراین $g \circ f$ تابعی است که در هر مقدار x به صورت $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ محاسبه می‌شود.



تعریف:

فرض کنید f و g دو تابع باشند که برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f باشد، در این صورت $f \circ g$ تابعی است که دامنه آن همان دامنه g است و برای هر مقدار x در این دامنه داریم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



مثال

۲: برای دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 + x^2$ ، برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f است و می‌توانیم تابع مرکب $f \circ g$ را بسازیم. دامنه $f \circ g$ برابر دامنه g است که تمام IR است و ضابطه آن به شکل زیر است.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + x^2) = \sqrt{1 + x^2}$$

تابع مرکب $g \circ f$ نیز قابل ساخت است زیرا برد f زیر مجموعه‌ای از دامنه g می‌باشد. دامنه $g \circ f$ همان دامنه f است که بازه $[0, \infty)$ است. ضابطه $g \circ f$ به شکل زیر است.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1 + (\sqrt{x})^2 = 1 + x$$

توجه داشته باشید که اگر چه ضابطه $g \circ f$ به گونه‌ای است که برای مقادیر منفی x هم معنا دارد ولی به عنوان تابعی که از ترکیب دو تابع ساخته شده است دامنه آن فقط بازه $[0, \infty)$ است. این مثال هم چنین نشان می‌دهد که دو تابع $g \circ f$ و $f \circ g$ در حالت کلی مساوی نیستند.

تذکر:

برای دو تابع f و g ممکن است که برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f نباشد، در این صورت $f \circ g$ تابعی است که دامنه آن تمام دامنه g نخواهد بود. برای آن که $f(g(x))$ معنادار باشد لازم است که $x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$ ، بنابراین در حالت کلی دامنه $f \circ g$ به شکل زیر است.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$



در اینجا نیز، عملاً دامنه تابع g به زیر مجموعه کوچکتری محدود می‌شود، تا شرط زیر مجموعه بودن برد تابع تحدید یافته در دامنه تابع f برقرار گردد و سپس ترکیب دو تابع انجام می‌شود.



مثال

۳: برای دو تابع $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را می‌سازیم و با نمودار ون نمایش می‌دهیم.

برای محاسبه $f \circ g$ ابتدا مشاهده می‌کنیم برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f است، پس $D_{f \circ g} = D_g$. مقدار تابع $f \circ g$ را در نقاط دامنه g حساب می‌کنیم.

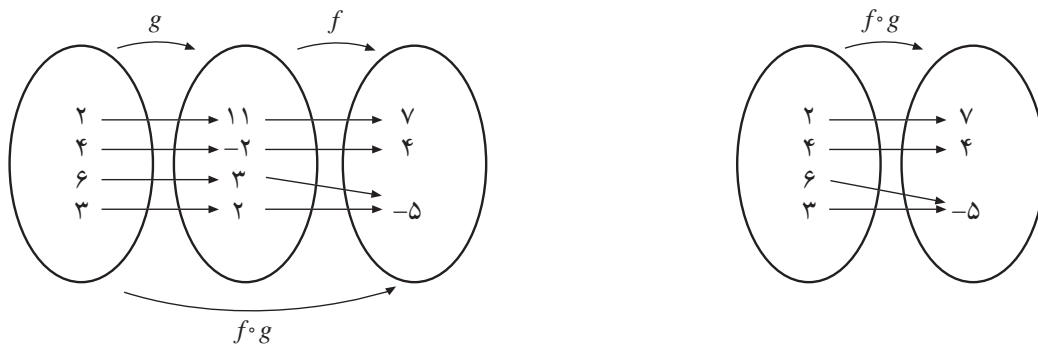
$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(11) = 7$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(-2) = 4$$

$$(f \circ g)(6) = f(g(6)) = f(3) = -5$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(2) = -5$$

بنابراین $f \circ g = \{(2, 7), (4, 4), (6, -5), (3, -5)\}$.



برای محاسبه $g \circ f$ ابتدا مشاهده می‌کنیم که برد f زیر مجموعه‌ای از دامنه g نیست، بنابراین دامنه $g \circ f$ تمام دامنه f نخواهد بود. یکی یکی اعضای دامنه f را بررسی می‌کنیم تا معلوم شود که آیا شرط قرار گرفتن در دامنه $g \circ f$ را دارند یا نه.

$$f(11) = 7 \notin D_g$$

$$f(-2) = 4 \in D_g$$

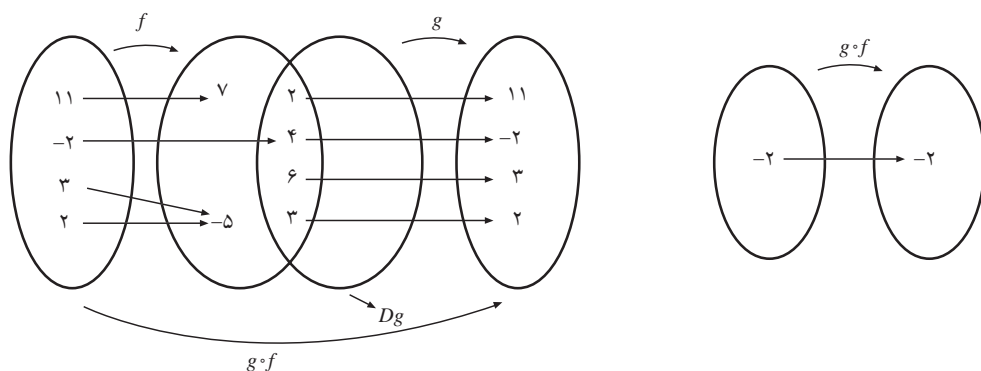
$$f(3) = -5 \notin D_g$$

$$f(2) = -5 \notin D_g$$

بنابراین فقط -2 در دامنه $g \circ f$ قرار دارد و از آن جا که

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(4) = -2$$

داریم: $g \circ f = \{-2, -2\}$



۴: برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه دامنه $f \circ g$ ابتدا دامنه g را بررسی می‌کنیم که $IR - \{0\}$ دامنه f نیز $IR - \{3\}$ است. مقدار $g(x) = 3$ معادل $g(x) = 3$ دارای جواب $x = \frac{4}{3}$ است، یعنی $\frac{4}{3}$ نقطه‌ای است که $g(\frac{4}{3})$ در دامنه f قرار ندارد. در نتیجه

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \right\} = \left\{ x \in IR \mid x \neq 0, x \neq \frac{4}{3} \right\}$$

$$= IR - \left\{ 0, \frac{4}{3} \right\}$$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{1}{\frac{4}{x} - 3} = \frac{1}{\frac{4 - 3x}{x}} = \frac{x}{4 - 3x}$$

ضابطه $f \circ g$ را حساب می‌کنیم.

عبارت بالا اگر چه به ازای $x = 0$ با معنا است، ولی صفر در دامنه تابع ترکیب یافته نیست زیرا به هنگام محاسبه مشاهده می‌کنید که عبارت $\frac{4}{x}$ در محاسبه وجود دارد که به ازای $x = 0$ تعریف نشده است.

تمرین در کلاس



- ۱- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = x + 5$ ، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را حساب کنید و نشان دهید که $g \circ f \neq f \circ g$.
- ۲- اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{7 - x^2}$ ، تابع $g \circ f$ و دامنه آن را حساب کنید.

مسائل



- ۱- اگر $f(x) = \frac{5x}{3x-7}$ و $g(x) = \frac{x^5 - 1}{5x - 15}$ ، تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ و دامنه آن را بیابید.

۲- در هر یک از موارد زیر دامنه توابع زیر و ضابطه آن‌ها را به دست آورید.

$$f-g, ff, \frac{g}{f}$$

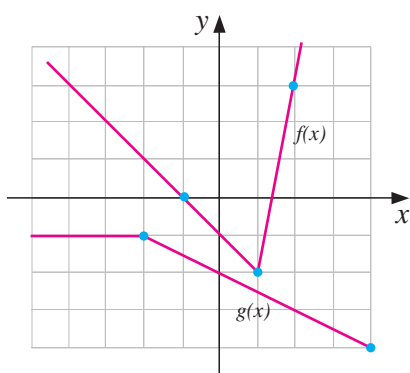
(الف) $g(x) = 2-x, f(x) = 4x$

(ب) $g(x) = \frac{1}{6-x}, f(x) = \frac{4}{x-2}$

(ج) $g(x) = \sqrt{x+2}, f(x) = \sqrt{x-2}$

(د) $g(x) = \frac{2}{x}, f(x) = \sqrt{x+3}$

۳- با استفاده از نمودارهای f و g که در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند، عبارات داده شده را (در صورت امکان) محاسبه کنید.



(الف) $(f+g)(-4)$

(د) $(fg)\left(\frac{1}{3}\right)$

(ب) $(f-g)(3)$

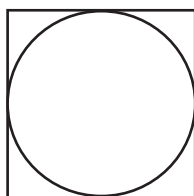
(ه) $(f \circ g)\left(-\frac{1}{4}\right)$

(ج) $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$

(و) $(f \circ f)(7)$

۴- فرض کنیم $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ تابعی با ضابطه $g(n) = 2n$ باشد، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و تابع $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ به صورت $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ تعریف شود، توابع $g \circ f, 2f + g$ را محاسبه کنید.

۵- دو تابع $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x(1-x)}$ مفروضند. دامنه تابع $f \circ g$ را بدون محاسبه $(f \circ g)(x)$ بدست آورید.



۶- یک بی (فونداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازوئیل استوانه‌ای استفاده می‌شود. (شکل مقابل)

(الف) شعاع مخزن، r را به عنوان تابعی از x (ضلع مربع) بنویسید.

(ب) مساحت A پایه دایره‌ای شکل را به عنوان تابعی از r بنویسید.

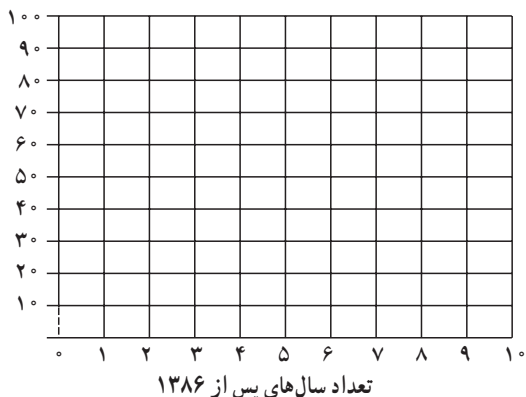
(ج) $(A \circ r)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید.



۷- فرض کنیم: $f = \left\{ (-4, 13), (-1, 7), (0, 5), \left(\frac{5}{4}, 0\right), (3, -5) \right\}$ و $g = \left\{ (-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6) \right\}$ توابع زیر را حساب کنید.

$$f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}$$

۸- یک رمان پرفروش درباره دفاع مقدس در سال ۱۳۸۶، ۲۷ میلیون تومان فروش کرد. رمان دیگری درباره دفاع مقدس در همین سال ۱۲ میلیون تومان فروش کرد.



دسته یک: یک رمان پرفروش درباره دفاع مقدس

اگر رمان اول در هر سال به میزان ۳ میلیون تومان نسبت به سال قبل افزایش فروش داشته باشد، تابعی بنویسید که میزان فروش در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ را برحسب زمان نشان دهد. اگر افزایش فروش برای رمان دوم در هر سال ۲ میلیون تومان نسبت به سال قبل باشد، تابعی بنویسید که مجموع فروش این دو رمان را در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ نشان دهد. این دو رمان در سال ۱۳۹۶ در مجموع چه میزان فروش خواهند کرد؟ هر سه تابع مرتبط را در نموداری رسم کنید.

۹- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$$

۱۰- توابع f, g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه، دامنه

تعریف $(f+g) \circ f$ را به دست آورید.

۱۱- کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

(الف) $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن گاه

$$(f \circ g)(x) = -x^2, \quad (f \circ g)(5) = -25$$

(ب) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 35$

(ج) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$

(د) برای هر دو تابع f, g داریم: $f \circ g = g \circ f$



- ۱۲- اگر $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$ ، $g(x) = 2x + 1$ ، تابعی مانند f بیابید به قسمتی که $f \circ g = h$.
- ۱۳- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ و دامنه آن‌ها را به دست آورید.
- ۱۴- جدول زیر را در نظر بگیرید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۳	۱	۴	۲	۲	۵
$g(x)$	۶	۳	۲	۱	۲	۳

۱۵- مقدارهای زیر را حساب کنید.

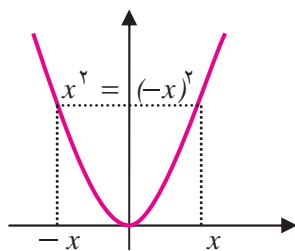
- الف) $f(g(1))$ ب) $g(f(1))$ ج) $f(f(1))$
 د) $g(g(1))$ هـ) $(g \circ f)(3)$ و) $(f \circ g)(6)$

۱۶- اگر $f = \{(4, 5), (6, 5), (8, 12), (10, 2)\}$ و $g = \{(4, 6), (2, 4), (6, 8), (8, 10)\}$ توابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ را حساب کنید.

توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی



باغ دولت آباد - یزد



وجود تقارن در خلقت و آفرینش مناظر چشم‌نوازی را پدید آورده است. انسان در ساخته‌های خود از این نکته فراوان بهره برده است. نمودار برخی از توابع متقارن است و همین موضوع کار با آن‌ها را ساده‌تر می‌کند. تابع آشنای $f(x) = x^2$ نمونه‌ای از این گونه توابع است. این تابع نسبت به محور y متقارن است. علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه آن، $-x$ نیز در دامنه آن است و علاوه بر آن $f(x) = x^2 = (-x)^2 = f(-x)$



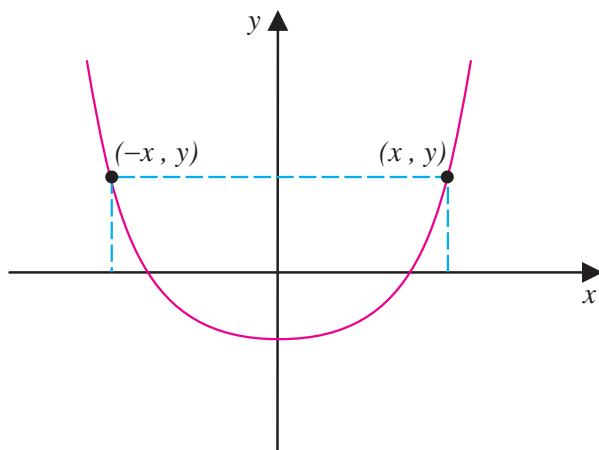
تمام توابعی که این دو خاصیت را دارا هستند، به عنوان توابع زوج می‌شناسیم. به بیان دقیق‌تر:

تعریف:

تابع f را زوج نامیم هرگاه:

(الف) دامنه آن متقارن باشد، یعنی برای هر $x \in D_f$ ، $-x \in D_f$

(ب) برای هر x در دامنه آن، $f(-x) = f(x)$



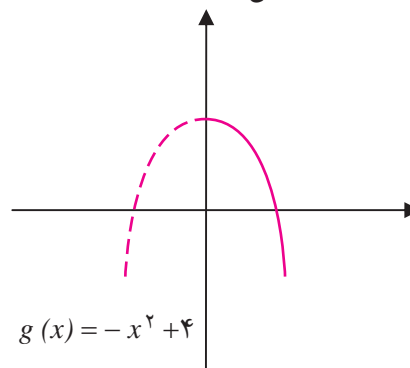
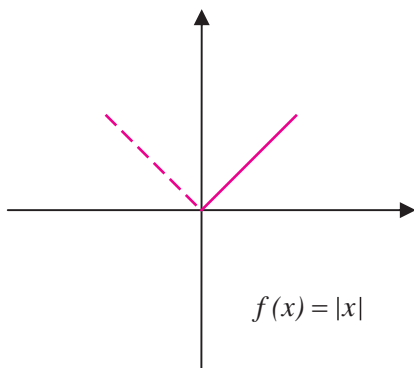
در رسم نمودار توابع زوج از این نکته که نمودار آن‌ها نسبت

به محور y ها متقارن است استفاده می‌شود.



مثال

۱: توابع $f(x) = |x|$ ، $g(x) = -x^2 + 4$ زوج هستند:



شرط متقارن بودن دامنه برای هر دو تابع برقرار است، هم‌چنین داریم:

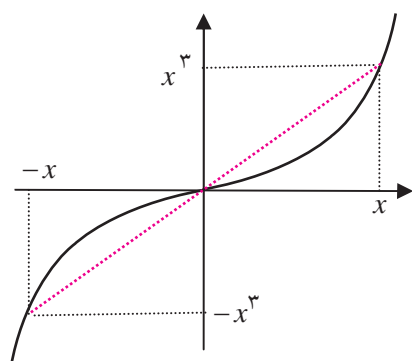
$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

$$g(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = g(x)$$

تقارن نسبت به محور y ها نیز در نمودارهای این دو تابع دیده می‌شود.

تقارن نمودار توابع نسبت به مبدأ مختصات نیز در بسیاری از توابع دیده می‌شود. برای مثال نمودار تابع

$f(x) = x^3$ نسبت به مبدأ متقارن است.



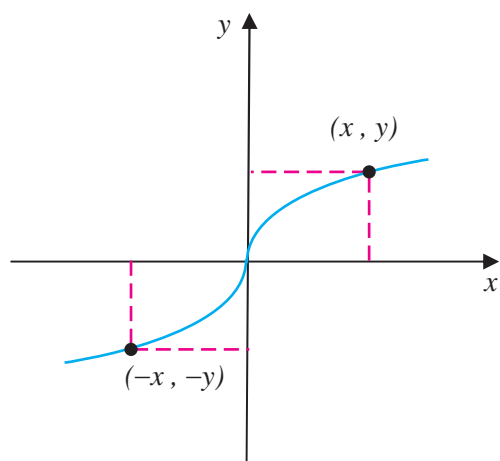
علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه f ،
 $-x$ نیز در دامنه f است و

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

این خاصیت باعث می‌شود هر نقطه روی نمودار این تابع که به صورت (x, x^3) است قرینه آن نسبت به مبدأ یعنی $(-x, -x^3)$ نیز روی نمودار این تابع باشد. توابعی که چنین خاصیتی دارند، تابع فرد نامیده می‌شوند.

تعریف:

تابع f را فرد نامیم هرگاه دامنه آن متقارن باشد و برای هر x در دامنه آن، $f(-x) = -f(x)$



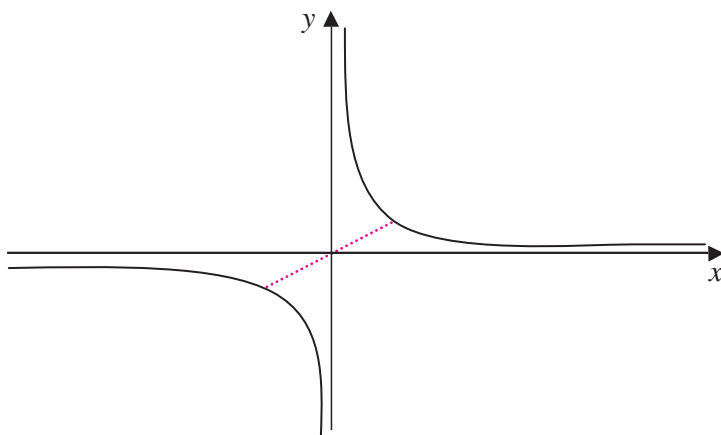
در رسم نمودار توابع فرد از این نکته که نمودار آن‌ها نسبت به مبدأ مختصات متقارن است استفاده می‌شود.



مثال

۲: $f(x) = \frac{1}{x}$ تابعی فرد است.
 زیرا دامنه آن متقارن است و داریم:

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$





تمرین در کلاس



۱- توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y = \sqrt{x} \text{ (ج)} \quad y = 1 - x^2 \text{ (ب)} \quad y = \frac{1}{x - x^2} \text{ (الف)}$$

$$y = x\sqrt{|x|} \text{ (و)} \quad y = x - |x| \text{ (هـ)} \quad y = \sqrt[3]{x} \text{ (د)}$$

(۱) دامنه کدام یک از توابع داده شده متقارن است؟

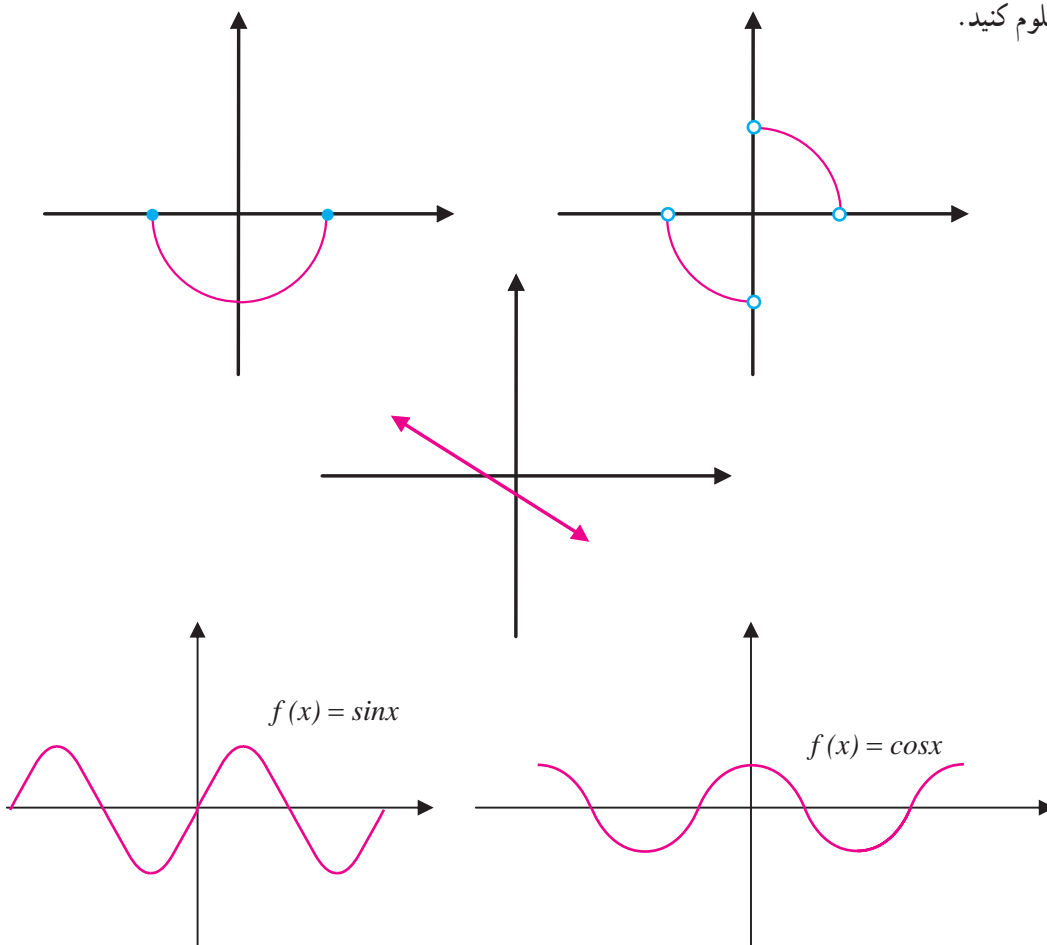
(۲) کدام یک از این توابع زوج هستند؟

(۳) کدام یک از این توابع فرد هستند؟

(۴) کدام یک از این توابع نه زوج هستند و نه فرد؟

۲- تنها با استفاده از نمودارهای توابع داده شده زوج یا فرد بودن آنها یا نه زوج بودن و نه فرد بودن آنها را

معلوم کنید.



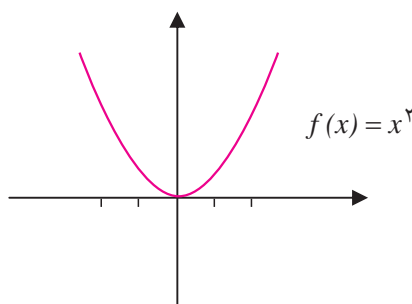


بحث در کلاس

آیا نمودار یک تابع می‌تواند نسبت به محور x متقارن باشد؟

یکی از سؤالاتی که در مورد توابع مطرح است این است که با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع چه تغییری می‌کند؟ گاهی اوقات با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع افزایش می‌یابد. همچنین برخی مواقع با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع کاهش می‌یابد. این ویژگی‌ها را صعودی بودن یا نزولی بودن تابع می‌نامند.

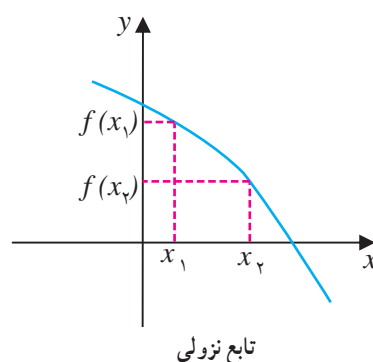
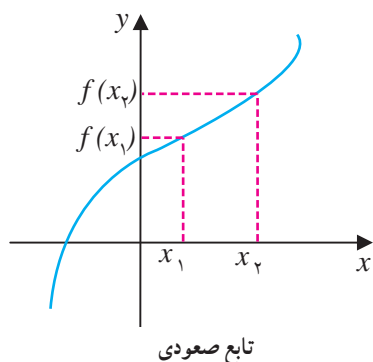
برای مثال تابع $f(x) = x^2$ را در بازه $[-2, 2]$ در نظر بگیرید.



در بازه $[-2, 0]$ همان گونه که از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنیم، مقادیر متناظر تابع کمتر می‌شوند، یعنی با افزایش مقادیر x ، مقادیر y کمتر می‌شوند. در این حالت گوییم تابع در بازه $[-2, 0]$ نزولی است. اما در بازه $[0, 2]$ با افزایش مقادیر x ، مقادیر y نیز افزایش می‌یابند. در این بازه تابع $f(x) = x^2$ را صعودی نامیم.

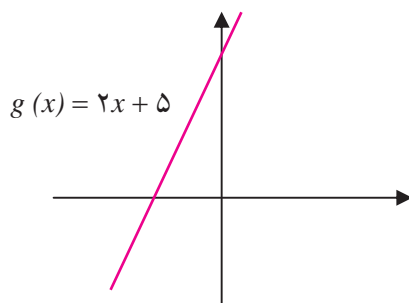
تعریف:

- تابع $f(x)$ را صعودی نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم: $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- تابع $f(x)$ را نزولی نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم: $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- تابع $f(x)$ را صعودی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم: $f(x_1) < f(x_2)$.
- تابع $f(x)$ را نزولی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1, x_2 از دامنه f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم: $f(x_1) > f(x_2)$.
- تابع $f(x)$ را ثابت نامیم هرگاه برای هر دو عضو x_1, x_2 از دامنه f ، داشته باشیم: $f(x_1) = f(x_2)$.

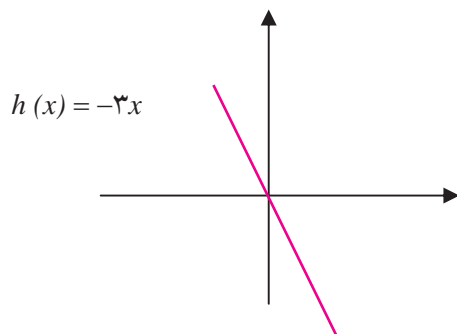




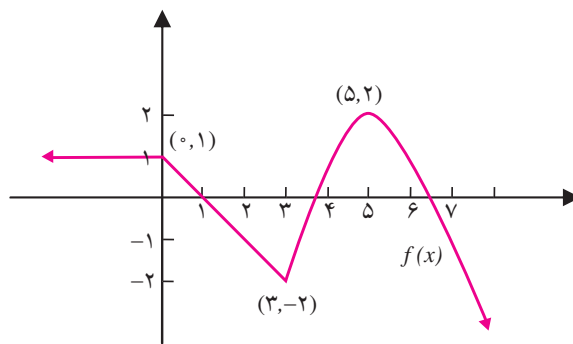
۱: تابع $g(x) = 2x + 5$ صعودی اکید است. همان‌گونه که از نمودار $g(x)$ پیداست این تابع یک به یک است. این موضوع برای تمام توابع صعودی اکید برقرار است.



۲: تابع نزولی اکید است $h(x) = -3x$ (با توجه به نمودار آن) یک به یک است. این ویژگی برای هر تابع نزولی اکید برقرار است.



ممکن است یک تابع در دامنه‌اش نه صعودی باشد نه نزولی، ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد. برای مثال تابع $f(x)$ را با نمودار زیر در نظر بگیرید.



همان گونه که در شکل دیده می‌شود، تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty, 0]$ ثابت و در بازه $[0, 3]$ نزولی (اکید) و در بازه $[3, 5]$ صعودی (اکید) و در بازه $(5, \infty)$ نزولی اکید است.

تمرین در کلاس



توابع زیر را رسم کنید و با استفاده از نمودار آن‌ها تعیین کنید که در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت هستند.

$$f(x) = |x+2| - 3 \quad (\text{الف})$$

$$g(x) = x^2 - 6x + 10 \quad (\text{ب})$$

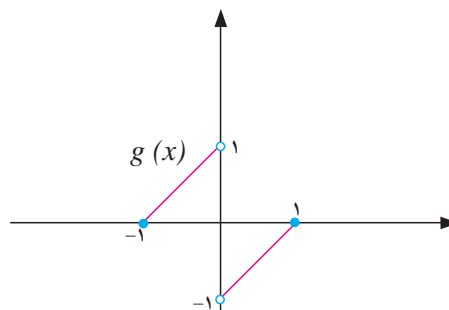
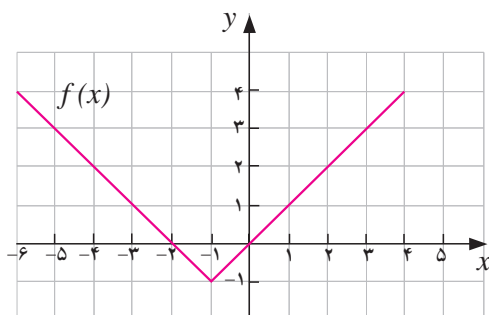
$$h(x) = \sqrt{1-x} \quad (\text{ج})$$

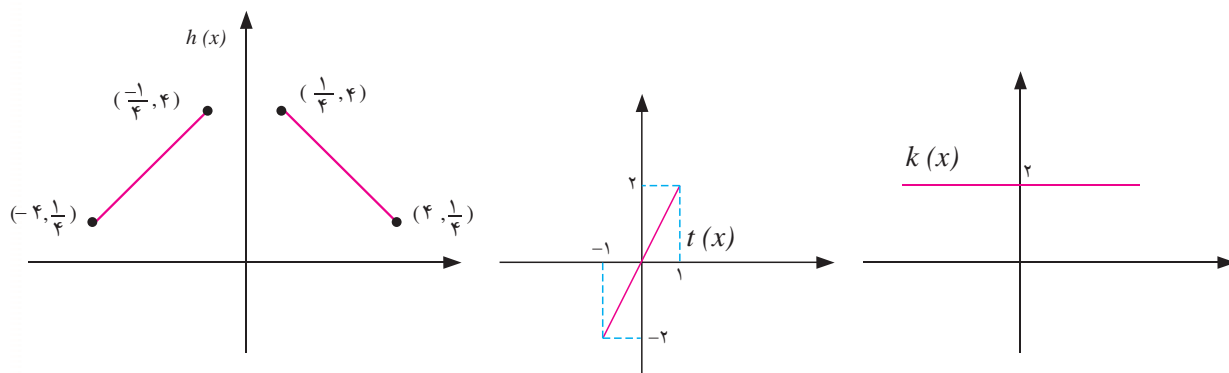
$$t(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases} \quad (\text{د})$$

مسائل



۱- نمودار توابع f, g, h, k و t در زیر داده شده‌اند. به کمک این نمودارها تعیین کنید که کدام یک از آن‌ها زوج، کدام یک فرد و کدام یک نه زوج و نه فرد هستند.





۲- زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید :

الف) $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$

د) $f(x) = |x|$

ب) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3-1}$

هـ) $f(x) = 2x + \sin x$

ج) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

و) $f(x) = x^2 + 2x^4$

۳- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) مجموع دو تابع زوج، تابعی زوج است.

(ب) حاصل ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

(ج) حاصل ضرب دو تابع فرد، تابعی فرد است.

(د) حاصل ضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج، تابعی زوج است.

۴- فرض کنید f تابعی با دامنه متقارن باشد، ثابت کنید :

الف) $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ تابعی زوج است.

ب) $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ تابعی فرد است.

ج) f را می‌توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

د) تابع $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 2\sqrt{1+x^2} - 5$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

۵- آیا تابعی یافت می‌شود که هم زوج باشد و هم فرد؟ چند تابع با این ویژگی داریم؟

۶- در هر یک از حالت‌های زیر نقطه‌ای از نمودار یک تابع داده شده است. نقطه دیگری از نمودار تابع را

بیابید در صورتی که : (۱) تابع زوج باشد. (۲) تابع فرد باشد.

الف) $(-7, 2)$

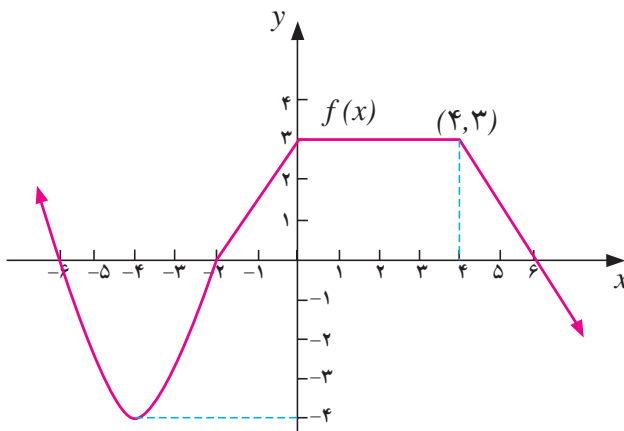
ب) (a, b)

ج) $(\frac{-2}{7}, -7)$

د) $(5, 3)$



۷- با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ که در شکل زیر رسم شده است، بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی، نزولی یا ثابت است را معلوم کنید.



۸- تعیین کنید توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

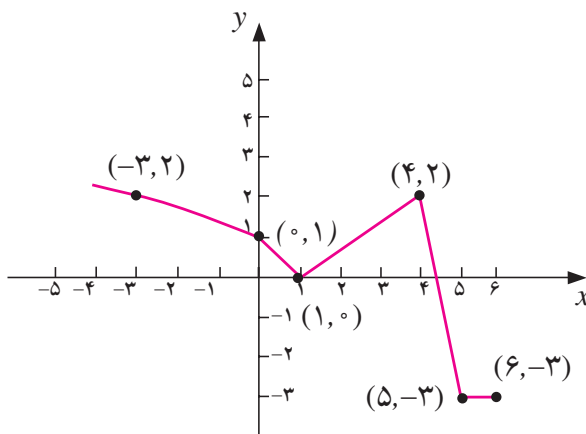
الف) $f(x) = \sqrt{x-2}$

ب) $f(x) = \frac{1}{x}$

ج) $f(x) = -|x-2| + 5$

د) $f(x) = \begin{cases} -3x-18 & x < -5 \\ 1 & -5 \leq x < 1 \\ x+2 & x \geq 1 \end{cases}$

۹- نمودار تابع $f(x)$ در زیر آمده است.





با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه و برد f را پیدا کنید.

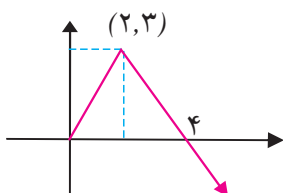
ب) بازه‌هایی که در آن‌ها $f(x) < 0$ یا $f(x) > 0$ را بیابید.

ج) بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است را بیابید.

د) معادله‌ای برای f بیابید (تابع برای مقادیر کمتر از ۱ یک تابع رادیکالی به شکل $\sqrt{ax+b}$ است).

ه) $f\left(\frac{7}{4}\right)$ ، $f\left(\frac{5}{3}\right)$ و $f(-4)$ را بیابید.

و) نمودار تابع h در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

ب) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع فرد را نمایش دهد.

۱۱- مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 4a^2})$ یک تابع فرد باشد.

۱۲- زوج یا فرد بودن توابع f و g را که در زیر آمده است تعیین کنید.

$$f = \{(-2, 5), (-1, 4), (0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$$

$$g = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 0), (1, -2), (2, -1)\}$$

توابع یک به یک و توابع وارون



فعالیت ۸



۱- محیط هر مربع تابعی از اندازه یک ضلع آن است. محیط را با P و طول ضلع را با l نشان دهید و P را به صورت تابعی از l بنویسید. آیا این تابع یک به یک است؟

۲- اندازه ضلع هر مربع تابعی از محیط آن است. با نمادهای بالا l را به صورت تابعی از P بنویسید.

۳- این دو تابع را بر حسب یک متغیر x به صورت $y = f(x)$ و $y = g(x)$ بنویسید.

۴- با توجه به دامنه و برد این دو تابع، نمودار آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.

(توجه داشته باشید که قرینه نقطه $A(a, b)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نقطه $B(b, a)$ است.)



توابع یک به یک

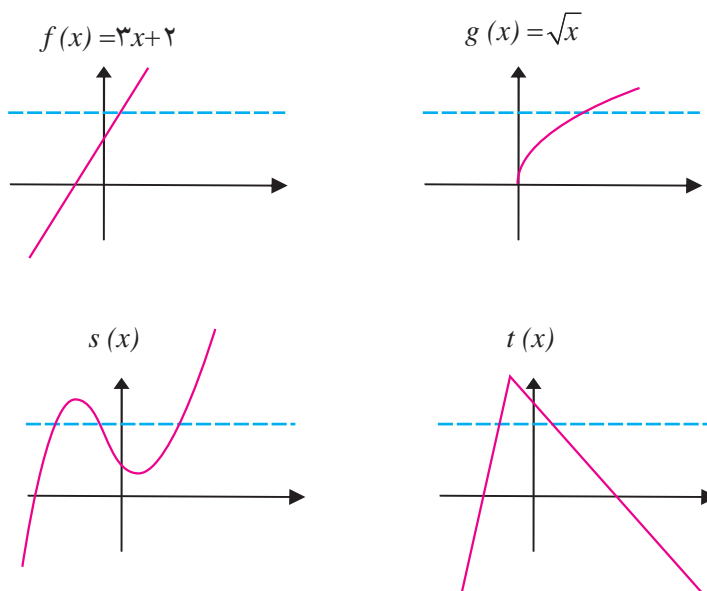
همان‌طور که در درس ریاضی ۲ دیده‌اید وارون هر تابع، لزوماً یک تابع نمی‌باشد. تنها، توابعی وارون پذیر هستند که یک به یک باشند. این از جمله دلایلی است که باعث می‌شود توابع یک به یک را با دقت بیشتری مطالعه کنیم.

از قبل می‌دانید که تابع f یک به یک است هر گاه دو عضو متمایز x_2, x_1 در دامنه به دو عضو متمایز $f(x_2), f(x_1)$ در برد نظیر شوند به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

تعریف:

$$\text{تابع } f \text{ یک به یک است هر گاه } x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

اگر نمودار تابع f داده شده باشد، f در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در شکل‌های داده شده توابع f و g یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌باشند. توابع t و s یک به یک نیستند و در نتیجه وارون پذیر هم نیستند.



یک به یک بودن تابع به این معنی است که هیچ دو نقطه متمایزی مانند x_2, x_1 یافت نمی‌شود که برای آن‌ها: $f(x_1) = f(x_2)$. به بیان دیگر اگر برای دو نقطه x_2, x_1 داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2)$ آن گاه $x_1 = x_2$. تابع یک به یک را به روش زیر نیز می‌توان مشخص کرد.

تذکر:

تابع f یک به یک است، اگر برای هر دو نقطه x_2, x_1 از دامنه f داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



مثال

۱: نشان می‌دهیم تابع $f(x) = 3x + 2$ یک به یک است.
به کمک نمودار تابع دیده می‌شود که هر خط موازی محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.
از طریق جبری نیز با فرض $f(x_1) = f(x_2)$ ثابت می‌کنیم $x_1 = x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

روش جبری در جاهایی که نمودار تابع شناخته شده نیست یا رسم آن دشوار است مناسب است.

۲: ثابت می‌کنیم تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ یک به یک است.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \\ &\Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1 \\ &\Rightarrow -2x_1 - x_1 = -2x_2 - x_2 \\ &\Rightarrow -3x_1 = -3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

بنابراین f یک به یک است و در نتیجه وارون پذیر است.

۳: تابع $g(x) = \sqrt{x}$ یک به یک است. این موضوع به سه روش قابل اثبات است.
الف) استفاده از آزمون خط افقی، یعنی هر خط به موازات محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ب) در حقیقت $g(x) = \sqrt{x}$ یک تابع اکیداً صعودی است، در نتیجه اگر $x_1 \neq x_2$ اطمینان داریم که $g(x_1) \neq g(x_2)$. این خاصیت برای تمام توابع اکیداً صعودی برقرار است، یعنی، توابع اکیداً صعودی یک به یک و در نتیجه وارون پذیر هستند. توابع نزولی اکید نیز یک به یک و در نتیجه وارون پذیر هستند.

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

ج) روش محاسبه جبری:

تمرین در کلاس



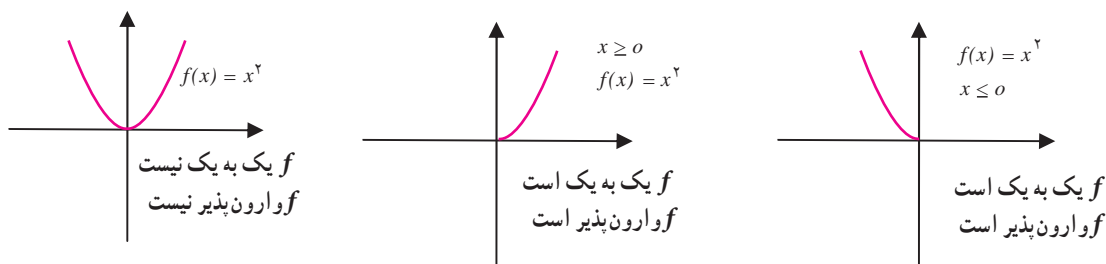
کدام یک از توابع زیر یک به یک است. در مورد الف) و ب) موضوع را با رسم نمودار توابع نیز بررسی کنید.

$$\text{الف) } f(x) = 1 - x^2 \quad \text{ب) } g(x) = \sqrt{2x - 3} \quad \text{ج) } h(x) = \frac{x+6}{3x-4}$$



اگر تابعی یک به یک نباشد و ارون پذیر هم نیست، اما با کوچکتر کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک به یک بسازیم.

مثلاً تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست اما می‌توانیم دامنه تابع را به بازه $[-\infty, 0]$ محدود کنیم و در این صورت تابعی یک به یک به دست آوریم. همچنین می‌توانیم دامنه آن را به بازه $[0, \infty)$ محدود کنیم و تابعی یک به یک به دست آوریم.



محدود کردن دامنه یک تابع را تحدید کردن تابع می‌نامند. این عمل، از روی تابع داده شده، تابع جدیدی می‌سازد و ممکن است تابع جدید خواصی داشته باشد که تابع قبلی نداشته باشد. در جمع و ضرب و تقسیم توابعی که دامنه یکسان ندارند، ابتدا این توابع روی دامنه یکسان تحدید می‌شوند و سپس این توابع تحدید یافته هستند که با هم جمع، ضرب، یا تقسیم می‌شوند.

تمرین در کلاس



۱. کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.

$$f(x) = x^2 - 2x \quad x \geq 0 \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2} \quad x > 0 \quad \text{ب)}$$

۲. با محدود کردن دامنه هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک به یک بسازید.

$$\text{الف) } y = |x - 2| \quad \text{ب) } y = (x + 3)^2 \quad \text{ج) } y = \sin x \quad \text{د) } y = \cos x$$

اگر f تابعی وارون پذیر باشد و وارون آن تابع g باشد، g تابعی است که برعکس f عمل می‌کند، یعنی اگر $f(a) = b$ آنگاه $g(b) = a$. این ویژگی باعث می‌شود نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم شود. به خاطر این ویژگی با در دست داشتن نمودار یک تابع وارون پذیر می‌توانیم نمودار تابع وارون آن را رسم کنیم.

بحث در کلاس

اگر f تابعی وارون پذیر و وارون آن تابع g باشد، آیا g نیز وارون پذیر خواهد بود؟ وارون g چه تابعی خواهد بود؟



محاسبه تابع وارون

در ریاضی ۲ یادگرفته‌اید که اگر تابعی یک به یک مانند f به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شده باشد، برای بدست آوردن f^{-1} ، جای مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب را عوض می‌کنیم به عبارت دیگر برای هر تابع یک به یک f تابع f^{-1} به صورت زیر تعریف می‌شود:

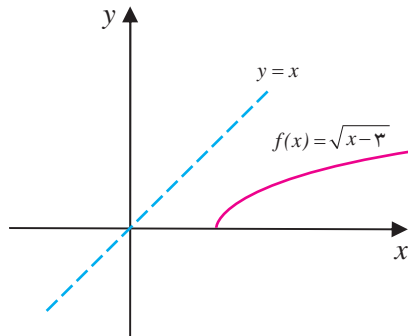
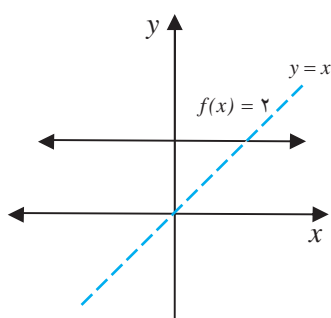
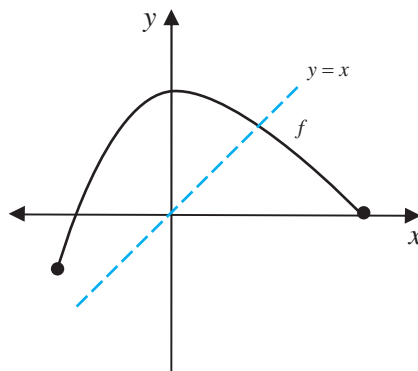
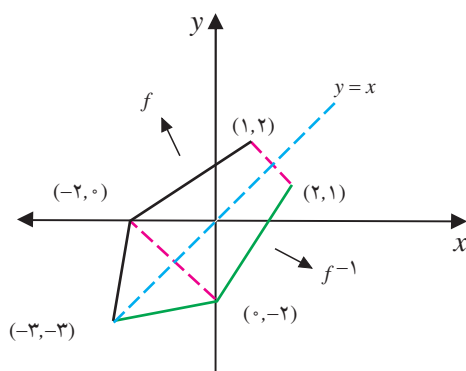
$$f^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in f\}$$

با توجه به تعریف f^{-1} ، هنگامی که نمودار یک تابع یک به یک f داده شده باشد برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار f را نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم.

تمرین در کلاس



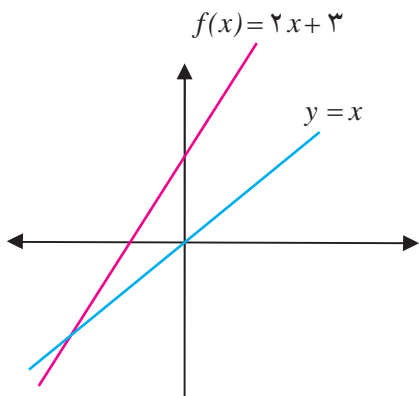
ابتدا تعیین کنید که کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند، سپس وارون هر کدام که یک به یک هستند را مانند نمونه در همان دستگاه مختصات رسم کنید. از خط $y = x$ برای سهولت استفاده کنید.



یافتن ضابطه تابع وارون

فعالیت ۹

نمودار تابع خطی $f(x) = 2x + 3$ داده شده است.



۱- وارون این تابع را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

۲- معادله‌ای برای وارون این تابع به دست آورید. می‌توانید از این نکته استفاده کنید که نقاط $(1, 5)$, $(0, 3)$

روی نمودار f قرار دارند. پس نقاط $(5, 1)$, $(3, 0)$ روی نمودار f^{-1} قرار دارند و نمودار f^{-1} یک خط راست است.

پیدا کردن ضابطه f^{-1} در فعالیت قبل چندان دشوار نبود زیرا f یک تابع خطی بود. اما اگر f خطی نباشد کار چندان ساده

نیست. اکنون با روش دیگری وارون f را به دست می‌آوریم که بتوان آن را هنگامی که تابع داده شده خطی هم نیست به کار برد.

تابع $f(x) = 2x + 3$ را در نظر می‌گیریم. در جدول زیر برخی از مقادیر از دامنه و مقادیر نظیر آن از برد داده شده‌اند. همان طور

که می‌دانید f یک به یک است اگر شبیه همین جدول را برای تابع وارون f در نظر بگیریم جدولی به دست می‌آید که در آن جای مقادیر متناظر x, y تغییر کرده است.

جدول تابع f

x	y
۲	۷
۱	۵
$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$
۰	۳
-۱	۱
-۲	-۱

جدول تابع f^{-1}

x	y
۷	۲
۵	۱
$\frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲





y	$\frac{y-3}{2} = x$
۷	۲
۵	۱
$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲

زوج مرتب $(۱, ۵)$ به f تعلق دارد و زوج $(۵, ۱)$ به وارون آن. عدد ۱ توسط قانون تابع به ۵ نظیر شده است یعنی ۱ در ۲ ضرب شده و ۳ واحد به آن اضافه شده است اما چه قانونی ۵ را به ۱ نظیر می‌کند؟ پاسخ برگشت از همین مسیر است. یعنی ابتدا سه واحد از ۵ کم کنیم و سپس مقدار به دست آمده را بر ۲ تقسیم کنیم جدول روبه‌رو این فرآیند را بهتر توصیف می‌کند. اگر تابع وارون f را با g نمایش دهیم، ضابطه آن به صورت: $g(y) = \frac{y-3}{2}$ می‌باشد. مشخص است که y ها از برد f اختیار می‌شوند.

همان طور که می‌دانید g را به صورت‌های زیر هم می‌توان نمایش داد:

$$g(a) = \frac{a-3}{2}, \quad g(b) = \frac{b-3}{2}, \quad g(t) = \frac{t-3}{2}$$

آن چه که مهم است این است که دامنه g همان برد f است بنابراین می‌توان نوشت:

$$g(x) = \frac{x-3}{2} \quad x \in R_f$$

از آنجا که g را معمولاً با f^{-1} نمایش می‌دهیم داریم: $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$
 اکنون آن چه بیان شده را به عنوان یک روش به کار می‌بریم.

تذکر:

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع وارون پذیر مانند f در معادله $y = f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.



مثال

ضابطه وارون تابع $f(x) = 2x + 3$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x) = 2x + 3 &\Rightarrow y = 2x + 3 \\ &\Rightarrow 2x = y - 3 \\ &\Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \\ &\Rightarrow g(y) = \frac{y-3}{2} \\ &\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2} \end{aligned}$$



تمرین در کلاس



نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون آن‌ها را به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x-2} \quad (\text{الف}) \quad g(x) = \frac{x-5}{2x+3} \quad (\text{ب})$$

فعالیت ۱۰



۱- اگر $f(x) = 2x + 3$ دیدیم که وارون آن، تابع $g(x) = \frac{x-3}{2}$ است. توابع $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ را محاسبه کنید.

۲- اگر $f(x) = \sqrt{2x-1}$ ثابت کنید که f وارون پذیر است و وارون آن تابع $g(x) = \frac{x^2+1}{2}$ است. توابع $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ را محاسبه کنید.

۳- به طور کلی اگر تابع f دارای تابع وارون g باشد در مورد توابع $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$ چه حدس می‌زنید؟ توجه کنید که تابع و تابع وارون عکس یکدیگر عمل می‌کنند.

خاصیت تابع و تابع وارون نشان می‌دهد که قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم :

$$D_g = R_f \quad , \quad R_g = D_f$$

$$g(f(x)) = x$$

$$f(g(x)) = x$$

و برای هر x در دامنه f داریم :

و برای هر x در دامنه g داریم :

تذکر : توجه داریم که f^{-1} یک نماد است و نباید آن را با $\frac{1}{f(x)}$ اشتباه گرفت.



تمرین در کلاس



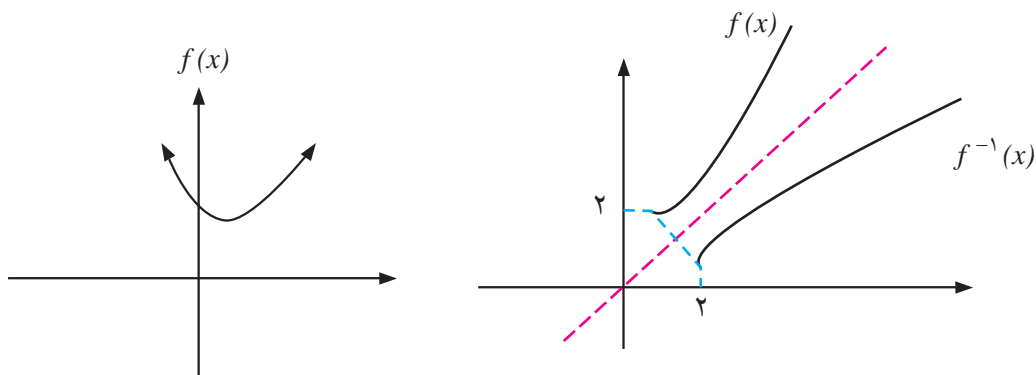
۱- اگر $f(x) = \frac{7}{x} + 3$ ، $g(x) = \frac{7}{x-3}$ ، $h(x) = \frac{x-3}{7}$ ثابت کنید که f و g وارون یکدیگرند ولی h و g وارون یکدیگر نمی‌باشند.

۲- آیا دو تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ ، $g(x) = \frac{5}{2}$ وارون یکدیگرند؟

۳- اگر $y = m_1x + b_1$ و $y = m_2x + b_2$ معادله دو خط باشند که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید $m_1m_2 = 1$.

مثال

تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ یک به یک نیست. زیرا $f(0) = f(3)$ ولی $0 \neq 3$ یک به یک نبودن f از روی نمودار آن نیز به سادگی دیده می‌شود.



اما تحدید این تابع روی بازه $[1, \infty)$ تابعی یک به یک است و می‌توانیم معادله‌ای برای f^{-1} به دست آوریم. نمودار بالا یک به یک بودن تحدید f روی بازه $[1, \infty)$ را نشان می‌دهد و با روش جبری نیز می‌توانیم این مطلب را ثابت کنیم.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow x_1^2 - 2x_1 + 3 = x_2^2 - 2x_2 + 3 \\ &\Rightarrow (x_1 - 1)^2 + 2 = (x_2 - 1)^2 + 2 \\ &\Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \\ &\Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در نتیجه‌گیری‌های بالا از این که $x_1 \geq 1$ و $x_2 \geq 1$ استفاده کرده‌ایم (چگونه؟). برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون داریم:



$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y-2 = (x-1)^2 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{y-2}$$

جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین $x-1 = \sqrt{y-2}$ در نتیجه

$$x = \sqrt{y-2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

به کمک نمودارها و نیز از ضابطه توابع دیده می‌شود که:

$$D_f = [1, +\infty) = R_{f^{-1}}$$

$$R_f = [2, +\infty) = D_{f^{-1}}$$

بنابراین:

$$f^{-1}: [2, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

درستی تساوی $f(f^{-1}(x)) = x$ با محاسبه زیر روشن می‌شود.

$$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) = (\sqrt{x-2} + 1 - 1)^2 + 2 = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

اثبات درستی رابطه $f^{-1}(f(x)) = x$ به طریق مشابه است.

بحث در کلاس

وارون یک تابع صعودی (اکید)، صعودی است یا نزولی؟ وارون یک تابع نزولی (اکید) چگونه است؟



مسائل



- تحقیق کنید که توابع $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ ، $g(x) = \frac{1}{x-2}$ وارون یکدیگرند. برای کدام مقادیر x داریم $f(g(x)) = x$ و برای کدام مقادیر x داریم $g(f(x)) = x$ ؟
- فرض کنید تابع f دارای وارون است. اگر نمودار f در ربع اول واقع شود، نمودار f^{-1} در کدام ناحیه قرار می‌گیرد؟

۳- نشان دهید تابع $f(x) = |x-2| + 3$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک به یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

۴- در هر یک از حالت‌های زیر نشان دهید که توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$\text{الف) } f(x) = x^3 - 5, \quad g(x) = \sqrt[3]{x+5}$$



$$f(x) = \sqrt{x-2}, \quad g(x) = x^2 + 2, \quad x \geq 0 \quad (\text{ب})$$

۵- نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون پذیر نباشد.

ب) برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$.

۶- وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند به دست

آورید.

$$f(x) = (x+5)^2, \quad x \geq -5 \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = -|x-1| + 1, \quad x \geq 1 \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = (x-3)^2 \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} - 3 \quad (\text{د})$$

۷- نشان دهید که تابع $f(x) = \frac{3x-2}{5x-3}$ وارون خودش است.

۸- تابع $f(x) = ax+b$ ، $a \neq 0$ داده شده است همه مقادیر b, a را که به ازای آن‌ها $f^{-1}(x) = f(x)$ را

بیابید.

$$9- \text{ در مورد وارون پذیری تابع } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x + 1 & 1 \leq x \end{cases} \text{ تحقیق کنید.}$$

۱۰- اگر $f(x) = x+3$ ، $g(x) = 3x-7$ با محاسبه نشان دهید $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

۱۱- اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه

$$h(t) = 100 - \frac{49}{10}t^2 \quad \text{به دست می آید.}$$

الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می کند؟



توابع چند جمله‌ای و توابع متناوب

قبلاً با توابع خطی آشنا شده‌اید. هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$ ، تابع به صورت $f(x)=b$ درمی‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامند. توابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که آن‌ها را توابع چندجمله‌ای می‌نامند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند.

تعریف:

هر تابع به صورت: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن $a_n, a_{n-1}, a_n, \dots, a_1, a_0$ اعدادی حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجه n می‌نامند.

در جدول زیر مثال‌هایی از توابع چندجمله‌ای ارائه شده است.

درجه چندجمله‌ای	شکل کلی	مثال
0 (توابع ثابت)	$f(x) = a$	$f(x) = 3$
1 (خط با شیب a_1)	$f(x) = a_1 x + a_0$	$f(x) = \frac{2}{3}x - 5$
2 (سه‌می‌ها)	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$f(x) = -3x^2 + 2x + 1$
3	$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$f(x) = 7x^3 - \sqrt{2}x^2 + 2x - 5$
4	$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	$f(x) = x^4 - x^3 + x$

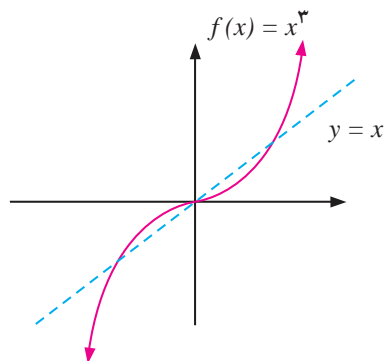
با رسم نمودار توابع چندجمله‌ای از درجه $0, 1, 2$ و یافتن دامنه و برد آن‌ها آشنا شده‌اید. در این جا نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x) = x^3$ و برخی از توابع چندجمله‌ای دیگر درجه سوم که به کمک تابع $y = x^3$ می‌توان نمودار آن‌ها را رسم کرد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دامنه تابع $f(x) = x^3$ برابر IR است و تابعی فرد است، بنابراین نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. با توجه به ضابطه تابع برای مقادیر مثبت x ، مقدار تابع مثبت است بنابراین کافی است نمودار تابع در ربع اول را رسم کنیم و سپس قرینه آن را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم. این تابع صعودی است زیرا اگر $x_1 < x_2$ می‌توان نتیجه گرفت $x_1^3 < x_2^3$. برای $0 < x < 1$ داریم: $0 < x^3 < x$ و برای $x > 1$ داریم $x < x^3$ ، بنابراین نمودار این تابع در بازه $(0, 1)$ زیر خط $y = x$ و در بازه $(1, \infty)$ بالای خط $y = x$ قرار دارد.



اکنون با کمک نقطه‌یابی رسم نمودار تقریبی $f(x) = x^3$ به سادگی انجام می‌شود.

x	$f(x)$
۰	۰
۱	۱
۳	۲۷
۱	۱
۲	۸
۱	۱
۳	۲۷
۲	۸
۲	۸

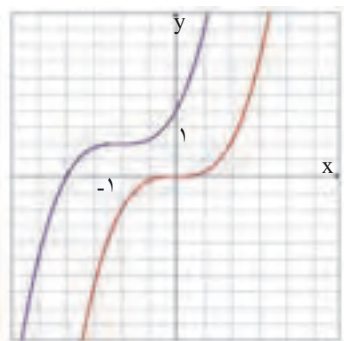


باتوجه به یک به یک بودن، این تابع وارون‌پذیر است و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

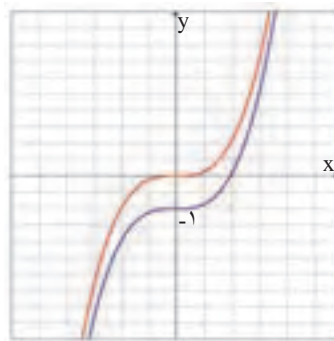
تمرین در کلاس



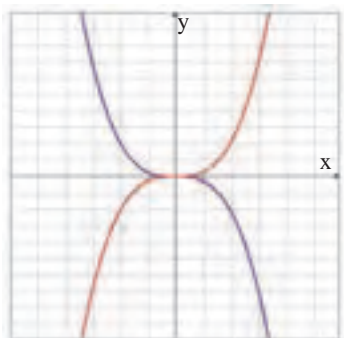
- نمودار $y = \sqrt[3]{x}$ را در همان دستگاه مختصات به همراه نمودار $y = x^3$ رسم کنید.
- در هریک از شکل‌های زیر نمودار تابع $y = x^3$ و نمودار یک تابع دیگر که به کمک آن به دست آمده است در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. ضابطه نمودار تابع جدید را بنویسید.



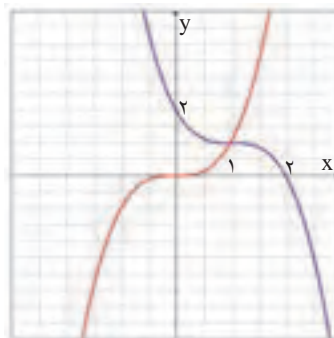
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۳- نمودار توابع $y = (x + \frac{3}{4})^3$ و $y = (x-1)^3 + 2$ و $y = 2x^3$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

حرکت‌هایی که الگوی خاصی را تکرار می‌کنند حرکت متناوب می‌نامند. حرکت زمین دور خورشید، تغییر فصل‌ها، حرکت عقربه‌های ساعت از این نوع حرکت‌ها هستند. این نوع حرکت در تنظیم بلند مدت وقت و محاسبه زمان به انسان کمک می‌کند. حرکت دیگر تناوبی گردش ماه به دور زمین است که در طی یک دوره تقریباً ۲۸ روزه صورت می‌گیرد و ما را در محاسبه تعداد ماه‌ها یاری می‌نماید. بسیاری از پدیده‌های طبیعی دیگر در عالم خلقت نیز دارای رفتار تناوبی هستند. انسان‌ها از این گونه رفتارها در ساخت مصنوعات بشری مانند ساعت هم استفاده کرده‌اند.

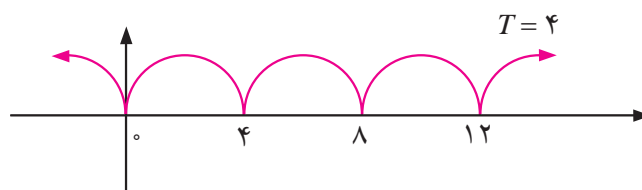
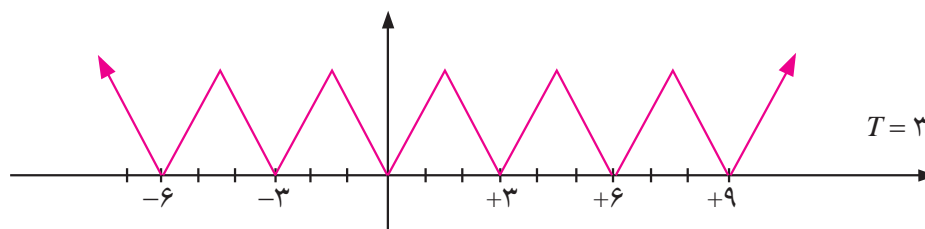
توابعی که بیان‌کننده این حرکات تناوبی هستند شکل خاصی دارند و آن‌ها را تابع‌های متناوب می‌نامند. سال قبل با توابع متناوبی مانند $y = \cos x$ و $y = \sin x$ و دوره تناوب برخی از توابع مثلثاتی آشنا شده‌اید. در اینجا به طور دقیق‌تری توابع متناوب را تعریف می‌کنیم.

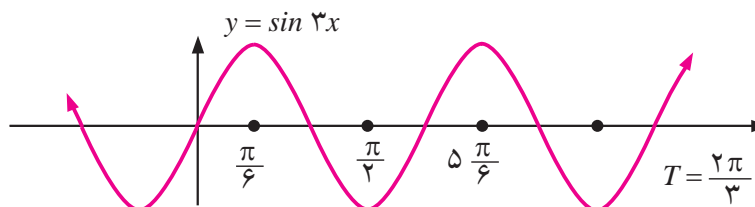
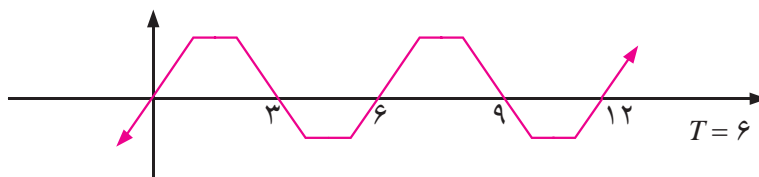
تعریف :

تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x+T) = f(x)$ و $x \pm T \in D_f$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با خاصیت بالا را دوره تناوب f می‌نامند.

مثال

- ۱: توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ توابعی متناوب با دوره تناوب 2π هستند.
- ۲: توابعی که نمودار آن‌ها در زیر آمده است توابعی متناوب با دوره تناوب‌های مختلف هستند.

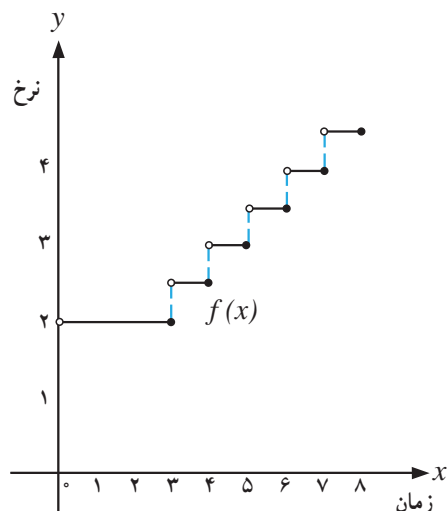




توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

نرخ ارسال بسته‌های پستی به طور معمول تابعی از وزن آن‌ها است. همچنین نرخ توقف در پارکینگ‌ها برحسب ساعت توقف اتومبیل‌ها در آن جا تعیین می‌شود، یعنی نرخ پارکینگ تابعی از زمان توقف است. فرض کنید پارکینگ یک مجتمع تفریحی و ورزشی برای سه ساعت اول توقف ۲ هزار تومان و برای هر ساعت اضافه یا زمانی کمتر از یک ساعت ۵۰۰ تومان دریافت کند. اگر حداکثر زمان توقف در این پارکینگ ۸ ساعت باشد، نمودار تابعی که نرخ توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد به شکل زیر است.

x (ساعات توقف)	$f(x)$ = نرخ برحسب هزار تومان
$0 < x \leq 3$	۲
$3 < x \leq 4$	۲/۵
$4 < x \leq 5$	۳
$5 < x \leq 6$	۳/۵
$6 < x \leq 7$	۴
$7 < x \leq 8$	۴/۵



دامنه این تابع $[0, 8]$ و برد آن مجموعه $\{2, 2/5, 3, 3/5, 4, 4/5\}$ می‌باشد. برای مثال برای توقف ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه‌ای باید مبلغ ۳۵۰۰ تومان پرداخت کرد. توابعی که نمودار آن‌ها شبیه تابع بالا هستند به توابع پله‌ای معروف هستند.



تعریف :

هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها تابع ثابت باشد یک تابع پله ای می نامند.

گونه خاصی از توابع پله ای تابع جزء صحیح می باشد. ابتدا جزء صحیح یک عدد را تعریف می کنیم و بعد تابع جزء صحیح را تعریف می کنیم.

تعریف :

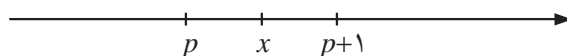
برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می دهیم.

برای مثال داریم :

$$\begin{aligned} [3/2] &= 3 & [4/9] &= 4 & [7] &= 7 & [\sqrt{3}] &= 1 \\ [-1/5] &= -2 & [1-\sqrt{2}] &= -1 & [-2] &= -2 & [-2/95] &= -3 \end{aligned}$$

جزء صحیح یک عدد به شکل زیر نیز مشخص می شود.

برای هر عدد حقیقی x ، یک عدد صحیح p موجود است که $p \leq x < p+1$. همان جزء صحیح x است.

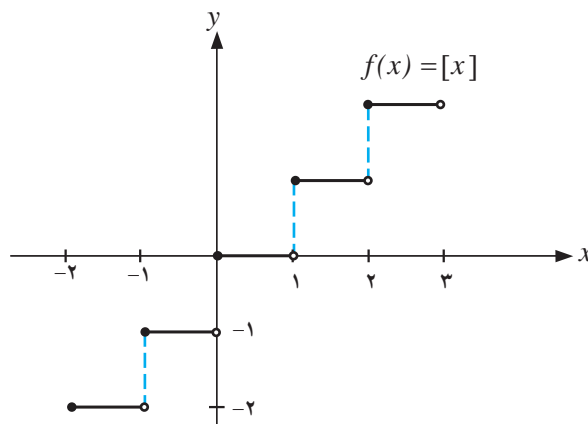


تعریف :

تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می دهد، تابع جزء صحیح نامیده می شود و با $f(x) = [x]$ نمایش داده می شود.

دامنه تابع جزء صحیح مجموعه اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد صحیح می باشد. نمودار این تابع با توجه به جدول، در بازه $[-2, 3)$ رسم شده است.

x	$[x]$
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2





تمرین در کلاس



یک شرکت خدماتی برای هر ساعت کار، یا کسری از ساعت ۵ هزار تومان هزینه دریافت می کند. تابعی بنویسید که هزینه x ساعت کار را محاسبه کند. نمودار این تابع را نیز رسم کنید.

مثال: تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم می کنیم.

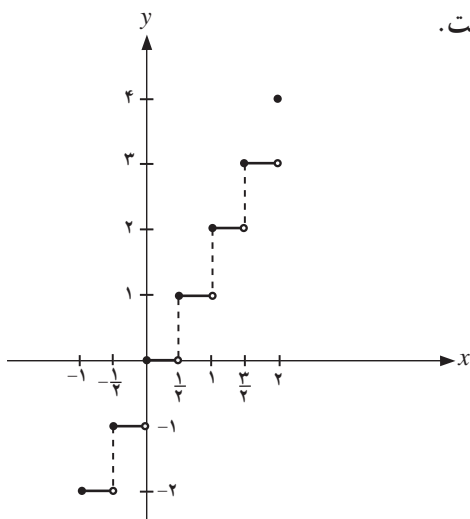
می دانیم که نمودار این تابع از انقباض نمودار تابع $[x]$ با ضریب $\frac{1}{4}$ به دست می آید. اگر $-1 \leq x \leq 2$ آنگاه $-2 \leq 2x \leq 4$ و با توجه به تعریف جزء صحیح، $[2x]$ مقدارهای -2 و -1 و 0 و 1 و 2 و 3 و 4 را اختیار خواهد کرد.

$$[2x] = -2 \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow -1 \leq x < -\frac{1}{2}$$

با استدلال مشابه داریم:

$$[2x] = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0, [2x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع در بازه های متوالی به طول $\frac{1}{2}$ که از نقطه -1 شروع می شود به ترتیب مقدارهای -2 و -1 و 0 و 1 و 2 و 3 و 4 را اختیار خواهد کرد. نمودار این تابع به شکل زیر است.



مسائل



$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq -3 \\ -1 & -1 \leq x < 4 \\ 2 & 4 \leq x \end{cases}$$

۱- تابع پله ای روبه رو را رسم کنید.

۲- نمودار تابع $y = [\frac{1}{3}x]$ را در بازه $[-6, 6]$ رسم کنید.



۳- وارون پذیری تابع $y = [x]$ را بررسی کنید.

۴- نمودار توابع زیر را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

الف) $y = 2[x]$ ب) $y = [-x]$

۵- نشان دهید تابع $y = x - [x]$ متناوب است و با به دست آوردن دوره تناوب آن، نمودار آن را رسم کنید.

۶- نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $[x]$ رسم کنید.

الف) $y = [x] - \frac{1}{2}$ ب) $y = 2[x] + 1$

۷- نمودارهای دو تابع $y = [x - 3]$ و $y = [x] - 3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین

این دو تابع وجود دارد؟

۸- یک شرکت پستی برای ارسال بسته‌های پستی تا کمتر از یک کیلوگرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته‌های از ۱ تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از ۳ کیلوگرم ۶ هزار تومان و برای بسته‌های بیشتر نیز به همین ترتیب دریافت می‌کند. اگر $f(x)$ هزینه ارسال یک بسته پستی x کیلوگرمی می‌باشد، نمودار آن را رسم کنید و معادله‌ای برای آن بیابید.



طول روز در طی یک سال کم و زیاد می شود. تصویر بالا علت این امر را نشان می دهد می توان دید که طول روز را تقریباً می توان به صورت یک تابع مثلثاتی از روزهای سال نوشت.

۱. توابع مثلثاتی
۲. تانژانت و کتانژانت
۳. اتحادهای مثلثاتی
۴. معادلات مثلثاتی
۵. وارون توابع مثلثاتی

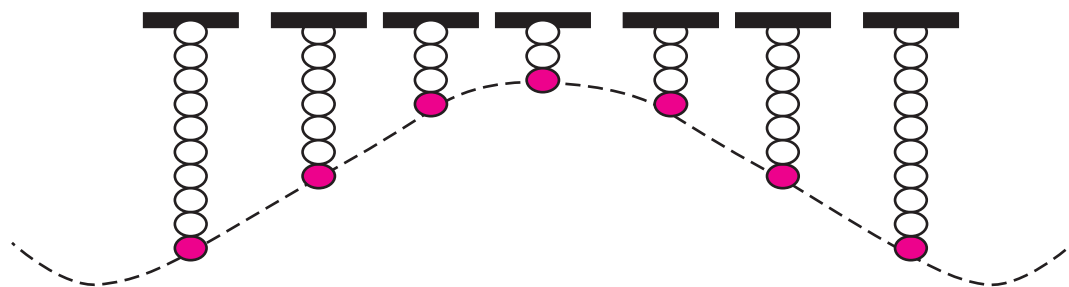
مثلثات



توابع مثلثاتی

بیان ریاضی بسیاری از حرکت‌های متناوب در طبیعت، با توابع مثلثاتی انجام می‌شود. مثلاً حرکت رفت و برگشتی یک آونگ، حرکت سیارات به دور خورشید، نوسانات یک فنر همگی از طریق توابع مثلثاتی قابل بیان هستند.

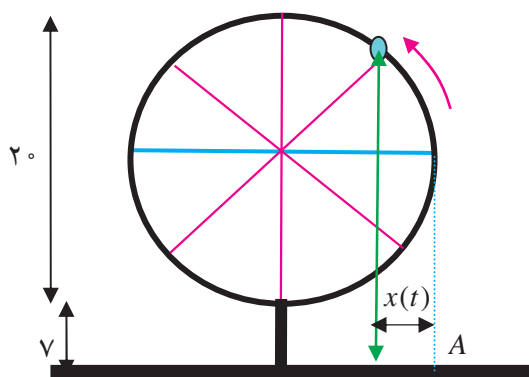
مثال: فرض کنید وزنه‌ای را از یک فنر آویزان کرده‌ایم و فنر به حال تعادل رسیده است. اگر وزنه به یک مقدار اندک کشیده و رها شود با فرض کم بودن اصطکاک وزنه یک حرکت نوسانی انجام خواهد داد. اگر مبدأ محاسبه ارتفاع وزنه را حالت تعادل وزنه بگیریم، و لحظه $t = 0$ را لحظه رد شدن وزنه از حالت تعادل بگیریم تابعی که ارتفاع وزنه را در هر لحظه مشخص می‌کند به صورت $y(t) = A \sin(Bt)$ است.



تمرین در کلاس



فرض کنید چرخ و فلکی به قطر 20 متر داریم که هر 2 دقیقه یک دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض



کنید پایین‌ترین نقطه چرخ و فلک 7 متر بالای زمین باشد، و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه $t = 0$ با زمین 17 متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است. می‌خواهیم در هر لحظه ارتفاع این کابین از سطح زمین را مشخص کنیم.





- ۱- پس از گذشت t ثانیه، کمائی که کابین طی می کند چند رادیان است؟
- ۲- پس از گذشت t ثانیه، کابین چند متر بالای قطر افقی قرار دارد؟ (اگر کابین زیر قطر افقی باشد این عدد را منفی حساب کنید.)
- ۳- تابعی که ارتفاع کابین را (بر حسب متر) نسبت به زمان (بر حسب ثانیه) نشان می دهد بنویسید.
- ۴- اگر در لحظه t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه A را با $x(t)$ نشان دهیم، این تابع را به دست آورید.



مثال

می دانیم که تغییرات طول روز در هر سال مشابه سال قبل تکرار می شود. اگر از اول فروردین طول هر روز را یادداشت کنیم این مقادیر تا اول تابستان در حال افزایش هستند. بعد از اولین روز تابستان طول روزها کاهش می یابد تا به روز اول زمستان برسیم و مجدداً بعد از روز اول زمستان طول روزها افزایش می یابد. این یک حرکت تناوبی است و می توانیم با یک تابع مثلثاتی طول روزها را بیان کنیم.

فرض کنیم t نشان دهنده روزهای سال باشد و $t = 0$ نشان دهنده روز اول فروردین و $t = 364$ نشان دهنده روز آخر سال باشد. طول روز t ام (بر حسب ساعت) را با $L(t)$ نشان می دهیم و فرض کنید به ازای برخی اعداد مانند A و B و C داریم $L(t) = A \sin(Bt) + C$. با داشتن اطلاعات زیر سعی می کنیم A و B و C را به دست آوریم.

روز	اول فروردین	اول تیر	اول دی
طول روز (ساعت)	۱۲/۲۵	۱۵/۵	۹

تمرین در کلاس



- ۱- با توجه به آن که دوره تناوب تابع $L(t)$ ، $\frac{2\pi}{B}$ است نشان دهید $B \approx 0.02$.
- ۲- نشان دهید بیشترین مقدار $L(t)$ برابر $A + C$ و کمترین مقدار آن $-A + C$ است و نتیجه بگیرید $A = 3/25$ ، $C = 12/25$.
- ۳- تابع $L(t)$ را بنویسید و طول روز را در ۵ آذر حساب کنید.

توابع تانژانت و کتانژانت

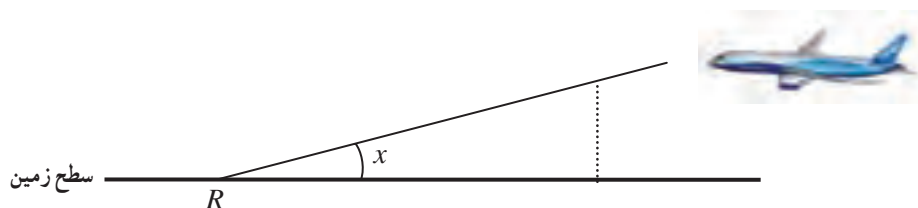
یکی از توابع مثلثاتی تابع تانژانت است. به ازای هر مقدار $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k عدد صحیح) بنا به تعریف:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

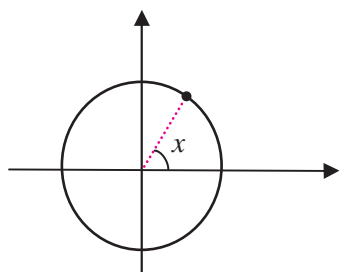
تمرین در کلاس



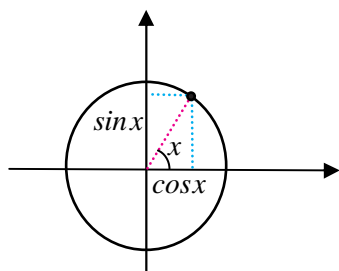
هواپیمایی در ارتفاع ۳ کیلومتری پرواز می‌کند و در حال نزدیک شدن به فرودگاه در محل R است.



- ۱- فاصله افقی هواپیما با فرودگاه را بر حسب زاویه‌ای که رادار طبق شکل به دست می‌آورد حساب کنید.
- ۲- اگر رادار زاویه ۴۵ درجه را نشان دهد، فاصله افقی هواپیما با فرودگاه چقدر است؟

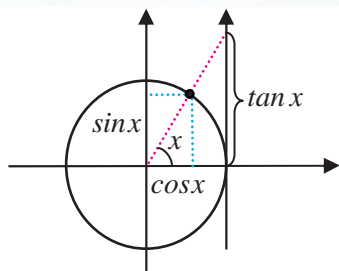


مقدار $\tan x$ را می‌توان در دایره مثلثاتی به شکل هندسی نمایش داد. با رسم یک دستگاه مختصات و دایره واحد به مرکز مبدأ، هر مقدار x که به عنوان زاویه‌ای بر حسب رادیان در نظر گرفته شود نقطه‌ای از دایره مثلثاتی را معین می‌کند.

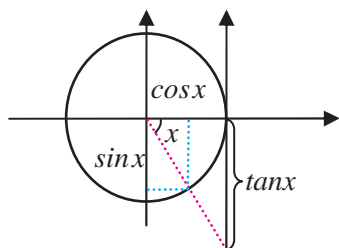


با رسم خط‌هایی عمود بر دو محور، از این نقطه مقدارهای $\sin x$ و $\cos x$ مشخص

می‌شوند.

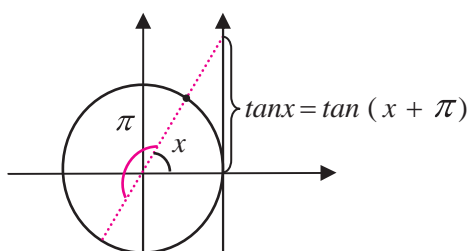


با رسم خط مماس بر دایره مثلثاتی در نقطه $(1, 0)$ و ساختن محوری جدید، اگر خطی که مبدأ را به نقطه روی دایره وصل می‌کند ادامه دهیم تا این محور جدید را قطع کند، عرض نقطه برخورد مقدار $\tan x$ را نشان می‌دهد.



درستی این مطلب از طریق رابطه تشابه در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که ساخته شده‌اند قابل بررسی است. درستی علامت مقدار تانژانت نیز با بررسی آن، وقتی زاویه در ربع‌های دیگری قرار می‌گیرد قابل انجام است. مثلاً وقتی که زاویه در ربع چهارم قرار می‌گیرد مقدار کسینوس مثبت و مقدار سینوس منفی است، پس مقدار تانژانت منفی است.

از آنجا که محورهای بالا مقدارهای سینوس و کسینوس و تانژانت را نمایش می‌دهند، در دایره مثلثاتی این محورها را محور سینوس‌ها و محور کسینوس‌ها و محور تانژانت‌ها می‌نامند. از روی شکل مشخص است که برای زاویه‌هایی که مضرب صحیح و فردی (مثبت یا منفی) از $\frac{\pi}{2}$ هستند مقدار تانژانت تعریف نمی‌شود، زیرا در این نقاط خط واصل از مبدأ به نقطه روی دایره با محور تانژانت‌ها موازی است و آن را قطع نمی‌کند. از طریق جبری نیز مشاهده می‌کنیم که در این زاویه‌ها کسینوس صفر است و کسر $\frac{\sin x}{\cos x}$ معنا ندارد. بنابراین دامنه تعریف تابع $\tan x$ اعداد به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ را (k اعداد صحیح هستند) در بر ندارد. از روی شکل هم چنین مشاهده می‌کنیم که برای دو زاویه x و $x + \pi$ مقدار تانژانت مساوی است.



به طور جبری نیز می‌توان این رابطه را به دست آورد.

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

از این تساوی نتیجه می‌شود $\tan x$ تابعی متناوب است و π یک دوره تناوب آن است.



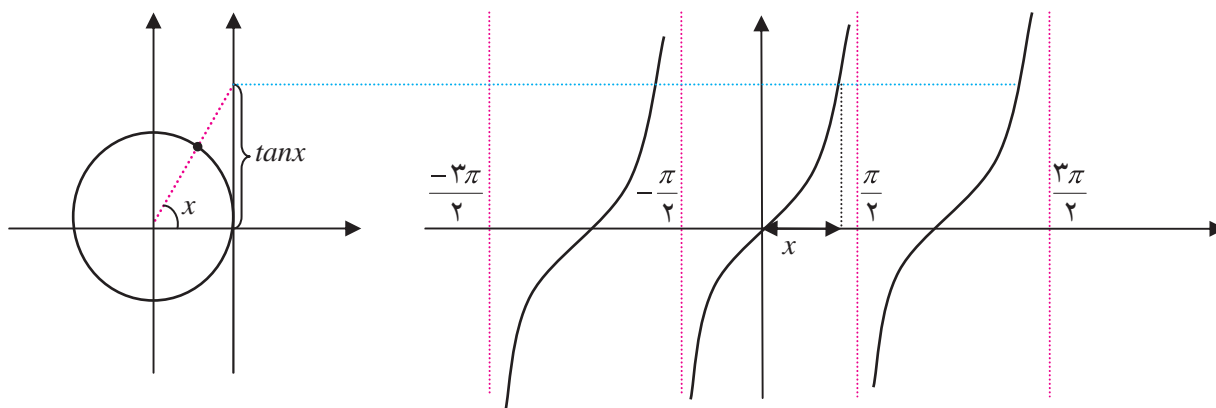
فعالیت ۱



- در این فعالیت می‌خواهیم چگونگی تابع تانژانت را در یک دوره تناوب آن، مانند بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ، بررسی کنیم.
- از طریق شکل و محور تانژانت‌ها توضیح دهید که وقتی مقادیرهای x از صفر شروع شوند و به طور مداوم افزایش یابند تا به $\frac{\pi}{4}$ نزدیک شوند، مقادیرهای $\tan x$ چگونه تغییر می‌کنند.
 - آیا تابع تانژانت روی بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ صعودی است؟
 - از طریق شکل و محور تانژانت‌ها توضیح دهید که وقتی مقادیرهای x از صفر شروع شوند و به طور مداوم کاهش یابند تا به $-\frac{\pi}{4}$ نزدیک شوند، مقادیرهای $\tan x$ چگونه تغییر می‌کنند.
 - آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ صعودی است؟ آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ صعودی است؟
 - آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ تابعی زوج یا فرد می‌باشد؟
 - با تکمیل جدول زیر و یافتن مقدار $\tan x$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه آن رسم کنید.

.	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
....							

با توجه به اطلاعاتی که در فعالیت قبل نسبت به تابع تانژانت به دست آورده‌اید، نمودار تقریبی آن به شکل زیر خواهد بود.





یکی دیگر از توابع مهم مثلثاتی تابع کتانژانت است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

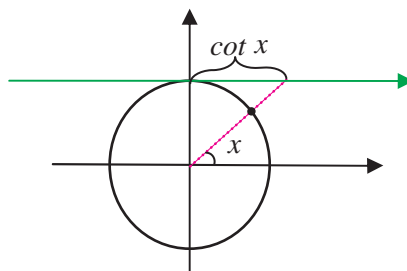
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \neq k\pi)$$

در زاویه‌هایی که تابع تانژانت ناصفر است مقدار کتانژانت وارون مقدار تانژانت است. یعنی $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.

تمرین در کلاس

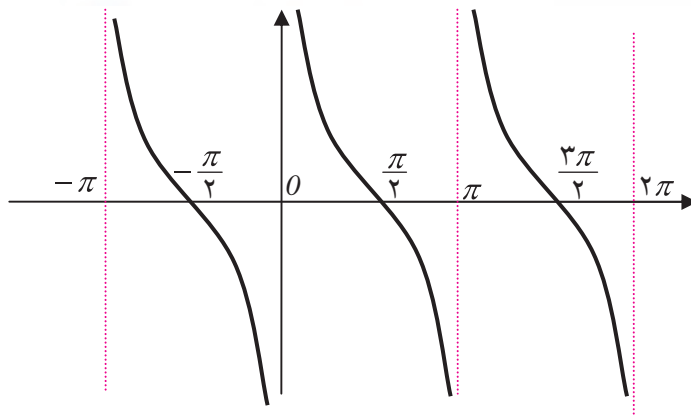


- ۱- نشان دهید دامنه تابع کتانژانت همه اعداد، غیر از اعداد به صورت $k\pi$ است که k عددی صحیح است.
- ۲- نشان دهید π یک دوره تناوب تابع کتانژانت است.
- ۳- نشان دهید مقدار $\cot x$ از طریق محوری که در زیر رسم شده است و آن را محور کتانژانت‌ها می‌نامند به دست می‌آید.



- ۴- از طریق محور کتانژانت‌ها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از یک زاویه مثبت نزدیک صفر شروع شوند و به طور مداوم افزایش یابند تا به π نزدیک شوند، مقدارهای $\cot x$ چگونه تغییر می‌کنند.
- ۵- وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع کتانژانت در بازه $(0, \pi)$ چگونه است؟
- ۶- با یافتن مقدار $\cot x$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه آن رسم کنید.
- ۷- درستی تساوی $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ را به دست آورید و از طریق آن چگونگی ارتباط نمودارهای دو تابع $\tan x$ و $\cot x$ را توضیح دهید.

با توجه به نتایجی که از تمرین بالا به دست می‌آید نمودار تابع کتانژانت در صفحه بعد رسم شده است.



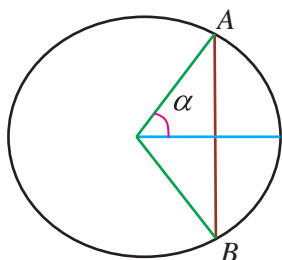
اتحادهای مثلثاتی

حل یک مسئله

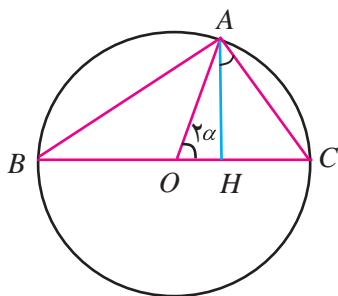
اگر زاویه‌ای دو برابر شود، نسبت‌های مثلثاتی آن چگونه تغییر می‌کنند؟

کسی که اولین بار به این سؤال پاسخ گفت ابوالوفای بوزجانی از دانشمندان ایرانی بود که نقش زیادی در گسترش علم مثلثات در آن دوره داشته است. فعالیت زیر بر اساس روش بوزجانی برای یافتن $\sin 2\alpha$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α می‌باشد.

فعالیت ۲



۱- از طریق شکل مقابل نشان دهید که اگر AB وترى در دایره واحد باشد که زاویه کمان روبروی آن 2α باشد، طول وتر $2\sin\alpha$ است.



۲- در شکل مقابل O مرکز دایره واحد و زاویه بین دو شعاع OA و OC برابر 2α است و AH عمود بر BC است. ابتدا استدلال کنید $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ و $\widehat{HAC} = \alpha$

فصل ۳ مثلثات



۳- استدلال کنید که $AC = 2 \sin \alpha$ و $AH = \sin 2\alpha$ و در مثل قائم الزاویه AHC داریم $\cos \alpha = \frac{AH}{AC}$.

۴- نتیجه بگیرید: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

۵- از تساوی‌های $OH + HC = 1$ و $OH = \cos 2\alpha$ و $\sin \alpha = \frac{HC}{AC}$ نتیجه بگیرید:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ اعتبار دارد، ولی برای سایر زاویه‌ها نیز، با استفاده از خواص توابع سینوس و کسینوس، می‌توان درستی این تساوی‌ها را به دست آورد.



مثال

$$1: \text{ برای زاویه } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ داریم: } 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 = \sin 2 \times \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2}$$

۲: برای زاویه $\frac{\pi}{6}$ داریم:

$$2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 2 \times \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3}$$

به کمک روابط بالا می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دیگری غیر از $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ را هم با دقت حساب

کنیم.

۳: سینوس زاویه 15° درجه را حساب می‌کنیم.

$$\cos 30^\circ = \cos 2 \times 15^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2 \sin^2 15^\circ \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$$

تمرین در کلاس



۱- با توجه به درستی تساوی $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ برای زاویه‌های حاده، درستی این تساوی را برای

زاویه منفرد β ثابت کنید. (از زاویه حاده $\alpha = \pi - \beta$ کمک بگیرید.)

۲- نشان دهید برای هر زاویه α داریم:

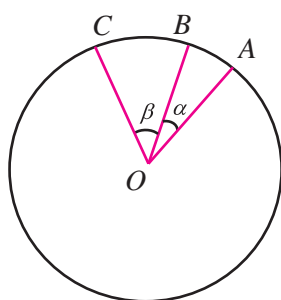
$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$



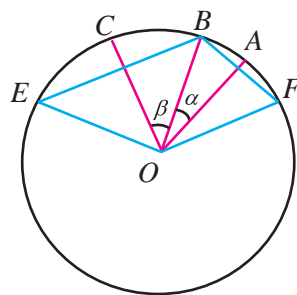
۳- نشان دهید برای هر زاویه α داریم:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

۴- سینوس و کسینوس زاویه $22/5^\circ$ را حساب کنید.



مسئله مهم‌تر دیگری که بوزجانی به حل آن پرداخت یافتن نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه مانند α و β بود. روشی که در زیر برای حل این مسئله می‌آید بر اساس روش بوزجانی است. در دایره واحد دو زاویه α و β را به مرکز مبدأ پهلوی هم رسم می‌کنیم. حالتی را در نظر می‌گیریم که $\alpha + \beta$ حاده باشد.



اگر زاویه‌های مرکزی α و β و $(\alpha + \beta)$ را بسازیم وتر روبروی آن‌ها مقدارهای $2\sin\alpha$ و $2\sin\beta$ و $2\sin(\alpha + \beta)$ را نشان خواهند داد. برای این کار از B به OC و OA عمودی رسم می‌کنیم تا دایره را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند.

ادامه روش بوزجانی را در فعالیت زیر دنبال می‌کنیم.



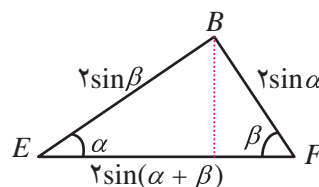
فعالیت ۳



- ۱- با رسم پاره‌خط EF نتیجه بگیرید $EF = 2\sin(\alpha + \beta)$.
- ۲- نشان دهید زاویه‌های \widehat{EFB} و \widehat{FEB} به ترتیب برابر β و α می‌باشند.
- ۳- مثلث EFB را جداگانه در صفحه بعد رسم کرده‌ایم و ارتفاع وارد بر ضلع EF را نیز رسم کرده‌ایم. با توجه به آن که طول اضلاع و زاویه‌های این مثلث معلوم شده‌اند، نتیجه بگیرید:



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$



اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $\alpha + \beta$ حاده باشد اعتبار دارد، ولی با استفاده از خواص توابع سینوس و کسینوس می‌توان درستی آن را برای تمام زاویه‌ها به دست آورد. مثلاً در حالتی که α و β حاده هستند ولی $\alpha + \beta$ منفرجه است، می‌توانیم برای

دو زاویه $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ و $\beta' = \frac{\pi}{2} - \beta$ که هر دو حاده هستند و $\alpha' + \beta' = \pi - (\alpha + \beta)$ نیز حاده است بنویسیم:

$$\sin(\alpha' + \beta') = \sin\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \sin\beta'$$

در نتیجه:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha' + \beta') = \sin\alpha' \cos\beta' + \cos\alpha' \sin\beta'$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$= \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta$$

برای بقیه حالت‌ها نیز می‌توان محاسبات مشابهی را انجام داد.



مثال

سینوس زاویه 75° را حساب می‌کنیم.

$$\sin 75 = \sin(45 + 30) = \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

تمرین در کلاس



۱- فرمول سینوس مجموع دو زاویه برای هر دو زاویه دلخواهی برقرار است. در این فرمول β را به $-\beta$ تبدیل

کنید و نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$



۲- با توجه به آن که $\cos(\alpha + \beta) = \sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta)$ نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

۳- ثابت کنید برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

۴- ثابت کنید برای هر زاویه α داریم:

$$\sin^3 \alpha = -4 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha, \quad \cos^3 \alpha = 4 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha$$

به کمک روابط بالا می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های بیشتری را با دقت حساب کنیم.



مثال

۱: تانژانت زاویه ۱۰۵° را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \tan 105^\circ &= \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \times \sqrt{3}} = -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{2} \end{aligned}$$

۲: کسینوس زاویه $۶۷/۵^\circ$ را حساب می‌کنیم.

داریم $۶۷/۵^\circ = 3 \times ۲۲/۵^\circ = 3 \times \frac{۴۵}{۲}$. ابتدا کسینوس $۲۲/۵^\circ$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \cos^2 22/5^\circ &= \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

حال کسینوس $۶۷/۵^\circ$ را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \cos 67/5^\circ &= 4 \cos^3(22/5^\circ) - 3 \cos 22/5^\circ = 4 \times \frac{(\sqrt{2 + \sqrt{2}})^3}{8} - 3 \times \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} (\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$



روابط به دست آمده در محاسبات نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه‌ها موجب می‌شود روابط جدید دیگری بین توابع مثلثاتی به دست آیند. مثلاً برای هر دو زاویه α و β داریم:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

با جمع طرفین تساوی نتیجه می‌شود:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

اتحاد بالا یک عمل ضرب نسبت‌های مثلثاتی را به یک عمل جمع نسبت‌های مثلثاتی دیگر تبدیل می‌کند.

تمرین در کلاس



۱- با استفاده از فرمول محاسبه $\cos(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha - \beta)$ نتیجه بگیرید:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

۲- با استفاده از روابط بند (۱) و نتایج قبل با قرار دادن $A = \alpha + \beta$ و $B = \alpha - \beta$ نتیجه بگیرید:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

این اتحادهای مثلثاتی کمک زیادی در ساده‌سازی عبارت‌های مثلثاتی می‌کنند و از آن‌ها در جهت تبدیل جمع‌ها به ضرب‌ها و برعکس تبدیل ضرب‌ها به جمع‌ها استفاده می‌شود.



مثال

۱: نشان دهید $\cos 2x + \cos 4x = 2 \cos x \cos 3x$

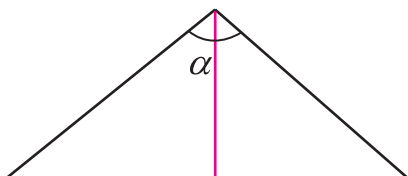
$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos 4x &= 2 \cos \frac{2x+4x}{2} \cos \frac{2x-4x}{2} \\ &= 2 \cos 3x \cos(-x) = 2 \cos x \cos 3x \end{aligned}$$

۲: عبارت $\sin(x+h) - \sin x$ را به صورت حاصل ضربی تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin x &= \sin(x+h) + \sin(-x) = 2 \sin \frac{x+h+(-x)}{2} \cos \frac{x+h-(-x)}{2} \\ &= 2 \sin \frac{h}{2} \cos \left(x + \frac{h}{2}\right) \end{aligned}$$

مسائل

- ۱- اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ ، مقدارهای $\sin(\alpha + \beta)$ و $\tan(\alpha + \beta)$ را تعیین کنید.
- ۲- با استفاده از مثلث متساوی‌الساقین زیر که طول ساق‌های آن واحد است و زاویه رأس آن α است، با محاسبه مساحت آن از دو طریق نتیجه بگیرید:



$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

- ۳- نمودار تابع $y = 3 - 6 \sin^2 x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید. دوره تناوب این تابع چقدر است؟
- ۴- فرمول محاسبه $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را از طریق فرمول محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha + \beta)$ به دست آورید.
- ۵- برای یک زاویه دلخواه α که برای آن $\tan 2\alpha$ تعریف شده است درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

- ۶- اگر α زاویه‌ای در بازه $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ باشد که $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan \frac{\alpha}{2}$ را حساب کنید.



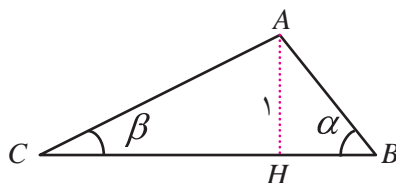
۷- درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (ب) $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$

ج) $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ (د) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

ه) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

۸- در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ در حالتی که α و β حاده هستند ارائه می‌شود. مثلث ABC را به گونه‌ای می‌سازیم که زاویه رأس B برابر α و زاویه رأس C برابر β باشد و ارتفاع وارد بر ضلع BC واحد باشد. چگونگی ساختن این مثلث را توضیح دهید.

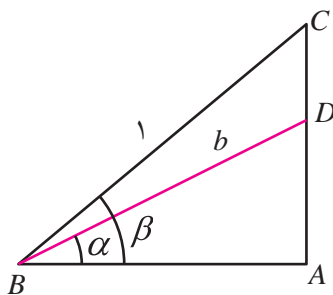


با محاسبه طول پاره خط‌های AB و AC و CH و BH بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و β و محاسبه مساحت مثلث ABC از دو طریق، یا با استفاده از رابطه سینوس‌ها در مثلث ABC ، فرمول محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ را به دست آورید.

۹- در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\beta - \alpha)$ در حالتی که α و β حاده هستند و $\alpha < \beta$ ارائه می‌شود. در شکل زیر زاویه \hat{A} قائمه است و ضلع BC واحد است. طول پاره خط BD را عددی مانند b فرض کنید. با محاسبه طول پاره خط‌های دیگری که در شکل دیده می‌شود و محاسبه مساحت مثلث‌هایی که در شکل دیده می‌شوند، با استفاده از تساوی:

$$(\text{مساحت } ADB) - (\text{مساحت } ABC) = (\text{مساحت } BDC)$$

ثابت کنید: $\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$





معادلات مثلثاتی



حل یک مسئله



آیا می توان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی متر باشد و مساحت آن ۳ سانتی متر مربع شود؟ چند مثلث با این خاصیت موجودند و با چه روشی می توان آن‌ها را ساخت؟

معلم از دانش آموزان پرسید: چگونه می توانیم این مسئله را حل کنیم؟

زهرا: باید طول ضلع سوم را هم بیابیم تا مثلث مشخص شود و طول این ضلع باید مقداری باشد تا مساحت مثلث ۳ سانتی متر مربع شود.

صدیقه: ولی ما رابطه‌ای که مساحت مثلث را بر حسب طول اضلاع بیان کند، نمی‌شناسیم پس راهی برای به دست آوردن ضلع سوم نخواهیم داشت.

معلم: البته چنین رابطه‌ای وجود دارد ولی می‌توانیم دنبال راه حل دیگری بگردیم. اما نکته‌ای که زهرا بیان کرد آن است که ما باید با روشی مثلث جواب را مشخص کنیم. اگر راهی برای مشخص کردن ضلع سوم نداریم باید دنبال چیز دیگری بگردیم.

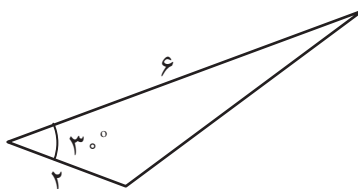
زینب: چطور است که زاویه بین آن دو ضلع را بیابیم؟

معلم: فکر بسیار خوبی است، چه راهی برای تعیین این زاویه داریم؟

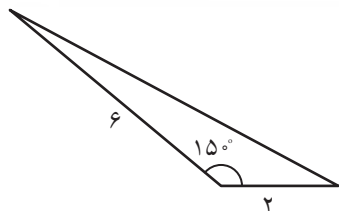
زهرا: ما می‌توانیم مساحت یک مثلث را از طریق طول دو ضلع و زاویه بین آن‌ها به دست آوریم. اگر این زاویه را θ بنامیم باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \sin \theta = 3$$

زینب: از این معادله نتیجه می‌شود $\sin \theta = \frac{1}{2}$ یعنی $\theta = 30^\circ$ درجه است. پس جواب مسئله مثلث زیر است.



معلم: بله شما توانستید یک جواب برای این مسئله بیابید. اما آیا این معادله جواب دیگری ندارد؟



صدیقه: برای زاویه 15° درجه نیز داریم $\sin 15^\circ = \frac{1}{4}$ ، پس مثلث دیگری هم با شرایط مورد نظر مسئله وجود دارد.

معلم: آیا جواب دیگری هم می‌توانید پیدا کنید؟

زهرا: نه، جواب دیگری وجود ندارد زیرا زاویه‌های دیگری که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{4}$ است نمی‌توانند زاویه یک مثلث باشند.

در برخی از مسائل مجهول یک زاویه است که اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی آن در دست است. اگر این اطلاعات را به صورت یک معادله بنویسیم، آن را یک معادله مثلثاتی می‌نامند.



مثال

در مثلثی که طول اضلاع آن ۱، ۳، $\sqrt{7}$ است، زاویه روبروی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر است؟ اگر این زاویه را θ بنامیم طبق رابطه کسینوس‌ها داریم:

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \cos \theta$$

این یک معادله مثلثاتی بر حسب θ است و با حل آن داریم: $\cos \theta = \frac{1}{4}$ تنها زاویه‌ای که بتواند زاویه یک مثلث باشد و کسینوس آن $\frac{1}{4}$ باشد 60° درجه است.

حل معادلات مثلثاتی

شیوه کلی حل معادلات مثلثاتی به این صورت است که پس از محاسبات جبری معادله را به یکی از شکل‌های $\sin \alpha = \sin \beta$ یا $\cos \alpha = \cos \beta$ یا $\tan \alpha = \tan \beta$ در بیاوریم.

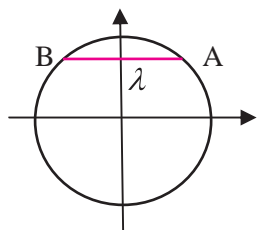
در مثال بالا، معادله مثلثاتی پس از محاسبات جبری به صورت $\cos \theta = \frac{1}{4}$ در آمد یعنی $\cos \theta = \cos 60^\circ$. همچنین در مسئله مطرح شده، معادله به صورت $\sin \theta = \frac{1}{4}$ در آمد و این یعنی $\sin \theta = \sin 30^\circ$.



حل یک مسئله



اگر α و β دو زاویه باشند که $\sin \alpha = \sin \beta$ ، این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

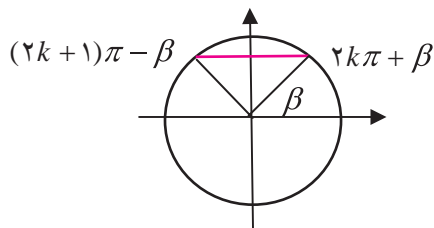


مناسب است که این مسئله را از طریق دایره مثلثاتی بررسی کنیم. اگر $\sin \alpha = \sin \beta = \lambda$ عددی در بازه $[-1, 1]$ است و زاویه‌هایی که سینوس آن‌ها λ است، طبق شکل روبه‌رو آن‌هایی هستند که نقطه متناظر آن‌ها در دایره مثلثاتی در نقطه A یا B قرار گیرد.

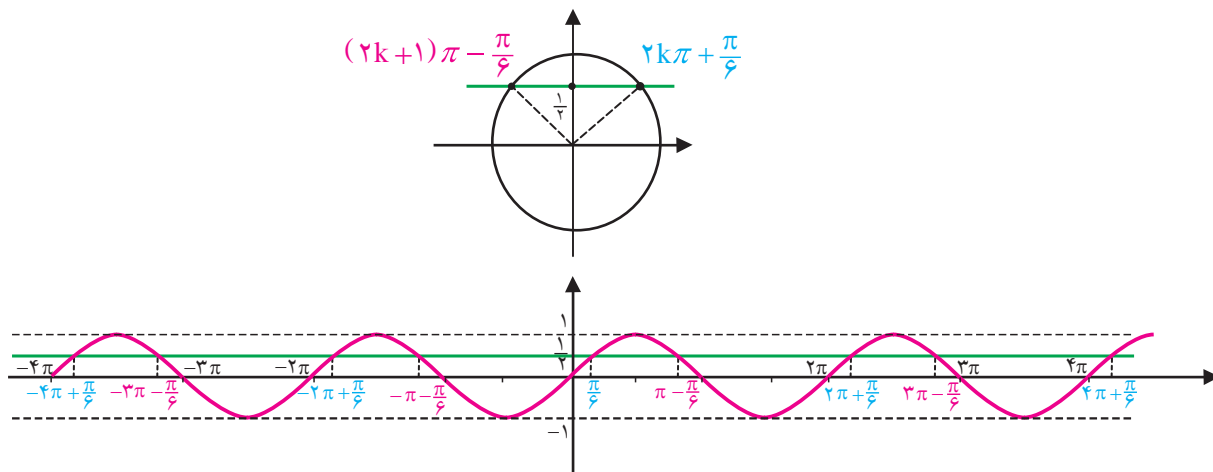
اگر نقطه‌های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی هر دو در A یا هر دو در B قرار گیرند، معنای آن این است که $\alpha = \beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. و اگر نقطه‌های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی یکی در A و دیگری در B قرار گیرند معنای آن این است که $\alpha = \pi - \beta$ در مضرب صحیحی از 2π اختلاف دارند، یعنی $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. بنابراین اگر α و β دو زاویه باشند که $\sin \alpha = \sin \beta$ می‌توان نتیجه گرفت که $\alpha = \beta + 2k\pi$ یا $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

قضیه:

معادله $\sin \alpha = \sin \beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha = 2k\pi + \beta$ و $\alpha = (2k+1)\pi - \beta$ است که k عددی صحیح است.



به‌عنوان نمونه وضعیت معادله $\sin \theta = \frac{1}{3}$ همزمان روی دایره مثلثاتی و نمودار سینوسی در شکل بعد مشخص شده است.



$$\sin \theta = \frac{1}{3} \begin{cases} \rightarrow \theta = \dots, -4\pi + \frac{\pi}{6}, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \dots \rightarrow \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ \rightarrow \theta = \dots, -3\pi - \frac{\pi}{6}, -\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \dots \rightarrow \theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$





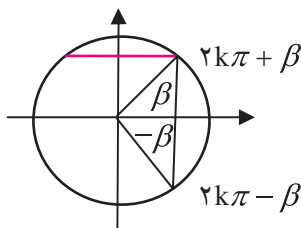
۱: معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $3x = 2k\pi + 2x$ و $2x = (2k\pi + 1)\pi - 3x$ هستند. در نتیجه $x = 2k\pi$ و $x = \frac{2k+1}{5}\pi$ جواب‌های این معادله‌اند.

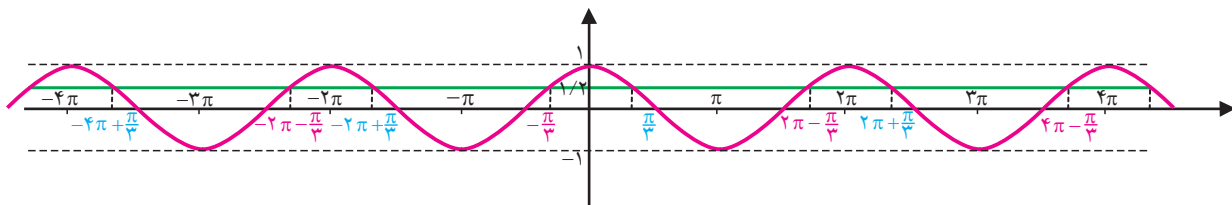
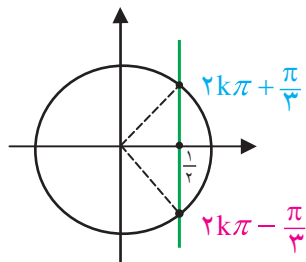
با استدلالی مشابه از طریق دایره مثلثاتی می‌توان نتیجه گرفت که اگر α و β دو زاویه باشند که $\cos \alpha = \cos \beta$ آنگاه $\alpha = \beta + 2k\pi$ یا $\alpha = -\beta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

قضیه:

معادله $\cos \alpha = \cos \beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha = 2k\pi \pm \beta$ است که k عددی صحیح است.



به عنوان نمونه وضعیت معادله $\cos \theta = \frac{1}{3}$ در تصویر زیر مشخص می‌باشد.



$$\cos \theta = \frac{1}{3} \rightarrow \theta = \dots, -4\pi + \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, \dots \rightarrow \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \rightarrow \theta = \dots, -2\pi - \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}, 4\pi - \frac{\pi}{3}, \dots \rightarrow \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$$



مثال

۲: معادله $\cos x = \cos 2x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $x = 2k\pi \pm 2x$ هستند. در نتیجه $x = 2k\pi$ و $x = \frac{2k\pi}{3}$ جواب‌های این معادله‌اند. البته جواب‌های به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}$ خود به خود جواب‌های به صورت $x = 2k\pi$ را در بر دارد.

اگر α و β دو زاویه باشند که $\tan \alpha = \tan \beta$ می‌توان نتیجه گرفت که $\alpha = k\pi + \beta$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر:

قضیه:

معادله $\tan \alpha = \tan \beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha = k\pi + \beta$ است که k عددی صحیح است.

مثال

۳: معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $5x = k\pi + x$ هستند. پس $x = k\frac{\pi}{4}$. البته مقدارهای $\tan x$ و $\tan 5x$ نیز باید قابل محاسبه باشند، پس همچنین x و $5x$ نباید مضرب فردی از $\frac{\pi}{4}$ باشند.

۴: معادله $\sin x + \cos x = 1$ را حل می‌کنیم.

باید سعی کنیم که با محاسبات جبری، این معادله را به یکی از سه شکل صفحه قبل درآوریم. مثلاً می‌توانیم محاسبات زیر را انجام دهیم.

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow 2 \tan \frac{x}{2} + 1 - \tan^2 \frac{x}{2} = 1 + \tan^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} (1 - \tan^2 \frac{x}{2}) = 0$$

بنابراین معادله دارای دو دسته جواب $\tan \frac{x}{2} = 0$ و $\tan \frac{x}{2} = 1$ است. اولی به صورت $\tan \frac{x}{2} = \tan 0$ و دومی

به صورت $\tan \frac{x}{2} = \tan \frac{\pi}{4}$ است. از اولی جواب‌های $\frac{x}{2} = k\pi + 0$ و از دومی جواب‌های $\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}$ به دست

می‌آیند. در نهایت کلیه جواب‌ها به صورت $x = 2k\pi$ و $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

فصل ۳ مثلثات



یک راه حل دیگر آن است که در تمرینات دیدید که $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$ ، بنابراین معادله به صورت $\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ در می‌آید. در نتیجه $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$. از این معادله جواب‌های $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ و $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ می‌باشند.

۵: کلیه جواب‌های معادله $5 = \cos(2\cos t - 9)$ را به دست آورید.

ابتدا معادله را به صورت $5 = \cos(2\cos t - 9)$ می‌نویسیم. این یک معادله درجه دوم بر حسب $\cos t$ است. یعنی اگر قرار دهیم $x = \cos t$ ، معادله به شکل $5 = 2x^2 - 9x - 5 = 0$ در می‌آید. با حل این معادله درجه دوم جواب‌های $x = 5$ و $x = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آیند. حال باید معادلات $\cos t = 5$ و $\cos t = -\frac{1}{2}$ را حل کنیم. اولین معادله جواب ندارد (چرا؟) و دومین معادله به شکل $\cos t = \cos \frac{2\pi}{3}$ نوشته می‌شود پس کلیه جواب‌ها به صورت $t = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ می‌باشند که k عددی صحیح است.

تمرین در کلاس



۱- اگر θ زاویه حاده‌ای باشد که $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ، کلیه جواب‌های معادله $5 \cos x + 8 \sin x = 5$ را بر حسب θ به دست آورید و آن جواب‌هایی که در بازه $2\pi < x < \pi$ می‌باشند را تعیین کنید.

۲- کلیه جواب‌های معادله $4 = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin x}$ را تعیین کنید.

۳- کلیه جواب‌های معادله $\frac{2\sqrt{3}}{3} = \tan x - \cot x$ را تعیین کنید.

مسائل



۱- معادلات زیر را حل کنید و جواب‌هایی که در بازه $[-\pi, \pi]$ هستند را تعیین کنید.

(الف) $\sin x - \cos x = 1$ (ب) $\sin 2\theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0$ (ج) $\tan x \tan 2x = 1$

(د) $0 = 1 - \sin^2 t + \sin t$ (ه) $0 = \cos^2 x - \cos x + 1$ (و) $0 = \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x$

۲- مثلی رسم کرده‌ایم که طول اضلاع آن ۲ و $\sqrt{2}$ و $1 + \sqrt{3}$ است. زاویه‌های این مثلث را به دست آورید.



وارون توابع مثلثاتی

حل یک مسئله



اگر طول وتر یک دایره را بدانیم، زاویه مرکزی روبروی آن چقدر است؟

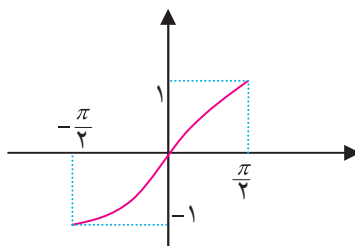
در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این مسئله را حل کنیم.

فعالیت ۴



- ۱- در دایره واحد وتر دلخواهی به طول x رسم کنید. x در چه بازه‌ای تغییر می‌کند؟
- ۲- زاویه مرکزی روبروی این وتر را روی شکل نمایش دهید و آن را θ بنامید. θ در چه بازه‌ای تغییر می‌کند؟
- ۳- آیا x تابعی از θ است؟ این تابع چیست و دامنه و برد آن چیست؟ آیا این تابع یک به یک است؟
- ۴- آیا θ تابعی از x است؟ آیا می‌توانید فرمولی برای این تابع بنویسید؟

در فعالیت بالا متوجه می‌شویم که لازم است وارونی برای تابع $\sin x$ داشته باشیم، اما این تابع یک به یک نیست و در کل دامنه آن وارون پذیر نیست. اما این تابع روی دامنه‌های کوچک‌تر می‌تواند یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر باشد. بنا به قرارداد تابع $\sin x$ را روی بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ محدود می‌کنند که در این بازه صعودی و یک به یک است.

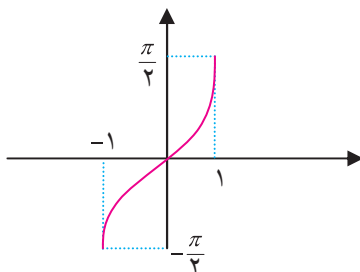


با این عمل تابعی یک به یک به دست می‌آید که دامنه آن $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ و برد آن $[-1, 1]$ است. وارون این تابع را با $\sin^{-1} x$

نشان می‌دهند که تابعی صعودی با دامنه $[-1, 1]$ و برد $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ است و نمودار آن با قرینه‌یابی نمودار تابع $\sin x$ نسبت به نیمساز



ربع اول به شکل زیر درمی آید.



توجه داشته باشید که $\sin^{-1} x$ را با $\frac{1}{\sin x}$ اشتباه نگیرید. اولی به معنای مقدار تابع وارون $\sin x$ در نقطه x است و دومی به معنای وارون مقدار $\sin x$ است و اینها با هم متفاوتند.



مثال

$$1: \sin^{-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \text{، زیرا } \frac{\pi}{6} \text{ زاویه‌ای در بازه } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ است و } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6}$$

$$2: \text{ مقدار } \sin^{-1}\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right) \text{ را حساب می‌کنیم.}$$

$$\text{ابتدا داریم } \sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ زاویه‌ای است که سینوس آن } -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ است و این زاویه در بازه } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ قرار دارد. این زاویه } -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{است، پس } \sin^{-1}\left(\sin \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$3: \text{ مقدار } \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) \text{ را حساب می‌کنیم.}$$

$$\text{فرض کنید } \alpha \text{ آن زاویه‌ای باشد که در بازه } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ قرار دارد و } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{، یعنی } \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \alpha$$

$$\text{بنابراین باید } \cos \alpha \text{ را حساب کنیم. از آنجا که } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ و } \alpha \text{ در بازه } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ قرار دارد، داریم:}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{بنابراین: } \cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \frac{4}{5}$$



تمرین در کلاس



- ۱- مقدار $\sin^{-1} x$ را با زبان فارسی بیان کنید.
- ۲- در دایره مثلثاتی مقدارهای x و $\sin^{-1} x$ را نشان دهید و روی شکل دامنه و برد این تابع را توضیح دهید.
- ۳- مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $\sin^{-1}(1)$ ب) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

ج) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ د) $\sin^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)$

- ۴- تابعی که زاویه مرکزی روبروی یک وتر را بر حسب طول وتر به دست می‌دهد بنویسید.

به طور مشابه برای تابع $\cos x$ نیز لازم است تابع وارونی به دست آوریم. در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این تابع وارون را بسازیم.



فعالیت ۵



- ۱- آیا تابع $\cos x$ در کل دامنه آن وارون پذیر است؟
- ۲- با محدود کردن تابع $\cos x$ به بازه $[0, \pi]$ ، آیا تابع جدید یک به یک می‌شود؟ نظر خود را از طریق دایره مثلثاتی توضیح دهید.
- ۳- وارون این تابع محدود شده از $\cos x$ را با $\cos^{-1} x$ نشان می‌دهند. دامنه و برد $\cos^{-1} x$ را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید.
- ۴- مقدار $\cos^{-1} x$ را به زبان فارسی بیان کنید.



مثال

۱: $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ ، زیرا $\frac{2\pi}{3}$ زاویه‌ای در بازه $[0, \pi]$ است و $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{3}$.

۲: مقدار $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ را حساب می‌کنیم.

ابتدا داریم $\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(-2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{3}$ بنابراین مقدار $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ را باید حساب

کنیم. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ زاویه‌ای است که کسینوس آن $-\frac{1}{3}$ است و این زاویه در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد. این زاویه $\frac{2\pi}{3}$ است.



پس $\cos^{-1}(\cos(-\frac{4\pi}{3})) = \frac{2\pi}{3}$

۳: مقدار $\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))$ را حساب می‌کنیم.

فرض کنید α آن زاویه‌ای باشد که در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد و $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ، یعنی $\cos^{-1} \frac{3}{5} = \alpha$. بنابراین باید

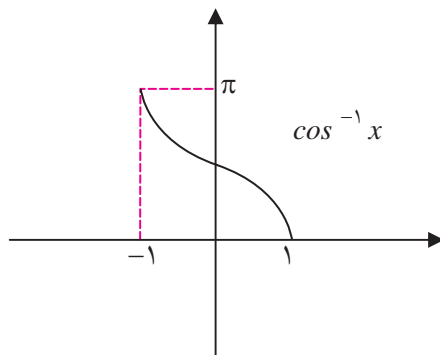
$\sin \alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و α در بازه $[0, \pi]$ قرار دارد، داریم:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5})) = \frac{4}{5}$$

$\cos^{-1} x$ تابعی نزولی با دامنه $[-1, 1]$ و برد $[0, \pi]$ است و نمودار آن به شکل زیر خواهد بود.



تمرین در کلاس



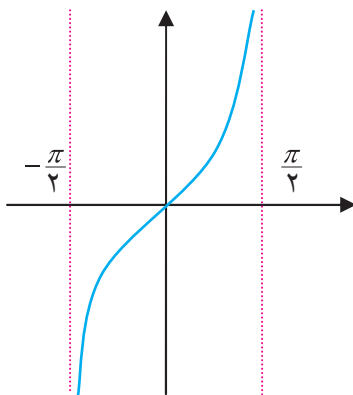
- در دایره مثلثاتی x و $\cos^{-1} x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع $\cos^{-1} x$ را توضیح دهید.
- مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $\cos^{-1}(-1)$ ب) $\sin^{-1}(\frac{3}{5}) + \cos^{-1}(\frac{3}{5})$

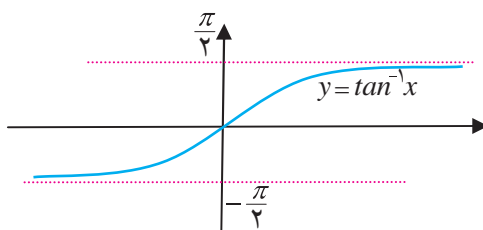
ج) $\cos^{-1}(\cos \frac{5\pi}{4})$ د) $\cos^{-1}(\sin \frac{\pi}{8})$

- در مثلثی که طول دو ضلع آن به طور ثابت ۳ و ۵ است، زاویه بین این دو ضلع تابعی از طول ضلع سوم است. این تابع را به دست آورید. دامنه و برد این تابع چیست؟

تابع تانژانت نیز به خاطر متناوب بودن در کل دامنه خود یک به یک نیست ولی اگر آن را به بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ محدود کنیم تابعی صعودی به دست می‌آید که یک به یک نیز خواهد بود و دارای وارون می‌باشد.



وارون این تابع را با $\tan^{-1} x$ نشان می‌دهند. دامنه این تابع کل \mathbb{R} است و برد آن بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ می‌باشد. با قرینه‌یابی نمودار $\tan x$ نسبت به نیمساز ربع اول، نمودار $\tan^{-1} x$ به شکل زیر خواهد بود.



برای هر x ، $\tan^{-1} x$ زاویه‌ای را نشان می‌دهد که در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ قرار دارد و تانژانت آن برابر x است.



مثال

۱: $\tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ ، زیرا $-\frac{\pi}{4}$ زاویه‌ای در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ است و $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

۲: مقدار $\tan^{-1}(\tan \frac{4\pi}{3})$ را حساب می‌کنیم.

ابتدا داریم $\tan \frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. بنابراین مقدار $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ را باید حساب کنیم.

$\tan^{-1}(\sqrt{3})$ زاویه‌ای است که تانژانت آن $\sqrt{3}$ است و این زاویه در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ قرار دارد. این زاویه $\frac{\pi}{3}$



است، پس $\tan^{-1}(\tan \frac{4\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$

۳: مقدار $\cos(\tan^{-1}(\frac{3}{4}))$ را حساب می‌کنیم.

فرض کنید α آن زاویه‌ای باشد که در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ، یعنی $\tan^{-1} \frac{3}{4} = \alpha$. بنابراین باید $\cos \alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و α در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ قرار دارد، داریم:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

بنابراین: $\cos(\tan^{-1}(\frac{3}{4})) = \frac{4}{5}$

تمرین در کلاس



۱- برای هر x ، در دایره مثلثاتی x و $\tan^{-1} x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع $\tan^{-1} x$ را توضیح دهید.

۲- مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ ب) $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \tan^{-1}(\sqrt{3})$

ج) $\tan^{-1}(\tan \frac{5\pi}{4})$ د) $\sin^{-1}(\tan \frac{3\pi}{4})$

۳- راجع به وضعیت وارون پذیری و نیز تابع وارون $y = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ بحث کنید.

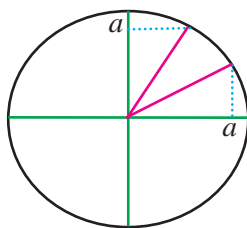


مسائل



۱- برای هر عدد $0 < a < 1$ از طریق شکل زیر استدلال کنید که

$$\sin^{-1} a + \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2}$$



در حالت $0 < a < 1$ با استدلال مشابه درستی تساوی صفحه قبل را ثابت کنید.

۲- از طریق دایره مثلثاتی نشان دهید که برای هر $1 \leq x \leq -1$ داریم:

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$$

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$$

۳- برای هر $1 \leq x \leq -1$ از طریق دایره مثلثاتی نشان دهید:

$$\sin(\cos^{-1} x) = \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

۴- برای هر x نشان دهید:

$$\sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۵- در مورد فرد یا زوج بودن توابع $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ چه می توان گفت؟

۶- برای هر عدد مثبت x نشان دهید $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$ زاویه ای در بازه $(0, \pi)$ است و با محاسبه سینوس یا کسینوس این زاویه نتیجه بگیرید:

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$



۱. حد توابع
۲. حد چپ و حد راست
۳. همسایگی‌های یک نقطه
۴. قضایای حد توابع
۵. محاسبه حد در توابع کسری
۶. پیوستگی توابع

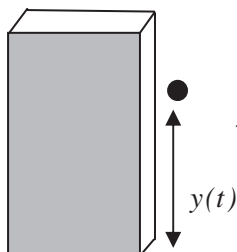
طبق نظریه انفجار بزرگ ، عالم در اثر یک انفجار بزرگ که در یک نقطه روی داده است به وجود آمده است. اگر در زمان به عقب بازگردیم رفته رفته به این نقطه نزدیک می‌شویم.



حد و پیوستگی
توابع



حد توابع



اگر سنگی را از بالای یک ساختمان ۱۶ متری رها کنیم طبق قوانین فیزیکی ارتفاع آن در هر لحظه t به صورت $y(t) = 16 - 5t^2$ است که t برحسب ثانیه و $y(t)$ برحسب متر است.

حل یک مسئله

چگونه می توان سرعت سقوط این سنگ را در هر لحظه حساب کرد؟

این سؤالی بود که نیوتون از خود پرسید. نیوتون فیزیکدانی بود که حدود ۳۰۰ سال پیش می زیسته است و با طرح چنین مسائلی و حل آنها علم حسابان را پایه ریزی نمود.

معلم از دانش آموزان پرسید: آیا می دانید سرعت یک متحرک چیست و آن را چگونه حساب می کنند؟

سعید: من ورزشکار هستم و در تمرین ها زیاد می دووم. معمولاً موقع دویدن در هر ثانیه ۲ متر جلو می روم، یعنی سرعت من ۲ متر بر ثانیه است.

معلم: بله اگر متحرکی با سرعت ثابت حرکت کند، در هر ثانیه مسافت یکسانی طی می کند و اگر این مسافت v متر باشد، گوئیم سرعت آن v متر بر ثانیه است. به طور کلی متحرک هایی که با سرعت ثابت حرکت می کنند در هر فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ اگر a متر طی کرده باشند مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ ثابت است و همان سرعت متحرک برحسب متر بر ثانیه است.

علی: اما اگر متحرکی سرعت ثابت نداشته باشد و سرعت آن در حال تغییر باشد در هر لحظه سرعت آن را چگونه حساب کنیم؟

محسن: من هر وقت سوار ماشین می شوم، ماشین از حالت ایستاده شروع به حرکت می کند و سرعت خود را از صفر تا ۵۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می دهد و در هر لحظه عقربه سرعت شمار مقدار سرعت را نشان می دهد که از صفر تا ۵۰ افزایش می یابد. معلم: بله ماشین در هر لحظه سرعتی دارد و این سرعت در حال افزایش است ولی آنچه که ما از ماشین می توانیم ببینیم آن است که در هر لحظه چند متر به جلو رفته است. آیا با دانستن این مطلب ما می توانیم تشخیص دهیم سرعت ماشین در هر لحظه چقدر است؟

سعید: اگر در هر لحظه ما بدانیم متحرک چقدر حرکت کرده است، از یک لحظه t_1 تا چند لحظه بعد مانند t_2 می توانیم حساب کنیم چند متر حرکت کرده است. اگر مسافت طی شده بین این دو لحظه a متر باشد مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ را می توان سرعت متحرک در فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ بدانیم.





محسن: ولی ما می خواهیم بدانیم سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است، عددی که سعید به دست آورده است بستگی به بازه زمانی $[t_1, t_2]$ دارد و چیزی در مورد سرعت در هر لحظه نمی گوید.

معلم: محسن درست می گوید ولی سعید گام مهمی را در حل مسئله برداشته است. مقدار $\frac{a}{t_2 - t_1}$ سرعتی را نشان می دهد که اگر متحرک در فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ به طور ثابت با آن سرعت حرکت می کرد به همان جایی می رسید که اکنون رسیده است. این مقدار را در فیزیک سرعت متوسط متحرک در فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ می نامند.

محسن: ما چگونه می توانیم از طریق سرعت متوسط به سرعت لحظه ای برسیم؟

سعید: اگر t_2 به t_1 نزدیک باشد، مقدار متوسط سرعت نیز باید به سرعت لحظه ای نزدیک باشد. بنابراین بهتر است بینیم وقتی که t_2 به t_1 نزدیک می شود، سرعت متوسط به چه عددی نزدیک می شود؟

معلم: نکات خوبی را مطرح کردید، بیایید ببینیم که آیا با این روش می توانیم سرعت سقوط سنگ را در هر لحظه حساب کنیم.



فعالیت ۱



- ۱- در مسئله سقوط سنگ، پس از گذشت ۱ ثانیه سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟
- ۲- اگر h عددی کوچک باشد در لحظه $1+h$ سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟
- ۳- بین دو لحظه ۱ و $1+h$ سنگ چند متر حرکت کرده و این حرکت در چند ثانیه انجام شده است؟
- ۴- اگر h ناصفر باشد، سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $1+h$ چقدر است؟
- ۵- اگر h منفی باشد لحظه $1+h$ چه معنایی دارد؟
- ۶- جدول زیر را تکمیل کنید.

h	$0/1$ $-0/01$ $-0/001$ \rightarrow 0 \leftarrow $0/001$ $0/01$ $0/1$
سرعت متوسط	\rightarrow $?$ \leftarrow

- ۷- اگر h ناصفر باشد و آن را به تدریج کوچک و کوچک تر کنیم و به صفر نزدیک کنیم، سرعت متوسط سنگ به چه عددی نزدیک می شود؟ این عدد چه چیزی را نشان می دهد؟

در فعالیت بالا سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $1+h$ وابسته به مقدار h است و تابعی بر حسب h می باشد که اگر آن را با $g(h)$ نشان دهیم داریم:

$$g(h) = \frac{(16 - 5 \times 1^2) - (16 - 5(1+h)^2)}{h} = 5h + 10$$



توجه کنید که $g(h)$ فقط برای h های ناصفر تعریف شده است و ما حق نداریم به جای h صفر قرار دهیم، با این حال ما دقیقاً می‌خواهیم بدانیم مقدار این تابع در $h = 0$ چقدر باید باشد. (چرا؟).

اگرچه ما حق نداریم جای h صفر قرار دهیم ولی می‌توانیم مقدارهای ناصفر کوچک جای h قرار دهیم و هر چقدر دلمان بخواهد آن را کوچک‌تر کنیم و بررسی کنیم مقدارهای $g(h)$ چگونه تغییر می‌کنند و آیا به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

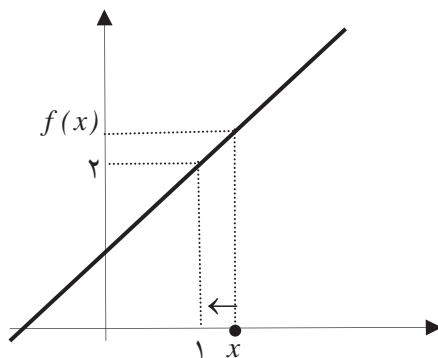
تمرین در کلاس



۱- برای تابع $f(x) = x + 1$ جدول زیر را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که اگر مقدارهای x را به ۱ نزدیک کنیم مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.

x	$0/9$	$0/99$	$0/999$	\rightarrow	1	\leftarrow	$1/001$	$1/01$	$1/1$
$f(x)$					\rightarrow	?	\leftarrow		

۲- نمودار تابع $f(x) = x + 1$ در زیر رسم شده است. از روی نمودار توضیح دهید وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.



۳- برای توابع $k(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $g(x)$ و $k(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.

۴- سه تابع $f(x)$ و $g(x)$ و $k(x)$ با هم مساوی نیستند. این سه تابع چه تفاوت‌ها و چه شباهت‌هایی دارند و چه چیز باعث شده است که همه آن‌ها با نزدیک شدن x به ۱ به عدد یکسانی نزدیک شوند؟

۵- جدول صفحه بعد را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که وقتی مقدار x به صفر نزدیک می‌شود مقدار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟



x	$-\infty$ $-\infty/0$ $-\infty/0^+$ $\rightarrow 0$ $\leftarrow 0$ $0/0^+$ $0/0$ $0/\infty$
$\sin x$	$0/0^+$ $0/0^+$ $0/0^+$ $0/0^+$ $0/0^+$ $0/0^+$ $0/0^+$ $0/0^+$
$\frac{\sin x}{x}$	$\rightarrow ? \leftarrow$

در تمرین‌های بالا با تابعی مانند $f(x)$ روبه‌رو بودیم که متغیر x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک می‌شد و این سؤال مطرح بود که آیا مقدارهای $f(x)$ نیز به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ این مفهوم را حدگیری از تابع f در نقطه a می‌نامند.

با توجه به مطالب فوق می‌توان گفت:

برای یک تابع f اگر مقدارهای x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک می‌شوند، گوئیم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

عبارت بالا را به صورت «حد $f(x)$ در نقطه a برابر L است» بخوانید.

به بیان دیگر:

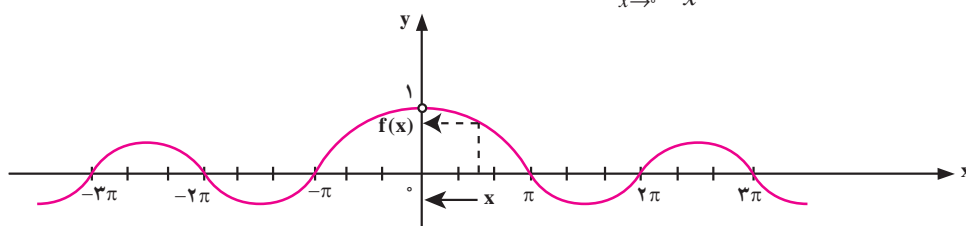
وقتی می‌نویسیم، $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ به معنی آن است که می‌توانیم فاصله $f(x)$ تا L را هر چقدر که بخواهیم کم کنیم، به شرط آنکه x در دامنه f به اندازه کافی به a نزدیک شود.



مثال

۱: حد تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ در نقطه ۱ برابر ۲ است، $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

۲: با محاسبه مقدارهای تقریبی تابع $y = \frac{\sin x}{x}$ برای مقدارهای x نزدیک صفر می‌توان حدس زد که حد آن در نقطه صفر برابر ۱ است، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



نمودار $f(x) = \frac{\sin x}{x}$



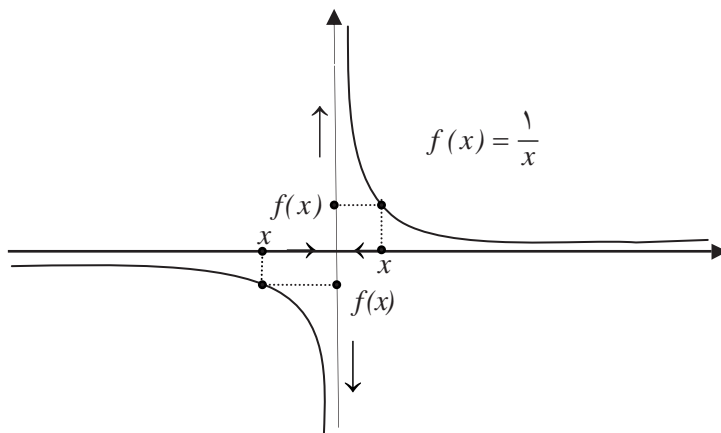
فعالیت ۲



۱- برای تابع $\frac{1}{x}$ جدول زیر را تکمیل کنید و حد این تابع را در صفر بررسی کنید.

x	$-0/1$ $-0/01$ $-0/001$ \rightarrow 0 \leftarrow $0/001$ $0/01$ $0/1$
$\frac{1}{x}$	\rightarrow ? \leftarrow

۲- آیا مقدارهای $\frac{1}{x}$ وقتی x به صفر نزدیک می شود، به عدد خاصی نزدیک می شوند؟ جواب خود را از طریق نمودار تابع $\frac{1}{x}$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



فعالیت بالا نشان می دهد این طور نیست که هر تابعی در هر نقطه ای حتماً حد داشته باشد. توابعی هستند که مقدارهای آن ها، با نزدیک شدن x (در دامنه تابع) به عددی مانند a به هیچ عددی نزدیک نمی شوند. گوییم این گونه توابع در آن نقطه حد ندارند.

مثال

تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ در نقاط ۱ و -۱ حد ندارد، زیرا با نزدیک شدن x به ۱ یا -۱ مقدارهای $\frac{x}{x^2 - 1}$ به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی شوند و از لحاظ قدرمطلق مرتباً افزایش می یابند.



حد چپ و حد راست

فعالیت ۳

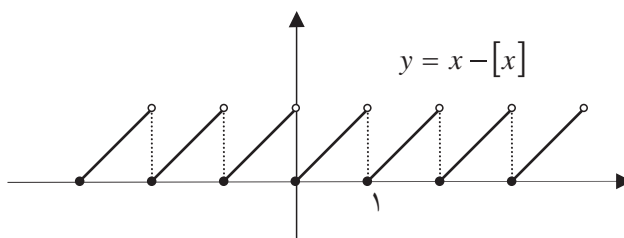


۱- جدول زیر را برای تابع $f(x) = x - [x]$ تکمیل کنید.

x	$0/9$	$0/99$	$0/999$	$\rightarrow 1 \leftarrow$	$1/001$	$1/01$	$1/1$
$f(x)$				$\rightarrow ? \leftarrow$			

۲- اگر x با مقدارهای بزرگ تر از 1 به 1 نزدیک شود، آیا مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ اگر x با مقدارهای کوچک تر از 1 به 1 نزدیک شود، آیا مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ آیا این دو عدد یکی هستند؟

۳- نتایج خود را روی نمودار تابع $f(x) = x - [x]$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



۴- آیا تابع $f(x) = x - [x]$ در 1 حد دارد؟

حد راست

در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای بزرگتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند، گوئیم تابع f در نقطه a حد راست دارد و مقدار این حد L است. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

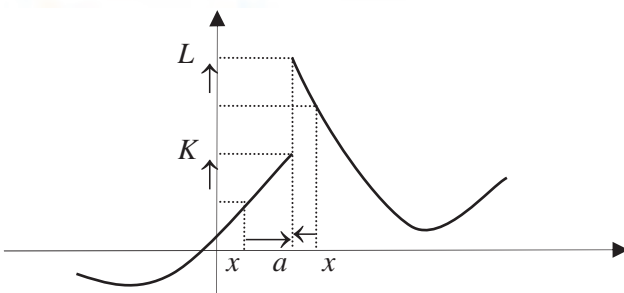
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

حد چپ

در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای کوچکتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند K نزدیک شوند، گوئیم تابع f در نقطه a حد چپ دارد و مقدار این حد K است. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = K$$

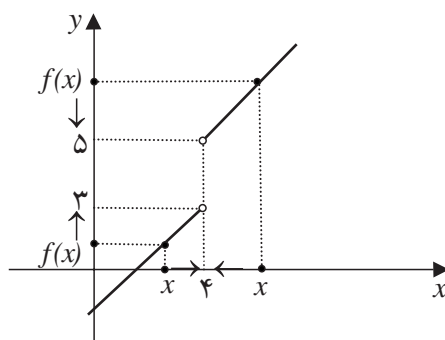




مثال

۱: نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 4 \\ x+1 & 4 < x \end{cases}$ در زیر رسم شده است.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 4 \\ x+1 & 4 < x \end{cases}$$



این تابع در نقطه $x=4$ تعریف نشده است و دیده می‌شود که با نزدیک شدن x به ۴ با مقدارهای بزرگ‌تر از ۴، مقدارهای $f(x)$ به ۵ نزدیک می‌شوند، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$$

هم‌چنین با نزدیک شدن x به ۴ با مقدارهای کوچکتر از ۴، مقدارهای $f(x)$ به ۳ نزدیک می‌شوند، یعنی $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$. بنابراین، این تابع در ۴ حد ندارد.

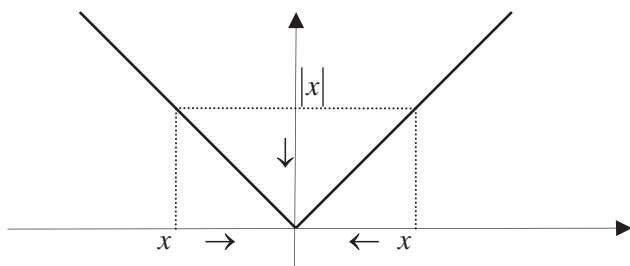
تذکر: در علامت‌گذاری حد راست و چپ نمادهای «+» و «-» معنای راست و چپ دارند، نه مثبت و منفی. با توجه به مفهوم حدهای چپ و راست، قضیه زیر برقرار خواهد بود.

قضیه:

اگر تابعی در دو طرف نقطه‌ای تعریف شده باشد و در این نقطه حدهای چپ و راست متفاوت داشته باشد، در آن نقطه حد ندارد. اما اگر حدهای چپ و راست تابع در این نقطه موجود و مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است.



مثال



۲: حد تابع $|x|$ را در صفر بررسی می‌کنیم.

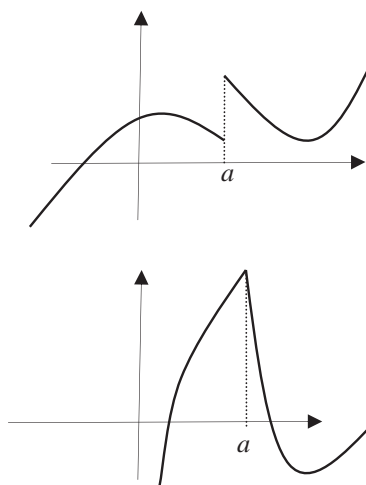
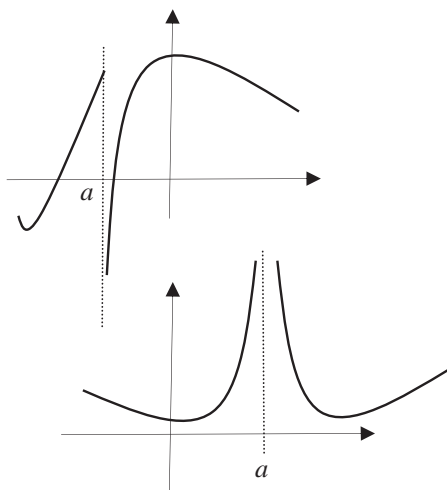
با نزدیک شدن x به صفر چه از چپ و چه از راست $|x|$ به صفر نزدیک می‌شود، یعنی حد چپ و حد راست هر

دو موجودند و برابر صفر می‌باشند، پس $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

تمرین در کلاس



۱- در زیر نمودار چند تابع داده شده است. در هر کدام از نمودارهای داده شده در نقطه مشخص شده وجود حدهای چپ و راست و وجود حد تابع را بررسی کنید.



۲- با رسم جدول و نمودار توابع زیر وجود حدهای چپ و راست و حد تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید و مقدار این حدها را به دست آورید.

الف) $a = 3, y = \sqrt{1+x}$

ب) $a = 0, y = \frac{x}{|x|}$

ج) $a = 2, y = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ x + 1 & 2 < x \end{cases}$

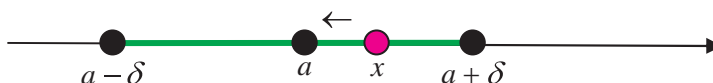


همسایگی های یک نقطه

آیا می توان از حد تابع \sqrt{x} در نقطه -1 صحبت کرد؟ شرط اصلی در بررسی حد یک تابع در یک نقطه مانند a آن است که بتوان از نقاط دامنه آن تابع به نقطه a نزدیک شد. اما دامنه تابع \sqrt{x} بازه $[0, \infty)$ است و نمی توان از نقاط این بازه به -1 نزدیک شد.



منظور از نزدیک شدن مقادیرهای یک متغیر به یک نقطه مانند a آن است که بتوان مقادیرهایی برای متغیر قرار داد که فاصله آن تا a از هر عدد انتخاب شده ای کمتر شود. برای آن که بتوان از داخل دامنه تابعی، به نقطه ای مانند a از دو طرف (راست و چپ) نزدیک شد، دامنه آن تابع باید شامل یک بازه به صورت $(a - \delta, a + \delta)$ باشد. البته خود a لزومی ندارد در دامنه آن تابع باشد.



تعریف :

بازه های به صورت $(a - \delta, a + \delta)$ که δ عددی مثبت است را یک همسایگی a می نامند. اگر a را از این همسایگی حذف کنیم آن را یک همسایگی محذوف a می نامند.

تذکر :

شرط آن که بتوان از حد (دوطرفه) یک تابع در یک نقطه a صحبت کنیم آن است که آن تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این حالت گوییم تابع در اطراف a تعریف شده است.



مثال

۱: تابع $\sqrt{1-x^2}$ در اطراف صفر و خود صفر تعریف شده است. زیرا در همسایگی $(-1, 1)$ از صفر تعریف شده است.

۲: تابع $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است اما در خود صفر تعریف نشده است زیرا دامنه تعریف آن یک همسایگی محذوف صفر را در بر ندارد.



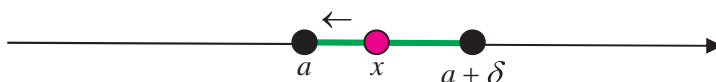
بحث در کلاس

آیا می‌توان از حد چپ یا راست تابع $\sqrt{1-x^2}$ در نقطه ۱ صحبت کرد؟

برای بررسی حد چپ یک تابع f در نقطه‌ای مانند a ، متغیر x (در دامنه f) باید بتواند از چپ به a نزدیک شود. این به معنای آن است که دامنه f باید شامل بازه‌های به صورت $(a - \delta, a)$ باشد. چنین بازه‌هایی را یک همسایگی چپ a نامیم و در این حالت گوئیم تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده است.



به‌طور مشابه، بازه‌های به صورت $(a, a + \delta)$ را یک همسایگی راست a نامیم و اگر دامنه تابعی شامل یک همسایگی راست a باشد، گوئیم آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده است.



مثال

۱: تابع $\sqrt{1-x^2}$ در یک همسایگی چپ ۱ و در یک همسایگی راست ۱- تعریف شده است، اما در اطراف این دو نقطه تعریف نشده است.

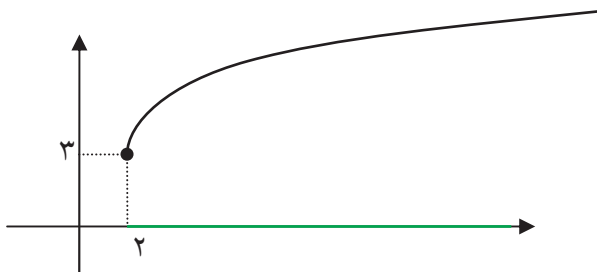
تذکر:

شرط آن که بتوان از حد چپ یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.
به‌طور مشابه، شرط آن که بتوان از حد راست یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

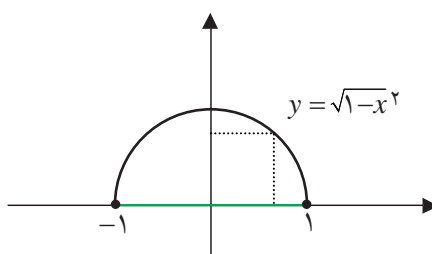


مثال

۲: تابع $\sqrt{x-2}+3$ در اطراف ۲ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده است و می‌توانیم حد راست آن را در ۲ حساب کنیم که برابر ۳ است.



۳: تابع $\sqrt{1-x^2}$ در اطراف ۱ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی چپ ۱ تعریف شده است و می‌توانیم حد چپ آن را در ۱ حساب کنیم که برابر صفر است.



تمرین در کلاس



برای تابع $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x-[x]}$ به سؤالات زیر جواب دهید.

- ۱- این تابع در همسایگی کدام نقاط تعریف شده است؟
- ۲- این تابع در همسایگی محذوف کدام نقاط تعریف شده است که در خود آن نقاط تعریف نشده است؟
- ۳- این تابع در یک همسایگی چپ کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی راست آن نقاط تعریف نشده است؟
- ۴- این تابع در یک همسایگی راست کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی چپ آن نقاط تعریف نشده است؟



تذکر :

اگر تابعی مانند f فقط در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، آنگاه نزدیک شدن به a از داخل دامنه f فقط از راست امکان‌پذیر است، بنابراین منظور از حد f در a همان حد راست f در a است و نماد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ به معنای $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ خواهد بود.

به طور مشابه اگر f فقط در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد، آنگاه نزدیک شدن به a از داخل دامنه f فقط از چپ امکان‌پذیر است، بنابراین منظور از حد f در a همان حد چپ f در a است و نماد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ به معنای $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ خواهد بود.



مثال

۱: برای تابع $y = \sqrt{x}$ که نسبت به صفر فقط در یک همسایگی راست صفر تعریف شده است داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

۲: برای تابع $y = \frac{1}{[x]-2}$ که نسبت به ۲ فقط در یک همسایگی چپ ۲ تعریف شده است داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{[x]-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{[x]-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -1 = -1$$



مسائل



۱- بارسم جدول مقدارهای توابع زیر در اطراف نقطه داده شده (در صورت لزوم از ماشین حساب استفاده کنید) بررسی کنید که آیا حد این توابع در آن نقطه موجود است؟ در صورت وجود مقدار حد را تعیین کنید و به زبان ریاضی بنویسید.

$$a = -1, y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ x^3 + 3 & -1 < x \end{cases} \quad \text{(ب)} \quad a = 0, y = \frac{x^2 - x}{x} \quad \text{(الف)}$$

$$a = 0, y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{(د)} \quad a = 2, y = x[x] \quad \text{(ج)}$$

$$a = 0, y = \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{(و)} \quad a = 1, y = \frac{\sqrt{|x(x-1)|}}{x^2 - 1} \quad \text{(ه)}$$



۲- با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه داده شده وجود حد راست و حد چپ و مقدار حد را در آن نقاط

بررسی کنید.

$$a = 2, y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \text{ (ب)} \\ -x^2 + 9 & 2 < x \end{cases} \quad \text{الف) } a = 1/2, y = [x]$$

$$a = -3, y = 1 - \sqrt{1-x} \text{ (د)} \quad \text{ج) } a = 2, y = x - [x]$$

$$\text{ه) } a = 0, y = \frac{x}{|x|}$$

۳- اگر دو تابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بر هم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد آن‌ها در نقطه a مانند یکدیگر است، یعنی اگر یکی از آن‌ها در a حد داشته باشد، دیگری هم حد دارد و حد آن‌ها مساوی است. همچنین اگر دو تابع f و g در یک همسایگی چپ (یا راست) نقطه‌ای بر هم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد چپ (راست) این دو تابع در این نقطه مانند یکدیگر است.

۴- در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد.

الف) تابع در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

ب) تابع در ۱ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

ج) تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در

صفر باشد.

د) تابع در یک همسایگی ۱- تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱-

باشد.

ه) تابع در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این

نقطه حد داشته باشد.

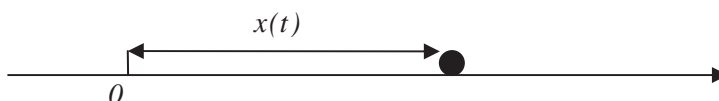
و) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.

ز) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد ولی حد راست نداشته

باشد.

۵- متحرکی روی محور x ‌ها به گونه‌ای حرکت می‌کند که در هر لحظه t ($0 \leq t$) در مکان $x(t)$ قرار دارد و

$$x(t) = t^2 - t$$



با رسم نمودار این تابع در دامنه داده شده چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید و سرعت لحظه‌ای آن

را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.



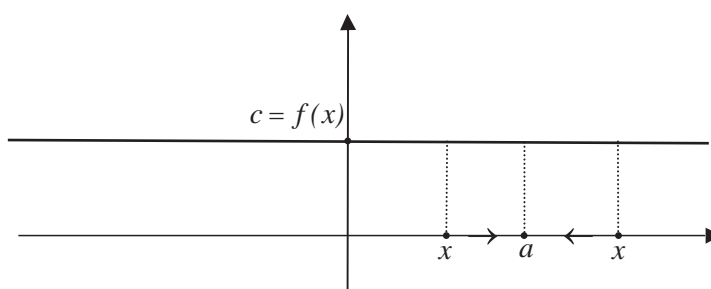
قضایای حد توابع

حد برخی توابع خاص را به سادگی می توان به دست آورد.



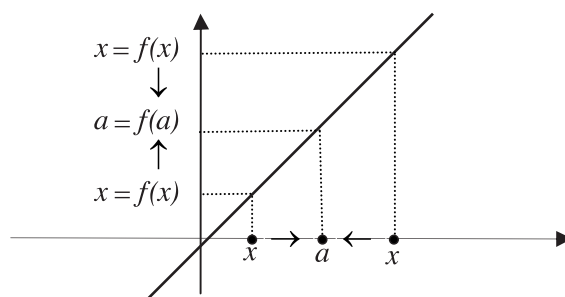
مثال

۱: تابع ثابت $f(x) = c$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در همه نقاط c است.



$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

۲: تابع $f(x) = x$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه مانند a برابر a است.



$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

بحث در کلاس

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در اطراف نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشند و در این نقطه حد داشته باشند، آیا تابع $f(x) + g(x)$ نیز در a حد دارد؟ حد آن چه می تواند باشد؟ در مورد تابع $f(x)g(x)$ چه می توان گفت؟



فعالیت ۴



- ۱- دو تابع $f(x) = 3 + 2x$ و $g(x) = 2 - x$ را در نظر بگیرید و توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ را بسازید.
 ۲- برای بررسی حد این چهار تابع در صفر جدول زیر را تکمیل کنید.

x	$-0/1 \quad -0/01 \quad -0/001 \rightarrow 0 \leftarrow 0/001 \quad 0/01 \quad 0/1$
$f(x)$	$\rightarrow ? \leftarrow$
$g(x)$	$\rightarrow ? \leftarrow$
$f(x) + g(x)$	$\rightarrow ? \leftarrow$
$f(x)g(x)$	$\rightarrow ? \leftarrow$

- ۳- حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ در صفر چیست؟
 ۴- حد توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ در صفر چیست؟
 ۵- چه ارتباطی بین حد توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ و حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌باید؟

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$ با نزدیک شدن مقدارهای x به a مقدارهای $f(x)$ به L و مقدارهای $g(x)$ به K نزدیک می‌شوند، پس مقدارهای $f(x) + g(x)$ به $L + K$ نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر شود. پس تابع $f(x) + g(x)$ در a حد دارد و حد آن $L + K$ است. همچنین مقدارهای $f(x)g(x)$ به LK نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر شود. پس تابع $f(x)g(x)$ در a حد دارد و حد آن LK است. به عبارت دیگر قضایای زیر برقرارند.

قضیه :

اگر دو تابع f و g روی دامنه یکسانی تعریف شده باشند و در نقطه a حد داشته باشند آن‌گاه توابع $f + g$ و $f \cdot g$

نیز در a حد دارند و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$



مثال

۱: تابع $y = x$ در هر نقطه‌ای مانند a حد دارد و حد آن a است بنابراین تابع $y = x^2$ نیز در a حد دارد و حد آن a^2 است، زیرا

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = (\lim_{x \rightarrow a} x)(\lim_{x \rightarrow a} x) = a \cdot a = a^2$$

۲: دو تابع $y = x$ و $y = x^2$ در هر عددی مانند a حد دارند و حد آن‌ها به ترتیب a و a^2 است، بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} x = a^2 + a$$

۳: حد تابع $y = (x^2 + \frac{x}{3})(x-1)$ را در نقطه ۴ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + \frac{x}{3})(x-1) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + \frac{x}{3}) \cdot \lim_{x \rightarrow 4} (x-1) = (4^2 + \frac{4}{3})(4-1) = 54$$

توجه داشته باشید که اگر دو تابع با دامنه‌های غیر یکسان را جمع یا ضرب کنیم، ابتدا این دو تابع را روی دامنه‌های یکسان تحدید می‌کنیم و سپس در صورت امکان قضیه قبل را برای توابع تحدید یافته به کار می‌بریم.

تمرین در کلاس



۱- با استقرا ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

۲- ثابت کنید برای هر تابع چندجمله‌ای مانند $P(x)$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

در بالا دیدیم که توابع چندجمله‌ای به گونه‌ای هستند که در هر نقطه حد دارند و حد آن‌ها همان مقدار تابع در آن نقاط است. بسیاری از توابع مهمی که تا این جا دیده‌ایم این خاصیت را دارند که بدون اثبات برخی از آن‌ها را در این جا بیان می‌کنیم. با رسم نمودار این توابع می‌توانید درستی حدهای زیر را توجیه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a}$$

$a \geq 0$ است وقتی عدد k زوج باشد

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x \rightarrow a} b^x = b^a$$

در حدگیری‌های بالا، a نقطه‌ای از دامنه تابع است.



بحث در کلاس

اگر تابع $f(x)$ در اطراف نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و در a حد داشته باشد، آیا تابع $\frac{1}{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ حد آن چه می‌تواند باشد؟



فعالیت ۵



۱- تابع $f(x) = 1 - 2x$ را در نظر بگیرید. برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه ۲ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	$1/9$ $1/99$ $1/999$ \rightarrow \leftarrow $2/001$ $2/01$ $2/1$
$f(x)$	\rightarrow ? \leftarrow
$\frac{1}{f(x)}$	\rightarrow ? \leftarrow

۲- حدهای دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه ۲ چه مقدار هستند و چه رابطه‌ای با هم دارند؟
 ۳- برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه $\frac{1}{4}$ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	$0/4$ $0/49$ $0/499$ \rightarrow \leftarrow $0/501$ $0/51$ $0/6$
$f(x)$	\rightarrow ? \leftarrow
$\frac{1}{f(x)}$	\rightarrow ? \leftarrow

۴- آیا حدی برای $\frac{1}{f(x)}$ می‌یابید؟ دلیل آن را چه می‌دانید؟

به معنای آن است که با نزدیک شدن مقادیرهای x (در دامنه f) به a مقادیرهای $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

اگر $L = 0$ مقادیرهای $\frac{1}{f(x)}$ از لحاظ قدر مطلق در حال افزایش هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند و تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد نخواهد داشت. اما اگر $L \neq 0$ مقادیرهای $\frac{1}{f(x)}$ به عدد $\frac{1}{L}$ نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر



شود. پس در این حالت تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن $\frac{1}{L}$ است. بنابراین می‌توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \quad \text{اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0 \text{ آن گاه}$$



مثال

۱: حد تابع $y = \frac{1}{\sin x}$ را در $\frac{\pi}{4}$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

۲: حد تابع $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ را در $x = -1$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x \frac{1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 + 1} = -1 \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

۳: حد تابع $f(x) = \frac{1}{1 + \cos x}$ را در π بررسی می‌کنیم. از آن جا که $\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \cos x) = 0$ تابع $f(x)$ در $x = \pi$ حد ندارد.

تمرین در کلاس



۱- حد توابع زیر را در نقطه داده شده در صورت وجود بیابید.

الف) $y = \cos^2 x + x^2$ در π (ب) $y = \frac{\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$ در ۴

ج) $y = \frac{x \sin x}{(1+x) \cos x}$ در π (د) $y = 2^{x+1} - 3^{2x}$ در ۲

۲- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دامنه یکسانی داشته باشند و در a حد داشته باشند، نشان دهید تابع $f(x) - g(x)$ نیز در a حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

۳- اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دامنه یکسانی داشته باشند و در a حد داشته باشند و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ نشان دهید تابع

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{نیز در } a \text{ حد دارد و}$$



محاسبه حد در توابع کسری

در محاسبه بسیاری از حدهای مهم به حالتی برخورد می‌کنیم که تابع به صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ است و حد صورت و مخرج در نقطه مورد نظر صفر است. قضایای بالا هیچ کمکی برای محاسبه حد این گونه توابع نمی‌کنند. این حالت را اصطلاحاً حالت $\frac{0}{0}$ می‌نامند. برای محاسبه حد این گونه توابع (در صورت وجود) یکی از راه‌ها، ساده‌سازی این کسر و تبدیل آن به حالتی است که عمل محاسبه حد طبق قضایای بالا امکان‌پذیر باشد.



مثال

۱: حد تابع $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ را در 0 بررسی می‌کنیم.
در حالت $\frac{0}{0}$ قرار داریم و لازم است ابتدا یک ساده‌سازی از کسر به عمل آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2$$

۲: حد تابع $y = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ را در ۱ بررسی می‌کنیم.

محاسبه این حد به‌طور مستقیم امکان‌پذیر نیست، ولی می‌توانیم آن را به شکل زیر ساده کنیم و سپس حد را حساب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2$$

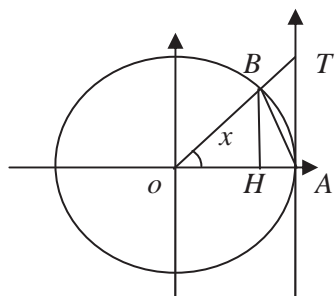
اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و در محاسبه حد $\frac{P(x)}{Q(x)}$ در نقطه a در حالت $\frac{0}{0}$ باشیم، این به معنای آن است که $P(a) = 0$ و $Q(a) = 0$. یعنی صورت و مخرج بر $x - a$ بخش‌پذیرند و می‌توان کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را ساده کرد و عامل $x - a$ را از صورت و مخرج حذف کرد. با ادامه این عملیات در صورت وجود حد، می‌توان آن را محاسبه کرد.
یکی از حدهای مهم حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ در 0 است. این حد نیز از حالات $\frac{0}{0}$ است ولی نمی‌توان با ساده کردن معمولی این کسر، حد آن را حساب کرد. قبلاً با محاسبات تقریبی تابع $\frac{\sin x}{x}$ در نزدیکی‌های صفر حدس زده‌ایم که حد آن ۱ است ولی در این جا می‌خواهیم استدلال دقیق‌تری برای آن بیابیم.



فعالیت ۶



شکل مقابل یک دایره مثلثاتی را نشان می دهد.



۱- مساحت های مثلث های OBA و OTA و قطاع OBA از دایره را برحسب نسبت های مثلثاتی زاویه (مثبت) x (برحسب رادیان) و خود زاویه x محاسبه کنید و نشان دهید:

$$\frac{1}{4} \sin x \leq \frac{1}{4} x \leq \frac{1}{4} \tan x$$

۲- نتیجه بگیرید برای مقدارهای کوچک و مثبت x داریم:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

۳- با نزدیک شدن x به صفر $\frac{1}{\cos x}$ به چه عددی نزدیک می شود؟ با نزدیک شدن x به صفر برای تابع $\frac{x}{\sin x}$ چه نتیجه ای می توان گرفت؟ حد راست $\frac{x}{\sin x}$ در صفر چقدر است؟

۴- با توجه به زوج بودن تابع $\frac{x}{\sin x}$ حد چپ آن در صفر چیست؟ حد این تابع در صفر چقدر است؟

$$۵- \text{نتیجه بگیرید } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



مثال

۱: حد تابع $y = \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ را در 0 حساب می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2$$

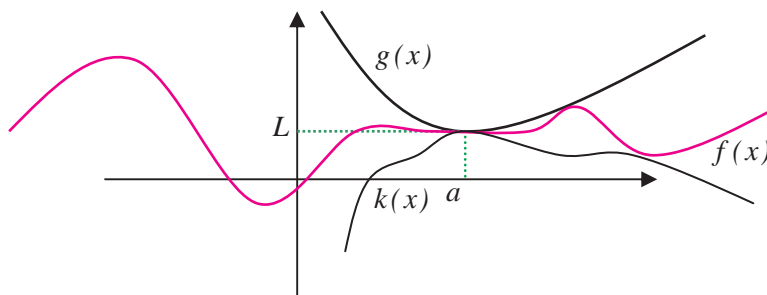


در فعالیت قبل برای یافتن حد تابع $\frac{x}{\sin x}$ دیدیم که این تابع بین تابع $\frac{1}{\cos x}$ و تابع ثابت ۱ قرار گرفته است و این دو تابع در صفر حد یکسان ۱ دارند. از این نکته نتیجه می‌شود که تابع $\frac{x}{\sin x}$ نیز به ناچار با نزدیک شدن x به صفر باید به ۱ نزدیک شود. این مطلب در حالت کلی هم درست است که آن را قضیه افشردگی می‌نامند.

قضیه :

اگر تابعی مانند $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بین دو تابع $g(x)$ و $k(x)$ قرار گیرد، مثلاً

$$k(x) \leq f(x) \leq g(x), \text{ و } g \text{ و } k \text{ در نقطه } a \text{ دارای حد یکسان } L \text{ باشند، نتیجه می‌شود } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$



مثال

۲: حد تابع $x \cos \frac{1}{x}$ را در صفر حساب می‌کنیم.

از آن جا که $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ برای مقادیر مثبت x داریم $-x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x$ و برای مقادیر منفی x داریم

$x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq -x$. توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در صفر حد یکسان صفر دارند، پس $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.



مسائل



۱- حدهای زیر را حساب کنید.

(ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$

(الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

(د) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2}$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \quad (\text{و})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{2}} \quad (\text{ح})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \sqrt{x+1} \quad (\text{ه})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \quad (\text{ز})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\sin x - \cos x} \quad (\text{ط})$$

۲- ثابت کنید که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ معادل با آن است که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$.

۳- با توجه به ایده شهودی حد تابع توضیح دهید که چرا دو شرط $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ با یکدیگر معادلند.

۴- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در اطراف نقطه a تعریف شده‌اند و f در a حد دارد ولی g در a حد ندارد، نشان دهید $f+g$ در a حد ندارد.

۵- دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ کدام در صفر حد ندارند ولی $f+g$ در صفر حد دارد.

۶- دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده‌اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد، با این حال fg در a حد داشته باشد.

۷- آیا تابع $\sin \frac{1}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است؟ آیا این تابع در صفر حد دارد؟ درستی نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

با توجه به این نامساوی در مورد حد تابع $x \sin \frac{1}{x}$ در صفر اظهار نظر کنید و دلیل درستی نظر خود را توضیح دهید.

پیوستگی توابع

فعالیت ۷

$$۱- \text{ نمودار دو تابع } f(x) = x + 1 \text{ و } g(x) = \begin{cases} x+1 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases} \text{ را رسم کنید.}$$

۲- حد این دو تابع را در نقطه ۲ به دست آورید.

۳- این دو تابع چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی دارند و چرا حد آن‌ها در نقطه ۲ با هم مساوی است؟

۴- حد این دو تابع در نقطه ۲ با مقدارهای این دو تابع در نقطه ۲ چه رابطه‌ای دارند؟

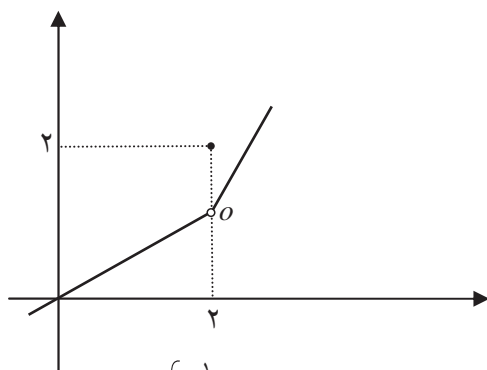
۵- یکسانی حد f و مقدار f در نقطه ۲ و تفاوت حد g و مقدار g در نقطه ۲، موجب پیدایش کدام ویژگی در نمودار این دو تابع شده است.

در بررسی حد یک تابع در یک نقطه، لزومی ندارد تابع در آن نقطه تعریف شده باشد، اما اگر تابع در آن نقطه تعریف شده باشد در صورت وجود حد، دو حالت ممکن است رخ دهد.

(الف) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه است.

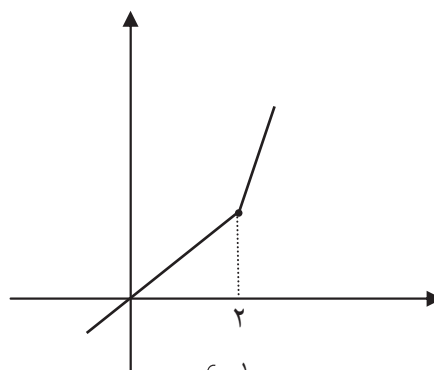
(ب) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه نیست.

برای مثال، این دو حالت در نمودار توابع زیر نشان داده شده‌اند.



$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ 2x - 3 & 2 < x \end{cases}$$

حالت (ب)



$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ 2x - 3 & 2 < x \end{cases}$$

حالت (الف)



همان طور که مشاهده می شود در حالت (الف) نمودار تابع یک پارچه و به هم پیوسته است ولی در حالت (ب) نمودار تابع از هم گسسته شده است. علت این موضوع آن است که در حالت (الف) حد تابع در هر نقطه برابر مقدار تابع در همان نقطه است ولی در حالت (ب) در نقطه ۲ حد تابع و مقدار تابع مساوی نیستند. به همین خاطر تعریف زیر بنا می شود.

تعریف:

فرض کنید تابع f در نقطه a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) a تعریف شده باشد. اگر حد این تابع در a موجود و برابر $f(a)$ باشد، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ، گوئیم تابع f در a پیوسته است.



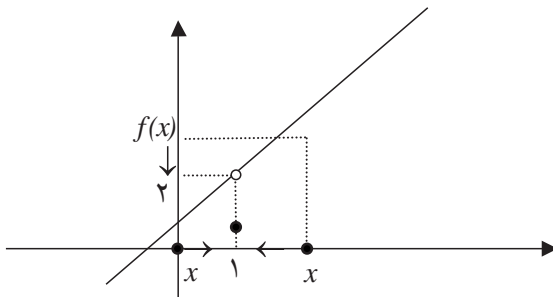
مثال

۱: توابع چندجمله ای در هر نقطه ای پیوسته اند، زیرا قبلاً دیدیم که برای هر تابع چندجمله ای $P(x)$ در هر نقطه

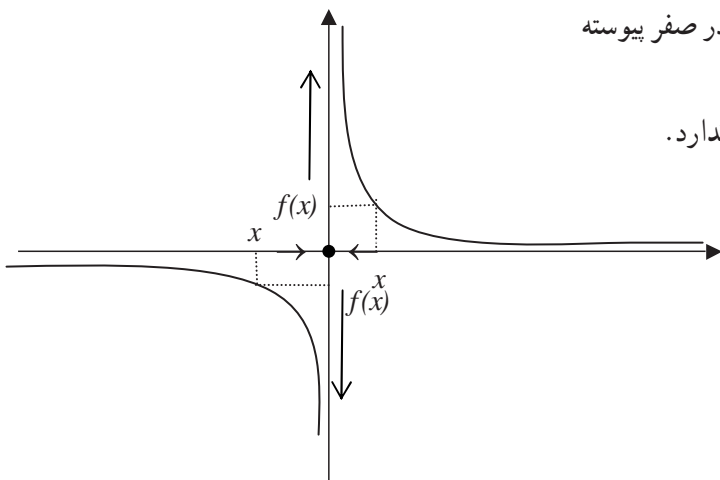
$$a \text{ داریم } \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

۲: توابع $b^x, \cos x, \sin x, \sqrt[k]{x}$ در همه نقاط دامنه خود پیوسته اند.

۳: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ در نقطه ۱ پیوسته نیست، زیرا حد آن در نقطه ۱ برابر ۲ است ولی $f(1) = 1$.



۴: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر پیوسته نیست، زیرا این تابع در صفر حد ندارد.





۵: تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ در نقطه ۱ پیوسته است. زیرا در نقطه ۱ حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در ۱ است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0 = f(1)$$

توجه داشته باشید که پیوستگی توابع در نقاط انتهایی دامنه خود به معنای آن است که حد چپ یا راست تابع در آن نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

آیا تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ در ۱ پیوسته است؟ از پیوستگی این تابع در ۱ نمی‌توانیم صحبت کنیم چون این تابع در ۱ تعریف نشده است. شرط صحبت از پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه و یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) آن نقطه تعریف شده باشد.

تمرین در کلاس



با رسم نمودار توابع زیر، پیوستگی آن‌ها را در نقطه داده شده بررسی کنید.

$$y = \frac{1}{x} - 1 \quad \text{در نقطه دلخواه } a \neq 0$$

$$a = 0 \quad \text{در نقطه } y = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 0 \\ x^2 - x & 0 < x \end{cases} \quad -2$$

$$a = -1 \quad \text{در نقطه } y = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq -1 \\ x+1 & -1 < x \end{cases} \quad -3$$

$$a = -1 \quad \text{در نقطه } y = [x] - 4 \quad \text{با دامنه } [-1, 1] \quad -4$$

تعریف:

اگر تابعی در تمام نقاط دامنه خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می‌نامند.



مثال

۱: توابع چندجمله‌ای و $b^x, \cos x, \sin x, \sqrt[k]{x}$ در همه نقاط دامنه خود پیوسته‌اند و در نتیجه توابعی پیوسته‌اند.

۲: تابع $y = \frac{1}{x}$ پیوسته است زیرا در تمام نقاط دامنه خود پیوسته است. (صفر در دامنه این تابع نیست)

۳: تابع $y = [x]$ که روی IR تعریف شده است در نقاط صحیح ناپیوسته است. اما اگر تابع $y = [x]$ را با دامنه $[0, 2]$ در نظر بگیریم، این تابع در نقطه صفر پیوسته است ولی در نقاط ۱ و ۲ هم چنان ناپیوسته است.

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای مثبت باشد و تابع $\sqrt{f(x)}$ را بسازیم و $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a حدی برابر L داشته باشد، آیا تابع $\sqrt{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ آیا حد آن \sqrt{L} می‌شود؟
 \sqrt{t} تابعی پیوسته است و اگر مقدارهای t به عددی مانند L نزدیک شوند مقدارهای \sqrt{t} نیز به \sqrt{L} نزدیک می‌شوند. با نزدیک شدن مقدارهای x به a ، مقدارهای $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند، در نتیجه مقدارهای $\sqrt{f(x)}$ به \sqrt{L} نزدیک می‌شوند، یعنی تابع $\sqrt{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن \sqrt{L} است. به عبارت دیگر:

قضیه:

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای نامنفی باشد و در نقطه‌ای مانند a حد داشته باشد، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

علت درستی رابطه بالا پیوستگی تابع $y = \sqrt{x}$ است و مطلب بالا برای هر تابع پیوسته دیگری هم برقرار است. اگر $g(x)$ تابعی پیوسته و $f(x)$ تابعی باشد که در نقطه‌ای مانند a حدی برابر L داشته باشد و ترکیب $g(f(x))$ قابل انجام باشد (برد زیر مجموعه دامنه g باشد) و L در دامنه g باشد، آنگاه تابع $g(f(x))$ نیز در a حد دارد و حد آن $g(L)$ است. به عبارت دیگر با شرایط بالا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(f(x))) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$$



مثال

۴: حد تابع $y = \sqrt{\sin x}$ را در نقطه $\frac{\pi}{6}$ می‌یابیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sqrt{\sin x} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵: حد تابع $\sin \sqrt{\pi^2 - x^2}$ را در نقطه $a = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ می‌یابیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \sin \sqrt{\pi^2 - x^2} &= \sin \left(\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{\pi^2 - x^2} \right) = \sin \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} (\pi^2 - x^2)} \\ &= \sin \sqrt{\pi^2 - \frac{8\pi^2}{9}} = \sin \sqrt{\frac{\pi^2}{9}} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

مسائل

۱- با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید کدام یک از آن‌ها ناپیوستگی دارند و در چه نقاطی ناپیوسته‌اند؟

(ب) $y = x + [x]$

(الف) $y = |x - 1| + 2$

(ج) $y = x + |x|$

$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & 1 < x \end{cases} \quad (\text{د})$$

۲- در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.

$$y = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x \leq 1 \\ x - 2a & 1 < x \end{cases}$$

۳- ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر پیوسته نخواهد بود.

$$y = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

۴- نمودار یک تابع را رسم کنید که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

۵- نمودار یک تابع را رسم کنید که در دو نقطه صفر و ۱ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

۶- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع پیوسته‌ای با دامنه یکسان باشند، نشان دهید توابع $f(x) + g(x)$ و $f(x)g(x)$ نیز

پیوسته‌اند. در مورد پیوستگی $\frac{f(x)}{g(x)}$ چه می‌توان گفت؟

۷- اگر f و g توابع پیوسته‌ای با دامنه IR باشند در مورد پیوستگی تابع $g \circ f$ چه می‌توان گفت؟



۱. خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع
۲. روش‌های محاسبه مشتق توابع
۳. آهنگ تغییرات
۴. مشتق توابع مثلثاتی
۵. مشتق تابع وارون و توابع مرکب

وقتی هواپیما موشکی را شلیک می‌کند، موشک خط مستقیمی را طی می‌کند که مماس بر مسیر حرکت هواپیما است.

مشتق توابع





خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع

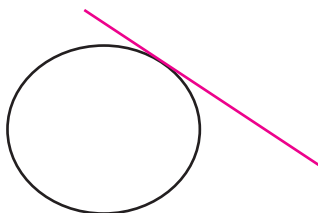


حل یک مسئله



چگونه خط مماس بر یک منحنی را به دست آوریم؟

قبلاً با مفهوم خط مماس بر یک دایره آشنا شده‌ایم.



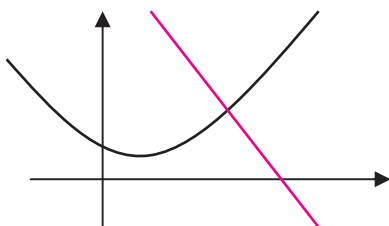
برای آن که خطی در نقطه‌ای بر دایره‌ای مماس باشد کافی است یکی از دو ویژگی‌های زیر برقرار باشد.
 الف) خط و دایره فقط و فقط در آن نقطه برخورد داشته باشند.

ب) خط و دایره در آن نقطه برخورد داشته باشند و کل دایره در یک طرف خط قرار بگیرد.

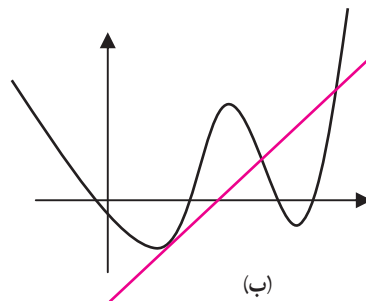
آیا از این ویژگی‌ها می‌توان برای به دست آوردن خط مماس بر منحنی‌های دیگر هم استفاده کرد؟

به شکل‌های زیر توجه کنید و در هر مورد حدس بزنید که آیا خط داده شده در نقطه تقاطع با منحنی، مماس بر آن منحنی محسوب

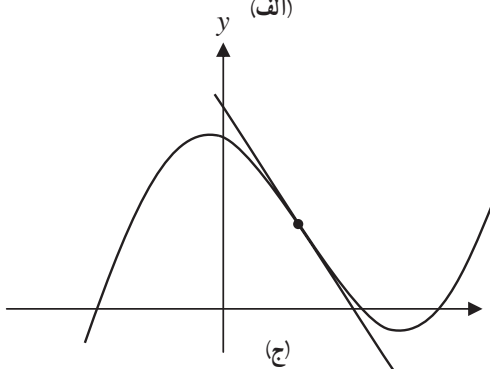
می‌شود یا نه، و کدام یک از دو ویژگی بالا را دارد.



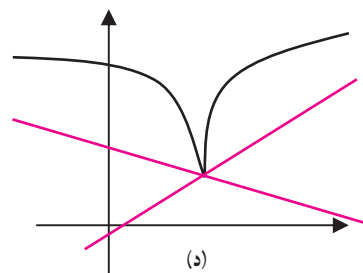
(الف)



(ب)



(ج)



(د)



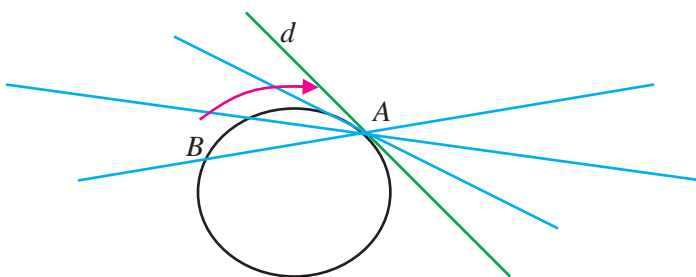
در تجربه صفحه قبل ممکن است حدس‌هایی درست یا نادرست زده باشید. اما این تجربه نشان می‌دهد که شرایط مماس بودن یک خط بر یک منحنی دلخواه با شرایط مماس بودن یک خط بر دایره فرق می‌کند، زیرا دایره منحنی خاصی است و لزومی ندارد برای یک منحنی دلخواه شرایط مماس بودن خط بر منحنی مانند حالت دایره باشد. باید مفهوم خط مماس بر دایره را به شکل دیگری به دست آوریم که برای یک منحنی دلخواه هم قابل قبول باشد.



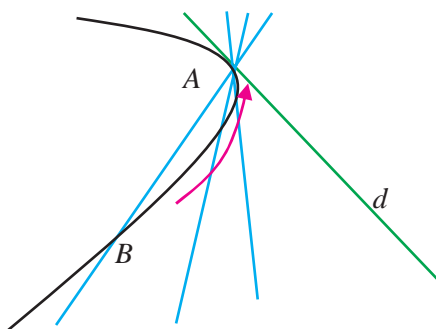
فعالیت ۱



۱- نقطه A را روی دایره زیر به طور ثابت در نظر بگیرید. نقطه دیگری روی دایره مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه B را روی دایره به نقطه A نزدیک می‌کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می‌شود؟



۲- در منحنی دلخواه زیر، نقطه‌ای مانند A به طور ثابت در نظر بگیرید. نقطه دیگری روی منحنی مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه B را روی منحنی به نقطه A نزدیک می‌کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می‌شود؟



فعالیت بالا نشان می‌دهد که برای یافتن خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ای مانند A باید نقطه‌ای مانند B روی منحنی در نزدیکی A در نظر بگیریم و با رسم خط AB ، نقطه B را به نقطه A نزدیک کنیم و ببینیم که آیا این خط‌ها به خط خاصی نزدیک می‌شوند. این عمل دقیقاً یک عمل حدگیری است.

از خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه، یک نقطه از خط مشخص است (همان نقطه‌ای که خط در آن نقطه بر منحنی مماس

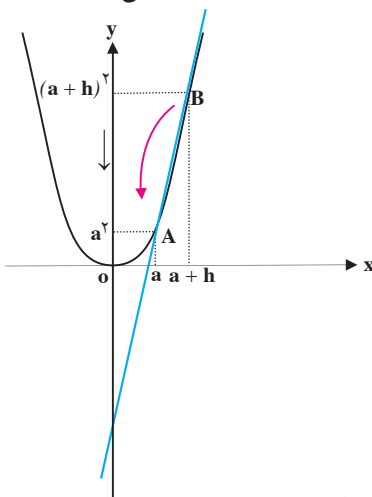
می‌شود)، پس برای مشخص کردن این خط، کافی است شیب آن را مشخص کنیم و شیب با یک عمل حدگیری به دست می‌آید.



فعالیت ۲

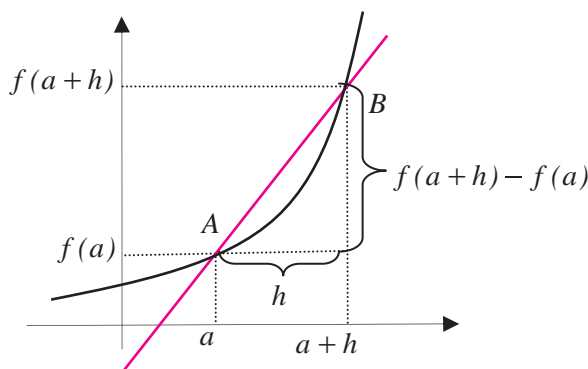


روی نمودار تابع $f(x) = x^2$ نقطه ثابت $A(a, a^2)$ را در نظر بگیرید. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطه $B(a+h, (a+h)^2)$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر بگیرید.



- ۱- شیب خط AB را حساب کنید که تابعی از h است.
- ۲- با نزدیک شدن h به صفر نقطه B به چه نقطه‌ای نزدیک می‌شود؟
- ۳- با نزدیک شدن h به صفر شیب خط AB به چه مقداری نزدیک می‌شود؟
- ۴- شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2$ در نقطه $A(a, a^2)$ چقدر است؟

محاسبات فعالیت بالا را در مورد هر تابع دیگری هم می‌توانیم انجام دهیم. تابع دلخواه $f(x)$ و نقطه ثابت $A(a, f(a))$ را روی نمودار آن در نظر می‌گیریم. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطه $B(a+h, f(a+h))$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر می‌گیریم.





شکل صفحه قبل نشان می دهد که شیب خط AB برابر است با $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. اگر با نزدیک شدن h به صفر این کسر به عدد خاصی نزدیک شود، این عدد همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $A(a, f(a))$ خواهد بود به عبارت دیگر:

مقدار بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در a می نامند و با $f'(a)$ نشان می دهند.

تعریف:

اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه a تعریف شده است، در این صورت حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق تابع f در a می نامند و با $f'(a)$ نشان می دهند.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اگر حد بالا موجود نباشد، گوئیم f در a مشتق پذیر نیست.



مثال

۱: مشتق تابع $f(x) = x^3$ را در نقطه دلخواه a حساب می کنیم و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار تابع را در نقطه $A(1,1)$ به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2 \end{aligned}$$

از آنجا که $f'(1) = 3$ ، شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه $A(1,1)$ برابر ۳ می باشد و معادله خط مماس عبارت است از: $y - 1 = 3(x - 1)$.

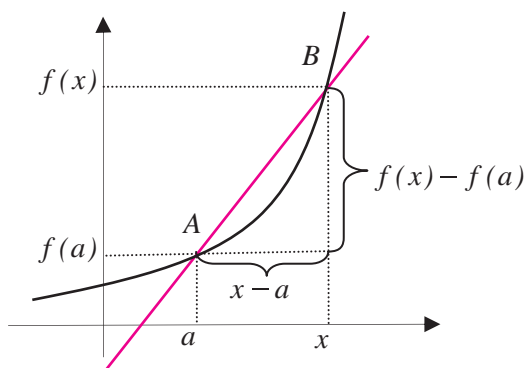
۲: مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه دلخواه $a \neq 0$ حساب می کنیم و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار تابع را در نقطه $A(2, \frac{1}{2})$ به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2} \end{aligned}$$



از آنجا که $f'(2) = \frac{-1}{4}$ ، شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه $A(2, \frac{1}{4})$ برابر $\frac{-1}{4}$ می‌باشد و معادله خط مماس عبارت است از: $y - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}(x - 2)$.

برای محاسبه مشتق یک تابع گاهی مناسب‌تر است نقطه B نزدیک نقطه $A(a, f(a))$ را به صورت $B(x, f(x))$ در نظر بگیریم.



در این حالت شیب خط AB برابر است با $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ و برای محاسبه مشتق f در a باید حد این کسر را در $x = a$ بیابیم، یعنی

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

۳: مشتق تابع $y(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $a > 0$ حساب می‌کنیم.

$$y'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

تعریف:

اگر f تابعی باشد که در تمام نقاط دامنه خود مشتق پذیر است، $f'(x)$ یک تابع را نشان می‌دهد که آن را تابع مشتق می‌نامند.



مثال

۴: اگر $f(x) = x^2$ آنگاه تابع مشتق آن به صورت $f'(x) = 2x$ است.

برخی توابع در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر نیستند، در این صورت دامنه تابع مشتق فقط از نقاطی تشکیل



می‌شود که تابع در آن نقاط مشتق پذیر باشد.

۵: تابع $y(x) = \sqrt{x}$ در همهٔ نقاط بازه $(0, \infty)$ مشتق پذیر است و تابع مشتق آن $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ است.

تمرین در کلاس



مشتق پذیری و مشتق تابع $f(x) = |x|$ را در همهٔ نقاط بررسی کنید و تابع مشتق آن را به دست آورید.

برای محاسبه مشتق یک تابع f در نقطه‌ای مانند a باید حد زیر را (در صورت وجود) حساب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

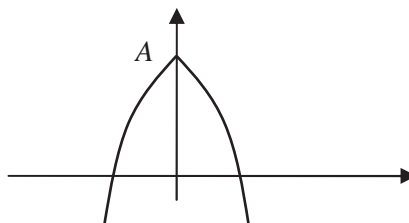
در برخی موارد ممکن است حد بالا موجود نباشد ولی حدهای چپ و راست آن موجود باشند.

فعالیت ۳

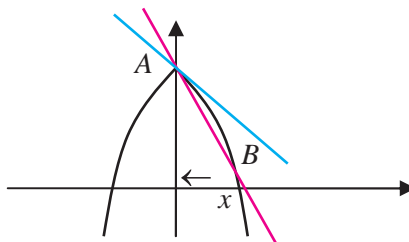


تابع زیر را در نظر بگیرید.

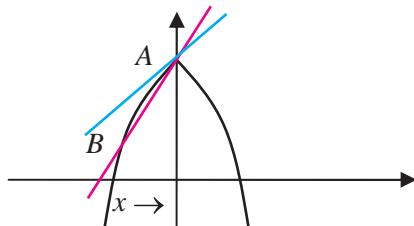
$$y(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 4 & x \leq 0 \\ -(x+1)^2 + 4 & 0 < x \end{cases}$$



۱- نقطه $A(0, 4)$ ، و نقطه $B(x, f(x))$ را سمت راست A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می‌شود حساب کنید.



۲- نقطه B را سمت چپ A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می‌شود حساب کنید.



۳- آیا این تابع در $x = 0$ مشتق پذیر است؟ خط‌هایی که از نقطه A می‌گذرند و شیب آن‌ها اعدادی است که در بندهای قبل به دست آورده‌اید چه وضعیتی نسبت به نمودار تابع دارند؟

تعریف:

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد راست $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x=a$ را (در صورت وجود) مشتق راست f در a می‌نامند و یا $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

به‌طور مشابه، اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد چپ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x=a$ را (در صورت وجود) مشتق چپ f در a می‌نامند و با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

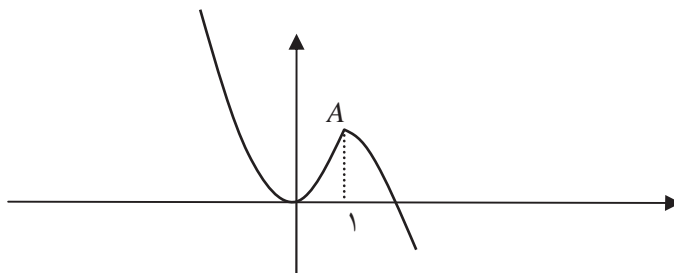
مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه درونی مانند a معادل با آن است که مشتق‌های چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و با هم مساویند. برای یک تابع مانند $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ، طبق قرارداد مشتق پذیری f در a به معنای وجود مشتق راست f در a و مشتق پذیری f در b به معنای وجود مشتق چپ f در b است.



مثال

نمودار تابع $k(x) = \begin{cases} 2x^2 & x \leq 1 \\ -x^2 + 3 & 1 < x \end{cases}$ در زیر رسم شده است. پیوستگی و مشتق پذیری آن را در $x = 1$

بررسی می‌کنیم.





از روی شکل می‌توان حدس زد که تابع در $x = 1$ باید پیوسته باشد. برای بررسی درستی این حدس، حد تابع را در $x = 1$ بررسی می‌کنیم. از آنجا که وضعیت تابع در سمت چپ و راست ۱ متفاوت است حدهای چپ و راست تابع را در $x = 1$ جداگانه حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^2 = 2$$

دیده می‌شود که حد تابع $k(x)$ در $x = 1$ موجود است و برابر $k(1)$ است، پس تابع $k(x)$ در $x = 1$ پیوسته است. برای بررسی مشتق پذیری از روی شکل می‌توان حدس زد نمودار تابع در سمت چپ و راست نقطه $A(1, 2)$ متفاوت است و مماس‌های متفاوت دارد. بنابراین مشتق‌های چپ و راست تابع $k(x)$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$k'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(x + 1) = -2$$

$$k'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{k(x) - k(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x + 1) = 4$$

دیده می‌شود که مشتق‌های چپ و راست تابع $k(x)$ در $x = 1$ موجودند ولی مساوی نیستند. بنابراین این تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست و خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه موجود نیست.

تمرین در کلاس



۱- مشتق تابع $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را در نقطه ۱- حساب کنید و به کمک آن، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $A(-1, 0)$ بنویسید. تابع مشتق g را بیابید و دامنه آن را تعیین کنید.

۲- تابعی بسازید که در $x = 2$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق‌های چپ و راست متفاوت داشته باشد.

۳- فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد و به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = f(x - b)$ تعریف می‌کنیم.

الف) از طریق نموداری نشان دهید که اگر خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه a وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطه $a - b$ موجود است و این دو خط با هم موازیند.

ب) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر g در نقطه a مشتق پذیر باشد آنگاه f در نقطه $a - b$ مشتق پذیر است و $g'(a) = f'(a - b)$.



ج) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر $f(x)$ در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر باشد، آنگاه $g(x)$ نیز در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر است و برای هر مقدار x (در دامنه g) داریم: $g'(x) = f'(x-b)$.


مثال

۱: مشتق تابع $y(x) = \frac{1}{x+b}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \frac{1}{x}$ داریم $y(x) = f(x+b)$ بنابراین

$$y'(x) = f'(x+b) = -\frac{1}{(x+b)^2}$$

۲: مشتق تابع $y(x) = \sqrt{x-b}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sqrt{x}$ داریم $y(x) = f(x-b)$. محاسبه نشان می‌دهد که $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ بنابراین

$$y'(x) = f'(x-b) = \frac{1}{2\sqrt{x-b}}$$

شاید این سؤال برای شما مطرح شده باشد که مشتق پذیری و پیوستگی چه فرقی با هم دارند. آیا هر تابع پیوسته‌ای مشتق پذیر است؟ آیا هر تابع مشتق پذیری پیوسته است؟

پیوستگی به معنای مشتق پذیری نیست. در مثال‌ها دیدید که یک تابع ممکن است در نقطه‌ای پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد. اما از مشتق پذیری یک تابع در یک نقطه می‌توان پیوستگی آن تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت. در فصل قبل دیدیم که پیوستگی یک تابع مانند f در نقطه‌ای مانند a به معنای آن است که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. این تساوی معادل با آن است که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و ما می‌توانیم درستی این تساوی را از شرط مشتق پذیری f در a به دست آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \times 0 = 0$$

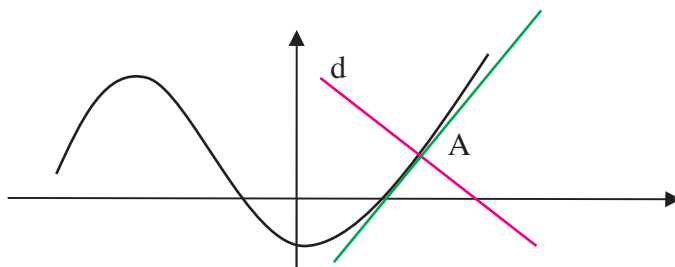
با این استدلال می‌توانیم قضیه صفحه بعد را به دست آوریم.



قضیه :

اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق پذیر باشد در آن نقطه پیوسته نیز خواهد بود.

فرض کنید خطی مانند d نمودار تابعی مانند f را در نقطه‌ای مانند $A(a, f(a))$ قطع کند.



گوئیم این خط بر نمودار تابع در نقطه A عمود است، هرگاه d بر خط مماس بر نمودار تابع در A عمود باشد. اگر شیب خط d برابر

$$m \text{ باشد، شرط عمود بودن معادل با آن است که } m = -\frac{1}{f'(a)}$$



مثال

معادله خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ که در نقطه $A(2, \frac{1}{4})$ این منحنی را قطع می‌کند به دست می‌آوریم.

شیب این خط $-\frac{1}{f'(2)}$ است. از آنجا که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ داریم $f'(2) = -\frac{1}{4}$ ، پس شیب خط قائم برابر است با ۴. نقطه A روی این خط است، بنابراین معادله این خط عبارت است از:

$$y - \frac{1}{4} = 4(x - 2)$$



مسائل



۱- مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه a از دامنه آنها تعیین کنید.

الف) $f(x) = c$ (ب) $g(x) = 3x + 5$ (ج) $x(t) = t^4$

د) $y(u) = \frac{u}{1+u}$ (ه) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

۲- معادله خط مماس و خط عمود بر نمودار توابع زیر را در نقطه داده شده به دست آورید.

الف) $x = 1$ ، $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (ب) $x = -1$ ، $y(x) = \sqrt{4-x^2}$



۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید و حدس بزنید این توابع در چه نقاطی مشتق پذیر نیستند و در این نقاط مشتق‌های چپ و راست را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$y(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & 0 < x \end{cases} \quad \text{ب)} \quad y(x) = 2|x+1| \quad \text{الف)}$$

$$y(x) = -|x| + |x-1| \quad \text{د)} \quad y(x) = |1-x^2| \quad \text{ج)}$$

۴- نمودار تابع $y(x) = \sqrt{x}$ را رسم کنید. اگر خط $y=2x$ را به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می‌شود که خط‌ها به‌جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟

۵- فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه‌ای مانند a باشد. به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = f(x) + b$ تعریف می‌کنیم. از طریق نموداری و وجود خط مماس بر نمودار f در نقطه به طول a نشان دهید g نیز در a مشتق پذیر است و $g'(a) = f'(a)$. از طریق حدگیری و محاسبه نیز درستی این تساوی را به دست آورید.

۶- از مبدأ به نقاط مختلف نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ خط رسم می‌کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می‌شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع بررسی کنید.

۷- فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد و a عددی حقیقی باشد، با محاسبه و حدگیری نشان دهید تابع $g(x) = f(ax)$ نیز مشتق پذیر است و $g'(x) = af'(ax)$.

روش‌های محاسبه مشتق توابع

در مثال‌ها و تمرین‌های صفحات قبل مشتق برخی از توابع را حساب کرده‌ایم. برای مثال مشتق برخی توابع خاص را در زیر محاسبه می‌کنیم.

۱- اگر $f(x) = c$ تابع ثابت باشد، مشتق آن در هر نقطه صفر است، یعنی برای هر مقداری از x ، $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

۲- اگر $f(x) = x^n$ که n عددی طبیعی است، مشتق آن برای هر مقدار x به صورت $f'(x) = nx^{n-1}$ است.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$





$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = a^{n-1} + a^{n-1} + \dots + a^{n-1} = na^{n-1}$$

۳- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ در مثال‌های قبل دیدیم که برای هر مقدار مثبت x داریم $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.



فعالیت ۴



۱- مشتق دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ را در یک نقطه دلخواه مانند a می‌شناسید. مشتق تابع $f + g$ را در همین نقطه a حساب کنید.

۲- چه ارتباطی بین $(f+g)'(a)$ و $f'(a)$ و $g'(a)$ مشاهده می‌کنید.

۳- آیا این ارتباط برای هر دو تابع دیگری هم برقرار است؟

فرض کنید دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است.

$$\begin{aligned} (f+g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) + g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a) \end{aligned}$$

محاسبه بالا نشان می‌دهد که $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است و مشتق آن مجموع مشتق‌های f و g در a است. بنابراین قضیه زیر برقرار است.

قضیه:

اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند، تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است و

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$





مثال

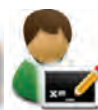
۱: مشتق تابع $y = x^3 + \sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می‌کنیم.

$$(x^3 + \sqrt{x})' = (x^3)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۲: مشتق تابع $y = \frac{x^5 + 1}{x}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می‌کنیم.

$$\left(\frac{x^5 + 1}{x}\right)' = \left(x^4 + \frac{1}{x}\right)' = (x^4)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$$

تمرین در کلاس



۱- مشتق تابع $y = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ را در یک عدد مثبت a حساب کنید.

۲- اگر f مشتق‌پذیری در نقطه a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطه a مشتق‌پذیر است و $(cf)'(a) = cf'(a)$.

۳- اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید تابع $f-g$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$.

۴- برای سه تابع f و g و k که همگی در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیرند، نشان دهید $f+g+k$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(f+g+k)'(a) = f'(a) + g'(a) + k'(a)$. آیا این تساوی برای جمع تعداد بیشتری از توابع نیز درست است؟

دیدیم که اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، تابع $f+g$ نیز در a مشتق‌پذیر است. یک سؤال مهم آن است که آیا fg نیز در a مشتق‌پذیر است و مشتق آن چه خواهد بود؟ شاید اولین حدس این باشد که fg در a مشتق‌پذیر است و $(fg)'(a) = f'(a)g'(a)$. اما نادرستی این تساوی را در یک مثال می‌توانید مشاهده کنید. مثلاً برای دو تابع $f(x) = 1$ ، $g(x) = x$ نادرستی آن تساوی را بررسی کنید. برای یافتن مشتق تابع fg در a بهتر است مستقیماً آن را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} (fg)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\
 &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)
 \end{aligned}$$

این محاسبه نشان می‌دهد که قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند، تابع fg نیز در a مشتق پذیر است و

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$


مثال

۱: مشتق تابع $x^3 \sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می‌کنیم.

$$(x^3 \sqrt{x})' = (x^3)' \sqrt{x} + x^3 (\sqrt{x})' = 3x^2 \sqrt{x} + x^3 \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۲: مشتق تابع $\frac{1}{x^2}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می‌کنیم.

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-2}{x^3}$$

تمرین در کلاس



۱- اگر $f(x)$ تابع مشتق پذیری باشد، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب دو تابع نشان دهید

$$((f(x))^2)' = 2f(x)f'(x) \text{ در حالت کلی تر (با استقرا) برای یک عدد طبیعی } n \text{ نشان دهید:}$$

$$((f(x))^n)' = nf(x)^{n-1} f'(x)$$

۲- اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق پذیری باشند و بتوانیم تابع $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ را تشکیل دهیم داریم

$k(x)g(x) = f(x)$. با فرض آن که می‌دانیم $k(x)$ تابعی مشتق پذیر است، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب

دو تابع نشان دهید:

$$k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

در مسائل آخر این بخش ثابت خواهید کرد که $k(x)$ حتماً مشتق پذیر است.



مثال

۱: مشتق تابع $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ را در یک مقدار دلخواه $x \neq 1$ حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{(x^2)'(x-1) - (x-1)'x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

۲: تابع مشتق تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{(x)'\sqrt{x+1} - (\sqrt{x+1})'x}{(\sqrt{x+1})^2} = \frac{\sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}x}{x+1} = \frac{2(x+1) - x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

مسائل

۱- مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه حساب کنید.

(الف) $y = x^4 - \frac{1}{x^4} - \sqrt{3}$ (ب) $y = (x^3 - x^2 - 1)(x - \sqrt{x} + 5)$

(ج) $y = (2x+1)(4-3x)(x^2+x+5)$ (د) $y = \frac{2}{x^3-1}$ (ه) $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

۲- نقاطی از نمودار تابع $y(x) = x^3 - 2x - 6$ را معین کنید که مماس بر نمودار تابع در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد. در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟

۳- نمودار تابع $y(x) = -4x^2 + 16x + 1$ را رسم کنید. به کمک مشتق تابع معین کنید در چه نقاطی از این نمودار، مماس بر نمودار تابع موازی محور x ها است. در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟ این نقطه چه ویژگی خاصی دارد؟

۴- نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید. اگر خط دلخواهی را که موازی محور y ها نیست به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می‌شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟ جواب را از طریق هندسی حدس بزنید و حدس خود را با محاسبات جبری ثابت کنید. همین مسئله را برای تابع $y(x) = \sqrt{|x|}$ تکرار کنید.

۵- نقطه‌ای در صفحه بیابید که از آن نقطه دو خط مماس بر سهمی $y = x^2$ بتوان رسم کرد و این خط‌ها بر هم عمود باشند. این مسئله چند جواب دارد؟ مجموعه جواب‌های این مسئله را ترسیم کنید.



- ۶- اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد و ناصفر باشد و f در a مشتق پذیر باشد، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در a مشتق پذیر است و $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$. نتیجه بگیرید که برای دو تابع f و g که در a مشتق پذیرند و $g(a) \neq 0$ ، تابع $\frac{f}{g}$ در a مشتق پذیر است.
- ۷- برای تابع $f(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$ روی دامنه $(0, \infty)$ داریم $(f(x))^k = x$. با فرض آن که می‌دانیم $f(x)$ تابعی مشتق پذیر است، با محاسبه مشتق طرفین ثابت کنید $f'(x) = \frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$.
- ۸- اگر r عدد گویای مثبتی باشد به کمک مسئله قبل نشان دهید تابع $y(x) = x^r$ که روی اعداد مثبت تعریف شده است، مشتق پذیر است و $y'(x) = rx^{r-1}$. سپس درستی این رابطه را برای اعداد گویای منفی هم به دست آورید.
- ۹- مشتق تابع $y = 6\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}$ را حساب کنید.

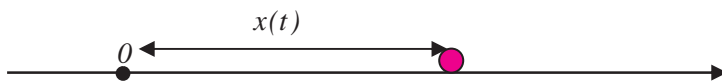
آهنگ تغییرات



فعالیت ۵



متحرکی روی محور x ها طبق ضابطه $x(t) = t^2 - t$ حرکت می‌کند. یعنی متحرک در لحظه t در مکان $x(t)$ قرار دارد. $x(t)$ را تابع حرکت متحرک می‌نامند.



- ۱- لحظه t_0 را به طور ثابت در نظر بگیرید. سرعت متوسط متحرک بین دو زمان $t_0 + h$ و t_0 (عدد h ناصفر و کوچک) را بنویسید.
- ۲- با نزدیک کردن h به صفر مقدار بالا به چه عددی نزدیک می‌شود؟
- ۳- عدد بالا با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه‌ای دارد؟
- ۴- سرعت این متحرک در هر لحظه با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه‌ای دارد؟

اگر متحرکی روی یک محور طبق تابع حرکت $x(t)$ حرکت کند، سرعت متوسط آن بین دو لحظه $t_0 + h$ و t_0 برابر است با

$$\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

با نزدیک کردن h به صفر، اگر کسر بالا به عددی نزدیک شود، این عدد همان سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه t است. از طرف دیگر، این عدد همان حد کسر بالا در $h=0$ است که قبلاً آن را مشتق $x(t)$ در t نامیده‌ایم. بنابراین:

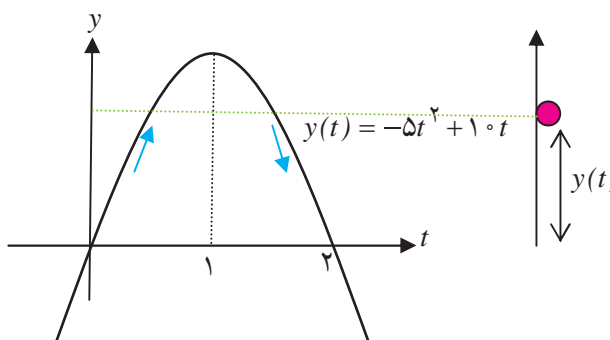
قضیه:

اگر $x(t)$ تابع حرکت متحرکی روی محور باشد، سرعت آن در هر لحظه t برابر است با $x'(t)$.



مثال

مثال: اگر سیمی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می‌کند و سپس به زمین باز می‌گردد. تابع حرکت این سیم می‌تواند به شکل $y(t) = -5t^2 + 10t$ باشد. t را بر حسب ثانیه و $y(t)$ را بر حسب متر در نظر بگیرید.



نمودار $y(t)$ نشان می‌دهد که سیم در لحظه‌های صفر و ۲ در زمین قرار دارد و بین این دو لحظه از زمین به طرف بالا رفته و پس از مدتی به زمین برگشته است. دامنه اعتبار تابع $y(t)$ فاصله $[0, 2]$ است، زیرا خارج از این فاصله حرکت سیم با این تابع انجام نمی‌شود.

مشتق $y(t)$ در یک لحظه دلخواه به صورت $y'(t) = -10t + 10$ است. از آنجا که $y'(0) = 10$ ، سرعت سیم در شروع حرکت ۱۰ متر بر ثانیه است. با افزایش t مقدار $y'(t)$ کم می‌شود تا در لحظه $t = 1$ صفر می‌شود. یعنی سیم در این لحظه یک ایست آنی دارد. این همان لحظه‌ای است که سیم به بالاترین ارتفاع خود رسیده است. برای $t < 1$ ، $y'(t)$ منفی می‌شود که به معنای آن است که سیم رو به پایین در حال حرکت است. از آنجا که $y'(2) = -10$ ، سرعت سیم در موقع برخورد با زمین همان ۱۰ متر بر ثانیه است ولی جهت حرکت رو به پایین است.

تمرین در کلاس

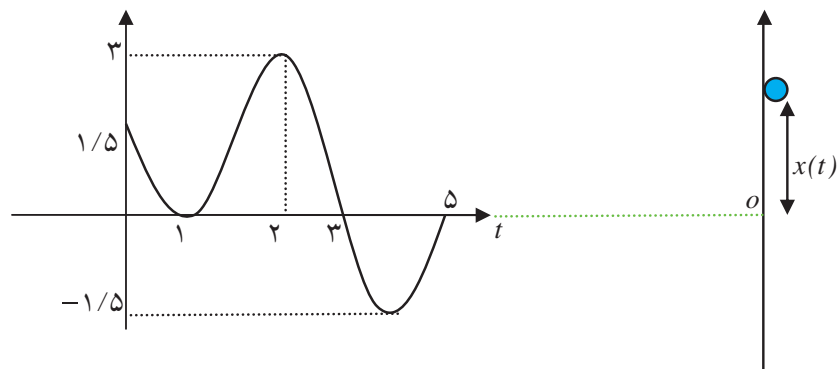


۱- تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x(t) = 1$ است. شیوه حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟

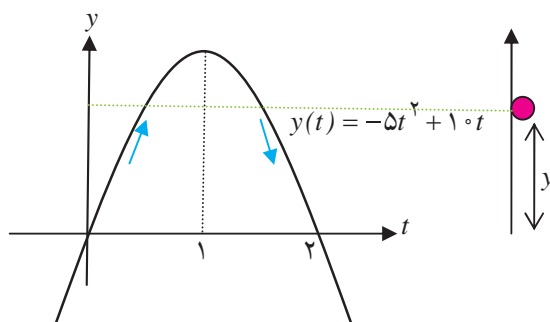


- ۲- تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x(t) = 2t + 1$ است. شیوه حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟
- ۳- تابع حرکت متحرکی روی محور x ها در فاصله زمانی $[0, 4]$ به صورت $x(t) = -t^2 + 4t + 1$ است. بارسم نمودار این تابع، شیوه حرکت متحرک را توصیف کنید. با استفاده از مشتق گیری تعیین کنید سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است. متحرک حداکثر چقدر از مبدأ فاصله می گیرد؟ سرعت متحرک در نقطه ای که حداکثر فاصله از مبدأ را دارد چقدر است؟
- ۴- تابع حرکت متحرکی $x(t)$ است. واحد زمان را ثانیه و واحد مکان را متر در نظر بگیرید. نمودار $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. چگونگی حرکت این متحرک را از لحاظ مدت زمان حرکت و مکان هایی که رفته است و سرعت آن توصیف کنید.

- (الف) از چه نقطه ای حرکت شروع شده است و در چه نقطه ای حرکت پایان یافته است؟
- (ب) در چه نقاطی سرعت صفر شده است و جهت حرکت تغییر کرده است؟
- (ج) چند بار در مبدأ قرار گرفته است و در چه زمان هایی قرار گرفته است؟
- (د) حداکثر فاصله آن از مبدأ در چه زمانی رخ داده است و این فاصله چقدر بوده است؟



در یکی از مثال ها دیدیم که اگر سببی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می کند و سپس به زمین باز می گردد. تابع حرکت این سبب را به صورت $y(t) = -5t^2 + 10t$ در نظر گرفته بودیم که t بر حسب ثانیه و $y(t)$ بر حسب متر بوده است.



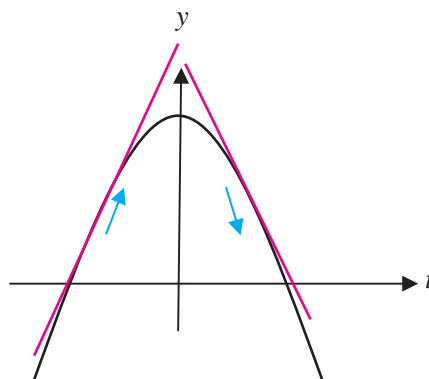


فعالیت ۶



- ۱- در دو لحظه $t_1 = \frac{1}{3}$ و $t_2 = \frac{2}{3}$ سیب در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟
- ۲- سرعت سیب را در این دو لحظه حساب کنید. چرا علامت سرعت در این دو لحظه متفاوت است؟
- ۳- علامت سرعت با افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه‌ای دارد؟
- ۴- اندازه سرعت در لحظه $t=1$ از بقیه لحظات کمتر است و صفر است و اندازه سرعت در لحظات صفر و ۲ از بقیه لحظات بیشتر است. اندازه سرعت با چگونگی افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه‌ای دارد؟

در زیر نمودار تابع $y(x) = 4 - x^2$ و چند خط مماس بر آن رسم شده است.



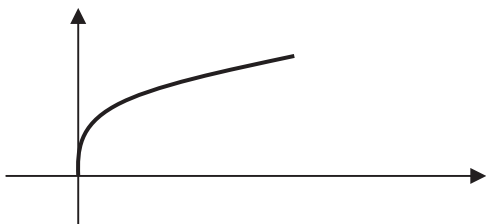
مشتق این تابع به صورت $y'(x) = -2x$ است. در x های منفی مشتق تابع، مثبت است که یعنی شیب خط مماس مثبت است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال افزایش است و صعودی است. البته هر چه به نقطه و طول صفر نزدیک می‌شویم اندازه مشتق کم می‌شود که به معنای آن است که میزان افزایش یا صعود تابع کم می‌شود. در x های مثبت مشتق تابع، منفی است که یعنی شیب خط مماس منفی است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال کاهش است و نزولی است. هر چه در اعداد مثبت مقادیر x بزرگتری انتخاب کنیم مشتق تابع هم چنان منفی است ولی از لحاظ اندازه بزرگتر می‌شود. این به معنای آن است که میزان کاهش و نزول تابع مرتباً در حال افزایش است.

نکته :

- نامنفی بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه صعودی است و اندازه مشتق در نقاط آن بازه نشان می‌دهد شدت صعود تابع در آن نقاط چقدر است.
- نامثبت بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه نزولی است و اندازه مشتق در نقاط آن بازه نشان می‌دهد شدت نزول تابع در آن نقاط چقدر است.



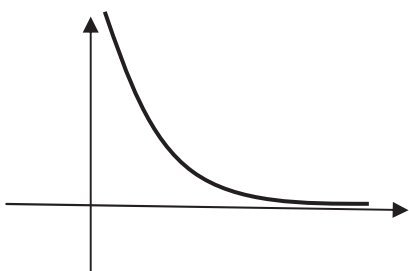
مثال



۱: برای تابع $y = \sqrt{x}$ که دامنه آن بازه $[0, \infty)$ است

داریم $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. مقدار مشتق مثبت است، پس تابع همواره در حال افزایش است ولی با افزایش x مقدار مشتق کم می‌شود و این به معنای آن است که شدت افزایش تابع در حال کم شدن است.

نمودار بالا نیز این مطلب را به خوبی نشان می‌دهد که اگرچه تابع در حال افزایش است اما شدت افزایش در حال کاهش است.



۲: تابع $y = \frac{1}{x}$ را روی بازه $(0, \infty)$ در نظر می‌گیریم. مشتق این

تابع به صورت $y' = -\frac{1}{x^2}$ است و مقدار آن همواره منفی است. پس این تابع همواره نزولی است. برای x های نزدیک صفر مقدار مشتق از لحاظ قدر مطلق بسیار بزرگ است، یعنی برای x های نزدیک صفر تابع به شدت در حال نزول است. ولی برای x های بزرگ مقدار مشتق منفی و بسیار کوچک می‌شود، یعنی تابع در حال نزول است ولی بسیار آهسته نزول می‌کند. نمودار تابع این حقیقت را به خوبی نشان می‌دهد.

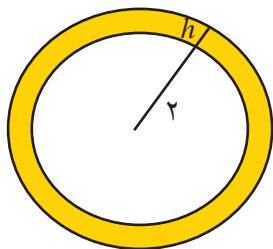
فعالیت ۷



مساحت یک دایره تابعی از شعاع آن است. دایره به شعاع r دارای مساحت $S(r) = \pi r^2$ است.

۱- اگر دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر داشته باشیم و شعاع آن را h سانتی‌متر

افزایش دهیم، مساحت آن چقدر افزایش می‌یابد (بر حسب h به دست می‌آید)؟



۲- نسبت افزایش مساحت دایره به افزایش شعاع چقدر است؟ این مقدار را آهنگ تغییرات متوسط مساحت

دایره بین دو شعاع ۲ و $2+h$ می‌نامند.



- ۳- آهنگ تغییرات متوسط مساحت دایره بین دو شعاع ۲ و $2+h$ وقتی h را به صفر نزدیک می‌کنیم به چه عددی نزدیک می‌شود؟ این عدد را آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به شعاع، در شعاع ۲ سانتی متر می‌نامند.
- ۴- آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به شعاع، با مشتق $S(r)$ چه رابطه‌ای دارد؟

اگر کمیتی مانند A تابعی از کمیت دیگری مانند r باشد و این تابع را به صورت $A(r)$ نشان دهیم، یک سؤال مهم این است که تغییرات در مقدار r چه مقدار تغییرات در A ایجاد می‌کند؟ نسبت افزایش مقدار $A(r)$ به افزایش مقدار r چقدر است؟ اگر مقدار کمیت r برابر r_0 باشد و آن را h واحد افزایش دهیم، مقدار A از $A(r_0)$ به $A(r_0+h)$ تغییر می‌کند و نسبت افزایش مقدار A به افزایش مقدار r برابر است با:

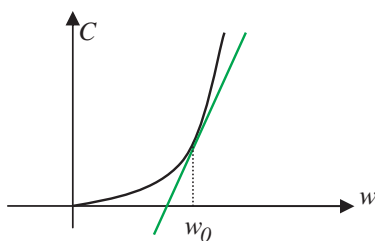
$$\frac{A(r_0+h) - A(r_0)}{h}$$

این کسر را آهنگ تغییرات متوسط کمیت A به کمیت r در دو مقدار r_0 و r_0+h می‌نامند. حد این کسر در $h=0$ را آهنگ تغییرات کمیت A به کمیت r در $r=r_0$ می‌نامند که همان مشتق تابع $A(r)$ در r_0 است.



مثال

- ۱: مساحت هر دایره‌ای تابعی از محیط آن است. اگر مساحت را با S و محیط را با P نشان دهیم داریم $S(P) = \frac{1}{4\pi} P^2$. آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به محیط آن برای دایره‌ای به محیط 3π برابر است با $S'(3\pi) = \frac{3}{2}$. از آنجا که $S'(P) = \frac{1}{2\pi} P$ ، خواهیم داشت $S'(3\pi) = \frac{3}{2}$.
- ۲: هزینه ساخت هر برجی تابعی از ارتفاع آن برج است. هزینه را با C و ارتفاع را با w نشان می‌دهیم و فرض کنید تابع $C(w)$ نموداری به شکل زیر داشته باشد.



آهنگ تغییرات C نسبت به w در ارتفاع w_0 همان شیب خط مماس بر نمودار تابع $C(w)$ در نقطه به طول w_0 است. اندازه این شیب نشان می‌دهد که برای اضافه کردن یک واحد به ارتفاع برجی که ارتفاع آن w_0 است، تقریباً چقدر باید هزینه شود.

همان طور که دیده می‌شود برای مقدارهای کم w_0 ، شیب خط مماس کم است، یعنی هزینه بالا بردن برج از ارتفاع‌های پایین زیاد نیست. ولی با زیاد شدن w_0 شیب خط مماس زیاد می‌شود، یعنی هر چه ارتفاع برج بالاتر می‌رود هزینه اضافه کردن ارتفاع برج هم بالاتر می‌رود.



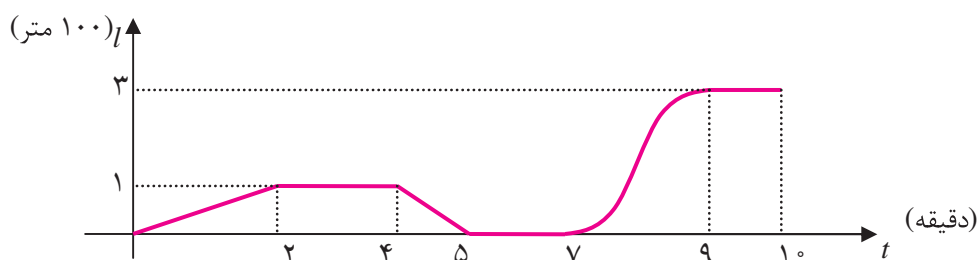
تمرین در کلاس



- ۱- آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۸ واحد است به دست آورید.
- ۲- آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن ۴ واحد است به دست آورید.
- ۳- آهنگ تغییرات مکان متحرکی که روی یک محور حرکت می‌کند نسبت به زمان چه معنایی دارد؟

مسائل

- ۱- محیط هر دایره‌ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت π حساب کنید.
- ۲- بادکنکی کروی توسط تلمبه‌ای در لحظه $t=0$ شروع به باد شدن می‌کند. هر ثانیه ۴ سانتی‌متر مکعب هوا وارد بادکنک می‌شود. حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می‌کند $\pi 4500$ سانتی‌متر مکعب است.
- (الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟
- (ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟
- (ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چقدر است؟
- (د) در آخرین لحظه که بادکنک می‌ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چقدر است؟
- ۳- ماشینی که با سرعتی ثابت در حال حرکت است در لحظه $t=0$ ترمز می‌کند تا این که متوقف می‌شود. فاصله مکان ماشین از نقطه‌ای که ترمز گرفته است را با s نشان می‌دهیم. فرض کنید s (برحسب متر) به عنوان تابعی از t (برحسب ثانیه) به صورت $s(t) = 25t - \frac{5}{4}t^2$ باشد.
- (الف) نمودار $s(t)$ را رسم کنید و دامنه اعتبار آن را مشخص کنید.
- (ب) سرعت ماشین در لحظه شروع ترمز چقدر بوده است؟
- (ج) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می‌شود؟
- (د) ماشین از شروع ترمز چند متر را طی می‌کند تا متوقف شود؟
- ۴- مدرسه علی در انتهای خیابانی است که خانه علی در آن خیابان است. علی موقع رفتن به مدرسه ممکن است راه برود یا بدود یا برای دیدن مغازه‌ها بایستد یا به عقب برگردد یا برای به موقع رسیدن سوار ماشین شود. نمودار حرکت یکی از روزهایی که علی به مدرسه رفته است به شکل صفحه‌ه بعد است. واحد زمان را دقیقه و واحد مکان را 100 متر در نظر بگیرید.



۵- با توجه به نمودار بالا به سؤالات زیر پاسخ بگویید.

الف) فاصله مدرسه علی تا خانه او چقدر است و چقدر طول کشیده است تا علی به مدرسه برسد؟

ب) در دو دقیقه اول حرکت سرعت حرکت علی چقدر بوده است؟

ج) در دو دقیقه دوم حرکت احتمالاً علی چکار می کرده است؟

د) در دقایق بین ۴ و ۵ علی با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت می کرده است؟ در حال دویدن بوده است یا

راه رفتن؟

ه) در دقایق بین ۵ و ۷ علی کجا بوده و احتمالاً چه می کرده است؟

و) در بین دقایق ۷ و ۹ حدوداً سرعت حرکت او چقدر بوده است و احتمالاً علی چه عملی انجام داده است؟

ز) بین دقایق ۹ و ۱۰ علی کجا بوده است و احتمالاً چه می کرده است؟

مشق توابع مثلثاتی

اگر تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x(t) = \sin t$ باشد، این متحرک یک حرکت تناوبی حول مبدأ دارد و مرتباً به جلو و عقب حرکت می کند. سرعت این متحرک نیز حالت تناوبی خواهد داشت و مرتباً در حال افزایش و کاهش و تغییر جهت است. برای تشخیص چگونگی سرعت این متحرک باید مشتق تابع $\sin x$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{h}{2} \cos(x + \frac{h}{2})}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) = 1 \cdot \cos x = \cos x
 \end{aligned}$$

به کمک تساوی $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ می توانیم مشتق تابع $\cos x$ را نیز محاسبه کنیم.

$$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = (-\sin(x - \frac{\pi}{2}))' = -\cos(x - \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$



تمرین در کلاس



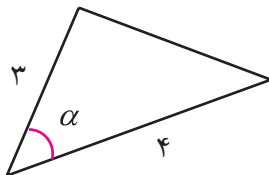
۱- نشان دهید مشتق تابع $\tan x$ در هر نقطه از دامنه اش به شکل زیر است.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

۲- نشان دهید مشتق تابع $\cot x$ در هر نقطه از دامنه اش به شکل زیر است.

$$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

۳- مثلثی ساخته ایم که طول دو ضلع آن ۳ و ۴ است و زاویه بین آن‌ها را مقدار متغیر α قرار می‌دهیم.



الف) آهنگ تغییرات مساحت این مثلث نسبت به a را در زاویه α به دست آورید.

ب) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات منفی است و معنای آن چیست؟

ج) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات مثبت است و معنای آن چیست؟

د) در کدام زاویه آهنگ تغییرات صفر است و در این زاویه مساحت مثلث به دست آمده چه ویژگی دارد؟



مثال

۱: مشتق تابع $y(x) = \sin x (1 + \cos x)$ را حساب می‌کنیم.

$$y'(x) = (\sin x)'(1 + \cos x) + \sin x(1 + \cos x)'$$

$$= \cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$$

۲: مشتق تابع $y(x) = \frac{x \sin x}{\sin x + \cos x}$ را حساب می‌کنیم.

$$y'(x) = \frac{(x \sin x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)'x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\sin x + x \cos x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)x \sin x}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + x \cos x \sin x + x \cos^2 x - x \cos x \sin x + x \sin^2 x}{1 + \sin 2x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + x}{1 + \sin 2x}$$



مسائل



۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y(x) = \sin^3 x$ ب) $y(x) = x \tan \frac{x}{y}$ ج) $y(x) = \sin^2 x$

د) $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ هـ) $y(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$ و) $y(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$

۲- مشتق تابع $y = \cos x$ را مستقیماً از طریق تعریف به دست آورید.

۳- نمودار تابع $y = \sin x$ با چه زاویه‌ای از مبدأ می‌گذرد (زاویه خط مماس بر نمودار تابع نسبت به محور x ‌ها)؟
نمودار تابع $\tan x$ با چه زاویه‌ای از مبدأ می‌گذرد؟

۴- در چه نقاطی خط مماس بر نمودار تابع $y(x) = \sin^3 x$ موازی محور x ‌ها است.

۵- آیا می‌توان بر نمودار تابع $y(x) = \sin x + \cos x$ خط مماسی رسم کرد که با خط $y = 3x - 1$ موازی باشد؟

۶- در خط $y = mx + 2$ چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد تا بتوان بر نمودار تابع $y(x) = \tan^3 x$ خط مماسی رسم کرد که با آن موازی باشد.

۷- تابع حرکت متحرکی روی محور x ‌ها به صورت $x(t) = 1 + 2 \sin^2 t$ است. چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید. در چه نقاطی روی محور x ‌ها این متحرک ایست‌آنی دارد؟ در چه نقاطی این متحرک بیشترین سرعت را دارد و مقدار این سرعت چقدر است؟

مشتق تابع وارون و توابع مرکب



حل یک مسئله



مشتق یک تابع وارون‌پذیر و مشتق وارون آن چه رابطه‌ای با هم دارند؟

نمودار یک تابع و وارون آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند، پس مماس‌های برای این دو نمودار در نقاط متناظر نیز قرینه هم خواهند بود و شیب‌های آن‌ها رابطه مشخصی با هم خواهند یافت. برای یافتن این رابطه در فعالیت زیر در حالتی خاص این رابطه را جستجو می‌کنیم.



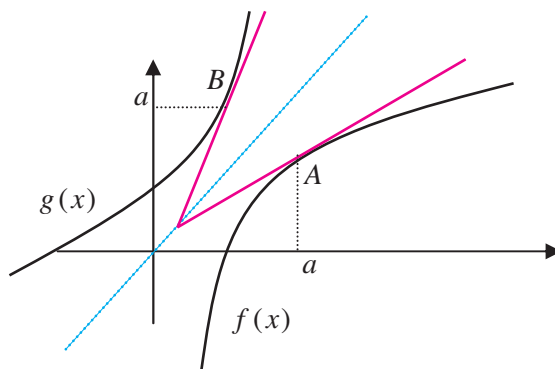
تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ روی دامنه $[1, \infty)$ تعریف شده است و صعودی است. وارون $f(x)$ تابع $g(x) = x^2 + 1$ با دامنه $[0, \infty)$ است.

۱- نمودارهای این دو تابع را رسم کنید و نقطه $A(5, 2)$ روی نمودار f و نقطه $B(2, 5)$ روی نمودار g را مشخص کنید.

۲- وضعیت خط‌های مماس بر نمودارهای این دو تابع در این نقاط نسبت به نیمساز ربع اول و سوم چگونه است؟ شیب‌های این دو خط مماس چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳- آیا برای نقاط دیگر هم چنین رابطه‌ای وجود دارد؟ چه حدسی می‌زنید؟ حدس خود را ثابت کنید.

فرض کنید $f(x)$ تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر باشد و وارون آن را با $g(x)$ نشان دهیم. فرض کنید $A(a, b)$ نقطه‌ای از نمودار f باشد ($f(a) = b$)، در این صورت $B(b, a)$ نقطه‌ای از نمودار g خواهد بود که در شکل زیر نمایش داده شده‌اند.



نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است. این نکته باعث می‌شود خط مماس بر نمودار g در نقطه $B(b, a)$ نیز قرینه خط مماس بر نمودار f در نقطه $A(a, b)$ شود. در فصل دوم دیدیم که شیب‌های این دو خط وارون یکدیگرند. اما شیب‌های این دو خط $f'(a)$ و $g'(b)$ هستند، بنابراین

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که باید $f'(a) \neq 0$.

اگر $f'(a) = 0$ ، خط مماس بر نمودار f در نقطه $A(a, b)$ موازی محور x ها خواهد بود و در نتیجه خط مماس بر نمودار g در نقطه $B(b, a)$ موازی محور y ها خواهد بود که به معنای آن است که g در b مشتق‌پذیر نیست. به طور کلی قضیه زیر برقرار است.



قضیه :

اگر f تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر باشد و وارون آن تابع g باشد، در این صورت g نیز مشتق پذیر

$$\text{است و } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$



مثال

۱: تابع $f(x) = x^k$ در دامنه $(0, \infty)$ صعودی و وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن تابع

$$g(x) = \sqrt[k]{x} \text{ است. بنابراین}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{kg(x)^{k-1}} = \frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}}$$

۲: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ وارون پذیر و مشتق پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن خودش است. بنابراین باید داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{f'(f(x))}$. درستی این تساوی را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'(f(x)) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -x^2$$

در بسیاری از موارد تابع وارون ممکن است قابل محاسبه نباشد اما مشتق آن را می‌توانیم با استفاده از این فرمول حساب کنیم.

تمرین در کلاس



۱- $g(x) = \sin^{-1}x$ وارون تابع $f(x) = \sin x$ است که دامنه f را به فاصله $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ محدود کرده‌ایم. دامنه g فاصله $[-1, 1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای x های در فاصله $(-1, 1)$ داریم:

$$(\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

در نقاط $x = \pm 1$ وضعیت مشتق پذیری $\sin^{-1}x$ چگونه است؟

۲- $g(x) = \cos^{-1}x$ وارون تابع $f(x) = \cos x$ است که دامنه f را به فاصله $[0, \pi]$ محدود کرده‌ایم. دامنه g فاصله $[-1, 1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای x های در فاصله $(-1, 1)$ داریم:

$$(\cos^{-1}x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$



در نقاط $x = \pm 1$ وضعیت مشتق پذیری $\cos^{-1} x$ چگونه است؟

۳- $g(x) = \tan^{-1} x$ وارون تابع $f(x) = \tan x$ است که دامنه f را به فاصله $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ محدود کرده ایم. دامنه g کل IR است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای هر مقدار x داریم:

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$



مثال

۱: مشتق تابع $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ را حساب می کنیم.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

صفر شدن مشتق این تابع در همه نقاط به معنای آن است که این تابع، ثابت است. قبلاً در فصل سوم دیدیم که

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

۲: مشتق تابع $f(x) = (x + \sin x) \sin^{-1} x$ را حساب می کنیم.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + \sin x)' \sin^{-1} x + (x + \sin x) (\sin^{-1} x)' \\ &= (1 + \cos x) \sin^{-1} x + \frac{x + \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

اگر f و g دو تابع صعودی باشند، $f \circ g$ نیز تابعی صعودی است. اگر شدت صعود g در نقطه ای مانند a برابر m_1 (یعنی، $m_1 = g'(a)$) و شدت صعود f در نقطه $g(a)$ برابر m_2 (یعنی، $m_2 = f'(g(a))$) باشد، شدت صعود $f \circ g$ در نقطه a چه خواهد بود؟ به عبارت دیگر چه رابطه ای بین $g'(a)$ و $f'(g(a))$ و $(f \circ g)'(a)$ وجود دارد؟ برای داشتن یک حدس مناسب بهتر است چند مثال را بررسی کنیم.



فعالیت ۹



- ۱- برای دو تابع $f(x) = m_1 x$ و $g(x) = m_2 x$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f \circ g)'(x)$ ، بررسی کنید که چه رابطه ای بین آن‌ها وجود دارد.
- ۲- برای تابع دلخواه $f(x)$ و $g(x) = m_2 x$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f \circ g)'(x)$ ، بررسی کنید که چه رابطه ای بین آن‌ها وجود دارد.



۳- برای تابع $f(x) = x^3$ و تابع دلخواه $g(x)$ ، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f \circ g)'(x)$ ، بررسی کنید که چه رابطه‌ای بین آنها وجود دارد.

تمام مثال‌های بالا نشان می‌دهند که شدت صعود $f \circ g$ در نقطه‌ای مانند a برابر است با حاصلضرب شدت صعود g در a در شدت صعود f در $g(a)$ ، به عبارت دیگر:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

درستی این رابطه در حالت کلی قابل اثبات است و قضیه زیر برقرار است.

قضیه:

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، آنگاه $f \circ g$ نیز مشتق پذیر است و

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$



مثال

۱: مشتق تابع $\sin x^2$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x^2$ داریم $\sin x^2 = f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin x^2)' = f'(g(x))g'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

۲: مشتق تابع $\sqrt{1 + \sin^2 x}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 + \sin^2 x$ داریم $\sqrt{1 + \sin^2 x} = f(g(x))$. بنابراین

$$(\sqrt{1 + \sin^2 x})' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 x}} \times 2 \sin x \cos x = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$$

۳: مشتق تابع $\sin \sqrt{1 + x^2}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ داریم $\sin \sqrt{1 + x^2} = f(g(x))$. بنابراین

$$(\sin \sqrt{1 + x^2})' = f'(g(x))g'(x) = \cos \sqrt{1 + x^2} \times (\sqrt{1 + x^2})'$$

$$= \cos \sqrt{1 + x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \times 2x = \frac{x \cos \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2}}$$





تمرین در کلاس



- ۱- مشتق تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ را حساب کنید.
- ۲- مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۱ و ۳ می‌باشد و زاویه بین این دو ضلع α است که قابل تغییر از صفر تا π رادیان است. طول ضلع سوم را l بنامید.
- الف) l را بر حسب α و آهنگ تغییرات l نسبت به α را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟
- ب) α را بر حسب l و آهنگ تغییرات α نسبت به l را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟
- ج) آهنگ تغییرات در (الف) و (ب) چه رابطه‌ای با هم دارند؟



مسائل

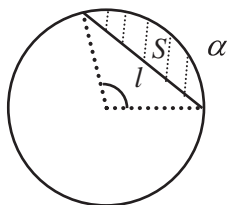


- ۱- مشتق توابع زیر را حساب کنید و تعیین کنید که در کدام نقاط از دامنه خود مشتق پذیری برقرار نیست.
- الف) $y(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$ ب) $f(t) = \cos \sqrt[3]{t}$
- ج) $g(\alpha) = \sqrt[3]{1+\tan \alpha}$ د) $y(\alpha) = \tan^2\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} \alpha\right)$
- ه) $x(t) = \sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}$ و) $k(z) = \sqrt{1+\cos^2 \sqrt{1+z^2}}$
- ۲- آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟ آیا تابع $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟
- ۳- دامنه و برد تابع $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ را تعیین کنید و نشان دهید این تابع متناوب است و نمودار آن را رسم کنید. این تابع در چه نقاطی مشتق ناپذیر است و مشتق آن را در بقیه نقاط تعیین کنید.
- ۴- تابع $y(x) = 1$ را در نظر می‌گیریم و از نقطه $(x, 1)$ روی نمودار این تابع خطی با شیب α می‌کشیم. زاویه این خط با محور x ها را α می‌نامیم که تابعی از x است. تابع $\alpha(x)$ و دامنه و برد آن را حساب کنید و مشتق α نسبت به x را حساب کنید. مقدار α با افزایش x افزایش می‌یابد یا کاهش؟ علامت مشتق α چگونه است؟
- ۵- در مثلثی طول دو ضلع آن ۲ و ۴ می‌باشد و طول ضلع سوم مقدار متغیر l می‌باشد. زاویه مقابل به این ضلع را با α نشان می‌دهیم.
- الف) l تابعی از α است این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را بیابید.



ب) تابع وارون تابع قسمت (الف) چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 ج) مساحت این مثلث تابعی از α است، این تابع را حساب کنید و آهنگ تغییرات آن را به دست آورید. آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای α مثبت است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای α منفی است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدار α صفر است و مثلث در این مقدار چگونه است و مساحت آن چه ویژگی دارد؟

۶- در شکل زیر وتری از دایره به شعاع واحد به طول l رسم شده است که کمانی به زاویه α را از دایره جدا کرده است. مساحت قسمت هاشور خورده را با S نشان می‌دهیم.



الف) S را بر حسب α و α را بر حسب l و S را بر حسب l حساب کنید.
 ب) آهنگ تغییرات S را نسبت به α و آهنگ تغییرات α را نسبت به l و آهنگ تغییرات S را نسبت به l را حساب کنید.

کنید.

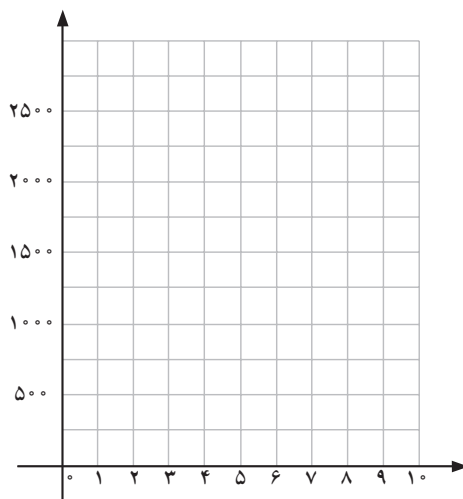


تمرین‌های دوره‌ای

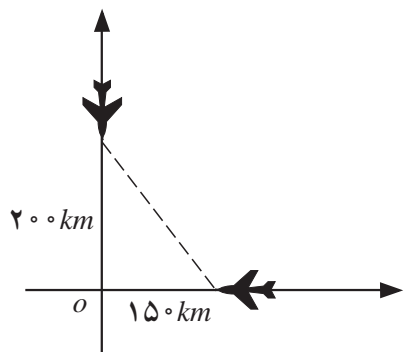
۱- قرار است یک مزرعه مستطیلی شکل برای پرورش گل ساخته شود. برای این کار ۲۰۰ متر نرده چوبی برای محصور کردن این ناحیه در اختیار داریم. ابعاد این مستطیل را چقدر در نظر بگیریم تا بزرگترین مساحت ممکن برای این مزرعه را به دست آوریم؟
با طی مراحل زیر، این مسئله را حل کنید.
الف) جدول زیر را تکمیل کنید.

x یک ضلع مستطیل	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
ضلع دیگر				۷۰							
مساحت S				۲۱۰۰							

- ب) مساحت این مستطیل را به صورت تابعی از x به دست آورید.
ج) دامنه و برد این تابع را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.
د) آیا از روی نمودار می‌توانید بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه گل را به دست آورید؟
ه) به روش جبری و با کمک ضابطه تابع، بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه را به دست آورید.



۲- دو هواپیما مطابق شکل صفحه بعد در ارتفاع یکسان در دو مسیر عمود برهم، با سرعت ۹۰۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت هستند. یک هواپیما ۱۵۰ کیلومتر و هواپیمای دیگر ۲۰۰ کیلومتر از نقطه O فاصله دارند.
الف) پس از ۲ دقیقه فاصله بین دو هواپیما چقدر است؟



ب) فاصله بین دو هواپیما را بر (حسب کیلومتر) به عنوان تابعی از زمان (دقیقه) به دست آورید. (شکل زمان $t=0$ را نشان می دهد.)
 ج) از طریق این تابع استدلال کنید که این دو هواپیما به هم برخورد نخواهند کرد.

۳- اگر $h(x) = (2x + 5)^2$ ، $h(x)$ را به صورت ترکیب دو تابع مانند g ، f بنویسید به قسمی که $h(x) = (f \circ g)(x)$ و $g(0) = 5$.

۴- قیمت معمولی یک کالا x (هزار) تومان است. فرض کنید:

$$f(x) = x - 400, \quad g(x) = 0.75x$$

الف) g و f چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می کنند؟

ب) $f \circ g$ را بیابید و توضیح دهید که $f \circ g$ چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می کند.

ج) $g \circ f$ چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می کند؟

۵- فرض کنید f و g توابعی از IR به IR هستند و دامنه f شامل برد g است. ثابت کنید:

الف) اگر f و g صعودی باشند آنگاه $f \circ g$ صعودی است.

ب) اگر f و g نزولی باشند آنگاه $f \circ g$ صعودی است.

ج) اگر f صعودی و g نزولی باشد آنگاه $f \circ g$ نزولی است.

د) برای هر یک از موارد (الف) و (ب) و (ج) مثالی ارائه کنید.

۶- درستی یا نادرستی گزاره های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر f روی بازه $[a, b]$ صعودی باشد، در هیچ نقطه ای محور x ها را قطع نمی کند.

ب) اگر f روی بازه $[a, b]$ اکیداً صعودی باشد، حداکثر در یک نقطه محور x ها را قطع می کند.

۷- تحت چه شرایطی تابع خطی $f(x) = ax + b$ زوج است؟ تحت چه شرایطی فرد است؟

۸- اگر $h(x) = x + 3$ ، $g(x) = x^2 + 2$ ، $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، تابع $f \circ g \circ h$ را به دست آورید.

۹- فرض کنید $h(x) = (f(x))^2 + g(x)$ که توابع f و g ممکن است زوج یا فرد باشند.

الف) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع زوج می شود؟

ب) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع فرد می شود؟

۱۰- الف) فرض کنید که g یک تابع زوج باشد و $h = f \circ g$ ، آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می توان اظهار نظر

قطعی کرد؟

ب) اگر g یک تابع فرد باشد و $h = f \circ g$ ، آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می توان اظهار نظر قطعی کرد؟



ج) اگر f و g دو تابع فرد باشند، در مورد زوج یا فرد بودن $f \circ g$ چه می‌توان گفت؟
۱۱- فرض کنید که $f(x)$ روی بازه $[-2, 7]$ صعودی باشد.

الف) دامنه تابع $y = f(x+3)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ب) دامنه تابع $y = f(x-4)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ج) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y = -f(x)$ چه می‌توان گفت؟

د) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y = f(-x)$ چه می‌توان گفت؟

۱۲- هزینه اجاره در بست یک اتوبوس (برای هر نفر) به وسیله تابع $C(x) = \frac{100 + 5x}{x}$ داده می‌شود که در آن x تعداد افراد در یک گروه و $C(x)$ بر حسب هزار تومان است و داریم:

$$x \in \{1, 2, 3, \dots, 40\}$$

$C^{-1}(x)$ را به دست آورید و توضیح دهید که چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۱۳- یک سیلندر به شکل استوانه در اختیار داریم که ارتفاع آن برابر قطر قاعده آن است. شعاع قاعده این

سیلندر را با x نشان می‌دهیم.

الف) حجم این سیلندر استوانه‌ای شکل را به عنوان تابعی از x به دست آورید. برای شعاع قاعده 10° متر حجم

استوانه چقدر است؟

ب) $V^{-1}(x)$ را به دست آورید و معنای آن را توصیف کنید.

ج) اگر حجمی برابر $\pi \cdot 24 \cdot 10^\circ$ مترمکعب نیاز داشته باشیم، با استفاده از هر یک از فرمول‌ها که ساده‌تر است

شعاع را بیابید.

۱۴- درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

الف) یک تابع زوج می‌تواند وارون پذیر هم باشد.

ب) اگر f روی بازه $[0, 5]$ صعودی باشد f^{-1} روی بازه $[f(0), f(5)]$ صعودی است.

ج) اگر g روی بازه $[0, 5]$ نزولی باشد، g^{-1} روی بازه $[g(5), g(0)]$ نزولی است.

د) اگر f و g وارون یکدیگر باشند، دامنه آن‌ها با هم برابر است.

۱۵- اگر $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$ ، $f^{-1}(x)$ را بیابید. تحت کدام شرایط برای a, b, d داریم $f = f^{-1}$ ؟

۱۶- وزن ایده آل w برای مردان (بر حسب کیلوگرم) به عنوان تابعی از قد h (بر حسب سانتی متر) به صورت

تقریبی از رابطه $w(h) = 9h - 88$ به دست می‌آید.

الف) وزن ایده آل برای یک مرد 170° سانتی متری چقدر است؟

ب) h را به عنوان تابعی از w به دست آورید. این تابع چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ج) با نشان دادن $w(h(b)) = b$ ، $h(w(a)) = a$ ثابت کنید که $w(h)$ ، $h(w)$ وارون یکدیگرند.

د) قد ایده آل مردی که وزن او 80° کیلوگرم است چند سانتی متر است.

رابطه وزن ایده آل برای زنان به صورت $w(h) = 9h - 82/5$ است.



۱۷- توابعی مانند g و f بیابید که برای آن‌ها داشته باشیم

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

۱۸- در هر یک از حالت‌های زیر تابع خطی $f(x) = ax + b$ را به گونه‌ای به دست آورید که شرط خواسته شده برقرار گردد.

$$f(f(x)) = 4x + 3 \quad \text{الف)}$$

$$f(1-x) = 5x + 1 \quad \text{ب)}$$

$$f(2x+3) = 3x-2 \quad \text{ج)}$$

۱۹- تعداد باکتری‌ها در یک غذای منجمد با تابع $n(d) = 2 \cdot d^2 - 8 \cdot d + 500$ با شرط $2 \leq d \leq 14$ داده می‌شود که d دمای غذا است. وقتی که غذا از انجماد خارج می‌شود دما با تابع $d(t) = 4t + 2$ ، $0 \leq t \leq 3$ داده می‌شود که t زمان بر حسب ساعت است. مطلوب است:

الف) تابع مرکب $n(d(t))$

ب) تعداد باکتری‌ها در غذا وقتی که $t = 2$.

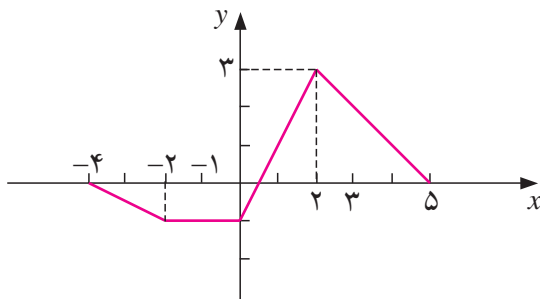
ج) پس از چه زمانی تعداد باکتری‌ها به 2420 می‌رسد؟

۲۰- ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{|x|+1}{|x|}$ تابعی زوج است و با استفاده از آن برد تابع را به دست آورید.

۲۱- ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$ تابعی فرد است و با استفاده از آن برد تابع را به دست آورید.

۲۲- نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر داده شده است. دامنه توابع داده شده را معلوم کنید و نمودار آن‌ها را رسم

کنید.



$$y = |f(x)| \quad \text{الف)}$$

$$y = f(|x|) \quad \text{ب)}$$

$$y = f(-x) \quad \text{ج)}$$

$$y = -f(x) \quad \text{د)}$$

۲۳- اگر f یک تابع زوج و غیر ثابت باشد، تعیین کنید که در هر یک از حالات زیر آیا g زوج یا فرد یا آن که نه زوج است و نه فرد.

$$g(x) = f(-5x) \quad \text{ب)}$$

$$g(x) = -f(x) \quad \text{الف)}$$

$$g(x) = -f(x-3) \quad \text{د)}$$

$$g(x) = f(x) + 3 \quad \text{ج)}$$

۲۴- تابع $f(x) = x^2 - 2x$ را روی دامنه $[1, \infty)$ در نظر بگیرید.

الف) با رسم نمودار این تابع نشان دهید این تابع وارون پذیر است و برد آن را به دست آورید.

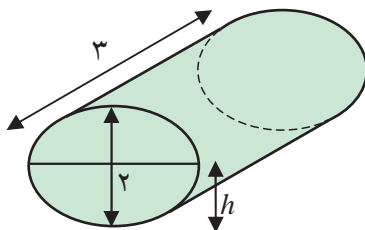


- (ب) با رسم نمودار تابع وارون، دامنه و برد تابع وارون را به دست آورید.
- (ج) تابع وارون f را با g نشان دهید و برای یک نقطه دلخواه از دامنه g مانند x قرار دهید $y = g(x)$. با توجه به آن که داریم $x = f(y)$ را بر حسب x حساب کنید.
- (د) ضابطه تابع وارون f را بنویسید.
- ۲۵- ثابت کنید که تابع $f(x) = 1 + \sqrt{1-x^2}$ روی دامنه $[0, 1]$ یک به یک است و وارون آن را به دست آورید.

۲۶- دو تابع g و f وارون یکدیگرند. آیا توابع $f \circ g$ ، $g \circ f$ با هم مساویند؟

۲۷- برای هر عدد صحیح q ، نشان دهید $[x+q] = [x] + q$.

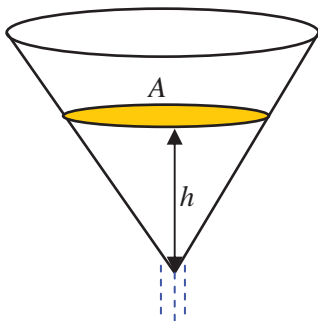
- ۲۸- یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایره قاعده آن ۲ متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) برابر ۳ متر است.



- (الف) اگر حجم گازوئیل موجود در منبع (بر حسب سانتی متر مکعب) را با V و ارتفاع گازوئیل موجود در منبع (بر حسب سانتی متر) را با h نشان دهیم، V تابعی از h است. این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. با توجه به شیوه تعریف، نشان دهید این تابع صعودی است.

(ب) h نیز تابعی از V است، دامنه و برد آن را تعیین کنید. آیا می‌توانید این تابع را محاسبه کنید؟

- ۲۹- از نقطه $A(2, 5)$ به نقاط مختلف نمودار تابع $y = (x-2)^2$ خط رسم می‌کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می‌شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع عمود شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع نشان دهید.



- ۳۰- قیفی به شکل مخروط دوار داریم که ارتفاع آن 10° سانتی متر و شعاع قاعده آن ۵ سانتی متر است. این قیف را پر از آب می‌کنیم و در لحظه $t=0$ شیر آن را باز می‌کنیم و آب با سرعت دو سانتی متر مکعب در ثانیه از آن خارج می‌شود.

(الف) اگر ارتفاع آب باقیمانده در قیف را با h نشان دهیم، حجم آب باقیمانده را بر حسب h به دست آورید.

(ب) h را بر حسب زمان به دست آورید و آهنگ تغییرات h را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.

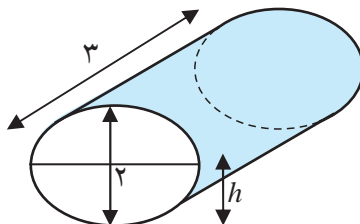
- (ج) سطح آب باقیمانده در قیف را با A نشان می‌دهیم. با محاسبه A بر حسب زمان، آهنگ تغییرات A را نسبت



به زمان در هر لحظه حساب کنید.

(د) با محاسبه A بر حسب h ، آهنگ تغییرات A را نسبت به h در هر مقداری از h حساب کنید.

۳۱- یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایره قاعده آن ۲ متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) برابر ۳ متر است.



اگر منبع خالی را به گونه‌ای پر کنیم که ارتفاع گازوئیل با سرعت ثابت ۳ سانتی متر بر دقیقه افزایش یابد، سرعت افزایش حجم گازوئیل در هر لحظه t چقدر خواهد بود؟

مراجع

۱- رام کردن و پرورش مسئله‌های ریاضی، عبدالحسین مصحفی، انتشارات مدرسه، چاپ اول، زمستان ۱۳۷۷

۲- آموزش هنر حل مسئله، یحیی تابش، جواد حاجی بابایی و آرش رستگار، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۳۸۰

۳- Success in maths Sim Pupiles Book

Addison wesley longman 1998

۴- اصول آنالیز ریاضی، والتر رودین

۵- حساب دیفرانسیل و انتگرال، (جلد اول)، سیاوش شهشهانی

۶- حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)، آدامز

۷- حساب دیفرانسیل و انتگرال، جیمز استوارت، ترجمه ارشک حمیدی، (جلد اول)، انتشارات فاطمی.

