بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات (۳)

سال سوم آموزش متوسطه

رشتهٔ علوم تجربی

۱۳۹۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری**

نام کتاب : **ریاضیات (۳) ـ ۲۵۸/۳**

مؤلفان : **محمدهاشم رستمی، عبدالحمید عطوفی، محمد گودرزی و حمیدرضا امیری**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت : **www.chap.sch.ir**

مدیر امور فنی و چاپ : **لیدا نیک روش**

رسام : **محمدحسن معماری، رامین شافعی**

طراح جلد : **محمدحسن معماری**

صفحه‌آرا : **علی نجمی**

حروفچین : **فاطمه باقری‌مهر**

مصحح : **زهرا رشیدی‌مقدم، فاطمه گیتی‌جبین**

امور آماده‌سازی خبر : **سپیده ملک‌ایزدی**

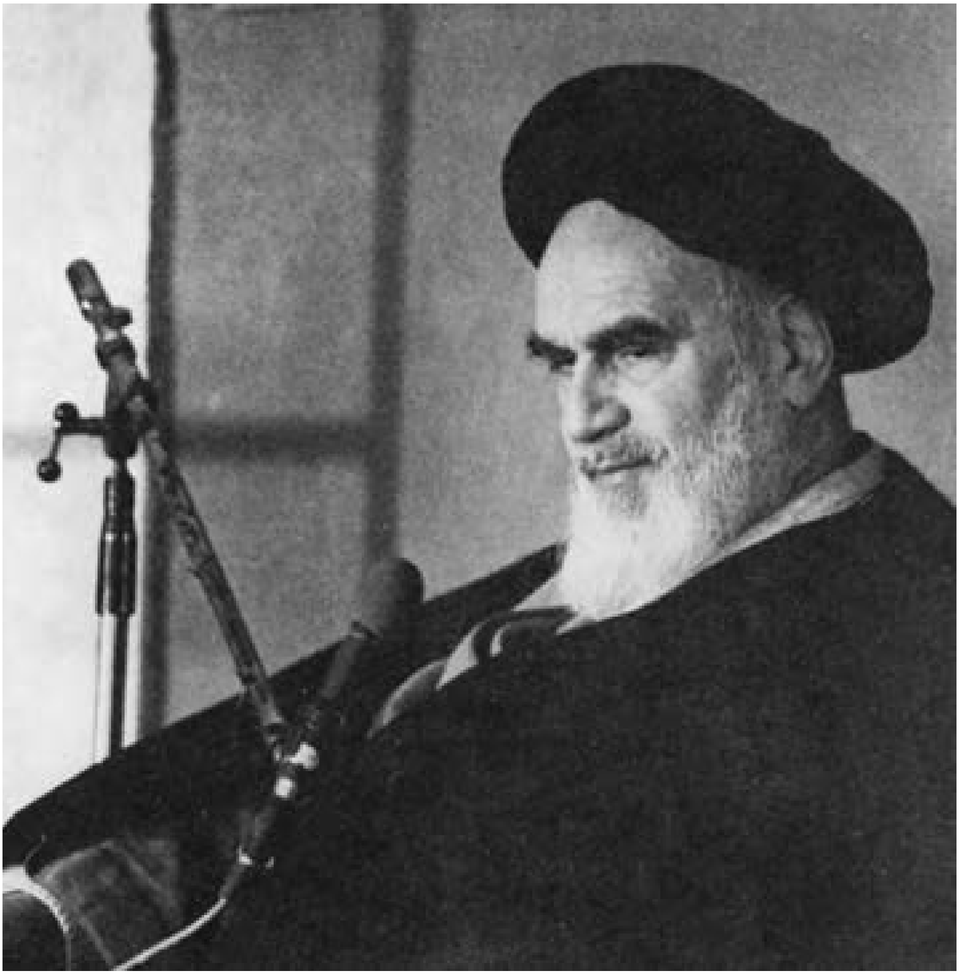
امور فنی رایانه‌ای : **حمید ثابت کلاچاهی، مریم دهقان‌زاده**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادّهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**
تلفن : ۵ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار : **۱۳۹۵**

ISBN 978-964-05-2389-6   **شابک ۶- ۲۳۸۹-۰۵-۹۶۴-۹۷۸**



اساس همهٔ شکست‌ها و پیروزی‌ها از خود آدم شروع می‌شود. انسان اساس پیروزی است و اساس شکست است. باور انسان اساس تمام امور است. غربیان و در سابق انگلستان و بعد از او امریکا و سایر کشورهای قدرتمند دنبال این بودند که با تبلیغات دامنه‌دار خودشان به ممالک ضعیف باور بیاورند که ناتوانند، باور بیاورند که این‌ها نمی‌توانند هیچ کاری انجام بدهند.

امام خمینی (ره)

فهرست

این کتاب در سال ۱۳۸۹ در گروه ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری توسط آقایان : حمیدرضا امیری، میرشهرام صدر و رضا جلیلی و در سال ۱۳۹۰ مجدداً توسط گروه ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری مورد تجدیدنظر قرار گرفت.

فصل اوّل

پدیده‌های تصادفی و احتمال

در اطراف ما پدیده‌هایی رخ می‌دهند که ما قبل از وقوع یا رخداد این پدیده‌ها، تمام حالت‌های ممکن در رخدادِ آن‌ها را می‌شناسیم، اما از این‌که کدام‌یک از حالت‌های ممکن به‌طور قطع رخ خواهد داد، اطلاع دقیقی نداریم و فقط براساس اطلاعات و گاهی وقت‌ها بنابر تجربه‌ای که داریم، می‌توانیم پیش‌بینی کنیم یا حدس بزنیم که کدام‌یک از حالت‌های ممکن، امکان بیشتری برای به وقوع پیوستن داشته و کدام‌یک شانس کمتری دارند.

فرض کنید، مطالعات ژنتیکی در نژاد خاصی از مردم آسیا نشان داده است که ۸۵٪ ژن‌های تعیین‌کنندهٔ رنگ چشم آن‌ها از نوع ژن‌های غالب (تیره) هستند، اگر ۲ نفر از افراد متعلق به این نژاد با هم ازدواج کنند، چقدر احتمال دارد رنگ چشم فرزند آن‌ها روشن باشد؟ اگر بدانیم رنگ چشم فرزند اولِ آن‌ها روشن است، چقدر احتمال دارد رنگ چشم فرزند دوم این خانواده تیره باشد؟

البته با توجه به اطلاعات موجود و مطالعات انجام شده، شما حدس می‌زنید که بچهٔ به دنیا آمده در این خانواده دارای چشم‌هایی به رنگ تیره باشد. آیا امکانِ روشن بودن چشم این بچه هم وجود دارد؟ آیا روشن بودن رنگ چشم بچهٔ اول روی روشن یا تیره بودنِ رنگ چشم فرزند دوم در این خانواده تأثیر دارد؟

پدیده‌های تصادفی

به دنیا آمدن یک نوزاد پدیده‌ای است که ما قبل از وقوع، دو حالت ممکن برای آن می‌شناسیم، (پسر یا دختر) اما قبل از تولد نمی‌توانیم با قطعیت پسر یا دختر بودنِ نوزاد را تعیین کنیم. وقتی یک مکعب را که روی شش وجه آن اعداد ۱ تا ۶ حک شده است (چنین مکعبی را تاس می‌نامیم) به‌هوا پرتاب می‌کنیم، قبل از این‌که به زمین بیافتد و از حرکت بایستد نمی‌توانیم با قطعیت عدد رو شده را تعیین کنیم. به چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که، «از همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم امّا از این‌که کدام حالت، قطعاً رخ خواهد داد اطمینان نداشته باشیم» یک **پدیده تصادفی** می‌گوییم.

فضای نمونه‌ای

اگر یک پدیدهٔ تصادفی داشته باشیم، «مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستنِ این پدیده تصادفی را **فضای نمونه‌ای** می‌نامیم.» فضای نمونه‌ای را معمولاً با S نمایش می‌دهند، اگر اعضای S **قابل شمارش** باشد آن را یک فضای نمونه‌ای **گسسته** می‌نامیم.

در جدول زیر تعدادی پدیدهٔ تصادفی و فضای نمونه‌ای مربوط به هر کدام و تعداد اعضای هر فضای نمونه‌ای مشخص شده است که توجه به این جدول، به‌خصوص محاسبهٔ تعداد اعضای هر فضای نمونه‌ای بسیار مهمّ می‌باشد.

پدیدهٔ تصادفی	فضای نمونه‌ای: S	تعداداعضای فضای نمونه‌ای: n(S)
انداختن یک سکّه	S= {رو و پشت}	$n(S)=۲$
انداختن یک تاس	$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$	$n(S)=۶$
تولد دو فرزند در یک خانواده	S= {(د,د)و(پ,د)و(د,پ)و(پ,پ)}	$n(S)=۲\times۲=۴$
کنار هم قرار گرفتن حروف a و b و c به‌طور تصادفی	$S=\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$	$n(S)=۳!=۶$
انتخاب تصادفی دو حرف از بین حروف d,c,b,a (بدون درنظر گرفتن ترتیب)	$S=\{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$	$n(S)=\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!۲!}=۶$
انتخاب تصادفی ۲ مهره از جعبه‌ای که در آن ۲ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد.	S= {آ۱آ۲,آ۱ق۱,آ۱ق۲,آ۲ق۱,آ۲ق۲,ق۱ق۲}	$n(S)=\binom{۴}{۲}=۶$
انتخاب تصادفی ۲ رقم از بین ارقام ۱،۲،۴،۶ و ساختن عدد ۲ رقمی	$S=\{۱۲,۲۱,۱۴,۴۱,۱۶,۶۱,۲۴,۴۲,۲۶,۶۲,۴۶,۶۴\}$	$n(S)=P(۴,۲)=\frac{۴!}{۲!}=۱۲$
انداختن دو تاس با هم و یا انداختن ۱ تاس دو بار (تاس آبی و تاس قرمز)	$S=\{(۱,۱),...,(۱,۶),...,(۶,۶)\}$	$n(S)=n(S_۱)\times n(S_۲)$ $=۶\times۶=۳۶$ ($S_۱$ فضای نمونه‌ای تاس آبی و $S_۲$ فضای نمونه‌ای تاس قرمز است)

پیشامد تصادفی

اگر یک پدیدهٔ تصادفی رخ دهد و S فضای نمونه‌ای این پدیده یا آزمایش تصادفی باشد «هر زیرمجموعهٔ S را یک **پیشامد تصادفی** در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.» به‌عنوان مثال وقتی یک سکّه را می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای به‌صورت S = {ر,پ} تعریف می‌شود، مجموعهٔ S دارای $۴ = ۲^۲$

زیرمجموعه است که طبق تعریف فوق هرکدام از زیرمجموعه‌های S یعنی هریک از مجموعه‌های $A_1=\{پ\}$ و $A_2=\{ر\}$ و $A_3=\{\}$ و $S=A_4=\{ر,پ\}$ یک پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای $S=\{ر,پ\}$ می‌باشد.

پیشامد $A_3=\varnothing$ را **پیشامد نشدنی** و پیشامد $A_4=S$ را **پیشامد حتمی** می‌نامیم.

هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ایِ S مانند A را یک پیشامد تصادفی نامیدیم و «اگر A یک پیشامد تصادفی باشد و نتیجه آزمایش عضوی از A باشد، می‌گوییم A رخ داده است». قبل از ورود به بحث احتمال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: خانواده‌ای دارای سه فرزند است اگر پیشامد A، هم‌جنس بودنِ دو فرزند اول و پیشامد B وجود یک فرزند پسر در این خانواده باشد، A و B را مشخص کنید.

حل: فضای نمونه‌ای این پدیده $۸=۲\times۲\times۲$ عضو دارد و پیشامدهای A و B از این فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$A=\{$(پ,پ,پ) و (پ,پ,د) و (د,د,د) و (د,د,پ)$\}$

$B=\{$(پ,د,د) و (د,پ,د) و (د,د,پ)$\}$

مثال ۲: یک تاس و یک سکّه را با هم می‌اندازیم و پیشامد A را به این صورت تعریف می‌کنیم که تاس عدد زوج و سکّه «رو» بیاید و پیشامد B را به این صورت تعریف می‌کنیم که سکّه «پشت» و تاس عدد کمتر از ۴ باشد، A و B را مشخص کنید.

حل: می‌دانیم فضای نمونه‌ای این مثال دارای $۱۲=۶\times۲$ عضو است و داریم:

$A=\{$(رو,۲) و (رو,۴) و (رو,۶)$\}$

$B=\{$(پشت,۱) و (پشت,۲) و (پشت,۳)$\}$

مثال ۳: دو تاس را با هم می‌اندازیم و پیشامدهای A و B را به‌ترتیب «مجموع اعداد دو تاس برابر ۷» و «عدد رو شده حداقل یک تاس برابر ۶» تعریف می‌کنیم، پیشامدهای A و B را معلوم کنید.

حل: فضای نمونه‌ای انداختن دو تاس دارای $۳۶=۶\times۶$ عضو است و داریم:

$$A=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}\rightarrow n(A)=۶$$

$$B=\{(۱,۶),(۲,۶),\ldots,(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),\ldots,(۶,۵),(۶,۶)\}\rightarrow n(A)=۱۱$$

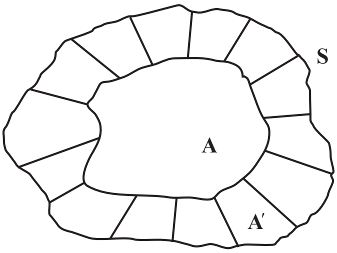
اعمال روی پیشامدها

دیدیم که پیشامدهای یک فضای نمونه‌ای زیرمجموعه‌هایی مانند A و B و C و... از آن فضا

هستند و بنابراین اعمالی چون اجتماع ( )، اشتراک ( ) یا تفاضل (−) بین مجموعه‌ها و نیز متمم یک مجموعه مانند A یعنی A' در پیشامدها نیز قابل تعریف و تعبیر است که به ذکر آن‌ها می‌پردازیم :

متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی و $A \subseteq S$ پیشامدی در این فضای نمونه‌ای باشد، متمم پیشامد A را با A' نمایش می‌دهیم و تعبیر آن چنین است که «پیشامد A' زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.»

در واقع دو پیشامد A و A' کلِ فضای نمونه‌ای S را تشکیل می‌دهند. به شکل زیر توجه کنید.

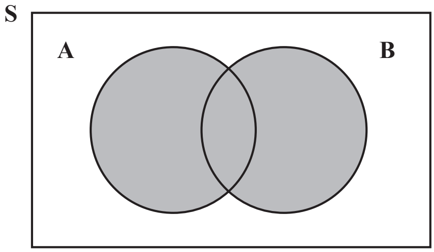


تذکر: با توجه به تعریف متمم یک پیشامد نتایج زیر حاصل می‌شوند :

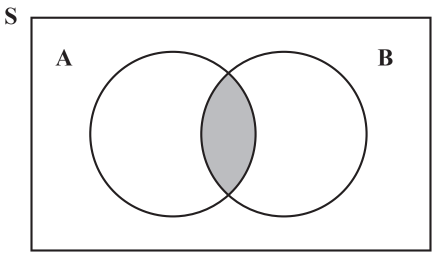
الف) $A \quad A' = S$

ب) $A \quad A' = \varnothing$

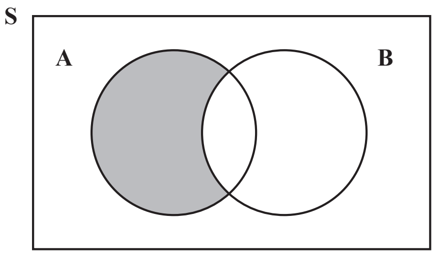
ج) $n(A') = n(S) - n(A)$



اجتماع دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \quad B$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \quad B$ مشخص شده است.



اشتراک دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد $A \quad B$ زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A \quad B$ مشخص شده است.



تفاضل دو پیشامد: اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، پیشامد A-B زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد. در شکل مقابل پیشامد A-B مشخص شده است.

پیشامدهای ناسازگار: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \quad B = \varnothing$ در این صورت آن‌ها را دو پیشامد **ناسازگار** می‌نامیم. درواقع اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند با هم رخ نمی‌دهند.

مثال: دو تاس را با هم می‌اندازیم (یا تاسی را دو بار می‌اندازیم) و پیشامدهای A و B و C را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A = پیشامد آن که عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ باشد

B = پیشامد آن که مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد

C = پیشامد آن که اعداد رو شده متمایز باشند

هر یک از پیشامدهای $A \quad B$ و $A \quad B$ و C' و A-B و A-C را مشخص کنید.

حل: ابتدا مجموعه‌های A و B و C را مشخص می‌کنیم.

$$A = \{(۴,۱),(۴,۲),\ldots,(۴,۶)\} \rightarrow n(A) = ۶$$

$$B = \{(۱,۶),(۶,۱),(۵,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳)\} \rightarrow n(B) = ۶$$

$$C = \{(۲,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۲,۴),(۴,۲),\ldots,(۵,۶),(۶,۵)\} \rightarrow n(C) = ۳۰$$

C' = پیشامد آن که اعداد رو شدهٔ دو تاس با هم برابر باشند

$$C' = \{(۱,۱),(۲,۲),\ldots,(۶,۶)\}$$

$$A \quad B = \{(۱,۶),(۶,۱),(۵,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)\}$$

($A \quad B$ یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ یا مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد)

$$A \quad B = \{(۴,۳)\}$$

($A \quad B$ یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ و مجموع اعداد دو تاس ۷ باشد)

$$A - B = \{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶)\}$$

(A-B یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ باشد و مجموع اعداد دو تاس ۷ نباشد)

$$A - C = A \quad C' = \{(۴,۴)\}$$

(A-C یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ باشد و اعداد دو تاس متمایز نباشند)

حالا می‌خواهیم امکان به‌وقوع پیوستن هر پیشامد تصادفی مانند A در یک فضای نمونه‌ای چون S را اندازه‌گیری کنیم یا اصطلاحاً احتمال وقوع هر پیشامد را محاسبه کنیم.

فرض کنید در یک جعبه ۴ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی (۴ مهره قرمز با شماره‌های ۱ تا ۴ و ۲ مهره

آبی با شماره‌های ۱ و ۲) موجود است. اگر به تصادف ۱ مهره از این جعبه خارج کنیم با توجه به‌این‌که مهره‌های قرمز در جعبه بیشتر از مهره‌های آبی هستند، واضح است که شانس خارج شدنِ مهرهٔ قرمز از شانس خارج شدن مهرهٔ آبی بیشتر باشد، حال اگر A را پیشامد خارج شدن مهرهٔ قرمز و B را پیشامد خارج شدن مهرهٔ آبی تعریف کنیم و کسر حاصل از تقسیم تعداد مهره‌های آبی به تعداد کل مهره‌ها را P(A) و کسر حاصل از تقسیم مهره‌های قرمز به تعداد کلّ مهره‌های جعبه را P(B) بنامیم، خواهیم داشت :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید $P(A)=۲P(B)$ و این‌که شانسِ رخداد پیشامد A دو برابر شانسِ رخداد پیشامد B باشد، با توجه به دو برابر بودن تعداد مهره‌های قرمز نسبت به مهره‌های آبی از قبل پیش‌بینی می‌شد، یعنی تقسیم تعداد حالت‌های مطلوب بر تعداد کل حالت‌های ممکن $(\frac{n(A)}{n(S)})$ عددی را به‌دست می‌دهد که با انتظار و توقع ما مطابقت دارد و همین فرمول $\left(P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\right)$ در فضاهای قابل شمارش[1] به‌عنوان فرمول احتمال به‌کار می‌رود.

احتمال رخداد پیشامد A

احتمال رخداد پیشامد A از فضای نمونه‌ای S را با P(A) نشان می‌دهیم و برای محاسبهٔ P(A) کافی است تعداد اعضای A یعنی n(A) را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یعنی n(S) تقسیم کنیم. عدد حاصل یعنی P(A) عددی حقیقی است که شانسِ رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کند.

$$\text{احتمال رخداد پیشامد A در فضای S}=P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

از آن‌جا که A پیشامدی در فضای S است، طبق تعریف داریم :

$$A\subseteq S\Rightarrow ۰\le n(A)\le n(S)$$

اگر طرفین نامساوی‌های اخیر را n(S) تقسیم کنیم خواهیم داشت،

$$\frac{۰}{n(S)}\le\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(S)}{n(S)}\Rightarrow ۰\le P(A)\le ۱$$

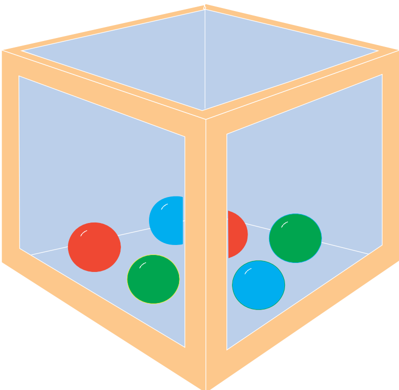
۱ــ فضای قابل شمارش به فضا یا مجموعه‌ای گفته می‌شود که تعداد اعضای آن را با شمارش به‌دست می‌آوریم.

هم‌چنین با توجه به تعریف احتمال داریم :

$$P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=\frac{۰}{n(S)}=۰$$

$$P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=۱$$

توجه دارید که هر چقدر تعداد اعضای A بیشتر باشد، کسرِ $\frac{n(A)}{n(S)}$ بزرگتر و به عدد یک نزدیک‌تر بوده و اصطلاحاً می‌گوییم احتمال رخداد پیشامد A بیشتر است.



تمرین

فرض کنید در یک جعبه ۱۲ مهرهٔ آبی و ۶ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ سبز وجود داشته باشد. اگر از این جعبه ۱ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آبی بودن، قرمز بودن و سبز بودنِ مهرهٔ خارج شده را محاسبه کرده و اعداد حاصل را با حدسی که قبل از محاسبهٔ این احتمالات، زده بودید، مقایسه کنید.

قانون جمع احتمالات

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند داریم :

$$P(A \quad B)=P(A)+P(B)-P(A \quad B)$$

که تساوی فوق از تقسیم طرفین تساوی $n(A \quad B)=n(A)+n(B)-n(A \quad B)$ (که به اصل شمول معروف است)، بر $n(S)$ به‌دست می‌آید، و به آن قانون جمع احتمالات گفته می‌شود.

احتمال پیشامد متمّم: اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S و A' متمم آن باشد، در این‌صورت :

$$P(A \quad A')=P(A)+P(A')-P(A \quad A')$$

$$\Rightarrow P(S)=P(A)+P(A')-P(\varnothing)$$

$$\Rightarrow ۱=P(A)+P(A')\Rightarrow P(A)=۱-P(A')$$

احتمال پیشامدهای ناسازگار

قبلاً گفتیم که اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \varnothing$ در این‌صورت A و B را دو پیشامد **ناسازگار** و اگر $A \cap B \neq \varnothing$ ، آن‌ها را **سازگار** می‌نامیم، به نکتهٔ زیر توجه کنید.

نکته: با توجه به قانون جمع احتمالات، اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، چون $A \cap B = \varnothing$ و $P(\varnothing) = 0$ بنابراین می‌توان نوشت :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

درحالت کلّی‌تر، اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهایی دو به دو ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند نیز داریم :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

مثال ۱: وقتی تاسی را می‌اندازیم، اگر پیشامد A را «رو شدنِ عدد زوج» و پیشامد B را «رو شدن عدد فرد» و C را پیشامد «رو شدن عدد اول» تعریف کنیم، یعنی $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,3,5\}$ و $C = \{2,3,5\}$ در این‌صورت A و B ناسازگارند ولی A و C سازگار و B و C نیز سازگارند.

مثال ۲: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان این خانواده را مشخص کرده و احتمال آن را محاسبه کنید که : الف) حداقل ۲ فرزند این خانواده دختر باشند. ب) فقط ۱ فرزند در این خانواده پسر باشد.

حل: فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر است :

S= {(د,د,پ) و(د,پ,د) و(پ,د,د) و(د,د,د) و(پ,پ,د) و(پ,د,پ) و(د,پ,پ) و(پ,پ,پ)}

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

الف) اگر A را پیشامد «حداقل ۲ فرزند دختر» تعریف کنیم (یا دو دختر یا هر سه دختر) در این‌صورت :

S= {(د,د,د) و(د,د,پ) و(د,پ,د) و(پ,د,د)}

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ب) اگر C را پیشامد «فقط ۱ پسر» تعریف کنیم، در این‌صورت :

$$C=\{(\text{پ,د,د})\ \text{و}(\text{د,پ,د})\ \text{و}(\text{د,د,پ})\}\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

مثال ۳: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ زرد می‌باشد، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) هر سه سبز باشند ب) هر سه همرنگ باشند ج) فقط ۲ مهره آبی باشد د) حداقل ۱ مهره آبی باشد هـ) حداکثر ۲ مهره سبز باشد.

حل: فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن در انتخاب ۳ مهره از بین ۱۱ مهرهٔ موجود در جعبه است که تعداد اعضای آن برابر است با :

$$n(S)=\binom{۱۱}{۳}=\frac{۱۱!}{(۱۱-۳)!\times ۳!}=۱۶۵$$

الف) A : پیشامد هر سه سبز $\Rightarrow n(A)=\binom{۵}{۳}=۱۰\Rightarrow P(A)=\frac{۱۰}{۱۶۵}=\frac{۲}{۳۳}$

ب) B: پیشامد هر سه همرنگ (یا هر سه سبز یا هر سه آبی)

$$\Rightarrow n(B)=\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳}=۱۴\Rightarrow P(B)=\frac{۱۴}{۱۶۵}$$

ج) C : پیشامد فقط ۲ مهره آبی (۲ مهره آبی و ۱ مهره غیرآبی)

$$\Rightarrow n(C)=\binom{۴}{۲}\times\binom{۷}{۱}=۴۲\Rightarrow P(C)=\frac{۴۲}{۱۶۵}=\frac{۱۴}{۵۵}$$

د) D: پیشامد حداقل ۱ مهره آبی (هر سه آبی یا دو آبی و یک غیرآبی یا یک آبی و دو غیرآبی)

$$\Rightarrow n(D)=\binom{۴}{۱}\times\binom{۷}{۲}+\binom{۴}{۲}\times\binom{۷}{۱}+\binom{۴}{۳}=۴\times۲۱+۶\times۷+۴$$

$$\Rightarrow n(D)=۱۳۰\ \Rightarrow P(D)=\frac{۱۳۰}{۱۶۵}=\frac{۲۶}{۳۳}$$

روش ساده‌تر برای حل قسمت (د) آن است که از پیشامد متمم استفاده کنیم. متمّم پیشامد «حداقل ۱ مهره آبی» یعنی D' ، پیشامد «هیچ مهره‌ای آبی» است که معنی آن هر سه غیرآبی بوده و

$$n(D')=\binom{۷}{۳}=۳۵$$

$$P(D')=\frac{۳۵}{۱۶۵}=\frac{۷}{۳۳}\quad,\quad P(D)=۱-P(D')=۱-\frac{۷}{۳۳}=\frac{۲۶}{۳۳}$$

هـ) E : پیشامد «حداکثر ۲ مهره سبز»

E' : پیشامد «هر سه مهره سبز» $\Rightarrow n(E') = \binom{۵}{۳} = ۱۰$

$$P(E') = \frac{۱۰}{۱۶۵} = \frac{۲}{۳۳} \ , \ P(E) = ۱ - P(E') = ۱ - \frac{۲}{۳۳} = \frac{۳۱}{۳۳}$$

مثال ۴: دو تاس را با هم می‌اندازیم، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) اعداد رو شدهٔ هر دو تاس زوج باشند. ب) اعداد رو شدهٔ هر دو تاس مثل هم باشند. ج) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۸ یا اعداد رو شدهٔ هر دو تاس زوج باشند. د) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس کمتر از ۱۰ باشد. هـ) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس مضرب ۴ باشد.

حل: با توجه به این‌که دو تاس را همواره دو شیئی متمایز (تاس آبی و تاس قرمز) درنظر می‌گیریم، فضای نمونه‌ای این پدیده تصادفی دارای $۶ \times ۶ = ۳۶$ عضو است.

الف) $A = \{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}$

$$n(A) = ۹ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

ب) $B = \{(۱,۱),(۲,۲), \quad ,(۶,۶)\} \Rightarrow n(B) = ۶ \ , \ P(B) = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$

ج)
C : پیشامد مجموع دو تاس ۸ $\Rightarrow C = \{(۲,۶),(۶,۲),(۵,۳),(۳,۵),(۴,۴)\}$

D : پیشامد هر دو تاس زوج $\Rightarrow D = \{(۲,۲), \quad ,(۶,۴),(۶,۶)\}$

پیشامد «مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۸ یا اعداد رو شدهٔ هر دو تاس زوج» یعنی پیشامد $C \quad D$ و طبق قانون جمع احتمالات داریم :

$$P(C \quad D) = P(C) + P(D) - P(C \quad D) = \frac{۵}{۳۶} + \frac{۹}{۳۶} - \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱۱}{۳۶}$$

$(C \quad D = \{(۲,۶),(۶,۲),(۴,۴)\})$

د) E : مجموع دو تاس کمتر از ۱۰

E' : مجموع دو تاس بزرگتر یا مساوی ۱۰

$$E' = \{(۶,۶),(۶,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۴,۶),(۵,۵)\} \Rightarrow P(E') = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

و) $P(E) = ۱ - P(E') = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$

هـ) F : پیشامد مجموع دو تاس مضرب ۴

در بین اعداد ۲ تا ۱۲ که مجموع دو تاس می‌تواند هریک از این اعداد باشد، مضارب ۴ عبارتند از ۴ و ۸ و ۱۲ بنابراین :

$$F=\{(۲,۲),(۱,۳),(۳,۱),(۲,۶),(۶,۲),(۵,۳),(۳,۵),(۴,۴),(۶,۶)\}$$

$$n(F)=۹\ ,\ \ P(F)=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

تمرین

۱ــ کدام‌یک از پدیده‌های زیر تصادفی است

الف) انداختن یک تاس که روی هر ۶ وجه آن عدد ۱ حک شده باشد.

ب) انداختن دو تاس سالم با هم

ج) به دنیا آمدنِ یک نوزاد در ماه خرداد

۲ــ هر یک از اعداد فرد و طبیعی کوچک‌تر از ۱۸ را روی یک کارت نوشته و یکی از این کارت‌ها را به تصادف برمی‌داریم ؛

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت بر ۳ بخش‌پذیر باشد را مشخص کنید.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول یا زوج باشد را مشخص کنید.

۳ــ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است :

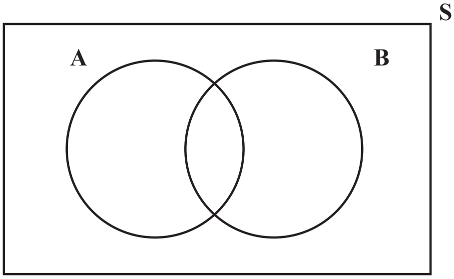
الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

ب) پیشامد A که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.

ج) پیشامد B که در آن حداقل یک فرزند پسر باشد.

د) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد.

هـ) هر یک از پیشامدهای $A \quad B$ و $A\text{-}C$ و B' را مشخص کنید، آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟



۴ــ با توجه به شکل مقابل پیشامد $(A-B)\quad(B-A)$ را علامت بزنید. (این پیشامد را «فقط A رخ دهد یا فقط B رخ دهد» تعریف می‌کنیم.)

۵ــ تمام اعداد دو رقمی را که با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۵ می‌توان ساخت، روی کارت‌های متمایزی نوشته و در یک کیسه قرار می‌دهیم و سپس یکی از این کارت‌ها را به تصادف خارج می‌کنیم مطلوب است :

الف) فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی

ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۴ باشد.

ج) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، کوچک‌تر از ۴۰ باشد.

د) پیشامدهای (A   B) و (A   B)

۶ــ در تمرین ۵ مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

ب) عدد روی کارت مضرب ۳ یا مضرب ۴ باشد.

ج) عدد روی کارت مضرب ۳ باشد و مضرب ۴ نباشد.

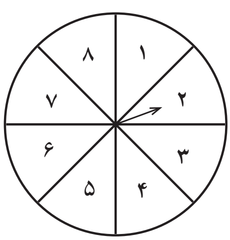
۷ــ از جعبه‌ای که حاوی ۱۲ سیب سالم و ۵ سیب خراب است، ۳ سیب به تصادف برمی‌داریم، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) هر سه سیب سالم باشند.

ب) دو سیب، سالم و یکی خراب باشد.

ج) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های خراب بیشتر باشد.

۸ــ عقربه‌ای مطابق شکل زیر و به تصادف پس از به حرکت درآمدن روی یکی از ۸ ناحیهٔ شکل می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد :



الف) عقربه عددی اول را نشان دهد.

ب) عقربه عددی اول یا فرد را نشان دهد.

ج) عقربه روی عدد مضرب ۳ بایستد.

پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S بوده و رخداد و یا عدم رخداد هریک تأثیری در رخداد دیگری نداشته باشد، این دو پیشامد را مستقل از هم می‌نامیم. به‌عنوان مثال به دنیا آمدن فرزندان در یک خانواده پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند و یا انداختن دو تاس آبی و قرمز را درنظر بگیرید و پیشامد A را رو شدنِ عدد زوج در تاس آبی و پیشامد B را رو شدنِ عدد اول در تاسِ قرمز فرض کنید، در این‌صورت دو پیشامد A و B مستقل از هم می‌باشند زیرا A رخ بدهد یا رخ ندهد پیشامد B می‌تواند رخ دهد.

قانون ضرب احتمالات برای دو پیشامد مستقل

اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند، $P(A \quad B)=P(A)\times P(B)$ و برعکس اگر تساوی اخیر برقرار باشد دو پیشامد A و B مستقل خواهند بود. توجه داشته باشید که قانون ضرب احتمالات برای هر چند پیشامد که دو به دو مستقل باشند برقرار است.

مثال ۱: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) فرزندان، به‌صورت یک در میان پسر و دختر (یا دختر و پسر) باشند.

ب) هر ۳ فرزند پسر باشند.

ج) فرزند سوم دختر باشد.

حل: جنسیت فرزندان در یک خانواده پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند، بنابراین می‌توان برای حل این مثال از قانون ضرب احتمالات استفاده کرد :

الف) $A=\{$(پ,د,پ) و (د,پ,د)$\}$

روش اول: $n(S)=۲^۳=۸\ ,\ n(A)=۲ \Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

روش دوم : $P(A)=P$ {(پ,د,پ)} $+P$ {(د,پ,د)}

$$\Rightarrow P(A)=(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۸}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

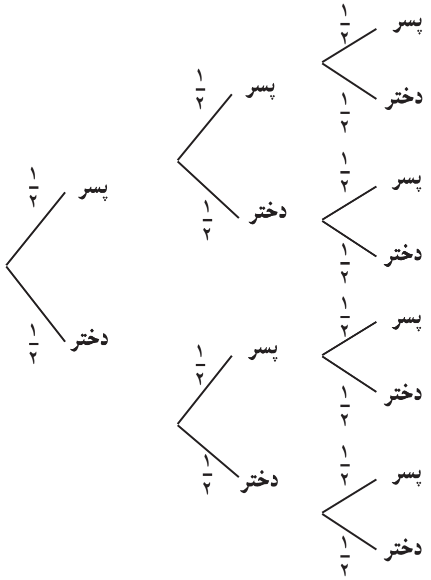
ب) B : پیشامد هر ۳ فرزند پسر $\Rightarrow P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$

ج) C : پیشامد فرزند سوم دختر $\Rightarrow P(C)=\frac{۱}{۲}$

توجه دارید که پیشامد جنسیت فرزند سوم با جنسیت فرزندان قبل از خود مستقل است.

تمرین

به نمودار درختیِ این پدیده دقت کنید و جواب‌های سه قسمتِ این مثال را از روی نمودار به‌دست آورید.



مثال ۲: آزمایش‌های انجام شده روی دو شخص A و B نشان می‌دهد که احتمال بهبود شخص A پس از عمل جراحی پیوند کلیه ۸۰٪ و احتمال بهبود شخصِ B پس از عمل جراحی پیوند کلیه ۶۰٪ است. اگر این دو نفر تحت عمل پیوند کلیه قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو نفر سلامتی خود را به‌دست آورند.

ب) حداقل یکی از این دو نفر بهبود یابد.

حل: پیشامدهای بهبودی هریک از این دو نفر مستقل از هم می‌باشد بنابراین:

الف) C : پیشامد بهبودی هر دو نفر

$$P(C)=\frac{۸۰}{۱۰۰}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}=\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱۲}{۲۵}$$ یا ۴۸٪

ب) $\begin{cases} A_1 : A & \text{پیشامد بهبودی شخص} \\ B_1 : B & \text{پیشامد بهبودی شخص} \end{cases}$

$$P(A_1 \quad B_1)=P(A_1)+P(B_1)-P(A_1 \quad B_1)$$

$$\Rightarrow P(A_1 \quad B_1)=\frac{۸۰}{۱۰۰}+\frac{۶۰}{۱۰۰}-\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۷}{۵}-\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۲۳}{۲۵}$$ یا ۹۲٪

مثال ۳: احتمال این‌که شخصی گروه خونی A^+ داشته باشد ۲۵٪ است و احتمال این‌که او ناراحتی قلبی داشته باشد ۲۰٪ است و احتمال این‌که گروه خونی او A^+ یا ناراحتی قلبی داشته باشد ۴۰٪ است چقدر احتمال دارد این شخص هم ناراحتی قلبی داشته باشد و هم گروه خونی او A^+ باشد؟

حل:

روش اول: طبق قانون جمع احتمالات اگر A و B را به‌ترتیب داشتنِ گروه خونی A^+ و داشتن ناراحتی قلبی تعریف کنیم، در این‌صورت داریم :

$$P(A\quad B)=P(A)+P(B)-P(A\quad B)$$
$$\Rightarrow \frac{۴۰}{۱۰۰}=\frac{۲۵}{۱۰۰}+\frac{۲۰}{۱۰۰}-P(A\quad B)\Rightarrow P(A\quad B)=\frac{۵}{۱۰۰}$$

روش دوم: دو پیشامد A و B مستقل از یکدیگرند، بنابراین :

$$P(A\quad B)=P(A)\times P(B)=\frac{۲۵}{۱۰۰}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۵۰۰}{۱۰۰۰۰}=\frac{۵}{۱۰۰}$$

مثال ۴: چقدر احتمال دارد در یک تیم والیبال (تیم ۶ نفره) الف) همه در ماه خرداد متولد شده باشند؟ ب) هیچ دو نفری در یک ماه متولد نشده باشند؟

حل: الف) احتمال به دنیا آمدنِ یک نفر در یک ماه خاصّ مانند خرداد، برابر است با $\frac{۱}{۱۲}$ و چون متولد شدن افراد در ماه‌های سال پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند در این‌صورت احتمال به دنیا آمدن هر ۶ نفر در ماه خرداد طبق قانون ضرب احتمالات، برابر است با :

$$P(A)=\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}\times\frac{۱}{۱۲}=(\frac{۱}{۱۲})^{۶}$$

ب) اگر فرض کنیم B پیشامد آن باشد که هیچ دو نفری از این ۶ نفر، ماه تولدِ یکسان نداشته باشد، در این‌صورت برای نفر اول از این ۶ نفر، هر ۱۲ ماه مطلوب است و نفر دوم در هر ماهی به‌جز ماه تولد نفر اول می‌تواند متولد شود و نفر سوم در هر ماهی به‌جز ماه تولدِ دو نفر قبل و... و برای نفر ششم هر ماه، جز ماه تولدِ ۵ نفر قبل، مطلوب است بنابراین :

$$P(B)=\frac{۱۲}{۱۲}\times\frac{۱۱}{۱۲}\times\frac{۱۰}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۳۸۵}{۱۷۲۸}$$

تمرین: چقدر احتمال دارد در یک کلاس ۲۵ نفری روز تولد هیچ دو نفری یکسان نباشد؟

مثال ۵: ۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر یکدیگرند به تصادف در یک ردیف می‌ایستند، چقدر احتمال دارد، الف) دو برادر کنار هم قرار گرفته باشند ب) دو برادر در اول و آخر صف واقع شده باشند.

حل: فضای نمونه‌ای عبارت است از کل حالت‌هایی که ۶ نفر می‌توانند در یک ردیف، کنار هم قرار بگیرند که این تعداد حالت برابر است با $n(S)=۶!=۷۲۰$ حال اگر پیشامد کنار هم قرار گرفتن دو برادر را A و پیشامد واقع شدنِ دو برادر در دو طرفِ صف را B فرض کنیم خواهیم داشت:

الف) دو برادر را کنار هم قرار داده و ۱ نفر فرض می‌کنیم و با ۴ نفر دیگر ۵ نفر می‌شوند که به !۵ طریق کنار هم قرار می‌گیرند و خودِ برادرها نیز به !۲ طریق می‌توانند در عین حال که کنار هم هستند با هم جابه‌جا شوند، پس:

$$n(A)=۵!\times ۲!$$

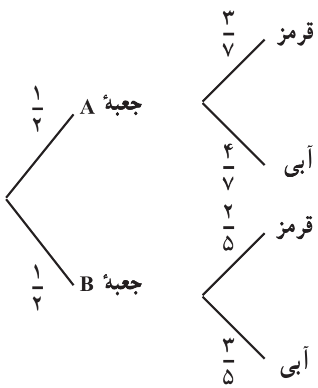
$$\Rightarrow P(A)=\frac{۵!\times ۲!}{۶!}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

ب) اگر ۶ جایگاه برای این شش نفر درنظر بگیریم در جایگاه اول از سمت چپ هریک از دو برادر می‌توانند قرار بگیرند و جایگاه ششم برادر دیگر و ۴ جایگاه بین آن‌ها توسط ۴ نفر دیگر به !۴ طریقِ ممکن می‌تواند تغییر کند، لذا:

$$n(B)=۲\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱\times ۱=۲\times ۴!$$

$$P(B)=\frac{۲\times ۴!}{۶!}=\frac{۲}{۶\times ۵}=\frac{۱}{۱۵}$$

مثال ۶: در جعبهٔ A سه مهرهٔ قرمز، ۴ مهرهٔ آبی و در جعبهٔ B، ۲ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد، یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و ۱ مهره به تصادف از آن جعبه خارج می‌کنیم، چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟



حل: برای حل این‌گونه مسائل که از ابتدا چند راه انتخاب برای ما وجود داشته باشد و از هر راهی که حرکت کنیم رخداد پیشامد مزبور (آبی بودنِ مهره) ممکن باشد، از نمودار درختی می‌توانیم استفاده کنیم:

درواقع احتمالِ آبی بودنِ مهرهٔ انتخابی معادل است با این‌که «یا به احتمال $\frac{۱}{۲}$ جعبهٔ A انتخاب و مهرهٔ انتخاب شده به احتمال $\frac{۴}{۷}$ آبی است و یا به احتمال $\frac{۱}{۲}$ جعبهٔ B انتخاب و مهرهٔ انتخابی از آن به احتمال $\frac{۳}{۵}$ آبی است»

$$P(\text{آبی})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۴۱}{۷۰}$$

مثال ۷: تاسی را سه بار می‌اندازیم مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) هر سه عدد رو شده مثل هم باشند.

ب) هر سه عدد رو شده متمایز باشند. (هیچ دو عددی مثل هم نباشند)

ج) مجموع اعداد رو شدهٔ سه تاس بزرگ‌تر از ۱۶ باشد.

حل:

الف) $A=\{(۱,۱,۱),(۲,۲,۲),\ldots,(۶,۶,۶)\} \to n(A)=۶, n(S)=۶\times۶=۳۶$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۲۱۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

ب) برای این‌که اعداد رو شدهٔ سه تاس متمایز باشند، تاس اول هر عددی می‌تواند باشد که برای آن ۶ حالت ممکن است و تاس دوم هر عددی به‌جز عدد رو شده در تاس اول می‌تواند باشد یعنی ۵ حالت دارد و برای تاس سوم هر عددی به‌جز دو عدد رو شده در تاس‌های اول و دوم یعنی ۴ حالت موجود است و لذا طبق اصل ضرب به $۶\times۵\times۴=۱۲۰$ طریق امکان دارد سه تاس متمایز باشند، بنابراین :

$$P(B)=\frac{۱۲۰}{۲۱۶}=\frac{۵}{۹}$$

ج) $C=\{(۶,۶,۶),(۶,۶,۵),(۶,۵,۶),(۵,۶,۶)\} \to n(C)=۴$

$$\Rightarrow P(C)=\frac{۴}{۲۱۶}=\frac{۱}{۵۴}$$

(مجموع اعداد رو شدهٔ سه تاس از عدد ۳ تا ۱۸ می‌تواند تغییر کند و مجموع اعداد رو شده بزرگ‌تر از ۱۶ یعنی مجموع دو تاس یا ۱۷ و یا ۱۸ باشد.)

مثال ۸: تاسی را دو بار می‌اندازیم و دو پیشامد A و B را در حالت‌های زیر تعریف می‌کنیم در هر حالت مستقل بودن یا نبودنِ دو پیشامد A و B را بررسی کنید :

الف)
- A : پیشامد آن که عدد رو شدهٔ تاس اول ۵ باشد
- B : پیشامد آن که مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۱۱ باشد

ب)
- A : پیشامد آن که عدد رو شدهٔ تاس اول ۴ باشد
- B : پیشامد آن که مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۷ باشد

حل: الف) با توجه به تعریف دو پیشامد A و B داریم :

$$A=\{(۵,۱),\ldots,(۵,۶)\}\rightarrow n(A)=۶\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$B=\{(۵,۶),(۶,۵)\}\rightarrow n(B)=۲\Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

$$A\quad B=\{(۵,۶)\}\rightarrow n(A\quad B)=۱\Rightarrow P(A\quad B)=\frac{۱}{۳۶}$$

و چون $P(A\quad B)\neq P(A)\times P(B)$ پس A و B مستقل از هم نیستند.

در این حالت توجه دارید که طبق تعریف نیز به همین نتیجه می‌رسیم زیرا اگر A رخ ندهد (عدم رخداد A) یعنی عدد رو شدهٔ تاس اول ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۶ بیاید، در ۴ حالتِ اول، پیشامد Bیعنی مجموع اعداد رو شده برابر ۱۱ نمی‌تواند رخ بدهد.

ب) در این قسمت نیز مشابه (الف) داریم :

$$P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\;,\;\; P(B)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\quad B=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$$

$$A\quad B=\{(۴,۳)\}\quad,\quad P(A\quad B)=\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۶}=P(A)\times P(B)$$

پس A و B مستقل از یکدیگر بوده و با توجه به تعریف نیز همین نتیجه به‌دست می‌آید زیرا اگر A رخ دهد، B می‌تواند رخ دهد و اگر A رخ ندهد (عدد رو شدهٔ تاس اول ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۶) بیاید در هر حالت B یعنی مجموع اعداد رو شده برابر ۷ می‌تواند رخ دهد.

تمرین

۱ــ یک تاس و یک سکّه را با هم می‌اندازیم اولاً فضای نمونه‌ای این پدیده را تشکیل دهید (مجموعهٔ S را مشخص کنید) و سپس احتمال آن را حساب کنید که عدد رو شدهٔ تاس عدد اول و سکه پشت بیاید.

۲ــ در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ سبز و ۲ مهرهٔ قرمز وجود دارد، سه مهره به تصادف و پی‌درپی و با جایگذاری از این کیسه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مهرهٔ اول آبی، دومی سبز و سومی آبی باشد؟ اگر این عمل را بدون جایگذاری انجام دهیم چقدر احتمال دارد مهرهٔ اول آبی و دومی سبز و سومی آبی باشد؟

۳ــ خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) ۲ فرزند این خانواده پسر باشد. ب) حداقل ۲ فرزند خانواده پسر باشد.

ج) تعداد فرزندان پسر بیشتر از تعداد فرزندان دختر باشد.

۴ــ ۵ نفر را درنظر می‌گیریم، چقدر احتمال دارد :

الف) هر ۵ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند.

ب) هیچ دو نفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند.

۵ــ احتمال آن که فرزندی در خانوادهٔ A با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود ۲۰٪ و احتمال آن که نوزادی در خانوادهٔ B با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شود ۷۵٪ است. چقدر احتمال دارد حداقل یکی از این دو نوزاد با چشم‌هایی به رنگ روشن متولد شوند؟

(**راهنمایی:** این دو پیشامد مستقل از هم بوده و $P(A \quad B)=P(A)\times P(B)$ است.)

۶ــ در کیسه‌ای ۳ مهرهٔ سیاه و ۴ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن‌که :

الف) هیچ دو مهره‌ای همرنگ نباشند.

ب) حداقل دو مهره همرنگ باشند.

ج) هیچ مهره‌ای قرمز نباشد.

۷ــ احتمال آن که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۶ و احتمال آن که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۷ است، چقدر احتمال دارد :

الف) هر دو، تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند.

ب) حداقل یکی از آن‌ها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا نکند.

۸ــ می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز کلاس دوم و ۷ دانش‌آموز کلاس سوم یک تیم ۳ نفره به‌تصادف انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد :

الف) هیچ دانش‌آموز کلاس دوم در تیم نباشد.

ب) تعداد دانش‌آموزان کلاس سوم در تیم انتخابی از تعداد دانش‌آموزان کلاس دوم بیشتر باشد.

۹ــ دو تاس را با هم می‌اندازیم، مطلوب است احتمال آن که :

الف) حاصلضرب اعداد رو شدهٔ دو تاس مضرب ۵ باشد.

ب) اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند.

ج) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس ۷ یا هر دو فرد باشند.

د) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس بزرگ‌تر از ۵ باشد.

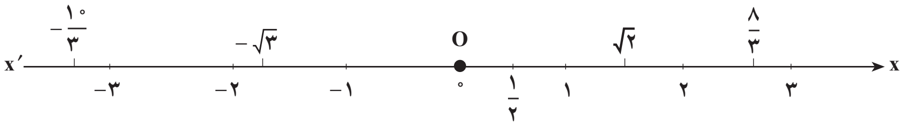
هـ) هر دو تاس بزرگ‌تر از ۲ باشند. و) مجموع اعداد رو شدهٔ دو تاس مضرب ۳ باشد.

فصل دوم

تابع

یادآوری و تکمیل

می‌دانیم که هر عدد حقیقی متناظر با یک نقطه از محور مختصات و هر نقطه از محور مختصات، نظیر یک عدد حقیقی است. بدین‌ترتیب که مبدأ O را همتا یا نظیر عدد صفر گرفت ؛ آنگاه، اگر x یک عدد حقیقی مثبت باشد، نقطه‌ای از محور را که به فاصلهٔ x از O و در سمت راست O (سوی مثبت قرار دارد نظیر عدد x و چنانچه x یک عدد حقیقی منفی باشد (که در این‌صورت $-x$ مثبت است) نقطه‌ای از محور را که به فاصلهٔ $-x$ از O و در سمت چپ آن است نظیر عدد x اختیار کرد. بدین‌گونه به هر عدد حقیقی یک نقطه از محور، و تنها یکی، و به هر نقطه از محور یک عدد حقیقی یکتا نسبت داده می‌شود. بنابراین نقاط یک محور را می‌توانیم با اعداد حقیقی مشخص کنیم. به‌این جهت محور را گاهی خط حقیقی می‌نامند و برای یک عدد حقیقی و نقطهٔ نظیر آن یک نماد به‌کار می‌برند و عدد حقیقی x را نقطهٔ x نیز می‌گویند.



بازه

در ریاضیات ۲ با مثال‌هایی از بازه آشنا شده‌اید و می‌دانید که مثلاً بازهٔ باز ۲− و ۶ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x بین ۲− و ۶ یعنی $-2<x<6$ است که به‌صورت $(-2,6)$ نشان داده می‌شود.

$$(-2,6)=\{x\in\mathbb{R} \mid -2<x<6\}$$

به‌طور کلی اگر a و b دو عدد حقیقی و $a<b$ باشد :

۱ــ مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی x را که از a بزرگ‌تر و از b کوچک‌تر باشند بازهٔ باز a و b می‌نامند و آن را به‌صورت زیر نمایش می‌دهند :

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$$

۲ــ اجتماع بازهٔ باز (a,b) و دو نقطهٔ a و b را بازهٔ بستهٔ a و b می‌نامند و آن را چنین می‌نویسند :

$$[a,b]=\{x\in \mathbb{R}|a\le x\le b\}$$

۳ــ اجتماع (a,b) و نقطهٔ b را بازهٔ نیم‌باز از چپ (یا نیم‌بسته از راست) می‌نامند و چنین نشان می‌دهند :

$$(a,b]=\{x\in \mathbb{R}|a< x\le b\}$$

به همین ترتیب بازهٔ نیم‌باز از راست (یا نیم‌بسته از چپ) تعریف می‌شود. به‌علاوه بازه‌های بیکران را به شکل زیر تعریف می‌کنند :

۴ــ بازهٔ نیم‌باز a و $+\infty$: $\{x\in \mathbb{R}|x\ge a\}=[a,+\infty)$

۵ــ بازهٔ باز a و $+\infty$: $\{x\in \mathbb{R}|x> a\}=(a,+\infty)$

۶ــ بازهٔ نیم‌باز $-\infty$ و a : $\{x\in \mathbb{R}|x\le a\}=(-\infty,a]$

۷ــ بازهٔ باز $-\infty$ و a : $\{x\in \mathbb{R}|x< a\}=(-\infty,a)$

به‌طور خلاصه داریم :

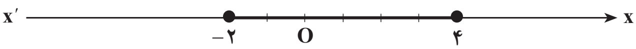
$$x\in(a,b)\Leftrightarrow a<x<b$$
$$x\in[a,b]\Leftrightarrow a\le x\le b$$
$$x\in[a,b)\Leftrightarrow a\le x<b$$
$$x\in(a,b]\Leftrightarrow a<x\le b$$
$$x\in[a,+\infty)\Leftrightarrow x\ge a$$
$$x\in(a,+\infty)\Leftrightarrow x>a$$
$$x\in(-\infty,a]\Leftrightarrow x\le a$$
$$x\in(-\infty,a)\Leftrightarrow x<a$$

نمایش هندسی بازه‌ها

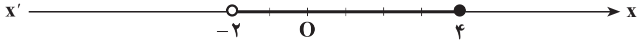
اگر نقاط a و b را روی محور اختیار کنیم هریک از بازه‌های تعریف‌شدهٔ بالا را می‌توان به وسیلهٔ یک پاره‌خط یا یک نیم‌خط، باز یا بسته، از محور نشان داد. نقطه‌هایی را که به بازه متعلق نیستند با دایره‌های توخالی روی محور مشخص می‌کنند.

مثال ۱: بازه‌های داده‌شده را روی محور به شکل زیر نشان می‌دهیم :

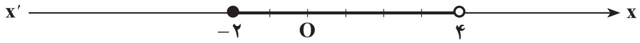
۱) $[-۲,۴]=\{x\in \mathbb{R}|-۲\le x\le ۴\}$



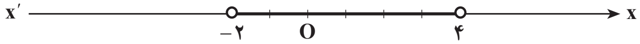
۲) $(-۲,۴] = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ < x \leq ۴\}$



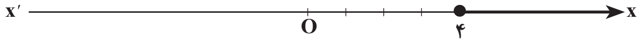
۳) $[-۲,۴) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ \leq x < ۴\}$



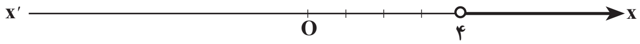
۴) $(-۲,۴) = \{x \in \mathbb{R} \mid -۲ < x < ۴\}$



۵) $[۴,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq ۴\}$



۶) $(۴,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > ۴\}$



۷) $(-\infty,-۲] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -۲\}$

۸) $(-\infty,-۲) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -۲\}$

برای آشنایی بیش‌تر با مفهوم بازه و عملیات روی آن‌ها، در زیر چند مثال نمونه را همراه با جواب آن‌ها آورده‌ایم :

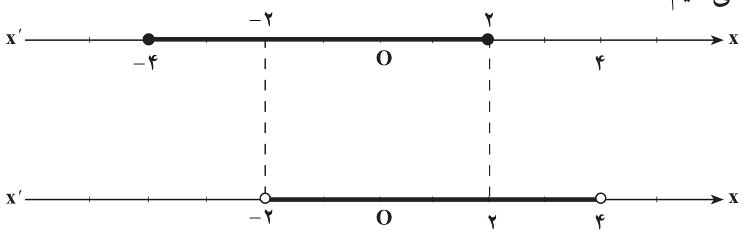
۱ــ عبارت‌های زیر را درصورت امکان ساده کنید :

الف) $[-۴,۲] \cap (-۲,۴)$　　　ب) $[-۴,۲] \cup (-۲,۴)$

پ) $[-۴,۲] \cap [۳,+\infty)$　　　ت) $[-۴,۲] \cup [۳,+\infty)$

جواب:

الف) ابتدا نمودار هندسی هر بازه را روی محور مشخص می‌کنیم، سپس ناحیهٔ مشترک دو بازه را پیدا می‌کنیم :



با توجه به نمودار هندسی بازه‌ها ملاحظه می‌کنیم که اشتراک آن‌ها بازه $.۲,۲-)$ است. باید توجه داشت که اگر نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه به هر دو بازه تعلق داشته باشند (مانند ۲) در این‌صورت بازه در آن نقطه بسته و در حالتی که نقطه‌های پایانی اشتراک دو بازه حداکثر متعلق به یکی از بازه‌ها باشند (مانند ۲-) آن‌گاه بازه در آن نقطه باز است.

چنان‌چه با همین روند ادامه دهیم، جواب‌های قسمت‌های دیگر را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

ب) $.-۴,۴)$ پ) $\varnothing$ ت) $.-۴,۲.\cup.۳,+.\ )$

۲ــ مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد حقیقی مشخص کنید و آن را به‌صورت یک بازه نشان دهید:

الف) $۰ .\ x-۱ .\ ۲$ ب) $-۱ \le x+۲ \le ۶$

پ) $\frac{x+۱}{۲} .\ ۲$ ت) $\frac{۲x-۱}{۳} .\ -۱$

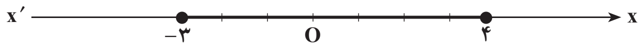
جواب:

الف) $۰ .\ x-۱ .\ ۲ \Rightarrow ۱ .\ x .\ ۳$

$x .\ (۱,۳)$

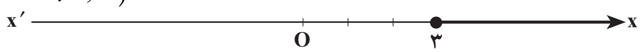
ب) $-۱ \le x+۲ \le ۶ \Rightarrow -۳ \le x \le ۴$

$x .\ .-۳,۴.$



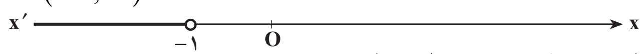
پ) $\frac{x+۱}{۲} .\ ۲ \Rightarrow x+۱ .\ ۴ \Rightarrow x .\ ۳$

$x .\ .۳,.\ )$



ت) $\frac{۲x-۱}{۳} .\ -۱ \Rightarrow ۲x-۱ .\ -۳ \Rightarrow x .\ -۱$

$x .\ (-.\ ,-۱)$



۳ــ مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه نمایش دهید.

$A=\{x .\ \mathbb{R} \mid -۱ .\ x \le ۳\}$ $B=\{x .\ \mathbb{R} \mid -۱ \le x .\ ۳\}$

$C=\{x .\ \mathbb{R} \mid x .\ ۶\}$ $D=\{x .\ \mathbb{R} \mid x .\ -۲\}$

جواب:

A = (−۱,۳.   B = .−۱,۳)   C = (−. ,۶)   D = .−۲,+.)

۴ــ بازه‌های زیر را به‌وسیلهٔ مجموعه نمایش دهید.

الف) .۳,۵.   ب) (−۳,۷.   پ) (−. ,۱.   ت) .۲,+.)

جواب:

الف) A = {x . ℝ|۳ ≤ x ≤ ۵}   ب) B = {x . ℝ|−۳ . x ≤ ۷}

پ) C = {x . ℝ|x ≤ ۱}   ت) D = {x . ℝ|x . ۲}

تمرین

۱ــ با استفاده از تعریف بازه، عبارت‌های زیر را درصورت امکان، ساده کنید.

الف) (−۲,۵.∪.۳,۶)   ب) (−. ,۰.∩.−۴,۴.

پ) (۰,+.)∩(−. ,۳.   ت) .−۳,۵.∪(۲,۳.

۲ــ بازه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

الف) .۲,+.)   ب) (۲,+.)   پ) .−۳,۳.

ت) (−۲,۲)   ث) [−۵/۲ , ۳/۲)   ج) (−. ,−۱.

۳ــ مجموعه‌های زیر را به وسیلهٔ بازه نمایش دهید.

الف) A = {x . ℝ|۲ . x ≤ ۶}   ب) B = {x . ℝ|x   ۱}

پ) C = {x . ℝ|x ≤ −۲}   ت) D = {x . ℝ|−۶ . x . −۱}

۴ــ بازه‌های زیر را به‌وسیلهٔ مجموعه نمایش دهید.

الف) .۳,۷.   ب) .۰,+.)   پ) (۰,+.)

ت) .−۴,−۱)   ث) (−. ,۰.   ج) .−۳,۲)

۵ــ اگر A = {x . ℝ|−۳ ≤ x ≤ ۳} و B = {x . ℝ|x   ۲} و C = {x . ℝ|x . ۰} باشد بازه‌هایی را که با مجموعه‌های زیر تعریف شده‌اند مشخص کنید :

الف) A∪B   ب) A∩B   پ) A∪B∪C

ت) A∩C   ث) B∩C   ج) (A∪B)∩C

چ) (A∩B)∩C   ح) B∪C

۶ــ در جدول زیر، خانه‌های خالی را با نماد مجموعه، نماد بازه و نمودار مناسب، پر کنید.

نمودار	نماد مجموعه	نماد بازه
		$.-۱,۳.$
	$\{x \,.\, \mathbb{R} \mid ۲ \,.\, x \,.\, ۴\}$	
		
	$\{x \,.\, \mathbb{R} \mid -۲ \,.\, x \leq ۳\}$	

۷ــ مجموعه جواب هریک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید و روی محور نمایش دهید.

الف) $۲x - ۳ \,.\, ۰$ ب) $۲x - ۴ \,.\, ۰$ پ) $\frac{x+۱}{۲} \quad ۲x - ۱$

ت) $۰ \leq x + ۲ \,.\, ۳$ ث) $-۲ \leq \frac{x}{۲} - ۱ \leq ۲$ ج) $-۱ \leq \frac{-۲x+۱}{۳} \,.\, ۴$

معادلات و نامعادلات گویا

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند. برای مثال عبارت‌های زیر همگی عبارت‌های گویا هستند.

$$\frac{x+۱}{x-۲} - \frac{۳x}{x+۵} \quad , \quad \frac{۲x^۲ + x - ۱}{x+۲} \quad , \quad ۳x - \frac{۱}{x+۳}$$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنی است که مخرجش صفر نباشد. یعنی درحالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آن‌گاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است.

عبارت گویای $\frac{۱}{x+۳} - \frac{۳x}{۲}$ به‌ازای $x = -۳$ تعریف نشده است، زیرا با قرار دادن $x = -۳$ در آن مخرج کسر دوم برابر با صفر شده و در این حالت، کسر تعریف نشده است.

معادله‌هایی که در آن‌ها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند، معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

می‌نامند. برای حل این معادله‌ها، ابتدا همهٔ عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله منتقل می‌کنیم، سپس با مخرج مشترک‌گیری و ساده کردن عبارت‌های جبری به‌دست آمده به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}=\circ$ می‌رسیم. از قبل می‌دانیم کسری برابر با صفر است که صورت آن برابر با صفر باشد، درنتیجه معادلهٔ $P(x)=\circ$ را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده از این معادله نباید مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر کنند (چرا؟) بنابراین از بین جواب‌های به‌دست آمده آن‌هایی را قبول می‌کنیم که مخرج هیچ‌یک از کسرها را صفر نکنند و هم‌چنین در شرایط مسأله صدق کنند.

قبل از این‌که چند معادلهٔ شامل عبارت‌های گویا را حل کنیم، بهتر است مخرج مشترک‌گیری کسرها را بیان کنیم. مخرج مشترک بین دو یا چند کسر همان کوچک‌ترین مضرب مشترک بین مخرج‌های آن‌ها است و برای محاسبهٔ ک.م.م. مخرج کسرها، کافی است در صورت امکان مخرج هر کسر را تجزیه کنیم، سپس حاصل‌ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگ‌تر در عوامل غیرمشترک را به‌دست آوریم.

مثال ۱: معادلهٔ $\frac{x+۱}{x+۳}=\frac{x-۲}{x-۴}$ را حل کنید.

ابتدا عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم :

$$\frac{x-۲}{x-۴}-\frac{x+۱}{x+۳}=\circ$$

اکنون مخرج مشترک را محاسبه کرده و عملیات جبری را انجام می‌دهیم.

$$\text{مخرج کسر اول}=(x-۴)$$

$$\text{مخرج کسر دوم}=(x+۳)$$

$$\text{ک.م.م. مخرج‌ها}=(x-۴)(x+۳)$$

بنابراین داریم :

$$\frac{(x-۲)(x+۳)-(x+۱)(x-۴)}{(x-۴)(x+۳)}=\circ\Rightarrow\frac{x^۲+x-۶-x^۲+۳x+۴}{(x-۴)(x+۳)}=\circ$$

$$\Rightarrow\frac{۴x-۲}{(x-۴)(x+۳)}=\circ$$

ملاحظه می‌کنیم که به معادله‌ای نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)}=\circ$ رسیدیم، بنابراین با حل معادلهٔ $P(x)=\circ$ سعی می‌کنیم جواب‌های معادله را پیدا کنیم.

$$۴x-۲=\circ\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

چون $x=\frac{۱}{۲}$ مخرج کسرهای $\frac{x-۲}{x-۴}$ و $\frac{x+۱}{x+۳}$ را صفر نمی‌کند، پس قابل‌قبول است و $x=\frac{۱}{۲}$ جواب این معادله است.

مثال ۲: معادلهٔ $\frac{x-۱}{x-۲}=\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{۱+x}{x}$ را حل کنید.

ابتدا عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم، سپس مخرج مشترک را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{۱+x}{x}-\frac{x-۱}{x-۲}=۰$$

مخرج کسر اول $=x^۲-۲x=x(x-۲)$

مخرج کسر دوم $=x$

مخرج کسر سوم $=x-۲$

ک.م.م. مخرج‌ها $=x(x-۲)$

بنابراین داریم:

$$\frac{x^۲-۲x+۲-(x-۲)(۱+x)-x(x-۱)}{x(x-۲)}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{-x^۲+۴}{x(x-۲)}=۰\Rightarrow -x^۲+۴=۰\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=۲,x=-۲$$

چون $x=۲$ مخرج کسرهای $\frac{x-۱}{x-۲},\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}$ را صفر می‌کند، جواب قابل‌قبول نیست و فقط $x=-۲$ جواب این معادله و قابل‌قبول است. از آن‌جا که جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند، با قرار دادن $x=-۲$ در معادله، به یک رابطهٔ درست به‌صورت زیر می‌رسیم:

$$\frac{(-۲)^۲-۲(-۲)+۲}{(-۲)^۲-۲(-۲)}-\frac{۱+(-۲)}{-۲}=\frac{-۲-۱}{-۲-۲}\Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $\frac{۲x+۴}{x+۲}=۱$

۲) $\frac{x+۵}{۳x+۱۵}=\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۳x-۲}{x}+\frac{۲x+۵}{x+۳}=۵$

۴) $\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^{۲}-۱}=\frac{۲x-۳}{۲x+۲}$

۵) $\frac{۱}{x+۱}-\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x-۱}-\frac{۱}{x-۲}$

۶) $\frac{x+۱}{x-۱}-\frac{x-۱}{x+۱}=۳x(۱-\frac{x-۱}{x+۱})$

۷) $\frac{۲x+۳}{x-۱}-\frac{۲x-۳}{x+۱}=\frac{۱۰}{x^{۲}-۱}$

۸) $\frac{۳}{۳x^{۲}-۳x-۲۸}=\frac{۵}{۵x^{۲}-x-۲۰}$

۹ــ به‌ازای چه مقدار a، معادلهٔ $\frac{a}{x}=\frac{a-x}{x}+\frac{x}{a-x}$ دارای جواب $x=۲$ است.

۱۰ــ به‌ازای چه مقدار k، معادلهٔ $\frac{۳t^{۲}+k}{(t^{۲}+۱)^{۲}-۶۸}=\frac{۴-t}{۲-۲t}$ دارای جواب $t=-۳$ است.

نامعادله‌های شامل عبارت‌های گویا

وقتی نوعی دارو در عضلهٔ دست راست یک بیمار تزریق می‌شود، غلظت دارو (برحسب میلی‌گرم در هر میلی لیتر) t ساعت بعد از تزریق در عضله دست چپ، به‌طور تقریبی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$C=\frac{۰/۱۲t}{t^{۲}+۲}$$

می‌خواهیم بدانیم که چند ساعت بعد از تزریق، غلظت دارو در عضلهٔ دست چپ برابر با ۰/۰۴ میلی‌گرم در میلی‌لیتر یا بیشتر است؟ برای حل این مسئله داریم :

$$C\ .\ ۰/۰۴ \Rightarrow \frac{۰/۱۲t}{t^{۲}+۲}\ .\ ۰/۰۴$$

چنان‌چه دو طرف معادله را در عدد ۱۰۰ ضرب کنیم، خواهیم داشت :

$$\frac{۱۲t}{t^{۲}+۲}\ .\ ۴ \Rightarrow \frac{۱۲t}{t^{۲}+۲}-۴\ .\ ۰ \Rightarrow \frac{۱۲t-۴t^{۲}-۸}{t^{۲}+۲}\ .\ ۰$$

اکنون عبارت $P=\frac{-۴t^{۲}+۱۲t-۸}{t^{۲}+۲}$ را تعیین علامت می‌کنیم، چون مخرج کسر همواره

مثبت است یعنی همواره $t^2+2>0$، پس علامت P بستگی به علامت صورت کسر دارد، بنابراین کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم.

$$-4t^2+12t-8=0 \quad -4(t^2-3t+2)=0 \Rightarrow -4(t-1)(t-2)=0 \Rightarrow t=1 \text{ یا } t=2$$

t	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$-4t^2+12t-8$		$-$	0	$+$	0	$-$	
				جواب			

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنیم، برای این‌که $C \geq 0/04$ باشد باید $1 \leq t \leq 2$ یعنی در فاصلهٔ یک تا دو ساعت بعد از تزریق، غلظت دارو در عضله دست چپ بیمار برابر با $0/04$ میلی‌گرم در هر میلی‌لیتر یا بیشتر است.

نامعادله‌هایی که در آن‌ها عبارت‌های گویا وجود داشته باشند را نامعادله‌های شامل عبارت‌های گویا می‌نامند. برای حل این نامعادله‌ها، ابتدا همهٔ عبارت‌های جبری را به یک طرف نامعادله منتقل می‌کنیم، سپس با مخرج مشترک‌گیری و ساده کردنِ عبارت‌های جبری به‌دست آمده به نامعادله‌هایی نظیر $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ یا $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ می‌رسیم (که در آن‌ها صورت و مخرج کسر چندجمله‌ای‌های برحسب متغیر x هستند)، سپس برای یافتن مجموعهٔ جواب هریک از نامعادله‌های بالا، برای مثال $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$، عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را در یک جدول تعیین علامت می‌کنیم و در این حالت قسمت‌هایی از جدول تعیین علامت که به‌ازای آن‌ها عبارت فوق در آن‌ها مثبت یا صفر هستند، مجموعهٔ جواب نامعادله است.

مثال ۱: نامعادلهٔ $\frac{x+2}{2x-1} \leq \frac{1}{x-2}$ را حل کنید.

$$\frac{x+2}{2x-1}-\frac{1}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-2)-(2x-1)}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x-3}{(2x-1)(x-2)} \leq 0$$

اکنون عبارت $P=\frac{x^2-2x-3}{(2x-1)(x-2)}$ را تعیین علامت می‌کنیم ؛ برای این منظور جواب‌های صورت و مخرج کسر را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم :

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=3, x=-1$$

$$(2x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}, x=2$$

جدول تعیین علامت عبارت P را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$		-۱		$\frac{۱}{۲}$		۲		۳		$+\infty$
$x^۲-۲x-۳$		+	●	−		−		−	●	+	
$(۲x-۱)(x-۲)$		+		+	●	−	●	+		+	
P		+	●	−		+		−	●	+	

جواب   تعریف نشده   تعریف نشده   جواب

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنیم که عبارت P برای $x\,.\,\,.\,-۱,\frac{۱}{۲})\cup(۲,۳.$ دارای علامت منفی یا صفر است، درنتیجه داریم :

$$\text{مجموعهٔ جواب}=\left\{x\,.\,\mathbb{R}\,\middle|\,-۱\le x\,.\,\frac{۱}{۲}\ \text{ یا }\ ۲\,.\,x\le ۳\right\}$$

مثال ۲: نامعادلهٔ $\frac{x^۲+x+۲}{x^۲-۳x+۲}\,.\,۱$ را حل کنید.

$$\frac{x^۲+x-۲}{x^۲-۳x+۲}-۱\,.\,\circ\Rightarrow\frac{x^۲+x-۲-x^۲+۳x-۲}{x^۲-۳x+۲}\,.\,\circ\Rightarrow\frac{۴x-۴}{x^۲-۳x+۲}\,.\,\circ$$

عبارت $P=\frac{۴x-۴}{x^۲-۳x+۲}$ را تعیین علامت می‌کنیم، برای این منظور جواب‌های صورت و مخرج کسر را در صورت وجود پیدا می‌کنیم :

$$۴x-۴=\circ\Rightarrow x=۱$$

$$x^۲-۳x+۲=\circ\Rightarrow(x-۱)(x-۲)=\circ\Rightarrow x=۱\ \text{ یا }\ x=۲$$

جدول تعیین علامت عبارت P را تشکیل می‌دهیم :

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$۴x-۴$		−	●	+		+	
$x^۲-۳x+۲$		+	●	−	●	+	
P		−		−		+	

جواب   جواب   تعریف نشده   تعریف نشده

باید توجه داشت که در عبارت P به‌ازای $x=۱$ مخرج کسر صفر می‌شود که در این حالت کسر تعریف نشده است. با توجه به جدول ملاحظه می‌کنیم که عبارت P برای $x \,.\, (-.\,,۱)\cup(۱,۲)$ دارای علامت منفی است، درنتیجه داریم :

$$\text{مجموعهٔ جواب} = \{x \,.\, \mathbb{R} | x \,.\, ۱ \quad \text{یا} \quad ۱ \,.\, x \,.\, ۲\}$$

تمرین: هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $۱-\frac{۱}{x} \,.\, x+۱$

۲) $\frac{۶-x^۲}{x} \quad ۱$

۳) $\frac{۲x-۱}{x} \quad ۱$

۴) $\frac{x^۲-۲}{x} \,.\, ۱$

۵) $\frac{x+۱}{x}-\frac{x}{x-۱} \le ۲$

۶) $\left|\frac{۱-x}{۲x-۵}\right| \quad ۱$

۷) $\frac{۱}{۲x^۲+x+۱} \,.\, \frac{۱}{x^۲+۱}$

۸) $۲x-۳-\frac{۱}{x-۵} \,.\, x-۴-\frac{۱}{x-۵}$

به‌ازای چه مقادیری از x عبارت‌های جبری زیر قابل محاسبه‌اند؟

۹) $\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}}-\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}$

۱۰) $\sqrt[۴]{\frac{۱}{x^۲}-\frac{۳}{۴}}$

۱۱) $\sqrt{\frac{۲x^۲+x-۶}{۳x^۲-۷x-۶}}-۵x\sqrt{۱۶-x^۲}$

۱۲ــ وقتی یک نوع کالای مرغوب و جدید به بازار می‌آید، فروش هفتگی آن کالا به‌طور معمول برای یک دورهٔ زمانی افزایش و سپس کاهش می‌یابد. فرض کنید بازار فروش S هزار واحد کالا، t هفته بعد از معرفی، از رابطهٔ زیر به‌دست آید :

$$S=\frac{۲۰۰t}{t^۲+۱۰۰}$$

چه موقع فروش هفتگی کالا ۸ هزار واحد یا بیشتر در هر هفته است؟

محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی (&+%)

در ریاضی ۲ با نسبت‌ها و توابع مثلثاتی آشنا شدیم و منحنی نمایش تغییرات بعضی از توابع

مثلثاتی را رسم کردیم. دیدیم اگر α یک زاویه دلخواه باشد، آن‌گاه :

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \quad \text{و} \quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{و} \quad ۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$$

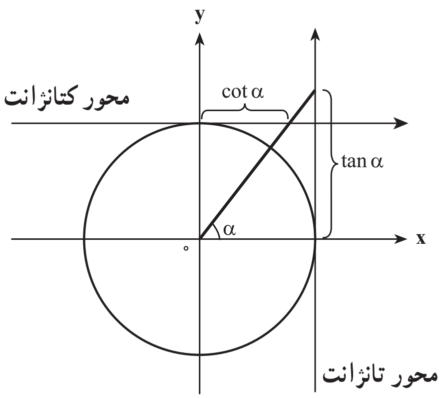
یکی دیگر از نسبت‌های مهم مثلثاتی، کتانژانت است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{۱}{\tan\alpha}$$

از این تعریف می‌توان نتیجه گرفت که در زاویه‌هایی که مقدار تانژانت ناصفر است، مقدار کتانژانت قابل تعریف است، از طرفی داریم :

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}\Rightarrow \tan\alpha\times\cot\alpha=۱$$

از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که تانژانت و کتانژانت قابل تعریف برای یک زاویه، همواره هر دو هم‌علامت می‌باشند، درنتیجه علامت کتانژانت در دایره مثلثاتی مانند علامت تانژانت است.



مثال ۱:

$$\text{الف)}\quad \cot ۶۰^\circ=\frac{۱}{\tan ۶۰^\circ}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{ب)}\quad \cot ۴۵^\circ=\frac{۱}{\tan ۴۵^\circ}=\frac{۱}{۱}=۱$$

مثال ۲: اگر $\sin^۲\alpha\cot\alpha . ۰$ در این‌صورت انتهای کمان α در کدام ناحیه دایره مثلثاتی واقع است؟

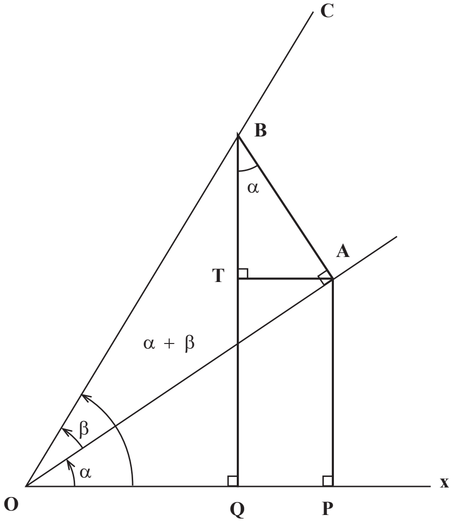
حل: با توجه به تعریف کتانژانت داریم :

$$\sin^۲\alpha\times\cot\alpha . ۰\Rightarrow \sin^۲\alpha\times\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} . ۰\Rightarrow \sin\alpha\times\cos\alpha . ۰$$

برای این‌که نابرابری اخیر برقرار باشد، باید $\sin\%$ و $\cos\%$ دارای علامت‌های متفاوت باشند، درنتیجه انتهای کمان $\%$ ، در ربع دوم ($\sin\%\ \ ٠$, $\cos\%\ .\ ٠$) یا در ربع چهارم ($\sin\%.\ ٠$, $\cos\%\ \ ٠$) واقع است.

محاسبه برخی نسبت‌های مثلثاتی $(\%+\&)$ برحسب نسبت‌های مثلثاتی $\%$ و $\&$

فرض کنید نیم‌خط OA با محور OX زاویه $\%$ و با OC زاویه $\&$ بسازد. از A بر OA عمودی خارج می‌کنیم تا OC را در نقطهٔ B قطع کند. از A عمود AP و از B عمود BQ را بر OX رسم می‌کنیم و نیز از A عمود AT را بر BQ فرود می‌آوریم. زاویهٔ ABT برابر $\%$ است و داریم :



$$\sin(\%+\&)=\frac{\overline{BQ}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BT}+\overline{TQ}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BT}+\overline{AP}}{\overline{OB}}$$

$$=\frac{\overline{BA}\cos\%+\overline{OA}\sin\%}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{OB}}\cos\%+\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\sin\%$$

$$=\sin\&\cos\%+\cos\&\sin\%$$

$$=\sin\%\cos\&+\cos\%\sin\&$$

بنابراین :

$$\boxed{\sin(\%+\&)=\sin\%\cos\&+\cos\%\sin\&}\qquad (١)$$

با قرار دادن $\&=\%$ نتیجه زیر نیز به‌دست می‌آید :

$$\boxed{\sin ٢\%=٢\sin\%\cos\%}\qquad (٢)$$

به طریق مشابه ثابت می‌شود که :

$$\boxed{\cos(\%+\&)=\cos\%\cos\&-\sin\%\sin\&}\qquad (٣)$$

با قرار دادن $\& = \%$ نتیجه زیر نیز حاصل می‌شود :

$$\boxed{\cos ۲\% = \cos^۲ \% - \sin^۲ \%} \qquad (۴)$$

اگر در رابطه (۴) به‌جای $\sin^۲ \%$ قرار دهیم $۱ - \cos^۲ \%$ ؛ خواهیم داشت :

$$\cos ۲\% = \cos^۲ \% - \sin^۲ \% = \cos^۲ \% - (۱ - \cos^۲ \%) = ۲\cos^۲ \% - ۱$$

درنتیجه :

$$\boxed{\cos ۲\% = ۲\cos^۲ \% - ۱} \qquad (۵)$$

و اگر در رابطهٔ (۴) به‌جای $\cos^۲ \%$ قرار دهیم $۱ - \sin^۲ \%$ ؛ خواهیم داشت :

$$\cos ۲\% = \cos^۲ \% - \sin^۲ \% = ۱ - \sin^۲ \% - \sin^۲ \% = ۱ - ۲\sin^۲ \%$$

درنتیجه :

$$\boxed{\cos ۲\% = ۱ - ۲\sin^۲ \%} \qquad (۶)$$

مثال ۱: عبارت مثلثاتی $\dfrac{\sin ۲\%}{۱ + \cos ۲\%}$ را ساده کنید.

حل:

$$\frac{\sin ۲\%}{۱ + \cos ۲\%} = \frac{۲\sin \%\cos \%}{۱ + (۲\cos^۲ \% - ۱)} = \frac{۲\sin \%\cos \%}{۲\cos^۲ \%} = \frac{\sin \%}{\cos \%} = \tan \%$$

چنان‌چه در رابطه‌های (۱) و (۳) $-.$ را جایگزین $\&$ کنیم، فرمول‌های زیر را خواهیم داشت :

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(\% - \&) = \sin \%\cos \& - \cos \%\sin \& \\ \hline \cos(\% - \&) = \cos \%\cos \& + \sin \%\sin \& \end{array}}$$

با فرض این‌که $\cos(\% + \&) \neq ۰$ ، از تعریف تانژانت داریم :

$$\tan(\% + \&) = \frac{\sin(\% + \&)}{\cos(\% + \&)} = \frac{\sin \%\cos \& + \cos \%\sin \&}{\cos \%\cos \& - \sin \%\sin \&}$$

چنان‌چه $\cos \%\cos \& \neq ۰$ ، با تقسیم صورت و مخرج کسر سمت راست بر $\cos \%\cos \&$ خواهیم داشت :

$$\tan(\% + \&) = \frac{\dfrac{\sin \%\cos \&}{\cos \%\cos \&} + \dfrac{\cos \%\sin \&}{\cos \%\cos \&}}{\dfrac{\cos \%\cos \&}{\cos \%\cos \&} - \dfrac{\sin \%\sin \&}{\cos \%\cos \&}} = \frac{\tan \% + \tan \&}{۱ - \tan \%\tan \&}$$

بنابراین :

$$\boxed{\tan(\%+\&)=\frac{\tan\%+\tan\&}{۱-\tan\%\tan\&}}$$

با قرار دادن & =% نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\boxed{\tan ۲\%=\frac{۲\tan\%}{۱-\tan^{۲}\%}}$$

مثال ۲:

الف) $\sin ۷۵^\circ=\sin(۳۰^\circ+۴۵^\circ)$

$$=\sin ۳۰^\circ\cos ۴۵^\circ+\cos ۳۰^\circ\sin ۴۵^\circ$$

$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۶}}{۴}=\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

ب) $\cos ۷۵^\circ=\cos(۳۰^\circ+۴۵^\circ)$

$$=\cos ۳۰^\circ\cos ۴۵^\circ-\sin ۳۰^\circ\sin ۴۵^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$$

ج) $\tan ۷۵^\circ=\tan(۳۰^\circ+۴۵^\circ)$

$$=\frac{\tan ۳۰^\circ+\tan ۴۵^\circ}{۱-\tan ۳۰^\circ\tan ۴۵^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۳}+۱}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times ۱}=\frac{\sqrt{۳}+۳}{۳-\sqrt{۳}}$$

د) $\cot ۷۵^\circ=\frac{۱}{\tan ۷۵^\circ}=\frac{۳-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}+۳}$

هـ) $\cos ۱۵^\circ=\cos(۴۵-۳۰)$

$$=\cos ۴۵\cos ۳۰+\sin ۴۵\sin ۳۰$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

مثال ۳: درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin(x-\frac{\div}{۶})+\cos(x+\frac{\div}{۳})=۰$

حل:

$$\text{طرف چپ تساوی} = (\sin x\cos\frac{\pi}{۶} - \cos x\sin\frac{\pi}{۶}) + (\cos x\cos\frac{\pi}{۳} - \sin x\sin\frac{\pi}{۳})$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x - \frac{۱}{۲}\cos x + \frac{۱}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x = ۰$$

ب) $\sin(a+b) + \sin(a-b) = ۲\sin a\cos b$

حل:

$$\text{طرف چپ تساوی} = \sin a\cos b + \cos a\sin b + \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

$$= \sin a\cos b + \sin a\cos b = ۲\sin a\cos b$$

ج) $\cos^{۴} x - \sin^{۴} x = \cos ۲x$

حل:

$$\cos^{۴} x - \sin^{۴} x = (\cos^{۲} x - \sin^{۲} x)(\cos^{۲} x + \sin^{۲} x)$$

$$= (\cos ۲x) \times ۱ = \cos ۲x$$

مثال ۴: فرض کنید $\sin\% = \frac{۵}{۱۳}$ و $\tan\& = \frac{۳}{۴}$ در زاویه‌های % و & حاده باشند، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sin(\%+\&)$ ب) $\cos ۲\&$ ج) $\tan ۲\%$

حل: الف) برای محاسبهٔ $\sin(\%+\&)$ نیاز به نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس برای زاویه‌های حادهٔ % و & داریم:

$$\cos^{۲}\% = ۱ - \sin^{۲}\% = ۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹} = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \Rightarrow \cos\% = \pm\frac{۱۲}{۱۳}$$

چون % زاویه‌ای حاده است، پس انتهای کمان % در ربع اول دایره مثلثاتی است، پس $\cos\% > ۰$ درنتیجه $\cos\% = \frac{۱۲}{۱۳}$.

$$\frac{۱}{\cos^{۲}\&} = ۱ + \tan^{۲}\& = ۱ + \frac{۹}{۱۶} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \cos^{۲}\& = \frac{۱۶}{۲۵} \xrightarrow{\text{حاده } \&} \cos\& = \frac{۴}{۵}$$

$$\sin^{۲}\& = ۱ - \cos^{۲}\& = ۱ - \frac{۱۶}{۲۵} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow \sin^{۲}\& = \frac{۹}{۲۵} \xrightarrow{\text{حاده } \&} \sin\& = \frac{۳}{۵}$$

$$\sin(\%+\&) = \sin\%\cos\& + \cos\%\sin\& = \frac{۵}{۱۳} \times \frac{۴}{۵} + \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۵۶}{۶۵}$$

ب) $\cos ۲\& = \cos^{۲}\& - \sin^{۲}\& = \frac{۱۶}{۲۵} - \frac{۹}{۲۵} = \frac{۷}{۲۵}$

ج) $\tan ۲\% = \frac{۲\tan \%}{۱ - \tan^{۲} \%}$

از آن‌جا که $\sin \% = \frac{۵}{۱۳}$ و $\cos \% = \frac{۱۲}{۱۳}$ ، خواهیم داشت :

$$\tan \% = \frac{\sin \%}{\cos \%} = \frac{۵}{۱۲}$$

درنتیجه :

$$\tan ۲\% = \frac{۲ \times \frac{۵}{۱۲}}{۱ - \frac{۲۵}{۱۴۴}} = \frac{\frac{۱۰}{۱۲}}{\frac{۱۱۹}{۱۴۴}} = \frac{۱۲۰}{۱۱۹}$$

تمرین

۱ــ نسبت‌های مثلثاتی زوایای ۱۵° و $۲۲/۵^\circ$ را محاسبه کنید.

۲ــ فرض کنید $\tan \% = \frac{۳}{۴}$ و $\tan \& = \frac{۵}{۱۲}$ و % و & حاده باشند، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(\% + \&) \;,\; \cos(\% + \&) \;,\; \tan(\% + \&)$$

۳ــ فرض کنید $\sin \% = \frac{۴}{۵}$ و $\sin \& = \frac{۱۵}{۱۷}$ و % حاده و & منفرجه باشد، عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\sin(\% + \&) \;,\; \cos(\% + \&) \;,\; \cot(\% + \&)$$

$$\sin ۲\% \;,\; \cos ۲\% \;,\; \tan ۲\&$$

۴ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\sin(x + \frac{\div}{۳}) \;,\; \cos(\frac{\div}{۳} + \frac{\div}{۴}) \;,\; \tan(\frac{\div}{۶} + \frac{\div}{۴})$$

۵ــ درستی برابری‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin(\frac{۳.}{۲} - x) = -\cos x$

ب) $\cos(\frac{\div}{۲} + .) = -\sin)$

ج) $\cos(\%-\&)-\cos(\%+\&)=۲\sin\%\sin\&$

د) $\sin ۲x\cos x-\cos ۲x\sin x=\sin x$

هـ) $\sin\%=۲\sin\frac{\%}{۲}\cos\frac{\%}{۲}$

و) $\cos\%=۲\cos^{۲}\frac{\%}{۲}-۱$

ز) $۱-\cos\%=۲\sin^{۲}\frac{\%}{۲}$

ح) $\tan\%=\dfrac{۲\tan\frac{\%}{۲}}{۱-\tan^{۲}\frac{\%}{۲}}$

ط) $\dfrac{۲}{\tan\%+\cot\%}=\sin ۲\%$

ی) $\dfrac{\sin x}{۱+\cos x}=\tan\frac{x}{۲}$

ک) $\cot\frac{x}{۲}-\tan\frac{x}{۲}=۲\cot x$

تابع

تاریخچه تابع

برای نخستین بار مفهوم تابع با عنوان «مقدار متغیر» در قرن هفدهم میلادی در کارهای رنه‌دکارت (۱۶۵۰ـ۱۵۶۹م) ریاضیدان فرانسوی و در نوشته‌های هندسی پدید آمد. دکارت در کتاب هندسهٔ خود مفهوم تابع را به‌عنوان «تغییر عرض در نتیجه تغییر طول» بررسی می‌کند. در قرن هجدهم یوهان برنولی (۱۷۴۸ـ۱۶۶۷) دیدگاه جدید و به اصطلاح تحلیلی را نسبت به تابع مطرح می‌کند، او می‌گوید :

«تابع به‌عنوان دستوری است که مقدار یک متغیر را با مقدار متغیر دیگر درنظر می‌گیرد.»

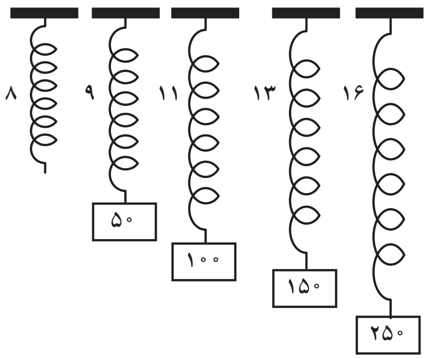
در سال ۱۷۴۸ لئونارد اولر (۱۷۸۳ـ۱۷۰۷م) شاگرد یوهان برنولی نماد[۱] f را برای تابع درنظر گرفت و آن را از دیدگاه تحلیلی به این صورت مطرح می‌کند :

۱ـ Function

«تابع یک متغیر، عبارت است از یک عبارت تحلیلی که به‌نحوی از این مقدار متغیر و از عددها یا مقدارهای ثابت تشکیل شده است.» بالاخره، پس از طی دو قرن یوهان پیتر گوستاو لوژن دیریکله (۱۸۵۹ــ۱۸۰۵م) ریاضی‌دان آلمانی در اواسط قرن نوزدهم، تعریف امروزی تابع را به‌صورتی روشن بیان می‌کند :

«y تابعی از متغیر x در بازهٔ $a \le x \le b$ است، به شرطی که برای هر مقدار x از این بازه، مقدار مشخص و منحصر به‌فردی مانند y متناظر با آن وجود داشته باشد.»

همان‌طور که می‌دانید تابع عملی است که روی عناصر یک مجموعه عمل می‌کند و عنصری در یک مجموعه را نظیر می‌سازد. به‌عنوان مثال (۱) به شکل و جدول زیر توجه کنید.



وزن (p)	۰	۵۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۵۰
طول (l)	۸	۹	۱۱	۱۳	۱۶

این جدول اندازهٔ طول یک فنر را، که تابعی است از مقدار وزنی که به آن آویخته شده است، نشان می‌دهد (وزن برحسب گرم و طول بر حسب سانتی‌متر). وزن را با p و طول را با l مشخص می‌کنیم. مثلاً اگر $p=۱۰۰$ گرم باشد $l=۱۱$ سانتی‌متر است. به‌طوری که دیده می‌شود به هر p تنها یک l وابسته می‌گردد. بدین‌ترتیب جدول بالا رابطه میان دو کمیت p و l را به‌صورت یک عمل نظیرسازی که به اعداد سطر بالا اعداد سطر پایین نظیر می‌شوند، نشان می‌دهد.

مجموعه عناصری که یک تابع روی آن‌ها عمل می‌کند، دامنه تابع نام دارد. در این مثال دامنه تابع بازه $[۰,M]$ است که M حداکثر وزنی است که می‌توان به آن فنر آویزان نمود تا فنر پاره نشود.

مثال۲: تابع $f(x)=۳x-۱$ را با دامنه $\left\{-۱,-\frac{۱}{۳},۰,\frac{۱}{۳},۱,۲\right\}$ درنظر بگیرید. توجه کنید که

در ارائهٔ هر تابعی، دامنه آن نیز باید ارائه شود. می‌خواهیم f را به‌وسیلهٔ جدول و هم‌چنین به‌صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب نمایش دهیم.

حل: مقادیر $f(x)$ را پیدا می‌کنیم :

$$f(-۱)=۳(-۱)-۱=-۳-۱=-۴$$

$$f(-\frac{۱}{۳})=۳(-\frac{۱}{۳})-۱=-۱-۱=-۲$$

$$f(۰)=۳(۰)-۱=۰-۱=-۱$$

$$f(\frac{۱}{۳})=۳(\frac{۱}{۳})-۱=۱-۱=۰$$

$$f(۱)=۳(۱)-۱=۳-۱=۲$$

$$f(۲)=۳(۲)-۱=۶-۱=۵$$

جدول زیر مقادیر $f(x)$ متناظر با مقادیر x را نشان می‌دهد :

x	-۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۱	۲
$y=f(x)$	-۴	-۲	-۱	۰	۲	۵

اکنون برای مشخص کردن تابع به صورت زوج‌های مرتب، مجموعهٔ زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$f=\{(x,f(x))|x\ .\ D_f\}$$

$$f=\{(-۱,-۴) \text{ و } (-\frac{۱}{۳},-۲) \text{ و } (۰,-۱) \text{ و } (\frac{۱}{۳},۰) \text{ و } (۱,۲) \text{ و } (۲,۵)\}$$

مثال ۳: تابع $f(x)=۲x+۳$ را با دامنه $\{-۲,-۱,۰,۱\}$ درنظر می‌گیریم. f را به وسیلهٔ زوج‌های مرتب و نمودار نمایش دهید.

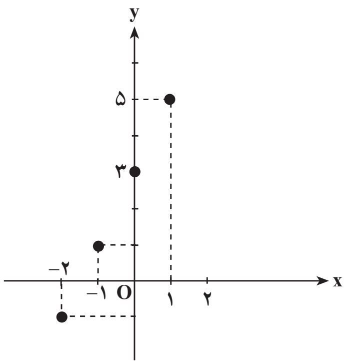
حل: داریم :

$$f(-۲)=-۴+۳=-۱$$

$$f(-۱)=-۲+۳=۱$$

$$f(۰)=۰+۳=۳$$

$$f(۱)=۲+۳=۵$$



$$f=\{(-۲,-۱) \text{ و } (-۱,۱) \text{ و } (۰,۳) \text{ و } (۱,۵)\}$$

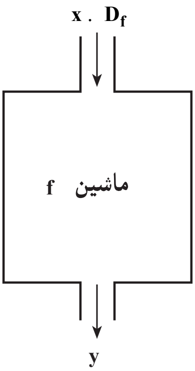
به‌طوری که در مثال‌های قبل دیده می‌شود، $f(x)$ علاوه‌براین که مقدار تابع f را معین می‌کند، قانون این تابع را نیز مشخص می‌نماید و به هر عضو از دامنهٔ تابع تنها یک عضو از بُرد را نسبت می‌دهد. اگر تابع f به عضوی از دامنه، مانند x ؛ عنصر y از بُرد تابع را نسبت دهد، می‌نویسیم :

$$y = f(x)$$

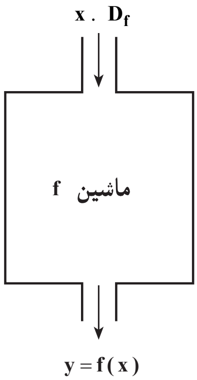
در این کتاب، دامنه و برد تابع‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم مجموعهٔ اعداد حقیقی یا بخشی از اعداد حقیقی است. تابع f را که دامنه و بردش اعداد حقیقی باشد یعنی $D_f \subseteq \mathbb{R}$ و $R_f \subseteq \mathbb{R}$ تابع حقیقی با مقادیر حقیقی می‌نامند. اگر دامنه یک تابع مانند f مجموعه A و مقادیر تابع اعداد حقیقی باشند می‌نویسیم :

$$f: A \to \mathbb{R}$$

تابع به‌عنوان ماشین



در ابتدای این بخش، تاریخ پیدایش و تکمیل مفهوم و تعریف امروزی تابع بیان شد، با کمی دقت در آن، مشخص می‌شود که تصور ذهنی مشترک همهٔ ریاضیدان‌ها از تعریف تابع این است که تابع مانند یک ماشین عمل می‌کند، به‌طوری که x از دامنهٔ تابع را در ورودی ماشین می‌گیرد و تنها یک مقدار y را در خروجی ظاهر می‌کند، پس می‌توان مدل مقابل را برای تابع درنظر گرفت :



چون ماشین f روی x عملی را انجام می‌دهد، می‌توان حاصل آن عمل روی x را با $f(x)$ نمایش داد، بنابراین در خروجی ماشین می‌توان به‌جای y از $f(x)$ استفاده کرد.

مقادیر x که متعلق به دامنهٔ تابع هستند، از طریق ورودی به ماشین راه پیدا می‌کنند، سپس درون ماشین f طبق دستور یا قاعده‌ای که از قبل مشخص شده است، مقدار منحصر به‌فرد $y = f(x)$ ساخته می‌شود.

باید توجه داشت که معمولاً از x برای نشان دادن متغیر، از f برای نشان دادن تابع و از y یا $f(x)$ برای نشان دادن مقدار تابع استفاده می‌کنیم.

اکنون می‌توان مثال صفحهٔ ۳۹ را که دربارهٔ طول فنر و وزنه آویخته شده به آن است را باتوجه به آنچه که دیدیم، با نمادهای :

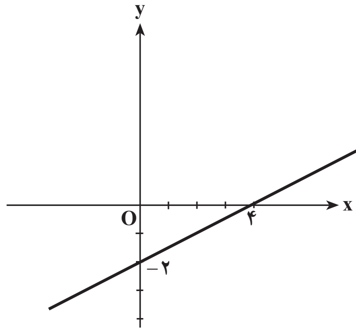
$$\begin{cases} f:D_f \to \mathbb{R} \\ p \mapsto f(p) \end{cases} \quad \text{یا} \quad f=\{(p,f(p))|p \in D_f\}$$

نیز نشان داد. بنابراین تابع f را به وسیلهٔ جدول، نمودار یا یکی از شکل‌های بالا می‌توان نمایش داد. آشکار است که تعریف f به هر صورت که باشد به هر p تنها یک l وابسته می‌کند. مثلاً همهٔ نمادهایی که برای تعریف تابع به‌کار برده‌ایم به $p=۱۵۰$ تنها مقدار $l=۱۳$ را نسبت می‌دهند.

از آنجا که تابع $f:x \mapsto y$ و مجموعهٔ زوج‌های مرتب که f را مشخص می‌کند، و مقدار تابع یعنی $f(x)$ و معادلهٔ $y=f(x)$، همگی به‌طور یکسان بستگی میان x و y را معین می‌کنند، پس از این، متناسب با موقعیت، ما از $f(x)$ و $y=f(x)$ نیز به‌عنوان تابع نام می‌بریم[۱]. اما گاهی بیان یک تابع به‌صورت یک قانون $f(x)$ مشکل و یا عملاً غیرممکن است، که در این صورت برای تجسم تابع از جدول و نمودار استفاده می‌شود.

مثال ۴: تابع حقیقی $\begin{cases} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{۱}{۲}x-۲ \end{cases}$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ درنظر می‌گیریم. داریم و $f(۰)=-۲$ و $f(۴)=۰$ و نمودار آن خط گذرنده بر دو نقطهٔ $(۰,-۲)$ و $(۴,۰)$ است.

x	y
۰	−۲
۴	۰



نکته: هر نقطه که مختصاتش در معادلهٔ $y=f(x)$ صدق کند بر نمودار تابع f قراردارد ؛ و برعکس، اگر نقطه‌ای بر نمودار تابع f واقع باشد مختصاتش در معادلهٔ بالا صدق خواهد کرد.

البته اگر دامنهٔ تابع را یک بازه، مثلاً $[۰,۴]$ درنظر بگیریم، نمودار تابع فقط پاره‌خطی خواهد بود که بین دو نقطه $(۰,-۲)$ و $(۴,۰)$ رسم می‌شود.

۱ــ تعریف تابع به وسیلهٔ مجموعهٔ زوج‌های مرتب و با استفاده از مفاهیم مجموعه‌ها روشن‌تر و دقیق‌تر و از نظر صوری نیز جالب است. اما چنین تعریفی نه صورت شهودی دارد و نه از توصیفی برخوردار است، و به‌کاربردن آن در بسیاری از موارد غیرعملی است.

مثال ۵: تابع $f(x)=۲x+۱$ با دامنه ۱,۱.−. داده شده است. کدام‌یک از نقاط زیر متعلق به نمودار آن می‌باشند؟

$$A(۲,۵) \text{ و } B(۰,۱) \text{ و } C(-\frac{۱}{۲},۰) \text{ و } D(-۱,-۱) \text{ و } E(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲})$$

حل: داریم :

(نمودار f) + A	:	$A(۲,۵):۲+D_f$
(نمودار f) . B	:	$B(۰,۱):f(۰)=۲(۰)+۱=۱$
(نمودار f) . C	:	$C(-\frac{۱}{۲},۰):f(-\frac{۱}{۲})=۲(-\frac{۱}{۲})+۱=۰$
(نمودار f) . D	:	$D(-۱,-۱):f(-۱)=۲(-۱)+۱=-۱$
(نمودار f) + E	:	$E(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}):f(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})+۱=۲$

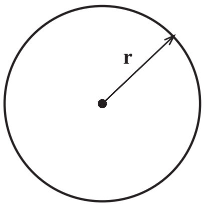
مثال ۶: تابع خطی $f(x)=ax+b$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌گونه‌ای مشخص نمایید که $f(۱)=۳$ و $f(-۱)=۱$.

حل: داریم :

$$f(۱)=a(۱)+b=a+b \quad \Rightarrow \begin{cases} a+b=۳ \\ -a+b=۱ \end{cases}$$
$$f(-۱)=a(-۱)+b=-a+b \quad \Rightarrow$$
$$۲b=۴ \Rightarrow b=۲, a=۱$$
$$f(x)=x+۲$$

مثال ۷: مساحت (A) دایره‌ای به شعاع r (شکل ۱) از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$A=.\,r^{۲} \quad (. \simeq ۳/۱۴۱۶)$



شکل ۱

به‌طور معمول این فرمول را با نماد تابعی به‌صورت $A(r)=.\,r^{۲}$ می‌نویسیم تا مشخص شود، مساحت دایره A، وابسته به شعاع دایره r است. هرچه شعاع بزرگتر شود، مساحت بزرگتر می‌شود. دامنه این تابع بازه (.+,۰) است.

مثال ۸: اگر یک سنگ‌ریزه از بالای برجی به‌طرف پایین رها شود و شتاب جاذبه زمین $g = 9/8 m/s^2$ باشد، در این‌صورت فاصلهٔ پیموده شده d از موقع رها شدن پس از t ثانیه، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$d(t) = 4/9t^2$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید فاصلهٔ پیموده شده d تابع‌ای از t است. دامنه این تابع بازه $[0, t_1]$ است که t_1 زمان رسیدن سنگ‌ریزه به زمین است.

مثال ۹: انرژی پایه در بدن به مقدار انرژی گفته می‌شود که برای تأمین سوخت دستگاه‌های غیرارادی درون بدن مانند قلب، ریه، کلیه، دستگاه گوارش، دستگاه تنفس، غدد درون‌ریز و مانند این استفاده می‌شود.

به‌طور معمول $\frac{2}{3}$ از انرژی دریافتی بدن از غذاها، صرف تأمین فعالیت‌های پایه و $\frac{1}{3}$ دیگر برای تأمین سوخت فعالیت‌های فیزیکی روزانه است. برای مثال، مقدار کالری لازم برای یک کارمند در یک شبانه‌روز از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود :

۳۰ × وزن بدن برحسب کیلوگرم = مقدار انرژی لازم برای بدن

چنان‌چه وزن کارمندی ۸۰ کیلوگرم باشد، برای تأمین انرژی موردنیاز خود به $80 \times 30 = 2400$ کالری در یک شبانه‌روز احتیاج دارد. بنابراین اگر این شخص روزانه بیش از ۲۴۰۰ کالری دریافت کند، آن‌گاه دچار اضافه وزن شده و اگر کمتر از ۲۴۰۰ کالری دریافت کند، سبب کاهش وزن می‌شود. ولی اگر همان ۲۴۰۰ کالری را دریافت کند وزن او ثابت باقی می‌ماند.

با توجه به فرمولِ مقدار انرژی لازم برای بدن، ملاحظه می‌کنیم که مقدار این انرژی تابعی از وزن انسان است. هرچه وزن بیشتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن بیشتر و هرچه وزن کمتر باشد، مقدار انرژی مصرفی لازم برای بدن نیز کمتر می‌شود، دامنه این تابع بازه $[x_1, x_2]$ است که x_1 کمترین وزن انسان‌ها و x_2 بیشترین وزن انسان‌ها است.

مثال ۱۰: یکی از روش‌های مرسوم سنجش وزن ایده‌آل افراد، استفاده از شاخص توده بدنی یا BMI[1] است که از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود :

$$BMI = \frac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{مجذور طول قد برحسب متر}}$$

۱ــ Bady Mass Index

پس از محاسبهٔ BMI یکی از حالت‌های زیر برای هر فرد اتفاق می‌کند.

BMI . ۱۹ ⇒ شخص لاغر است و کمبود وزن دارد

۱۹ ≤ BMI . ۲۵ ⇒ شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است

۲۵ ≤ BMI . ۳۰ ⇒ شخص اضافه وزن دارد

BMI . ۳۰ ⇒ شخص چاق و وضعیت بحرانی دارد.

با این روش، وضعیت وزنی هر فردی مشخص می‌شود و افرادی که اضافه وزن دارند، با یک رژیم مناسب می‌توانند به محدوده سلامت وزنی برسند. اما وزن ایده‌آل چیست؟

در پاسخ به این سؤال باید بگوییم که وزن ایده‌آل با سن شما رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به‌طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا می‌رود و BMI افزایش می‌یابد. به همین جهت متخصصان علوم تغذیه به کمک جدول سن، BMI مناسب گروه سنی افراد مختلف را به‌صورت زیر تعیین می‌کنند.

گروه سنی	BMI
۱۹ـ۲۴	۲۲
۲۵ـ۳۴	۲۳
۳۵ـ۴۴	۲۴
۴۵ـ۵۴	۲۵
۵۵ـ۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

پس از یافتن BMI مناسب با گروه سنی هر فرد، وزن ایده‌آل طبق فرمول زیر محاسبه می‌شود :

وزن ایده‌آل برحسب کیلوگرم = BMI × مجذور قد برحسب متر

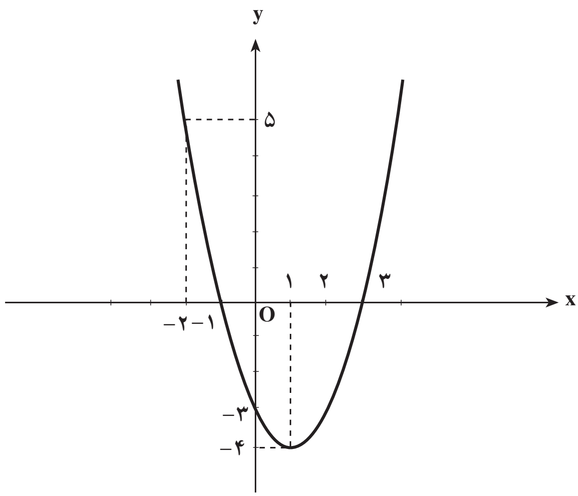
اکنون که وزن ایده‌آل خود را دانستید، معلوم می‌شود که چه‌قدر اضافه وزن یا چه‌قدر کمبود وزن دارید.

با دقت در فرمول وزن ایده‌آل درمی‌یابیم که وزن ایده‌آل تابعی از طول قد هر فرد است، هم‌چنین چون وزن ایده‌آل از حاصل‌ضرب BMI در مجذور قد برحسب متر به‌دست می‌آید، مشخص می‌شود که وزن ایده‌آل تابعی از BMI و درنتیجه گروه سنی هر فرد می‌شود. در این فرمول طول قد و BMI متغیرهایی مستقل و وزن ایده‌آل متغیری وابسته به آن‌ها است.

در سال گذشته با تابع خطی که ضابطه آن به‌صورت $y = ax + b$ است آشنا شدید، همچنین رسم نمودار برخی از توابع درجه دوم را به کمک انتقال تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲$ مطالعه کردید. به نمودار تابع درجه دوم با ضابطهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ **سهمی** می‌گوییم. در زیر رسم نمودار یک تابع درجه دوم را به کمک نقطه‌یابی مشاهده می‌کنید.

مثال ۱۱: نمودار تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ \end{cases}$ را رسم کنید.

حل: می‌دانیم که نمودار تابع بالا یک سهمی است. با توجه به آن‌که $f(x) = (x-۱)^۲ - ۴$ با انتقال سهمی $y = x^۲$ به اندازه یک واحد به راست و ۴ واحد به پایین، نمودار این تابع رسم می‌شود.



معادلهٔ کلی سهمی به‌صورت $f(x) = ax^۲ + bx + c$ است.

مثال ۱۲: معادله یک سهمی را بیابید که از نقاط $(۰,-۱)$، $(۱,۰)$، $(۲,۳)$ بگذرد.

حل: داریم :

$$f(۰) = ۰ + ۰ + c \quad \Rightarrow \quad -۱ = c$$

$$f(۱) = a(۱)^۲ + b(۱) + c \quad \Rightarrow \quad ۰ = a + b - ۱ \Rightarrow a + b = ۱$$

$$f(۲) = a(۲)^۲ + b(۲) + c \quad \Rightarrow \quad ۳ = ۴a + ۲b - ۱ \Rightarrow ۴a + ۲b = ۴$$

پس باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} a + b = ۱ \\ ۲a + b = ۲ \end{cases} \Rightarrow a = ۱ \ , \ b = ۰$$

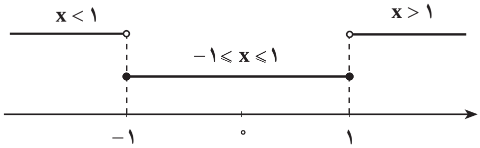
که از آن نتیجه می‌شود :

$$f(x) = x^{۲} - ۱$$

تابع چندضابطه‌ای

هرگاه دامنهٔ یک تابع را به چند مجموعهٔ جدا از هم تقسیم کنیم، به‌طوری که اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنهٔ تابع باشد و روی هر مجموعه ضابطه‌ای متمایز تعریف کنیم، در این صورت یک تابع چندضابطه‌ای به‌دست می‌آید.

مثال ۱۳: دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر با $\mathbb{R}$ است. دامنه این تابع به‌صورت زیر، به سه مجموعهٔ جدا از هم تقسیم شده است.



روی هر مجموعه، ضابطه‌ای به صورت زیر تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & x \,.\, ۱ \\ ۲ & -۱ \,.\, x \,.\, ۱ \\ -۲x & x \,.\, ۱ \end{cases}$$

در این‌حالت $f(x)$ را تابعی سه ضابطه‌ای می‌گوییم.

مثال ۱۴: نمودار تابع سه ضابطه‌ای مثال قبل را رسم کنید.

برای رسم نمودار این تابع باید نمودار هر ضابطه را در محدودهٔ اعتبارش رسم کنیم. به همین منظور، $f(x) = ۲x$ را برای $x \,.\, ۱$ ، $f(x) = ۲$ را برای $-۱ \,.\, x \,.\, ۱$ و $f(x) = -۲x$ را برای $x \,.\, -۱$ رسم می‌کنیم :

$f(x) = ۲$;

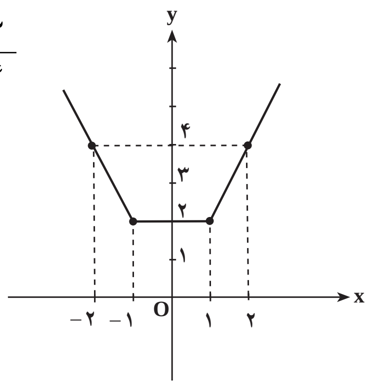
x	−۱	۱
y	۲	۲

$f(x) = ۲x$;

x	۱	۲
y	۲	۴

$f(x) = -۲x$;

x	−۱	−۲
y	۲	۴



توجه: نمودار هر ضابطه از تابع را رسم کردیم و روی هر نمودار، قسمت‌هایی که در محدوده اعتبار آن ضابطه است را پررنگ کردیم. ملاحظه می‌کنیم که عرض هر نقطه روی نمودار این تابع سه ضابطه‌ای، همواره بزرگتر یا برابر با ۲ است.

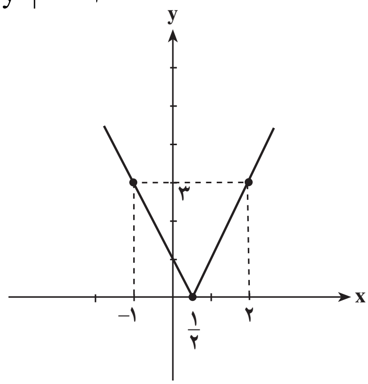
مثال ۱۵: نمودار تابع $f(x)=|۲x-۱|$ را رسم کنید.

می‌دانیم که اگر $۲x-۱ . ۰$ آن‌گاه $f(x)=۲x-۱$ و در حالتی که $۲x-۱ . ۰$ خواهیم داشت: $f(x)=-(۲x-۱)$ ، در نتیجه ابتدا این تابع را به‌صورت چند ضابطه می‌نویسیم، سپس آن را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & ۲x-۱ . ۰ \\ -۲x+۱ & ۲x-۱ . ۰ \end{cases} = \begin{cases} ۲x-۱ & x . \frac{۱}{۲} \\ -۲x+۱ & x . \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$f(x)=۲x-۱ \qquad \begin{array}{c|cc} x & \frac{۱}{۲} & ۲ \\ \hline y & ۰ & ۳ \end{array} \qquad (x . \frac{۱}{۲})$$

$$f(x)=-۲x+۱ \qquad \begin{array}{c|cc} x & \frac{۱}{۲} & -۱ \\ \hline y & ۰ & ۳ \end{array} \qquad (x . \frac{۱}{۲})$$



مثال ۱۶: تابع $f(x)=\begin{cases} -x^۲+۱ & x . ۰ \\ ۱-۲x & x . ۰ \end{cases}$ را درنظر بگیرید.

حاصل $f(x^۲+۱)$ ، $f(-\sqrt{۲})$ و $f(-\frac{۱}{۲}x^۲-۱)$ را به‌دست آورید.

حل: چون همواره $x^۲+۱ . ۰$ ، بنابراین از ضابطهٔ اول برای محاسبهٔ $f(x^۲+۱)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x^۲+۱)=-(x^۲+۱)^۲+۱=-(x^۴+۲x^۲+۱)+۱=-x^۴-۲x^۲$$

چون ۰ . $\sqrt{۲}-$ ، بنابراین برای محاسبهٔ $f(-\sqrt{۲})$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم :

$$f(-\sqrt{۲})=۱-۲(-\sqrt{۲})=۱+۲\sqrt{۲}$$

چون $۰\leq \frac{۱}{۲}x^۲$ بنابراین ۰ . $-\frac{۱}{۲}x^۲-۱$. درنتیجه برای محاسبهٔ $f(-\frac{۱}{۲}x^۲-۱)$ از ضابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم :

$$f(-\frac{۱}{۲}x^۲-۱)=۱-۲(-\frac{۱}{۲}x^۲-۱)=۱+x^۲+۲=x^۲+۳$$

مثال ۱۷: تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\ .\ ۰ \\ x-۱ & x\ .\ ۰ \end{cases}$ داده شده است.

الف ــ $f(-۱)$ و $f(۰)$ و $f(\frac{۱}{۲})$ و $f(۱)$ و $f(۲)$ را محاسبه نمایید.

ب ــ نمودار تابع را رسم کنید.

حل: داریم :

$$f(-۱)=-۱-۱=-۲$$

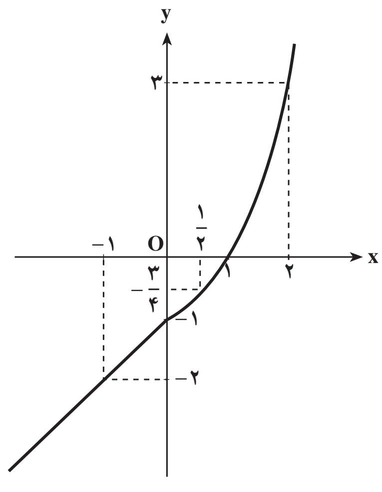
$$f(۰)=(۰)^۲-۱=-۱$$

$$f(\frac{۱}{۲})=(\frac{۱}{۲})^۲-۱=\frac{۱}{۴}-۱=-\frac{۳}{۴}$$

$$f(۱)=(۱)^۲-۱=۱-۱=۰$$

$$f(۲)=۲^۲-۱=۴-۱=۳$$

x	-۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
y	-۲	-۱	$-\frac{۳}{۴}$	۰	۳



نمودار تابع f با توجه به دامنه‌اش قسمتی از سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۱$ و قسمتی از خط به معادلهٔ $y=x-۱$ است.

تمرین

۱ــ اگر تابع $y=f(x)=\frac{۳}{۲x^۲+۱}$ با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، برابری‌های زیر را کامل کنید :

$f(۰)=$ ، $f(\sqrt{۲})=$ ، $f(\frac{۱}{۲})=$ ، $f(۲x)=$

۲ــ اگر تابع $f(x)=x^{۲}-۴$ با دامنه $\mathbb{R}$ باشد، مقادیر زیر را حساب کنید.

$f(۳)$ ، $f(۵)$ ، $f(f(۳))$

۳ــ تابع f به‌صورت $\begin{cases} f(x)=\sqrt{۲}+x & x \,.\, ۱ \\ f(x)=\sqrt{۲}-x & x \,.\, ۱ \end{cases}$ تعریف شده است. برابری‌های زیر را کامل کنید.

$f(\sqrt{۲}-۱)=$ ، $f(۳-\sqrt{۲})=$ ، $f(-\sqrt{۲})=$

$f(۰)=$ ، $f(f(-۱))=$

۴ــ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک تابع را مشخص می‌کند.

۱) $\{(-۱,۰)$ و $(۰,۱)$ و $(۲,۳)$ و $(\sqrt[۳]{-۱},۴)\}$

۲) $\{(-۱,۲)\}$

۳) $\{(۰,۰)$ و $(۲,۱)$ و $(۳,۲)$ و $(-۱,۰)$ و $(۲,-۲)\}$

۴) $\{(۱,۱)$ و $(۲,۳)$ و $(-۱,-۱)$ و $(-۲,۵)\}$

۵ــ معادلهٔ خطی را مشخص کنید که محور xها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{۳}{۲}$ قطع کند و از نقطهٔ $(۱,۵)$ بگذرد.

۶ــ اگر تابع $f(x)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}$ با دامنه $\mathbb{R}-\{۰\}$ باشد مقادیر زیر را محاسبه نمایید :

$f(۱)$ و $f(-۱)$ و $f(\frac{۱}{x})$ و $f(\frac{-۱}{x})$ و $f(\sqrt{x})$

۷ــ اگر $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ ، $f(-\frac{۱}{x})$ را به‌دست آورید و درستی تساوی $f(x)\times f(\frac{-۱}{x})=-۱$ را بررسی نمایید. $(x\neq \,.\, ۱,۰)$

۸ ــ اگر $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ ، a و b و c را طوری بیابید که این سهمی محور yها را در نقطه‌ای به‌عرض ۳ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و از نقطهٔ $A(۲,۳)$ نیز بگذرد.

۹ــ تابع $f(x)=\begin{cases} ۴-x^{۲} & x \,.\, ۰ \\ x+۴ & x \,.\, ۰ \end{cases}$ را درنظر بگیرید.

الف ــ $f(-۲)$ و $f(-۱)$ و $f(۰)$ و $f(۱)$ و $f(۲)$ را محاسبه کنید و در یک جدول مرتب نمایید.

ب ــ نمودار تابع را رسم کنید.

۱۰ــ دو تابع $y=x^{۲}+ax-۳b$ و $y=-x+b$ با دامنه $\mathbb{R}$ داده شده‌اند، a و b را طوری

محاسبه کنید که نمودارهای این دو تابع روی محور xها در نقطه‌ای به‌طول ۱ همدیگر را قطع کنند.

۱۱ــ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۴ & x\ .\ ۲ \\ x+۳ & x\ .\ ۲ \end{cases}$ ب) $f(x)=\begin{cases} -x^{۲}+۲x & x\ .\ ۲ \\ ۲x-۱ & x\ .\ ۲ \end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x\ .\ ۰ \\ ۱ & x\ .\ ۰ \end{cases}$ د) $f(x)=-۳\left|\frac{۱}{۳}x+۶\right|$

روش محاسبه دامنهٔ تعریف ضابطه‌ها

در توابع حقیقی با مقادیر حقیقی گاهی اوقات دامنهٔ تابع داده نمی‌شود و فقط ضابطهٔ تابع ارائه می‌شود. در این‌صورت طبق قرارداد دامنهٔ تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی است که برای آن‌ها ضابطه تعریف شده باشد.

مثال ۱: تابع $f(x)=x^{۲}+۳$ داده شده است، دامنهٔ تابع را به‌دست آورید.

حل: تابع بالا چنان است که هر عدد حقیقی x را به‌توان ۲ می‌رساند و ۳ را به آن می‌افزاید و عدد معین $x^{۲}+۳$ را می‌دهد. مثلاً برای $x=۲$ ، $۷=۳+(۲)^{۲}$ و برای $x=-۳$ ، $۱۲=۳+(-۳)^{۲}$ ، پس این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی x تعریف شده است. بنابراین $D_f=\mathbb{R}$.

مثال ۲: تابع $f(x)=x^{۳}-۲x-۵$ داده شده است، دامنهٔ آن را معین کنید.

حل: چون برای هر عدد حقیقی $x_۰$ ، $f(x_۰)=x_۰^{۳}-۲x_۰-۵\ .\ \mathbb{R}$

پس این تابع نیز برای همهٔ مقادیر $x_۰$ ، متعلق به مجموعهٔ اعداد حقیقی، تعریف شده است یعنی : $D_f=\mathbb{R}$.

به‌طور کلی دامنهٔ تابع‌های چندجمله‌ای که به‌صورت $f(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\quad +a_۰$ یا $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}+\quad +l\ ,\ n\ .\ W$ نمایش داده می‌شود، مجموعهٔ اعداد حقیقی است. یعنی : $D_f=\mathbb{R}$ زیرا در چند جمله‌ای‌ها برای همهٔ مقادیر x متعلق به $\mathbb{R}$ ، $f(x)$ قابل محاسبه است.

مثال ۳: دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲}{x^{۲}-۱}$ را تعیین کنید.

حل: می‌دانیم که اگر $x^{۲}-۱$ صفر باشد کسر بالا تعریف نشده است و هرگاه $x^{۲}-۱$ ناصفر باشد $f(x)$ تعریف شده است. اما داریم :

$$x^{۲}-۱\ .\ ۰ \Rightarrow x^{۲}\ .\ ۱ \Rightarrow x\ .\ .\ ۱$$

پس این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی x جز $x=1$ و $x=-1$ تعریف شده است. بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت زیر است :

$$D_f=\mathbb{R}-\{-1,1\} \quad \text{یا} \quad D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$$

مثال ۴: دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ را مشخص کنید.

حل: چون x^2+1 هیچ‌گاه صفر نمی‌شود پس کسر بالا برای همهٔ مقادیر x تعریف شده است، بنابراین دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ است.

به‌طور کلی در توابع کسری به‌صورت $y=f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند (توابع کسری گویا) دامنه، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی به‌غیر از ریشه‌های $q(x)$ است یعنی :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid q(x)\neq 0\}$$

مثال ۵: دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x-3}$ عبارت است از :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-2x-3\neq 0\}=\mathbb{R}-\{3,-1\}$$

مثال ۶: تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ برای همهٔ اعداد حقیقی x به‌طوری‌که $x-2\geq 0$ تعریف شده است ولی برای $x-2<0$ تعریف نشده است. بنابراین داریم :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x-2\geq 0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 2\}=[2,+\infty)$$

مثال ۷: تابع $f:x\to\sqrt{1-x^2}$ برای $1-x^2\geq 0$ تعریف شده است. بنابراین :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid 1-x^2\geq 0\}$$

که با توجه به جدول :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

خواهیم داشت :

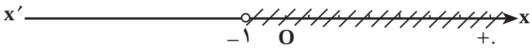
$$D_f=[-1,1]$$

مثال ۸: تابع $g(x)=\sqrt[3]{2x^2-1}$ برای همهٔ اعداد حقیقی x تعریف شده است. زیرا فرجهٔ رادیکال فرد است و عبارت زیر رادیکال چندجمله‌ای است، پس $D_g=\mathbb{R}$.

مثال ۹: تابع $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ برای مقادیری از x که $\sqrt{x+1}$ معین و مخالف با صفر باشد، تعریف شده است.

پس، از یک طرف مخرج کسر باید مخالف با صفر باشد، یعنی $x+1\neq 0$ یا $x\neq -1$، و از طرف دیگر عبارت زیر رادیکال، با توجه به فرجهٔ زوج آن، باید نامنفی باشد، یعنی $x+1\geq 0$. بنابراین داریم :

$$D_h=\{x\in\mathbb{R} \mid x+1>0\}=(-1,+\infty)$$



به‌طور کلی دامنهٔ توابع گنگ به‌صورت $f(x)=\sqrt[2k]{p(x)}$ و $g(x)=\sqrt[2k+1]{p(x)}$ عبارت‌اند از :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x\in D_p , p(x)\geq 0\} \qquad D_g=D_p$$

مثال ۱۰: دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ عبارت است از :

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid \frac{2-x}{2+x}\geq 0 \text{ و } 2+x\neq 0\}$$

$$2-x=0\Rightarrow x=2$$

$$2+x=0\Rightarrow x=-2$$

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$\dfrac{2-x}{2+x}$	$-$	تعریف نشده	$+$	0	$-$

پس :

$$D_f=(-2,2]$$

مثال ۱۱: دامنهٔ تابع‌های $f(x)=\sqrt{2-x-x^2}$ و $g(x)=\sqrt[3]{\dfrac{3}{x-1}}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$2-x-x^2\geq 0\Rightarrow (2+x)(1-x)\geq 0$$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$2-x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

پس :

$$D_f=[-2,1]$$

و به همین ترتیب :

$$D_g=\{x\in\mathbb{R} \mid x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$$

مثال ۱۲: دامنهٔ تابع‌های $f(x)=\log_{۳}(x-۱)$ و $g(x)=\log\frac{x+۱}{۱-x}$ را به این‌صورت معین می‌کنیم:

بنابر تعریف لگاریتم، دامنهٔ تابع f مقادیری از x است که برای آن‌ها $x-۱>۰$ یا $x>۱$.

پس: $D_f=\{x\in\mathbb{R}|x-۱>۰\}=(۱,+\infty)$

و دامنهٔ تابع g مقادیری از x است که $\frac{x+۱}{۱-x}>۰$. بنابراین:

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}|\frac{x+۱}{۱-x}>۰ \text{ و } ۱-x\neq۰\}=(-۱,۱)$$

مثال ۱۳: دامنهٔ توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ و $h(x)=\tan x$ و $p(x)=\cot x$ را تعیین کنید.

حل: دامنهٔ تابع‌های f و g مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است، زیرا برای هر عدد حقیقی x مقادیر f و g معین است.

دامنهٔ تابع h به‌صورت زیر است:

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}|x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\}$$

زیرا داریم: $h(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ و چون باید داشته باشیم $\cos x\neq۰$ پس $x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$، سرانجام دامنهٔ تابع p به‌صورت $D_p=\{x\in\mathbb{R}|x\neq k\pi\}$ است زیرا داریم: $p(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$ و چون باید $\sin x\neq۰$ باشد، پس $x\neq k\pi$.

مثال ۱۴: دامنهٔ تابع $f(x)=\sin\sqrt{x}$ و $g(x)=\tan۲x$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$D_f=\{x|\sqrt{x}\in\mathbb{R}\}=[۰,+\infty)$$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}|۲x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\}=\{x\in\mathbb{R}|x\neq\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}\}$$

تمرین

۱ــ دامنهٔ هریک از توابع زیر را به‌دست آورده و آن‌ها را به‌صورت بازه نمایش دهید.

$f(x)=۲x^۲-۳x$ $\quad$ $g(x)=x(x+۲)(x-۱)$ $\quad$ $h(x)=\frac{۱}{x^۲-۳x-۴}$

$f(x)=\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x-۱}$ $\quad$ $g(x)=\frac{۲}{\sqrt{x+۲}}$ $\quad$ $h(x)=\frac{۲x+۵}{x^۲-۲x}$

$$f(x)=\sqrt{\frac{۲-x}{۱-x}} \qquad g(x)=\sqrt[۳]{\frac{۲}{x+۱}} \qquad h(x)=\frac{۲x}{\sqrt[۳]{x+۱}}$$

$$f(x)=\log(x^{۲}-۱) \qquad g(x)=\log(۴-x^{۲}) \qquad h(x)=\log(۲-x)^{۲}$$

$$f(x)=\sqrt{x^{۲}+x-۲} \qquad g(x)=\frac{|x|}{x} \qquad h(x)=\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}$$

$$f(x)=x\sqrt{x-۳}$$

۲ــ دامنهٔ توابع مثلثاتی زیر را به‌دست آورید :

$$f(x)=\sin(x+\frac{.}{۴})\ ،\ g(x)=\cos\frac{۱}{x}\ ،\ k(x)=\tan(x-\frac{.}{۴})$$

۳ــ دامنهٔ تابع‌های داده‌شده را به‌صورت بازه بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases} x+۱\ , & x\ .\ ۲ \\ ۳x\ , & x\ .\ ۰ \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} x\ , & -۳\ .\ x\le ۲ \\ ۳x-۴\ , & ۲\ .\ x\le ۴ \end{cases}$$

عملیات روی توابع

۱ــ مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت دو تابع حقیقی

توابع حقیقی $f(x)=x^{۲}-۱$ و $g(x)=۲x$ و $h(x)=x^{۲}+۲x-۱$ را در نظر می‌گیریم.
مقادیر $f(۲)$ و $f(-۱)$ و $g(۲)$ و $g(-۱)$ و $h(۲)$ و $h(-۱)$ و $f(۲)+g(۲)$ و $f(-۱)+g(-۱)$ را محاسبه می‌کنیم و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	-۱	۲
$f(x)$	$(-۱)^{۲}-۱=۰$	$(۲)^{۲}-۱=۳$
$g(x)$	$۲(-۱)=-۲$	$۲(۲)=۴$
$f(x)+g(x)$	$۰-۲=-۲$	$۳+۴=۷$
$h(x)$	$(-۱)^{۲}+۲(-۱)-۱=-۲$	$(۲)^{۲}+۲(۲)-۱=۷$

به‌طوری که دیده می‌شود :

$$f(-۱)=۰, g(-۱)=-۲, f(-۱)+g(-۱)=۰+(-۲)=-۲, h(-۱)=-۲$$

$$f(۲)=۳, g(۲)=۴\ ,\ f(۲)+g(۲)=۳+۴=۷\ ,\ h(۲)=۷$$

هم‌چنین دو تابع $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}x-۱$ را در نظر گرفته سپس $h(x)=f(x)+g(x)$ را محاسبه و جدول صفحهٔ بعد را کامل می‌کنیم :

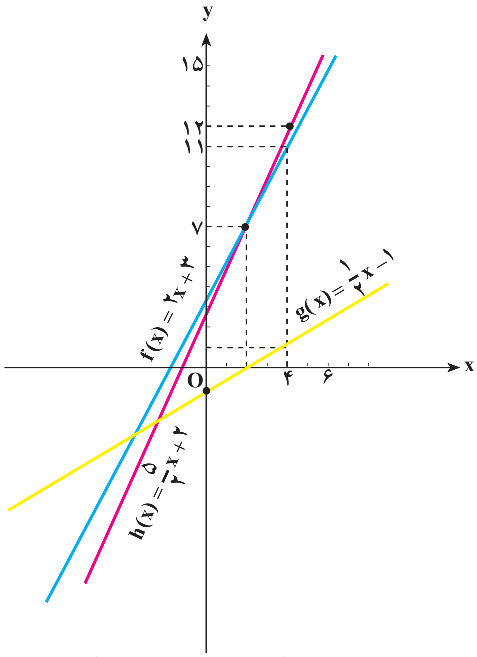
داریم : $h(x)=۲x+۳+\frac{۱}{۲}x-۱=\frac{۵}{۲}x+۲$

x	۲	۴	۶
$f(x)$	۴+۳=۷	۸+۳=۱۱	۱۲+۳=۱۵
$g(x)$	۱−۱=۰	۲−۱=۱	۳−۱=۲
$f(x)+g(x)$	۷+۰=۷	۱۱+۱=۱۲	۱۵+۲=۱۷
$h(x)=\frac{۵}{۲}x+۲$	۵+۲=۷	۱۰+۲=۱۲	۱۵+۲=۱۷

به‌طوری که دیده می‌شود : $f(۲)=۷$ و $g(۲)=۰$ و $f(۲)+g(۲)=۷$ و $h(۲)=۷$ است.
در جدول‌های قبل مشاهده می‌شود که مقادیر $f(x)+g(x)$ و $h(x)$ برای xهای موردنظر با یکدیگر برابرند. این مطلب ما را به تعریف تابع جدید $h=f+g$ ، که مجموع دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌باشد، رهنمون می‌سازد یعنی :

$$y=h(x)=(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

در شکل زیر نمودار تابع‌های f و g و h مثال بالا را رسم کرده‌ایم. ملاحظه می‌شود که برای همهٔ xهای موردنظر اندازه‌های به‌دست آمده بر روی نمودار با اعداد به‌دست آمده در جدول سازگار است.



تمرین

مقدار هر یک از توابع $f(x)=x$ و $g(x)=x^۲-۱$ و $h(x)=x(x^۲-۱)$ را برای $x=-۱$ و $x=۰$ و $x=۱$ محاسبه کنید و با تشکیل جدولی مقادیر به‌دست آمده برای $f(x)\times g(x)$ را با $h(x)$ مقایسه نمایید. آیا از روی آن می‌توانید تعریفی برای حاصل‌ضرب دو تابع نتیجه بگیرید؟

همان‌طور که دیده‌ایم، در توابع حقیقی مقدار تابع برای هر مقدار از دامنه، عددی حقیقی است. بنابراین همان‌گونه که در اعداد حقیقی، چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم تعریف می‌شود برای توابع نیز می‌توان مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت تعریف کرد.

تعریف: دو تابع حقیقی f و g را در نظر می‌گیریم و دامنه آن‌ها را یکسان می‌کنیم، یعنی دامنه آن‌ها را مجموعه $D = D_f \cap D_g$ قرار می‌دهیم. فرض کنید x متعلق به D باشد، در این صورت :

الف ــ مجموع دو تابع f و g را با نماد $f+g$ نشان می‌دهیم و آن‌را چنین تعریف می‌کنیم :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

ب ــ تفاضل دو تابع f و g را با نماد $f-g$ نشان می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم :

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

ج ــ حاصل‌ضرب دو تابع را با نماد f.g نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(f.g)(x) = f(x) \times g(x)$$

د ــ تقسیم دو تابع f و g را با نماد $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم و آن‌را چنین تعریف می‌کنیم :

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad g(x) \neq ۰$$

دامنهٔ همهٔ توابع تعریف شده در بالا $D_f \cap D_g$ است مگر در حالت (د) که باید جواب‌های $g(x) = ۰$ را از دامنهٔ مشترک حذف کرد.

مثال ۱: اگر $f(x) = x^۲ + x$ و $g(x) = x^۲ - ۱$ داریم :

$$D_f = \mathbb{R} \ ، D_g = \mathbb{R}$$

برای مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب $\quad D = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^۲ + x + x^۲ - ۱ = ۲x^۲ + x - ۱$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^۲ + x - x^۲ + ۱ = x + ۱$$

$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^۲ + x)(x^۲ - ۱) = x^۴ + x^۳ - x^۲ - x$$

و برای $\frac{f}{g}$:

$$D = \mathbb{R} - \{x | g(x) = ۰\} = \mathbb{R} - \{x | x^۲ - ۱ = ۰\} = \mathbb{R} - \{-۱, +۱\}$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{y(x)} = \frac{x^۲ + x}{x^۲ - ۱} = \frac{x}{x - ۱}$$

پس :

$$(f+g)(-۲)=۲(-۲)^{۲}+(-۲)-۱=۵$$
$$(f-g)(-۲)=-۲+۱=-۱$$
$$(\frac{f}{g})(۳)=\frac{۳}{۳-۱}=\frac{۳}{۲}$$
$$(f.g)(۱)=۱+۱-۱-۱=۰$$

$\frac{f}{g}$ در $x=۱$ تعریف نشده است. بنابراین $(\frac{f}{g})(۱)$ را نمی‌توان تشکیل داد.

مثال ۲: اگر $f(x)=۲x+۴$ و $g(x)=x^{۲}-۳$، برای جمع، تفریق و ضرب دو تابع داریم :

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=\mathbb{R}\ ,\ D=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۲x+۴+x^{۲}-۳=x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۲x+۴-x^{۲}+۳=-x^{۲}+۲x+۷$$
$$(f.g)(x)=f(x)g(x)=(۲x+۴)(x^{۲}-۳)=۲x^{۳}-۶x+۴x^{۲}-۱۲$$
$$=۲x^{۳}+۴x^{۲}-۶x-۱۲$$

و برای تقسیم دو تابع :

$$D=\mathbb{R}-\{x|\,g(x)=۰\}=\mathbb{R}-\{x|\,x^{۲}-۳=۰\}$$

پس :

$$D=\mathbb{R}-\{-\sqrt{۳},+\sqrt{۳}\}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۲x+۴}{x^{۲}-۳}$$

مثال ۳: اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ باشد دامنه و قانون تابع‌های $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را چنین حساب می‌کنیم :

$$D_f=\mathbb{R}-\{۰\}\ \ ,\ \ D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

داریم :

$$D_{f-g}=(\mathbb{R}-\{۰\})\cap(\mathbb{R}-\{۱\})=\mathbb{R}-\{۰\ ,\ ۱\}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{۱}{x}-\frac{x+۱}{x-۱}=\frac{x-۱-x^{۲}-x}{x(x-۱)}=\frac{-x^{۲}-۱}{x(x-۱)}$$
$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|\,g(x)=۰\}=D_f\cap D_g-\left\{x\left|\frac{x+۱}{x-۱}=۰\right.\right\}$$
$$D_{f/g}=\mathbb{R}-\{۰,۱,-۱\}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۱}{x}\ ,\ \frac{x+۱}{x-۱}=\frac{x-۱}{x(x+۱)}$$

مثال ۴: اگر $P(x)=x+1$ و $h(x)=\sqrt{x-1}$ باشد داریم :

$$D_P=\mathbb{R}\ ,\ D_h=\{x|x-1\geq 0\}=[1,+\infty)$$

$$D_{p.h}=\mathbb{R}\cap[1,+\infty)=[1,+\infty)\quad (p.h)(x)=(x+1)\sqrt{x-1}$$

$$D_{p/h}=[1,+\infty)-\{x|\sqrt{x-1}=0\}=(1,+\infty)$$

$$(\frac{P}{h})(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$$

مثال ۵: در صورتی‌که $f(x)=3x-1$ و $g(x)=\frac{x+1}{3x-1}$، داریم :

$$D_f=\mathbb{R}\quad,\quad D_g=\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}\quad\Rightarrow\quad D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}$$

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)=3x-1\pm\frac{x+1}{3x-1}=\begin{cases}\frac{9x^2-5x+2}{3x-1}=(f+g)(x)\\ \frac{9x^2-7x}{3x-1}=(f-g)(x)\end{cases}$$

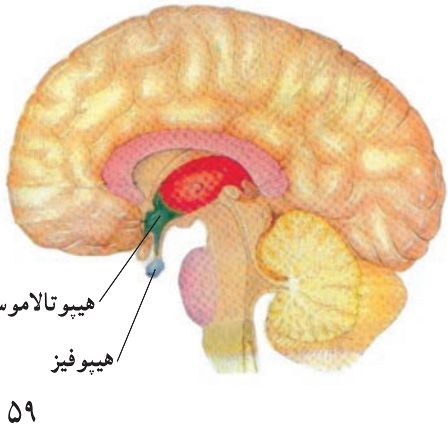
$$(f.g)(x)=(3x-1)\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)=x+1$$

$$D_{f/g}=\mathbb{R}-\{\frac{1}{3}\}-\{x|g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{\frac{1}{3},-1\}$$

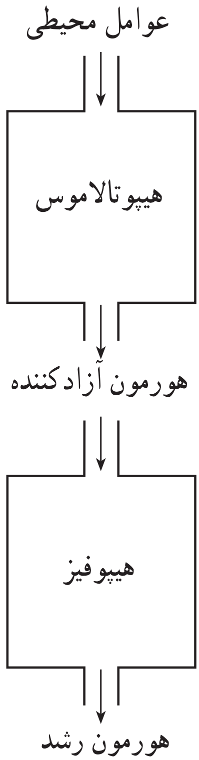
$$(\frac{f}{g}).(x)=(3x-1),\ (\frac{x+1}{3x-1})=\frac{(3x-1)^2}{x+1}$$

۲ــ ترکیب دو تابع حقیقی

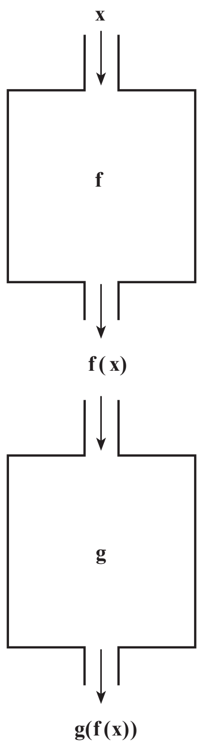
هیپوتالاموس بخشی از مغز است که تنظیم محیط درون بدن را انجام می‌دهد. اگر گرسنه یا تشنه می‌شویم یا دمای بدنمان افزایش یا کاهش می‌یابد، همگی با فرماندهی هیپوتالاموس انجام می‌شود، برای مثال هیپوتالاموس با تأثیر از عوامل محیطی و شرایط درون بدن، ملکولی به‌نام «هورمون آزادکننده هورمون رشد» را به درون خون ترشح می کند. پس از رسیدن این ملکول به غدۀ هیپوفیز که بر سطح زیرین مغز چسبیده است، غده هیپوفیز به آزادسازی هورمون رشد در خون می‌پردازد. هورمون رشد از راه خون به بافت استخوان می‌رسد و بر سلول‌های آن اثر می گذارد و باعث رشد استخوان می‌شود.



بنابراین رشد استخوان تابعی از «هورمون رشد» و هورمون رشد تابعی از «هورمون آزادکننده هورمون رشد» است، درنتیجه رشد استخوان از ترکیب این دو تابع به‌دست می‌آید. چنان‌چه تابع را به‌عنوان یک ماشین درنظر بگیریم کار هیپوتالاموس و هیپوفیز را می‌توان به‌صورت روبه‌رو نشان داد :



اکنون اگر عمل هیپوتالاموس بر عوامل محیطی و شرایط درون بدن را با f و عمل غدهٔ هیپوفیز را با g نمایش دهیم، ترکیب دو تابع f و g را به‌صورت روبه‌رو خواهیم داشت :



پیش از تعریف ترکیب دو تابع به مثال‌های زیر توجه کنید :

مثال ۱ : اگر $f(x)=x^{۲}-۲x$ و $g(x)=۲x+۱$ ، می‌خواهیم مقادیر $g(۰)$ و $g(\frac{۱}{۲})$ و $g(۲x)$ و سپس $f(۱)$ و $f(۲)$ و $f(۲x+۱)$ و $f(۴x+۱)$ را محاسبه کنیم.

داریم : $D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=\mathbb{R}$

$$g(۰)=۲(۰)+۱=۱\quad ,\quad g(\frac{۱}{۲})=۲(\frac{۱}{۲})+۱=۱+۱=۲$$

$$g(۲x)=۲(۲x)+۱=۴x+۱$$

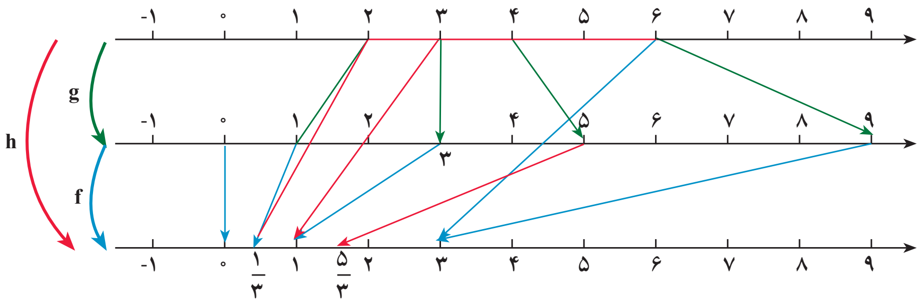
$$f(۱)=(۱)^{۲}-۲(۱)=۱-۲=-۱\qquad f(۲)=(۲)^{۲}-۲(۲)=۴-۴=۰$$

$$f(۲x+۱)=(۲x+۱)^{۲}-۲(۲x+۱)=۴x^{۲}-۱$$

$$f(۴x+۱)=(۴x+۱)^{۲}-۲(۴x+۱)=۱۶x^{۲}+۸x+۱-۸x-۲=۱۶x^{۲}-۱$$

مثال ۲ : توابع $\begin{cases} f:.۰,۹.\to\mathbb{R}\\ f(x)=\frac{۱}{۳}x\end{cases}$ ، $\begin{cases} g:.۲,۶.\to\mathbb{R}\\ g(x)=۲x-۳\end{cases}$ ، $\begin{cases} h:.۲,۶.\to\mathbb{R}\\ h(x)=\frac{۲}{۳}x-۱\end{cases}$

را در نظر می‌گیریم و نمودار و جدول آن‌ها را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم :



x	$۲x-۳$	$\frac{۱}{۳}(۲x-۳)=\frac{۲}{۳}x-۱$	
۲	۱	$\frac{۱}{۳}$	$h(۲)=\frac{۱}{۳}$
۳	۳	۱	$h(۳)=۱$
⋮	⋮	⋮	⋮
۶	۹	۳	$h(۶)=۳$

به‌طوری که دیده می‌شود :

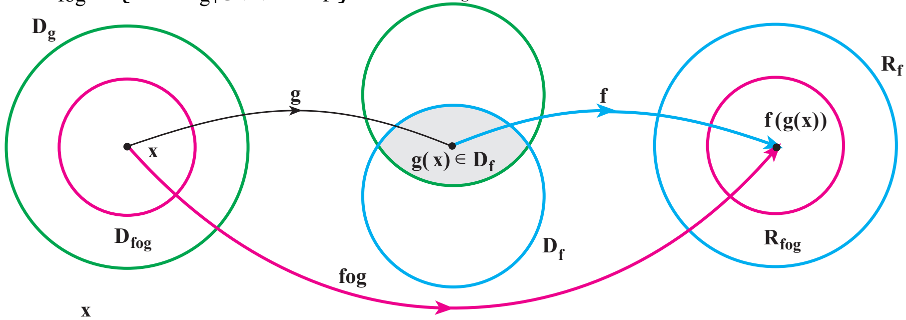
$$x \xrightarrow{g} ۲x-۳=y \xrightarrow{f} f(y)=f(۲x-۳)=\frac{۲}{۳}x-۱=h(x) \Rightarrow h(x)=f(g(x))$$

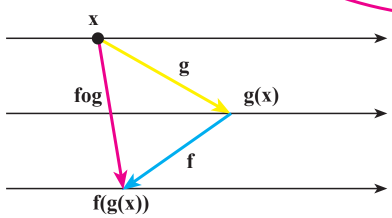
یعنی $h:x \mapsto \frac{۲}{۳}x-۱$ تابعی است که نخست بر روی x مانند تابع g عمل می‌کند و آن را به $g(x)=۲x-۳$ تبدیل می‌نماید، آنگاه بر $g(x)=۲x-۳$ مانند تابع f عمل می‌نماید و آن را به $\frac{۱}{۳}(۲x-۳)$ تبدیل می‌کند.

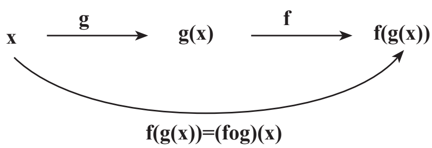
تابع h را که به این ترتیب به‌دست می‌آید ترکیب دو تابع f و g می‌نامند. اینک به بیان تعریف کلی زیر می‌پردازیم :

تعریف: ترکیب دو تابع g و f تابعی است که آن را با نماد fog نشان می‌دهیم (بخوانید اف اُجی) و به‌صورت $(fog)(x)=f(g(x))$ یا $fog:x \mapsto f(g(x))$ تعریف می‌کنیم، دامنهٔ این تابع همهٔ عددهای حقیقی x متعلق به D_g است به‌طوری که $g(x)$ متعلق به D_f باشد یعنی :

$$D_{fog}=\{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$$







مثال ۱: اگر $f(x)=x^۲$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، داریم :

$$(fog)(x)=f(g(x))=(g(x))^۲=(\sqrt{x})^۲=x$$

توجه کنید که دامنهٔ تابع $(fog)(x)=x$ ، $\mathbb{R}$ نیست زیرا :

$$D_f=\mathbb{R} , D_g=\{x \in \mathbb{R} | x \geq ۰\}=[۰,+\infty)$$

پس :

$$D_{fog}=\{x \in [۰,+\infty) | \sqrt{x} \in \mathbb{R}\}$$

اما $\sqrt{x}\ .\ \mathbb{R}$ برقرار است ؛ زیرا $x\ .\ .\circ,+.\ )$.

بنابراین داریم :

$$D_{fog}=.\circ,+.\ )$$

$$(fog)(x)=x \quad , \quad x\ .\ .\circ,+.\ )$$

مثال ۲: دو تابع $f(x)=x-۲$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ داده شده‌اند. دامنهٔ تابع‌های fog و gof را محاسبه نمایید و سپس توابع gof و fog را تشکیل دهید.

حل:

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_g=.-۱\ ,\ +.\ )$$

$$D_{gof}=\{x\ .\ D_f|f(x)\ .\ D_g\}=\{x\ .\ \mathbb{R}\ |\ x-۲\ .\ .-۱\ ,\ +.\ )\}$$

$$x-۲\ .\ .-۱\ ,\ +.\ )\Rightarrow x-۲\ .\ -۱\Rightarrow x\ .\ ۱$$

$$D_{gof}=.۱,+.\ )$$

$$D_{fog}=\{x\ .\ D_g|g(x)\ .\ D_f\}=\{x\ .\ .-۱\ ,\ .\ )|\ \sqrt{x+۱}\ .\ \mathbb{R}\}=.-۱,+.\ )$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)+۱}=\sqrt{x-۲+۱}=\sqrt{x-۱}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=g(x)-۲=\sqrt{x+۱}-۲$$

مثال ۳: تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x-۳$ داده شده است تابع fof را تشکیل دهید.

حل:

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ D_{fof}=\{x\ .\ \mathbb{R}|\ \frac{۱}{۳}x-۳\ .\ \mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{۱}{۳}f(x)-۳=\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳}x-۳)-۳$$

$$(fof)(x)=\frac{۱}{۹}x-۱-۳=\frac{۱}{۹}x-۴$$

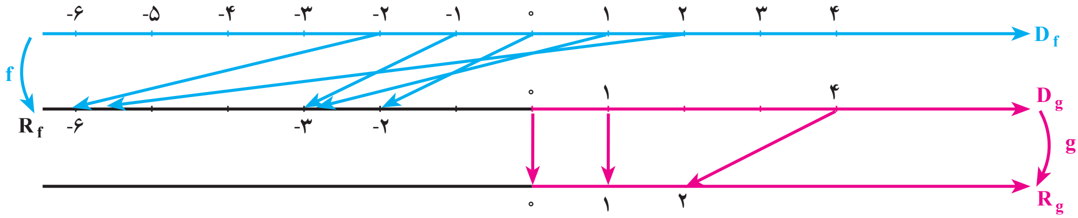
مثال ۴: اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x-۲$ ، جدول زیر همهٔ عملیات تعریف شده روی این دو تابع را نشان می‌دهد.

دامنه	قانون تابع	تابع	عمل
$D_f\cap D_g$	$(f+g)(x)=x^۲+x-۲$	$f+g$	$+$
$D_f\cap D_g$	$(f-g)(x)=x^۲-x+۲$	$f-g$	$-$
$D_f\cap D_g$	$(fg)(x)=x^۲(x-۲)$	$f.g$	$\times$
$D_f\cap D_g-\{x\|g(x)=\circ\}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{x^۲}{x-۲}\quad ;\quad x\neq ۲$	$\frac{f}{g}$	،
$\{x\ .\ D_g\|g(x)\ .\ D_f\}$	$(fog)(x)=(x-۲)^۲$	fog	o
$\{x\ .\ D_f\|f(x)\ .\ D_g\}$	$(gof)(x)=x^۲-۲$	gof	

توجه: به‌طوری که دیده می‌شود $(gof)(x)=x^۲-۲$ و $(fog)(x)=(x-۲)^۲$ و چون $x^۲-۲\neq(x-۲)^۲$ پس درحالت کلی $fog\neq gof$

در برخی از موارد ترکیب دو تابع ممکن نیست به مثال زیر توجه کنید.

مثال: دو تابع $g:x\to\sqrt{x}$, $x\ .\ ۰$ و $f:x\to -x^۲-۲$, $x\ .\ \mathbb{R}$ داده شده‌اند، نمودار زیر نشان می‌دهد که ترکیب gof ممکن نیست زیرا $D_g\cap R_f=\varnothing$



تمرین: آیا در مثال بالا ترکیب دو تابع به‌صورت fog ممکن است؟

مثال: دو تابع $f(x)=\frac{۲}{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{۱-x^۲}$ داده شده‌اند. عملیات روی این دو تابع را می‌توان نظیر جدول قبل مشخص کرد.

عمل	تابع	قانون تابع	دامنه
+	$h=f+g$	$h(x)=\frac{۲}{x}+\frac{۱}{۱-x^۲}$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
−	$h=f-g$	$h(x)=\frac{۲}{x}-\frac{۱}{۱-x^۲}$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
.	$h=f.g$	$h(x)=\frac{۲}{x}\times\frac{۱}{۱-x^۲}=\frac{۲}{x(۱-x^۲)}$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
,	$h=\frac{f}{g}$	$h(x)=\frac{۲}{x},\frac{۱}{۱-x^۲}=\frac{۲(۱-x^۲)}{x}\quad g(x)\neq ۰$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
,	$h=\frac{g}{f}$	$h(x)=\frac{۱}{۱-x^۲},\frac{۲}{x}=\frac{x}{۲(۱-x^۲)}\quad f(x)\neq ۰$	$\mathbb{R}-\{۰,-۱,+۱\}$
o	$h=fog$	$h(x)=f(g(x))=\frac{۲}{\frac{۱}{۱-x^۲}}=۲(۱-x^۲)$	$\{x\ .\ \mathbb{R}-\{.\ ۱\}\mid\frac{۱}{۱-x^۲}\ .\ \mathbb{R}-\{۰\}\}=\mathbb{R}-\{.\ ۱\}$
o	$h=gof$	$h(x)=g(f(x))=\frac{۱}{۱-\frac{۴}{x^۲}}=\frac{x^۲}{x^۲-۴}$	$\{x\ .\ \mathbb{R}-\{۰\}\mid\frac{۲}{x}\ .\ \mathbb{R}-\{.\ ۱\}\}=\mathbb{R}-\{۰,(\ ۲\}$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{۱-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$ باشد، تابع $P(x)=f(x)+g(x)$ را به‌دست آورید.

داریم :
$$D_f=\{x|۱-x\geq ۰\}=(-\infty\ ,\ ۱]$$
$$D_g=\{x|\,x-۱\geq ۰\}=[۱\ ,\ +\infty\ )$$

پس : $D_P=D_f\cap D_g=\{۱\}\ ,\ P(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱}$

یا $P(۱)=۰$ ، بنابراین $P=\{(۱,۰)\}$

تمرین

۱ــ توابع f و g داده شده‌اند، تابع‌های $f\ (\ g$ و fog و $\frac{f}{g}$ و دامنه‌های آن‌ها را به‌دست آورید.

$f(x)=x^۲+۲\qquad ,\ g(x)=۴x+۲$

$f(x)=\frac{۲x-۳}{۵}\qquad ,\ g(x)=\frac{x}{x-۱}$

$f(x)=۲x^۲-x\qquad ,\ g(x)=\frac{۱}{x}$

$f(x)=\sqrt{x-۱}\qquad ,\ g(x)=x-۱$

$f(x)=\frac{x+۳}{x-۳}\qquad ,\ g(x)=\frac{x-۳}{x+۳}$

$f(x)=\sin ۲x\qquad ,\ g(x)=\sin x$

$f(x)=\tan x\qquad ,\ g(x)=\cot x$

۲ــ توابع $f(x)=-۲$ و $g(x)=x^۲+۱$ داده شده‌اند :

الف ــ توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{g}{f}$ را تشکیل دهید ؛

ب ــ نمودار تابع‌های f، g و $f+g$ را در یک‌دستگاه محورهای مختصات رسم کنید (بهتر است در ترسیم از رنگ‌های مختلف استفاده شود).

۳ــ برای توابع f و g داده شده در زیر، تابع‌های fog و gof و دامنه‌های آن‌ها را مشخص نمایید.

۱) $f(x)=x+۲\qquad ,\ g(x)=x^۲-۳$

۲) $f(x)=x^۲+x\qquad ,\ g(x)=\sqrt{۴x+۱}$

۳) $f(x)=\frac{x}{x+۱}$, $g(x)=۲x^۲-x+۱$

۴) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$

۵) $f(x)=x^۲+۲x+۱$, $g(x)=|x|$

۴ــ اگر $f(x)=x$ و $g(x)=(x+۱)^۲$ باشد $(gof)(x)-(fog)(x)$ را بیابید.

۵ــ اگر $f(x)=x+a$ و $g(x)=ax^۲+bx+c$ باشد a و b و c را طوری تعیین کنید که داشته باشیم $(fog)(x)=x^۲-۳x+۴$.

۶ــ اگر $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\sqrt{\frac{۲x}{۱+x^۲}}$ باشد gof را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

۷ــ اگر $f(x)=\frac{۱}{x}$ باشد fof را به‌دست آورید و سپس $f.f(۳)$ را محاسبه نمایید.

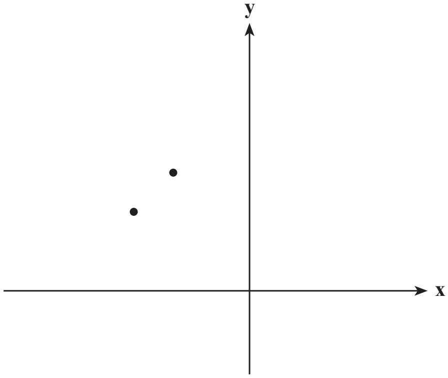
فصل سوم

حد و پیوستگی

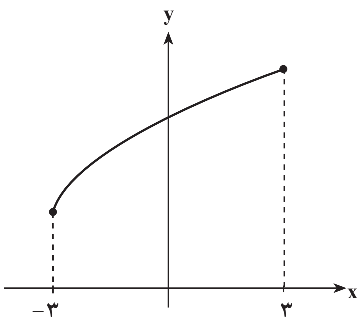
احمد یکی از دانش‌آموزان درس ریاضی ۳ است. احمد علاقه‌مند به رسم توابع و تشخیص چگونگی نمودار تابع است. یک روز او تصمیم گرفت نمودار تابع $y=f(x)=\frac{x-۱}{\sqrt{x+۳}-۲}$ را در بازه ‎[۳,۳−]‎ رسم کند. احمد با استفاده از ماشین‌حساب با محاسبات تقریبی جدول زیر را تشکیل داد

x	−۳	−۲/۵	−۲	−۱/۵	−۱	−۰/۵	۰	۰/۵	۱/۵	۲	۲/۵	۳
y	۲	۲/۷	۳	۳/۲۲	۳/۴۱	۳/۵۸	۳/۷۳	۳/۸۷	۴/۱۲	۴/۲۳	۴/۳۴	۴/۴۴

احمد به‌ازای $x=۱$ مقدار تابع را حساب نکرد. چون تابع در این نقطه تعریف نشده است و این نقطه در دامنه تابع قرار ندارد. او نقاط به‌دست آمده از نمودار تابع را در صفحه مشخص کرد.



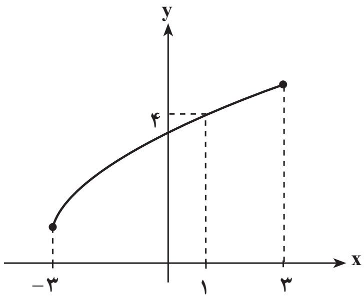
احمد نتیجه گرفت نمودار تابع باید به شکل زیر باشد.



یکی از دوستان احمد گفت این تابع در $x=۱$ تعریف نشده است اما این نمودار مقداری برای این تابع در $x=۱$ مشخص می‌کند. حتماً در این نتیجه‌گیری اشکالی وجود دارد. احمد برای اطمینان از درستی نتیجه‌گیری خود گفت بهتر است مقدارهای این تابع در اطراف نقطه $x=۱$ را بیشتر بررسی کنیم. اگرچه تابع در $x=۱$ تعریف نشده است ولی می‌توانیم برای مقدارهایی از x نزدیک ۱ مقدارهای تابع را حساب کنیم و ببینیم آیا مقدارهای به‌دست آمده همانند نمودار رسم شده عدد خاصی را نشان می‌دهند؟ این بار احمد جدولی ساخت که مقدارهای تابع را در نزدیکی‌های نقطه ۱ حساب کند.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	→ ۱ .	۱/۰۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	۳/۹۴	۳/۹۷	۳/۹۹۷	۳/۹۹۹۷	۳/۹۹۹۹۷	→ ? .	۴/۰۰۰۰۰۲	۴/۰۰۰۲	۴/۰۰۰۲	۴/۰۰۲	۴/۰۲

با محاسبه جدول بالا احمد نتیجه‌گیری کرد که با نزدیک شدن مقدارهای x به ۱ مقدارهای $f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شوند. نمودار رسم شده برای تابع نیز چنین مطلبی را نشان می‌دهند.



آنچه که احمد برای بررسی این تابع در اطراف نقطه ۱ انجام داد حدگیری نام دارد و می‌گویند حد تابع $y=\frac{x-۱}{\sqrt{x+۳}-۲}$ در نقطه ۱ برابر ۴ است.

موارد بسیاری پیش می‌آید که تابعی مانند $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a تعریف نشده باشد ولی ما علاقه‌مند باشیم بدانیم که مقدارهای تابع برای مقدارهای x نزدیک a چگونه است. در این حالت باید بررسی کرد که با نزدیک شدن x به a آیا مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

تمرین

۱ــ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با قانون $f(x)=x^۲+۳x+۴$ مفروض است. مقدار $f(x)$ را برای هر x داده شده در جدول‌های صفحهٔ بعد محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجهٔ محاسبه را بنویسید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

x	...	-۳	$-۲/۹$	$-۲/۵$	$-۲/۱$	$-۲/۰۱$	$-۲/۰۰۱$	$-۲/۰۰۰۱$	$-۲/۰۰۰۰۱$	$\cdots\to$	$\boxed{-۲}$
f(x)	...									$\cdots\to$	$\boxed{}$

x	$\boxed{-۲}$	.	...	$-۱/۹۹۹۹$	$-۱/۹۹۹$	$-۱/۹۹$	$-۱/۹$	$-۱/۸$	$-۱/۵$	$-۱/۲$	-۱	...
f(x)	$\boxed{}$	.	...									...

نتیجه: جدول‌های بالا نشان می‌دهند که وقتی x به سمت عدد ... نزدیک می‌شود، تابع f(x) به عدد ... نزدیک می‌شود.

۲ــ تابع $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با قانون $g(x)=x^۲-۲x$ داده شده است. مقادیر g(x) را برای هر x داده شده در جدول زیر محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه را بنویسید.

x	...	۰	۰/۱	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	$\cdots\to$	$\boxed{۱}$
g(x)	...									$\cdots\to$	$\boxed{}$

x	$\boxed{۱}$	.	...	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۲	۱/۵	۱/۹	۲	...
g(x)	$\boxed{}$	.	...									...

نتیجه: جدول بالا نشان می‌دهد...

۳ــ تابع $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با قانون $h(x)=-x^۲+۴$ مفروض است. مقدارهای h(x) را برای هر x داده شده در جدول زیر محاسبه کنید (تا چهار رقم اعشار) و نتیجه را بنویسید.

x	$\cdots\to$	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۵$	$-۰/۳$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$-۰/۰۰۰۱$	$\cdots\to$	$\boxed{۰}$	.	...	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲	۰/۵	۱
h(x)	$\cdots\to$									$\cdots\to$	$\boxed{}$	.	...							

نتیجه: جدول بالا نشان می‌دهد...

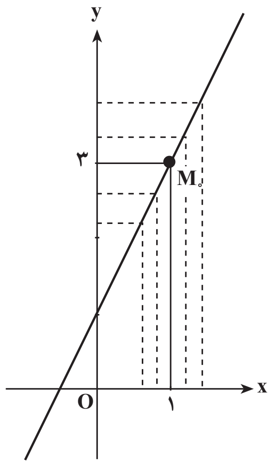
مثال ۱ : تابع $f(x)=۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم و مقدار این تابع را برای برخی مقادیر x کوچک‌تر از ۱ که به تدریج به عدد ۱ نزدیک می‌شوند، هم‌چنین مقدار این تابع را برای بعضی مقادیر x بزرگ‌تر از ۱ که به تدریج به عدد ۱ نزدیک می‌شوند، محاسبه می‌کنیم.

x	...	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\cdots\to$	$\boxed{۱}$	.	...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲	...
f(x)	...	۱	۲	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	$\cdots\to$	$\boxed{۳}$	.	...	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	۴	۵	...

نمودار تابع $f(x)=۲x+۱$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور کافی است دو نقطه از خط را مشخص کنیم :

$$A\left|\begin{array}{l} x=۰ \\ y=۱ \end{array}\right.$$

$$B\left|\begin{array}{l} x=-\frac{۱}{۲} \\ y=۰ \end{array}\right.$$



همان‌طور که از جدول و نمودار دیده می‌شود با نزدیک شدن متغیر x به عدد ۱، مقدار تابع f یعنی f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

مثال ۲: تابع $f(x)=x^۲-۲x+۳$ داده شده است. می‌خواهیم :

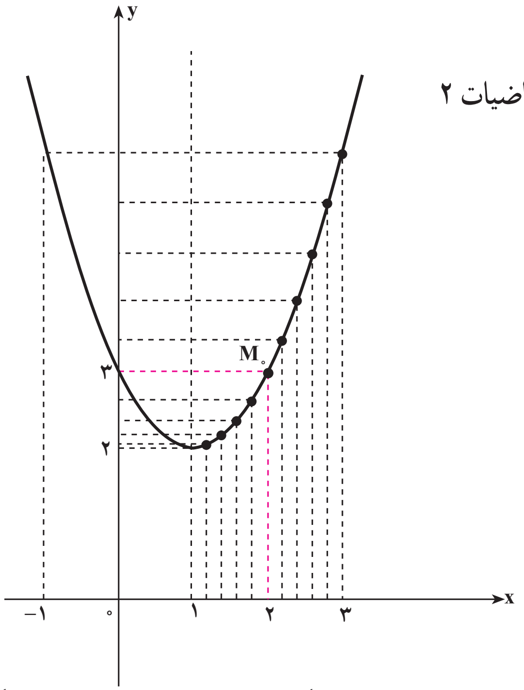
الف ــ رفتار این تابع را در نزدیکی $x_۰=۲$ بررسی کنیم؛

ب ــ نمودار این تابع را رسم کرده و از روی آن درستی محاسبهٔ قسمت الف را بررسی کنیم.

حل: الف ــ مقادیر f(x) را برای برخی از مقدارهای x نزدیک به عدد ۲ محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	…	۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	…→	$\boxed{۲}$	.	…	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۲/۹	۳ …
f(x)	…	۲	۲/۰۴	۲/۲۵	۲/۶۴	۲/۸۱	۲/۹۸	۲/۹۹۸	…→	$\boxed{۳}$	.	…	۳/۰۰۲	۳/۰۲	۳/۲	۴/۲۵	۵/۶۱	۶ …

به‌طوری که دیده می‌شود، هرگاه x به عدد ۲ نزدیک می‌شود، f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود.



ب ــ نمودار تغییرات این تابع در ریاضیات ۲ رسم شده است.

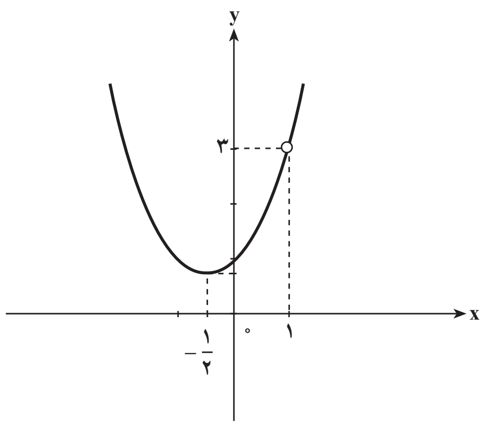
از روی نمودار نیز دیده می‌شود که وقتی x به عدد ۲ نزدیک می‌شود، f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود.

مثال ۳: تابع f، با ضابطهٔ $x \neq ۱$ ، $f(x)=\frac{x^{۳}-۱}{x-۱}$ ، را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم رفتار این تابع را در نزدیکی $x_{۰}=۱$ بررسی کنیم.

حل: مقدارهای f(x) را برای برخی از مقدارهای x نزدیک به عدد ۱ محاسبه می‌کنیم. این مقدارها در جدول زیر درج شده‌اند.

x	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	$\boxed{۱}$	.	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۲۵
f(x)	۲/۳۱۳	۲/۷۱	۲/۹۷۰	۲/۹۹۷	→	$\boxed{۳}$	.	۳/۰۰۳	۳/۰۳۰	۳/۳۱	۳/۸۱۳

به‌طوری که جدول نشان می‌دهد با نزدیک شدن x به عدد ۱ (از راست یا چپ)، f(x) به عدد ۳ نزدیک می‌شود.



مثال ۴: تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ را با دامنه $(۱,. \ )$ درنظر بگیرید. می‌خواهیم مقدارهای این تابع را در نزدیکی ۱ بررسی کنیم. در جدول زیر مقادیر تقریبی این تابع را به‌ازای برخی از مقادیر x در نزدیکی ۱ محاسبه کرده‌ایم.

x	۱	.	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
y	?	.	۰/۰۰۱	۰/۰۳	۰/۱	۰/۳

همان‌طور که جدول نشان می‌دهد با نزدیک شدن x به ۱ مقدارهای تابع f به صفر نزدیک می‌شوند.

تعریف حد توابع

اگر دامنه تابع f بازه I باشد و نقطه a به‌گونه‌ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد، یعنی بتوان داخل I نقاطی متمایز از a را یافت که به a نزدیک باشند (به هر میزان که بخواهیم)، آنگاه با نزدیک شدن متغیر x (در بازه I) به نقطه a ممکن است مقدارهای f(x) به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند که در این حالت می‌گوییم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

با توجه به مثال‌های صفحات قبل می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to ۱}(۲x+۱)=۳$$

$$\lim_{x\to ۰}(-x^{۲}+۴)=۴$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=۳$$

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{x-۱}=۰$$

مثال ۵: برای تابع $y=۱+\sqrt{x}$ با دامنه $(۰,. \ )$ می‌توان از داخل دامنه این تابع به صفر نزدیک شد و با نزدیک شدن x . $(۰,. \ )$ به صفر، مقدار $۱+\sqrt{x}$ به ۱ نزدیک می‌شود، پس

$$\lim_{x\to ۰}(۱+\sqrt{x})=۱$$

مثال ۶: برای تابع $y=\sqrt{۱-x^{۲}}$ با دامنه $(-۱,۱)$ می‌توان از داخل دامنه این تابع به ۱– نزدیک شد و با نزدیک شدن $(-۱,۱)$. x به ۱– مقدارهای $\sqrt{۱-x^{۲}}$ به صفر نزدیک می‌شوند، پس $\lim\limits_{x\to -۱}\sqrt{۱-x^{۲}}=۰$.

تمرین

۱ــ هر یک از جدول‌های زیر را کامل کنید، و حد هر تابع را در نقطه مورد نظر مشخص کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(-۲x+۵)$

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	$\boxed{۱}$	.	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵
f(x)						→	$\boxed{}$	.					

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(x^{۲}+x+۳)$

x	−۱	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	→	$\boxed{۰}$	.	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
f(x)							→	$\boxed{}$	.						

پ) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{x^{۲}-x-۲}{x+۱}$

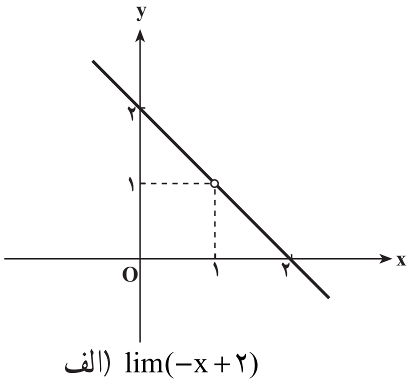
x	−۲	−۱/۵	−۱/۱	−۱/۰۱	−۱/۰۰۱	−۱/۰۰۰۱	→	$\boxed{-۱}$	.	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹	−۰/۸	−۰/۵	۰
f(x)							→	$\boxed{}$	.						

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{x+۱}-۲}{x-۳}$

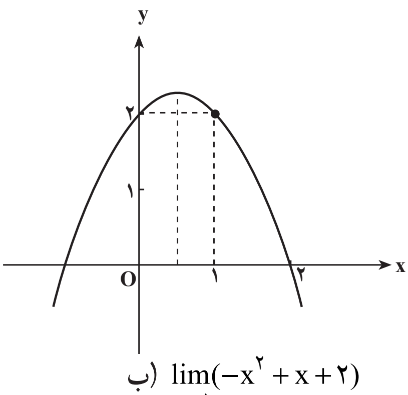
x	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	→	$\boxed{۳}$	.	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴
f(x)						→	$\boxed{}$	.					

۲ــ با تشکیل جدول، حد تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+۱}-۱}$ را در صفر تعیین کنید.

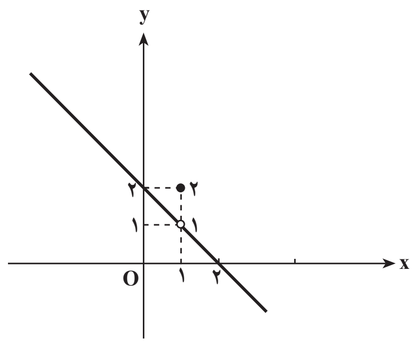
۳ــ با استفاده از نمودار، حدتوابع زیر را در نقطهٔ داده شده (در صورت وجود) مشخص کنید.

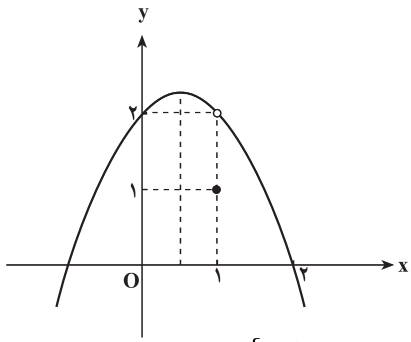


الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(-x+۲)$



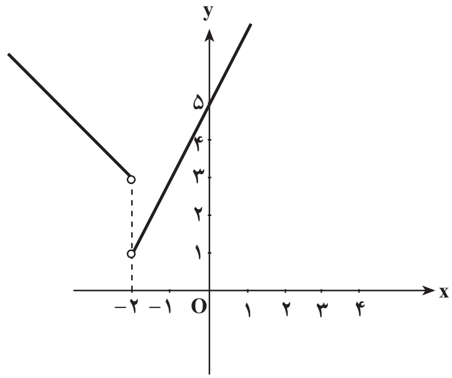
ب) $\lim\limits_{x\to ۱}(-x^{۲}+x+۲)$

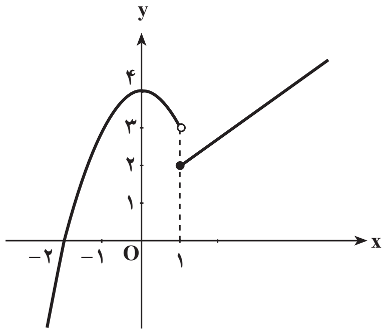




پ) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ ، $f(x) = \begin{cases} -x + ۲ \;, & x \neq ۱ \\ ۲ \;, & x = ۱ \end{cases}$

ت) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ ، $f(x) = \begin{cases} -x^۲ + x + ۲ \;, & x \neq ۱ \\ ۱ \;, & x = ۱ \end{cases}$





ث) $\lim\limits_{x \to -۲} f(x)$ ، $f(x) = \begin{cases} ۲x + ۵ \;, & x - . ۲ \\ -x + ۱ \;, & x - . ۲ \end{cases}$

ج) $\lim\limits_{x \to ۱} f(x)$ ، $f(x) = \begin{cases} x + ۱ \;, & x \;.\; ۱ \\ -x^۲ + ۴ \;, & x \;.\; ۱ \end{cases}$

نکته: باید توجه کنید که حد تابعی مانند f در نقطه‌ای مانند x_0 ، به معین بودن یا معین نبودن تابع در x_0 بستگی ندارد. یعنی ممکن است :

۱) تابع f در x_0 تعریف نشده باشد، امّا وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، حد داشته باشد.

۲) تابع f در x_0 تعریف شده باشد اما وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، تابع حد نداشته باشد.

به علاوه هنگامی که تابع در نقطهٔ x_0 دارای حد است، حد تابع می‌تواند با مقدار تابع برابر باشد یا نباشد. یعنی ممکن است :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \text{یا} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

مثال ۱: می‌خواهیم حد تابع $f(x) = \dfrac{(x-۲)(x-۳)}{x-۳}, x \neq ۳$ را در $x = ۳$ به‌دست آوریم.

حل: این تابع در $x = ۳$ تعریف نشده است. امّا وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود دارای حد

است، زیرا برای $x . ۳$ داریم

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x-۳)}{x-۳}=x-۲$$

$$\Rightarrow f(x)=x-۲ \quad , \quad x . ۳ \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to ۳} f(x)=\lim_{x\to ۳}(x-۲)=۱$$

(قبلاً دیدیم که $\lim_{x\to ۳}(x-۲)=۱$ است).

بنابراین دیده می‌شود که تابع فوق در $x=۳$ تعریف نشده است، امّا در $x=۳$ دارای حد است.

مثال ۲: تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x+۳ \ , & x . ۲ \\ ۵ & , \ x=۲ \end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم حد این تابع را در $x=۲$ تعیین کنیم.

حل: این تابع در $x=۲$ تعریف شده است زیرا $f(۲)=۵$، و همان‌طور که در مثال ۲ دیده شد، داریم $\lim_{x\to ۲}(x^۲-۲x+۳)=۳$ پس این تابع در $x=۲$، دارای حد است امّا حد آن با مقدار تابع در $x=۲$ برابر نیست $(۵ . ۳)$.

مثال ۳: می‌خواهیم حد تابع $f(x)=x^۲+۳x+۴$ را در $x=-۲$ تعیین کنیم.

حل: قبلاً دیدیم که $\lim_{x\to -۲}(x^۲+۳x+۴)=۲$؛ از طرفی این تابع در $x=-۲$ معین است و مقدار $f(-۲)$ برابر است با: $f(-۲)=(-۲)^۲+۳(-۲)+۴=۲$. بنابراین حد تابع در $x=-۲$ با مقدار تابع در $x=-۲$ برابر است، یعنی داریم:

$$\lim_{x\to -۲}(x^۲+۳x+۴)=f(-۲)=۲$$

مثال ۴: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x \ , & x . ۱ \\ ۲x+۱ & , \ x . ۱ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم حد این تابع را در عدد ۱ تعیین کنیم.

حل: این تابع در $x=۱$ تعریف شده است. قبلاً دیدیم که وقتی x از طرف راست به عدد ۱ نزدیک می‌شود مقدارهای تابع به ۱- نزدیک می‌شوند و در مثال ۱ دیدیم که وقتی x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک می‌شود مقدارهای تابع به ۳ نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند پس وقتی x به عدد ۱ نزدیک می‌شود، این تابع دارای حد نیست.

حد راست و حد چپ یک تابع

تعریف: تابع f را که در بازهٔ باز I شامل $x_۰$ تعریف شده است، مگر احتمالاً در خود $x_۰$، درنظر

می‌گیریم :

الف ــ اگر x از طرف راست به x_0 نزدیک شود و مقدارهای تابع f به عددی مانند L_1 نزدیک شوند، (یا به‌بیان دیگر، هرگاه بتوانیم هرچه‌قدر که بخواهیم f(x) را به L_1 نزدیک کنیم، به شرط آن که x را از طرف راست به اندازهٔ کافی به x_0 نزدیک کرده باشیم) ؛ L_1 را حد راست تابع f در x_0 می‌نامند و می‌نویسند :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L_1$$

ب ــ اگر x از طرف چپ به x_0 نزدیک شود و مقدارهای تابع f به عددی مانند L_2 نزدیک شوند، (یا به بیان دیگر، هرگاه بتوانیم هر چه‌قدر که بخواهیم f(x) را به L_2 نزدیک کنیم به شرط آن که x را از طرف چپ به اندازهٔ کافی به x_0 نزدیک کرده باشیم) ؛ L_2 را حدّ چپ تابع f در x_0 می‌نامند و می‌نویسند :

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L_2$$

از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که اگر x_0 یک نقطه میانی در دامنه f باشد و تابع f در نقطهٔ x_0 حد راست و حد چپ داشته باشد، و این دو حد با هم برابر باشند، تابع در x_0 دارای حد است ؛ و برعکس، اگر تابع در یک نقطه حد داشته باشد، در آن نقطه حد راست و حد چپ دارد و این دو حد با هم برابرند.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \quad ! \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

اما اگر x_0 یک نقطه انتهایی دامنه تابع f باشد، در این حالت حد چپ یا راست f در x_0 همان حد تابع f در x_0 است. مثلاً در مورد تابع $\sqrt{x}$ با دامنه $[0,+\infty)$ حد راست این تابع در صفر و حد این تابع در صفر یکی هستند. فقط در نقاطی که نقاط میانی دامنه یک تابع هستند مفهوم حد تابع و حد راست و چپ تابع با هم متفاوتند.

مثال ۱: تابع $f(x)=x^2-2x+3$ داده شده است، می‌خواهیم وجود حد راست و حد چپ این تابع را در ۲ بررسی کنیم.

حل: دیدیم که اگر x از طرف راست به ۲ نزدیک شود مقدارهای تابع بالا به ۳ نزدیک می‌شوند یعنی $\lim_{x\to 2^+}(x^2-2x+3)=3$ = L_1 = حد راست تابع ؛ و در صورتی که x از چپ به ۲ نزدیک شود مقدارهای تابع به ۳ نزدیک می‌شوند. یعنی $\lim_{x\to 2^-}(x^2-2x+3)=3$ = L_2 = حد چپ تابع.

چون حد راست و حد چپ این تابع در ۲ با هم برابرند $(L_1=L_2=3)$، تابع در نقطهٔ $x=2$

دارای حد است و داریم :

$$\lim_{x\to ۲}(x^۲-۲x+۳)=۳$$

مثال ۲: تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & , \ x \ . \ ۱ \\ x^۲+۲x-۶ & , \ x \ . \ ۱ \end{cases}$ داده شده است می‌خواهیم وجود حد این تابع را در ۱ بررسی کنیم.

چون وقتی x از طرف راست به ۱ نزدیک می‌شود داریم ۱ x ، حد راست این تابع از $f(x)=۲x+۱$ محاسبه می‌شود بنابراین :

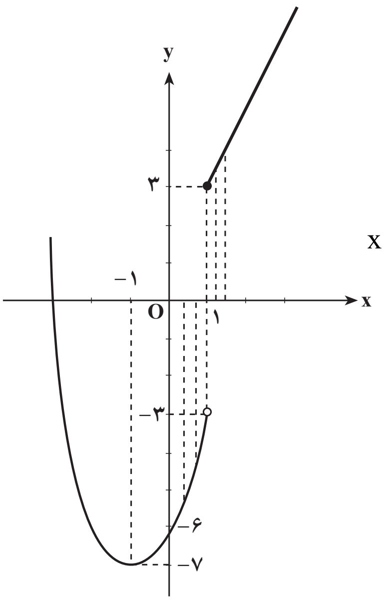
$$\text{حد راست}=L_۱=\lim_{x\to ۱^+}(۲x+۱)=۳$$ (قبلاً محاسبه شد)

و چون وقتی x از طرف چپ به ۱ نزدیک می‌شود داریم ۱ . x . پس حد چپ از $f(x)=x^۲+۲x-۶$ به‌دست می‌آید یعنی :

$$\text{حد چپ}=L_۲=\lim_{x\to ۱^-}(x^۲+۲x-۶)=-۳$$

به‌طوری که دیده می‌شود حد چپ و حد راست این تابع در نقطهٔ $x=۱$ با هم برابر نیستند $(L_۱=۳\neq L_۲=-۳)$ ، پس این تابع در $x=۱$ حد ندارد.

نمودار تابع نیز درستی محاسبهٔ بالا را نشان می‌دهد.



x . ۱ ⇒

x	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱
f(x)	۲	−۳	−۶	−۷	−۶	−۳

$x \ . \ ۱ \Rightarrow y=۲x+۱ \ , \ \begin{vmatrix} ۰ \\ +۱ \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} ۱ \\ ۳ \end{vmatrix}$

قضیه‌های حد

محاسبهٔ حد تابع‌ها با استفاده از تعریف، به روشی که در مثال‌ها دیده شد (نزدیک کردن متغیر به x_0 و محاسبهٔ $f(x)$ و تشکیل جدول)، معمولاً طولانی است. به این علت از قضیه‌هایی که در مورد حد توابع وجود دارد و آن‌ها را بدون اثبات می‌پذیریم استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱: حد تابع ثابت $f(x)=k$ (k عددی است حقیقی و ثابت) در هر عدد دلخواه x_0، برابر همان مقدار ثابت k است. یعنی $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} k=k$

مثال: اگر $f(x)=5$ داریم:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} 5=5 \quad , \quad \lim_{x\to \frac{3}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{3}{2}} 5=5$$

$$\lim_{x\to -2} 5=5 \quad , \quad \lim_{x\to \sqrt{2}} 5=5$$

قضیهٔ ۲: حد تابع $f(x)=x$ (تابع همانی) در هر نقطه x_0 برابر با x_0 است یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} x=x_0$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3} x=3 \quad , \quad \lim_{x\to -1} x=-1$$

قضیهٔ ۳: اگر دو تابع f و g دامنه یکسانی داشته باشند و در نقطه x_0 دارای حد باشند و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$، آنگاه:

الف ــ مجموع این دو تابع یعنی $f(x)+g(x)$ در x_0، حد دارد و داریم:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=l_1+l_2$$

یعنی، حد مجموع دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با مجموع حدهای آن دو تابع.

ب ــ تفاضل این دو تابع یعنی، $f(x)-g(x)$ در x_0 حد دارد و داریم:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(x)-\lim_{x\to x_0} g(x)=l_1-l_2$$

یعنی حد تفاضل دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با تفاضل حدهای آن دو تابع.

پ ــ حاصل‌ضرب این دو تابع یعنی $f(x).g(x)$ در x_0 حد دارد و داریم:

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x).g(x)\big)=\lim_{x\to x_0} f(x).\lim_{x\to x_0} g(x)=l_1 l_2$$

یعنی، حد حاصل‌ضرب دو تابع (با دامنه یکسان) برابر است با حاصل‌ضرب حدهای آن دو تابع.

ت ــ خارج‌قسمت این دو تابع یعنی $\frac{f(x)}{g(x)}$ در x_0، به شرط $l_2 \neq 0$، حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{l_1}{l_2} \quad , \quad l_2 \neq 0$$

یعنی، حد خارج‌قسمت دو تابع (با دامنه یکسان)، به شرط صفر نبودن حد مخرج، برابر است با خارج‌قسمت حدهای آن دو تابع.

نکته: قضیه‌های الف و پ را می‌توان به تعدادی متناهی از توابع تعمیم داد یعنی :

۱ــ حد مجموع چند تابع برابر است با مجموع حدهای آن‌ها.

۲ــ حد حاصل‌ضرب چند تابع برابر است با حاصل‌ضرب حدهای آن‌ها.

از قضیه‌های بالا نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آید.

۱ــ اگر حد تابع f در نقطهٔ x_0 برابر با l و k عدد ثابتی باشد

$$\lim_{x\to x_0}(kf(x))=\lim_{x\to x_0}(k).\lim_{x\to x_0} f(x)=k.l$$

مثلاً چون $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$ پس $\lim\limits_{x\to 1}4(2x+1)=4(3)=12$.

۲ــ حد تابع $f(x)=x^n$ (n عدد صحیح و مثبت) در x_0 برابر است با x_0^n یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} x^n=x_0^n$$

مثال: حد تابع $f(x)=x^3$ در $x=2$ برابر است با $8=2^3$ یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to 2}(x)^3=(2)^3=8$$

۳ــ اگر $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ آنگاه $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n=l^n$ و $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{l}$ (به‌شرط آن‌که $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک بازهٔ شامل x_0 تعریف شده باشد).

مثال: دیدیم که $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+3)=3$ پس $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+3)^4=3^4=81$

و

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{3}$$

۴ــ حد تابع چندجمله‌ای $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\quad+l$ (n عدد صحیح و مثبت).

به کمک نتیجه‌های بالا و قضیهٔ حد مجموع چند تابع، ثابت می‌شود که حد تابع چندجمله‌ای $f(x)$ در x_0 برابر است با $f(x_0)$ یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}(ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\quad+l)$$

$$=ax_0^n+bx_0^{n-1}+cx_0^{n-2}+\quad+l=f(x_0)$$

مثال: داریم :

$$۱)\ \lim_{x\to ۲}\big(f(x)=۲x+۱\big)=f(۲)=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲}\Big(f(x)=x^۲-۲x+۳\Big)=f(۲)=۲^۲-۲(۲)+۳=۴-۴+۳=۳$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲}(x^۳+x^۲+۲x-۱)=(۲)^۳+(۲)^۲+۲(۲)-۱=۱۵$$

$$۴)\ \lim_{x\to ۲}(-۲x^۴+۳x^۳+۵x^۲-۶x+۱)=-۲(۲)^۴+۳(۲)^۳+۵(۲)^۲-۶(۲)+۱$$

$$=-۳۲+۲۴+۲۰-۱۲+۱=۱$$

۵ــ حد تابع گویای کسری ــ حد تابع $q(x)=\dfrac{ax^m+bx^{m-۱}+\quad+1}{a'x^n+b'x^{n-۱}+\quad+1'}$ ، (m و n عددهای صحیح و مثبت) در $x_۰$ برابر است با مقدار آن تابع در نقطهٔ $x_۰$ (به شرط آن‌که $x_۰$ ریشهٔ مخرج کسر نباشد).

مثال ۱: داریم :

$$۱)\ \lim_{x\to -۱}\frac{۲x+۱}{۳x-۵}=\frac{۲(-۱)+۱}{۳(-۱)-۵}=\frac{-۲+۱}{-۳-۵}=\frac{-۱}{-۸}=\frac{۱}{۸}$$

$$۲)\ \lim_{x\to -۲}\frac{x^۲-x-۱}{۲x+۵}=\frac{(-۲)^۲-(-۲)-۱}{۲(-۲)+۵}=\frac{۵}{۱}=۵$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲}\frac{۲x^۳-x^۲+۵}{-۲x^۲+۳x-۱}=\frac{۲(۲)^۳-(۲)^۲+۵}{-۲(۲)^۲+۳(۲)-۱}=\frac{۱۷}{-۳}=\frac{-۱۷}{۳}$$

$$۴)\ \lim_{x\to -۲}\frac{(x+۲)^۲}{۲x^۲-x-۵}=\frac{(-۲+۲)^۲}{۲(-۲)^۲-(-۲)-۵}=\frac{۰}{۵}=۰$$

مثال ۲: دو تابع $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=x^۲-۲x$ داده شده‌اند، می‌خواهیم :

الف ــ حد تابع f را در ۱ بیابیم.

ب ــ حد تابع g را در ۱ به‌دست آوریم.

پ ــ تابع‌های $f(x)+g(x)$ و $f(x)-g(x)$ ، $f(x).g(x)$ و $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ را تعیین و حد هر یک از این توابع را در ۱ پیدا کنیم.

داریم :

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=\lim_{x\to ۱}(۲x+۱)=۲(۱)+۱=۳$$

$$\lim_{x\to ۱}g(x)=\lim_{x\to ۱}(x^۲-۲x)=(۱)^۲-۲(۱)=-۱$$

$$f(x)+g(x)=۲x+۱+x^۲-۲x=x^۲+۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to ۱}(x^۲+۱)=(۱)^۲+۱=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to ۱}f(x)+\lim_{x\to ۱}g(x) \Rightarrow ۲=۳+(-۱) \Rightarrow ۲=۲$$

$$f(x)-g(x)=۲x+۱-(x^۲-۲x)=-x^۲+۴x+۱ \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to ۱}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to ۱}(-x^۲+۴x+۱)=-(۱)^۲+۴(۱)+۱=۴$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to ۱}f(x)-\lim_{x\to ۱}g(x) \Rightarrow ۴=(۳)-(-۱) \Rightarrow ۴=۴$$

$$f(x).g(x)=(۲x+۱)(x^۲-۲x)=۲x^۳-۳x^۲-۲x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\big(f(x).g(x)\big)=\lim_{x\to ۱}(۲x^۳-۳x^۲-۲x)=۲(۱)^۳-۳(۱)^۲-۲(۱)=-۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}.f(x).g(x).=\lim_{x\to ۱}f(x).\lim_{x\to ۱}g(x) \Rightarrow -۳=(۳)(-۱) \Rightarrow -۳=-۳$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{۲x+۱}{x^۲-۲x} \Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۲x+۱}{x^۲-۲x}=\frac{۲(۱)+۱}{(۱)^۲-۲(۱)}=-۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to ۱}f(x)}{\lim_{x\to ۱}g(x)} \Rightarrow -۳=(۳)/-۱ \Rightarrow -۳=-۳$$

نتایج به‌دست آمده را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

تابع	حد	
$f(x)=۲x+۱$	$\lim_{x\to ۱}(۲x+۱)=۳$	
$g(x)=x^۲-۲x$	$\lim_{x\to ۱}(x^۲-۲x)=-۱$	
$f(x)+g(x)=x^۲+۱$	$\lim_{x\to ۱}(x^۲+۱)=۲$	$۲=۳+(-۱)$
$f(x)-g(x)=-x^۲+۴x+۱$	$\lim_{x\to ۱}(-x^۲+۴x+۱)=۴$	$۴=۳-(-۱)$
$f(x).g(x)=۲x^۳-۳x^۲-۲x$	$\lim_{x\to ۱}(۲x^۳-۳x^۲-۲x)=-۳$	$-۳=(۳).(-۱)$
$f(g)/g(x)=\frac{۲x+۱}{x^۲-۲x}$	$\lim_{x\to ۱}(\frac{۲x+۱}{x^۲-۲x})=-۳$	$-۳=\frac{۳}{-۱}$

حد تابع‌های سادهٔ مثلثاتی

در مورد حد توابع مثلثاتی قضیه‌های زیر را داریم :

قضیهٔ ۱ : تابع f(x)=sinx در هر نقطه $\mathbb{R}$. $x_۰$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_۰)=\sin x_۰$. یعنی :

$$\lim_{x\to x_۰} \sin x = \sin x_۰$$

مثال:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۶}} \sin x = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{۳}} \sin x = \sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

قضیهٔ ۲ : تابع f(x)=cosx در هر نقطه $\mathbb{R}$. $x_۰$ دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_۰)=\cos x_۰$. یعنی :

$$\lim_{x\to x_۰} \cos x = \cos x_۰$$

مثال:

$$\lim_{x\to ۰} \cos x = \cos ۰ = +۱$$

و

$$\lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}} \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

قضیهٔ ۳ : تابع f(x)=tanx (یا $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x}$) برای همهٔ مقادیر حقیقی x به‌جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ که برای آن‌ها داریم $\cos x = ۰$ ، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_۰)=\tan x_۰$ برای $x_۰ \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$ ، یعنی :

$$\lim_{x\to x_۰ \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}} \tan x = \tan x_۰$$

مثال:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \tan x = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱ \qquad , \qquad \lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}} \tan x = \tan(\frac{۲\pi}{۳}) = -\sqrt{۳}$$

قضیهٔ ۴: تابع $f(x)=\cot x$ (یا $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$) برای همهٔ مقادیرحقیقی x به‌جز $x=k.$ که برای آن‌ها داریم $\sin x=\circ$ ، دارای حد است و مقدار این حد برابر است با $f(x_\circ)=\cot x_\circ , x_\circ \neq k.$ یعنی :

$$\lim_{x\to x_\circ \neq k.} \cot x = \cot x_\circ$$

مثال:

$$\lim_{x\to \frac{۵.}{۴}} \cot x = \cot\frac{۵.}{۴} = ۱$$

$$\lim_{x\to -\frac{.}{۶}} x\cot x = (\lim_{x\to -\frac{.}{۶}} x)(\lim_{x\to -\frac{.}{۶}} \cot x) = (-\frac{.}{۶})\left(\cot(-\frac{.}{۶})\right) = \frac{.\sqrt{۳}}{۶}$$

برای آشنایی بیش‌تر با دستورهایی که گفته شد، حدهای زیر را حساب می‌کنیم :

$$۱)\ \lim_{x\to\frac{.}{۴}} (\sin x+\cos x) = \lim_{x\to\frac{.}{۴}} \sin x + \lim_{x\to\frac{.}{۴}} \cos x = \sin\frac{.}{۴}+\cos\frac{.}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to -\frac{.}{۳}} \frac{۲\cos x - \sin^۲ x}{\cos x + ۱} = \frac{۲\cos(-\frac{.}{۳}) - \sin^۲(-\frac{.}{۳})}{\cos(-\frac{.}{۳})+۱} = \frac{۲(\frac{۱}{۲})-(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{\frac{۱}{۲}+۱} = \frac{۱-\frac{۳}{۴}}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۱}{۶}$$

$$۳)\ \lim_{x\to\frac{.}{۶}} (۲\sin x + \cos^۲ x) = ۲\sin(\frac{.}{۶}) + \cos^۲(\frac{.}{۶}) = ۲(\frac{۱}{۲}) + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ = \frac{۷}{۴}$$

$$۴)\ \lim_{x\to -\frac{.}{۴}} (\tan x + \cot x) = \tan(-\frac{.}{۴}) + \cot(-\frac{.}{۴}) = -۱-۱ = -۲$$

تمرین

۱ــ حد چپ و حد راست هر یک از تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده شده به‌دست آورید و معلوم کنید کدام‌یک از این توابع دارای حد است.

الف) $f(x)=\begin{cases} -۳x+۴ , & x\ .\ ۱ \\ ۲x^۲+x , & x\ .\ ۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$

ب) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+۳}{x-۱} , & x\ .\ ۲ \\ x^۳+۲ , & x\ .\ ۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۲$

پ) $f(x)=\begin{cases}-۴x^۲+۳ \;, & x \;\; \frac{۱}{۲}\\ ۲x+۱ \;, & x \,.\, \frac{۱}{۲}\end{cases}$

در نقطهٔ $x=\frac{۱}{۲}$

ت) $f(x)=\begin{cases}(x+۱)^۲ \;, & x - . ۲\\ x+۳ \;, & x - . ۲\end{cases}$

در نقطهٔ $x=-۲$

ث) $f(x)=\begin{cases}۲\sin x-۱ \;, & x \,.\, \frac{\cdot}{۲}\\ \cos x+۱ \;, & x \,.\, \frac{\cdot}{۲}\end{cases}$

در نقطهٔ $x=\frac{\cdot}{۲}$

ج) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{۲x+۱} \;, & x \,.\, ۰\\ x-۱ \;, & x \,.\, ۰\end{cases}$

در نقطهٔ $x=۰$

۲ــ حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}(۴x-۵)$

ب) $\lim\limits_{x\to-۱}(\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲})$

پ) $\lim\limits_{x\to۱}(x^۲-۲x-۳)$

ت) $\lim\limits_{x\to۲}(-۲x^۳+۳x^۲-x+۴)$

ث) $\lim\limits_{x\to۳}\frac{۳x+۲}{x-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to۰}\frac{-x^۲+۱}{x^۲+x+۱}$

چ) $\lim\limits_{x\to\sqrt{۲}}\frac{(-۲x^۲+۱)^۳}{x^۲+۱}$

ح) $\lim\limits_{x\to۵}\left(\frac{x+۲}{۳x^۲+۴}\times\frac{\sqrt{x-۱}}{x+۱}\right)$

خ) $\lim\limits_{x\to\frac{\cdot}{۶}}(۲\sin x-۱)$

د) $\lim\limits_{x\to\frac{\cdot}{۳}}(\cos x+\sin^۲ x+۱)$

ذ) $\lim\limits_{x\to\frac{\cdot}{۴}}(\sin^۲ x+\cos x)$

ر) $\lim\limits_{x\to۰}(\frac{x^۲}{\cos x})$

ز) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}(\sin\frac{\cdot x}{۲})$

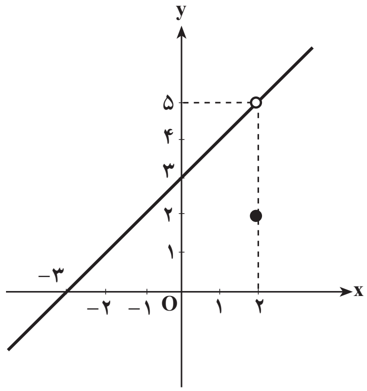
ژ) $\lim\limits_{x\to۴}\tan(\frac{\cdot x}{۳})$

۳ــ از روی هر نمودار، حد راست و حد چپ تابع را، در نقطه داده شده تعیین کنید و مشخص نمایید که کدام تابع حد دارد.

الف) $f(x)=\begin{cases} x+۳ , & x\ .\ ۲ \\ ۲ , & x=۲ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$

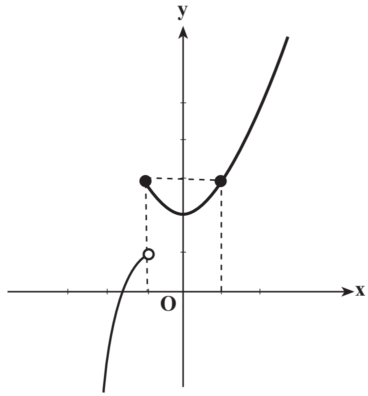
$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$



ب) $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ , & x\ .\ -۱ \\ -x^۲+۲ , & x\ .\ -۱ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$



۴ــ دو تابع f و g به‌صورت $f(x)=x^۲-x-۲$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ داده شده‌اند.

الف ــ حد هر یک از این دو تابع را در ۳ به‌دست آورید.

ب ــ تابع‌های $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را تعیین و حد هر یک از آن‌ها را در ۳ پیدا کنید.

پ ــ حد تابع‌های $(f(x))^۳$ و $\sqrt[۳]{f(x)}$ و $\frac{۱}{g(x)}$ و $۳g(x)$ را در ۳ تعیین کنید.

۵ــ اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=۴$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)=-۳$ باشد، حد هر یک از تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to x_\circ}(f(x)+g(x))$

ب) $\lim\limits_{x\to x_\circ}(f(x)-g(x))$

پ) $\lim\limits_{x\to x_\circ}(f(x).g(x))$

ت) $\lim\limits_{x\to x_\circ}\frac{f(x)}{g(x)}$

ث) $\lim\limits_{x\to x_\circ} ۲\sqrt{f(x)}$

ج) $\lim\limits_{x\to x_\circ}(g(x))^۲$

۶ــ تابع $f(x)=\begin{cases}(a+۱)x+۳ & , \quad x \quad -۲\\ -۲x^۲+۱ & , \quad x \,.\, -۲\end{cases}$ مفروض است. عدد a را چنان بیابید که در نقطه ۲ــ تابع حد داشته باشد.

۷ــ تابع $f(x)=\begin{cases}ax+۲b & , \quad x \quad ۳\\ ax^۲+bx+۲ & , \quad x \,.\, ۳\end{cases}$ مفروض است. عددهای a و b را چنان بیابید که $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۶$ و $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۲$.

۸ــ در صورتی که $f(x+۲)=\frac{x+۴}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)$ را حساب کنید.

۹ــ هر یک از حدهای زیر را حساب کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\left(x\sin(x+\frac{\cdot}{۶})\right)$ 	ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\cdot}{۲}}\dfrac{۲\sin(x-\frac{\cdot}{۶})+\cos ۲x+\sin\frac{x}{۲}}{۲\tan\frac{x}{۲}+\cos^۲(x-\frac{\cdot}{۴})}$

توجه: اگر $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to x_۰} g(x)=۰$ آن‌گاه حد تابع $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ را در $x_۰$، نمی‌توان با استفاده از قضایای مطرح شده محاسبه نمود (چرا؟). برای تعیین مقدار این حد با توجه به نوع تابع‌های f(x) و g(x)، روش‌های دیگری را می‌توان اختیار کرد.

مثال: حد تابع $q(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}$ را در ۲ می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد.

چون
$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}(x^۲-۳x+۲)=۴-۶+۲=۰$$
و
$$\lim_{x\to ۲} g(x)=\lim_{x\to ۲}(x^۲-۴)=۴-۴=۰$$
برای یافتن حد تابع q(x) با توجه به این‌که $x\neq ۲$ داریم $x-۲\neq ۰$ و می‌توان نوشت :
$$q(x)=\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}=\frac{\cancel{(x-۲)}(x-۱)}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}=\frac{x-۱}{x+۲}$$
پس :
$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۳x+۲}{x^۲-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۱}{x+۲}=\frac{۲-۱}{۲+۲}=\frac{۱}{۴}$$

قضیهٔ فشردگی: فرض کنید به‌ازای هر x از بازه‌ای مانند I که شامل نقطهٔ $x_\circ$ است، مگر احتمالاً در $x_\circ$، داشته باشیم :

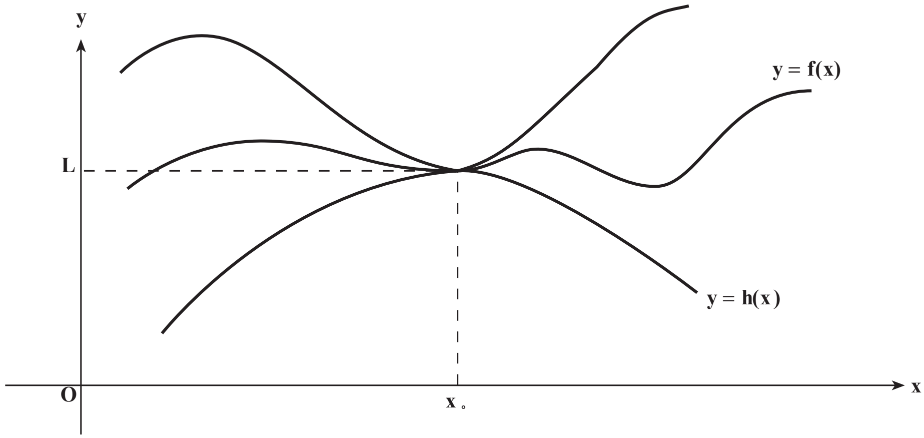
$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

و

$$\lim_{x\to x_\circ} h(x) = \lim_{x\to x_\circ} g(x) = L$$

آن‌گاه :

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x) = L$$



مثال: فرض کنید به‌ازای هر $x \neq ۰$ داشته باشیم :

$$۳ - x^۲ \leq f(x) \leq ۳ + x^۲$$

حد $f(x)$ را در $x = ۰$ تعیین کنید.

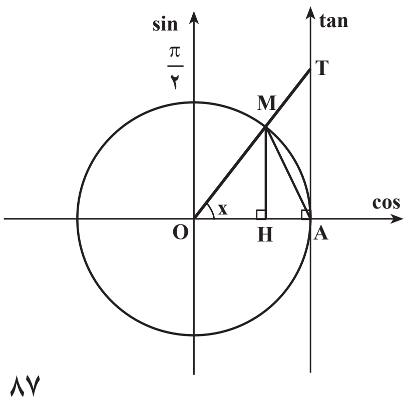
حل: چون $\lim_{x\to ۰}(۳ - x^۲) = ۳$ و $\lim_{x\to ۰}(۳ + x^۲) = ۳$.

بنابراین طبق قضیهٔ فشردگی داریم :

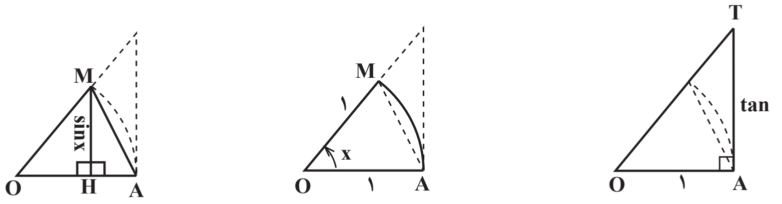
$$\lim_{x\to ۰} f(x) = ۳$$

قضیه: اگر x برحسب رادیان باشد، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$



اثبات: در دایره‌ای مثلثاتی کمان $\overset{\frown}{AM}$ را مساوی x رادیان $(۰ < x < \frac{\pi}{۲})$ درنظر می‌گیریم. تصویر نقطهٔ M روی محور کسینوس‌ها را H و نقطهٔ برخورد OM با محور تانژانت‌ها را T می‌نامیم. می‌دانیم که $HM=\sin x$ و $AT=\tan x$ و $OA = ۱$ است. با توجه به شکل آشکار است که :



مساحت مثلث OAM < مساحت قطاع OAM[1] < مساحت مثلث OAT

بنابراین

$$\frac{۱}{۲}OA.MH \; . \; \frac{۱}{۲}\times ۱\times x \; . \; \frac{۱}{۲}OA.AT$$

$$\frac{۱}{۲}\times ۱\times \sin x \; . \; \frac{۱}{۲}\times ۱\times x \; . \; \frac{۱}{۲}\times ۱\times \tan x$$

$$\sin x \; . \; x \; . \; \tan x$$

از تقسیم نابرابری‌های بالا بر sinx که مثبت است خواهیم داشت :

$$۱ \; . \; \frac{x}{\sin x} \; . \; \frac{\tan x}{\sin x} \Rightarrow ۱ \; . \; \frac{x}{\sin x} \; . \; \frac{۱}{\cos x}$$

اما می‌دانیم که اگر a و b دو عدد مثبت و $a \quad b$ ، داریم $\frac{۱}{b} \; . \; \frac{۱}{a}$ ؛ اینک چون $\cos x \quad ۰$ و $\frac{x}{\sin x} \quad ۰$ ، نابرابری‌های بالا را به‌صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\cos x \; . \; \frac{\sin x}{x} \; . \; ۱$$

امّا $\lim\limits_{x\to ۰^+} \cos x = ۱$ و $\lim\limits_{x\to ۰^+} ۱ = ۱$. پس طبق قضیهٔ فشردگی حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ که بین این دو تابع قرار دارد، برابر ۱ می‌شود. یعنی :

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

در حالتی که $\frac{-\pi}{۲} \; . \; x \; . \; ۰$ نیز ثابت می‌شود که $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{\sin x}{x} = ۱$ ، بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

نکته: می‌دانیم که اگر $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x) = l \neq ۰$ ، آنگاه $\lim\limits_{x\to x_۰} \frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{l}$. بنابراین از $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$ نتیجه می‌شود $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{x}{\sin x} = ۱$.

۱ــ مساحت قطاع x رادیان در دایره‌ای به شعاع R برابر است با : $S_{\text{قطاع}} = \frac{۱}{۲}R^۲x$

نتیجه

۱ــ تابع $f(x)=\frac{\tan x}{x}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم حد این تابع را در صفر تعیین کنیم.

حل: داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x}$$

با توجه به این‌که $\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$ و $\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x}=۱$ داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱\times۱=۱\ \Rightarrow\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱$$

۲ــ می‌خواهیم حد تابع $f(x)=\frac{\sin ۲x}{x}$ را در صفر تعیین‌کنیم.

تابع $f(x)=\frac{\sin ۲x}{x}$ را می‌توان به‌صورت $f(x)=۲\times\frac{\sin ۲x}{۲x}$ نوشت. پس :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}=\lim_{x\to ۰}(۲\frac{\sin ۲x}{۲x})=۲\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{۲x}=۲(۱)=۲$$

به‌طور کلی ثابت می‌شود که :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan mx}{x}=m \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۰}\frac{\sin mx}{x}=m$$

مثال ۱: $\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x^۲}$ را محاسبه کنید.

حل: داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲ x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}۲(\frac{\sin x}{x})^۲$$

$$=۲\times\lim_{x\to ۰}(\frac{\sin x}{x})^۲=۲(۱)^۲=۲$$

مثال ۲: حد $\frac{\tan kx}{\cos kx\sin ۲x}$ در $x=۰$ برابر ۲ است. مقدار k را تعیین کنید.

حل: داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan kx}{\cos kx\ \sin ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin kx}{\cos^۲ kx\sin ۲x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos^۲ kx}\times\frac{\lim_{x\to ۰}\frac{\sin kx}{x}}{\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}}$$

$$=۱\times\frac{k}{۲}=\frac{k}{۲}\ \Rightarrow\ \frac{k}{۲}=۲\ \Rightarrow\ k=۴$$

مثال ۳: برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \dfrac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})}{x-\frac{\pi}{۶}}$ فرض می‌کنیم $x-\frac{\pi}{۶}=t$، در این صورت $۲x-\frac{\pi}{۳}=۲(x-\frac{\pi}{۶})=۲t$ خواهد بود و خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \frac{\sin(۲x-\frac{\pi}{۳})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin ۲t}{t}=۲$$

تمرین

۱ــ هریک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۳x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۲}{۳x}\sin\dfrac{۳}{۲}x$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۳}}\dfrac{\sin(۳x-\pi)}{x-\frac{\pi}{۳}}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۵x}{۳x}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x\tan ۳x}{۳x^۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x^۲-a^۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\dfrac{\tan x-۱}{۴x-\pi}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x\sin ۲x\sin ۳x}{x^۳}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^۳}$

۲ــ اگر به ازای هر x داشته باشیم $۲-x^۲\le g(x)\le ۲\cos x$، حد تابع $g(x)$ را در $x=۰$ تعیین کنید.

۳ــ فرض کنید به ازای $-۱\le x\le ۱$ داشته باشیم :

$$\sqrt{۵-۲x^۲}\le f(x)\le\sqrt{۵-x^۲}$$

حد تابع $f(x)$ را در $x=۰$ تعیین کنید.

۴ــ حد تابع $f(x)=|x|$ را در $x=۰$ تعیین کنید.

نکات زیر در محاسبهٔ برخی از حدها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱ــ بخش‌پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x-x_۰$: اگر چند جمله‌ای $ax^n+bx^{n-۱}+\dots+1$ به

ازای $x=x_{۰}$ برابر صفر شود ($x_{۰}$ ریشهٔ چندجمله‌ای باشد)، چند جمله‌ای بر $x-x_{۰}$ بخش‌پذیر است (از این خاصیت برای تجزیهٔ چند جمله‌ای می‌توان استفاده کرد).

مثال ۱: چند جمله‌ای $۲x^{۲}+x-۳$ به ازای $x=۱$ برابر با صفر است، پس این چند جمله‌ای بر $x-۱$ بخش‌پذیر است.

$$x=۱ \xrightarrow{\text{در چند جمله‌ای}} ۲(۱)^{۲}+(۱)-۳=۲+۱-۳=۰$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{۲x^{۲}}+x-۳ & x-۱ \\ \cline{2-2} \underline{-\cancel{۲x^{۲}}+۲x} & ۲x+۳ \\ \quad\quad ۳x-\cancel{۳} & \\ \quad\quad \underline{-۳x+\cancel{۳}} & \\ \quad\quad\quad ۰ & \end{array} \qquad \Rightarrow ۲x^{۲}+x-۳=(x-۱)(۲x+۳)$$

مثال ۲: چند جمله‌ای $x^{۳}+۷x^{۲}+۴x-۱۲$ به ازای $x=-۲$ برابر صفر است، پس بر $x+۲$ بخش‌پذیر می‌باشد.

$$x=-۲ \xrightarrow{\text{در چند جمله‌ای}} (-۲)^{۳}+۷(-۲)^{۲}+۴(-۲)-۱۲=-۸+۲۸-۸-۱۲=۰$$

$$\begin{array}{c|l} x^{۳}+۷x^{۲}+۴x-۱۲ & x+۲ \\ \cline{2-2} R=۰ & x^{۲}+۵x-۶ \end{array} \quad \Rightarrow \quad x^{۳}+۷x^{۲}+۴x-۱۲=(x+۲)(x^{۲}+۵x-۶)$$

و چون $x^{۲}+۵x-۶=(x+۶)(x-۱)$ ، پس :

$$x^{۳}+۷x^{۲}+۴x-۱۲=(x+۲)(x+۶)(x-۱)$$

اینک چند نمونه از حدهایی را که به کمک بخش‌پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x-x_{۰}$ محاسبه می‌شوند در زیر می‌آوریم :

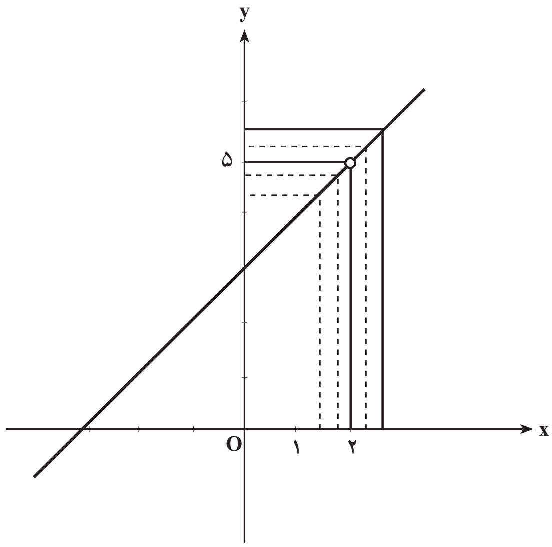
مثال ۱: حد تابع $q(x)=\dfrac{x^{۲}+x-۶}{x-۲}$ را در $x=۲$ تعیین کنید.

حل: چون صورت و مخرج کسر در $x=۲$ برابر صفرند پس بر $x-۲$ بخش‌پذیرند، یعنی دارای عامل مشترک $x-۲$ می‌باشند، و چون $x\neq۲$ داریم $x-۲\neq۰$ و می‌توان این عامل مشترک را از صورت و مخرج کسر حذف نمود ؛ بنابراین خواهیم داشت :

$$q(x)=\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۳)}{\cancel{x-۲}}=x+۳ \quad \text{و} \quad x\neq۲$$

و از آن‌جا :

$$\lim_{x\to۲}\frac{x^{۲}+x-۶}{x-۲}=\lim_{x\to۲}(x+۳)=۲+۳=۵$$



نمودار تابع $x \neq ۲$ ، $q(x) = x + ۳$ یا $x \neq ۲$ ، $y = x + ۳$ نیز نشان می‌دهد که حد تابع $q(x) = \frac{x^۲ + x - ۶}{x - ۲}$ در $x = ۲$ برابر ۵ است.

مثال ۲: حد تابع $q(x) = \frac{۲x^۳ + x^۲ + ۲x + ۳}{x^۲ - x - ۲}$ را در $x = ۱$ به دست آورید.

حل: چون صورت و مخرج کسر در $x = -۱$ صفر می‌شوند، پس بر $x + ۱$ بخش‌پذیرند و خواهیم داشت :

$$\frac{۲x^۳ + x^۲ + ۲x + ۳}{x^۲ - x - ۲} = \frac{\cancel{(x+۱)}(۲x^۲ - x + ۳)}{\cancel{(x+۱)}(x - ۲)} = \frac{۲x^۲ - x + ۳}{x - ۲}$$

$$\lim_{x \to -۱} \frac{۲x^۳ + x^۲ + ۲x + ۳}{x^۲ - x - ۲} = \lim_{x \to -۱} \frac{۲x^۲ - x + ۳}{x - ۲} = \frac{۲(-۱)^۲ - (-۱) + ۳}{(-۱) - ۲} = \frac{۶}{-۳} = -۲$$

۲ــ گویا کردن کسرها: اگر تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، یکی یا هر دو، اصم باشند و حد آن‌ها در $x = x_۰$ برابر صفر باشد، آن‌گاه برای محاسبهٔ حد تابع $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ در $x = x_۰$ صورت یا مخرج یا هر دو را گویا می‌کنیم.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱: حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x + ۴} - ۲}{x}$ در $x = ۰$ چگونه به‌دست می‌آید؟

حل: ابتدا با محاسبهٔ مقدار $f(x)$ برای برخی از مقادیر x که به عدد صفر نزدیک می‌شوند جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	…	−۱	−۰/۹	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	…→	۰	…	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۰/۹	۱	…
f(x)	…	۰/۲۶۷۹	۰/۲۶۵۹	۰/۲۵۸۳	۰/۲۵۱۶	۰/۲۵۰۲	۰/۲۵۰۰۲	…→		…	۰/۲۴۹۹	۰/۲۴۹۸	۰/۲۴۸	۰/۲۴۱	۰/۲۳۷	۰/۲۳۶	…

این جدول نشان می‌دهد که در $x=۰$ حد تابع $\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}$ برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

از طرفی چون حد صورت و مخرج کسر بالا در $x=۰$ برابر صفر است پس برای تعیین حد تابع از گویا کردن صورت کسر استفاده می‌کنیم. بدین‌منظور کسر را در $\frac{\sqrt{x+۴}+۲}{\sqrt{x+۴}+۲}=۱$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}=\frac{(\sqrt{x+۴}-۲)(\sqrt{x+۴}+۲)}{x(\sqrt{x+۴}+۲)}=\frac{(x+۴)-۴}{x(\sqrt{x+۴}+۲)}$$

$$f(x)=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+۴}+۲)}=\frac{۱}{\sqrt{x+۴}+۲} \quad , \quad x\neq ۰$$

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۴}-۲}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt{x+۴}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۲: حد تابع $q(x)=\frac{x^۲-۹}{۳-\sqrt{x+۶}}$ در $x=۳$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

حل: چون حد صورت و مخرج کسر در $x=۳$ صفر است پس برای تعیین حد تابع، مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\frac{x^۲-۹}{۳-\sqrt{x+۶}}=\frac{(x^۲-۹)(۳+\sqrt{x+۶})}{(۳-\sqrt{x+۶})(۳+\sqrt{x+۶})}=\frac{(x-۳)(x+۳)(۳+\sqrt{x+۶})}{۳-x}$$

$$=-(x+۳)(۳+\sqrt{x+۶})$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{۳-\sqrt{x+۶}}=\lim_{x\to ۳}-(x+۳)(۳+\sqrt{x+۶})$$

$$=-(۳+۳)(۳+\sqrt{۹})=-۳۶$$

مثال ۳: حد تابع $q(x)=\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۲x-۱}-۳}$ را در $x=۵$ به‌دست آورید.

حل: برای تعیین حد، هم صورت کسر و هم مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۲x-۱}-۳}=\frac{(۲-\sqrt{x-۱})(\sqrt{۲x-۱}+۳)(۲+\sqrt{x-۱})}{(\sqrt{۲x-۱}-۳)(\sqrt{۲x-۱}+۳)(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{(۴-x+۱)(\sqrt{۲x-۱}+۳)}{(۲x-۱-۹)(۲+\sqrt{x-۱})}$$

$$=\frac{-(\cancel{x-۵})(\sqrt{۲x-۱}+۳)}{۲(\cancel{x-۵})(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{-(\sqrt{۲x-۱}+۳)}{۲(۲+\sqrt{x-۱})} \qquad (x\neq -۵)$$

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{\sqrt{۲x-۱}-۳}=\lim_{x\to ۵}-\frac{\sqrt{۲x-۱}+۳}{۲(۲+\sqrt{x-۱})}=-\frac{\sqrt{۱۰-۱}+۳}{۲(۲+\sqrt{۵-۱})}=\frac{-۶}{۸}=\frac{-۳}{۴}$$

تمرین

هریک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{x^۲-۵x+۴}$

ب) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+۲x-۳}{x-۱}$

پ) $\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲-x-۲}{x^۲-۲x-۳}$

ت) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۲x+۱}{۲x^۲+x-۳}$

ث) $\lim_{x\to -۱}\frac{۳x^۳+x^۲+x+۳}{x^۲+۲x+۱}$

ج) $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x^۲-۵x+۶}$

چ) $\lim_{x\to -۲}\frac{۳x^۲-۱۲}{۲-x-x^۲}$

ح) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}{x^۲-۲x+۱}$

خ) $\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴-۲x+۱}{۲x^۲-۳x+۱}$

د) $\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{x+۶}}{x+۲}$

ذ) $\lim_{x\to ۴}\frac{\sqrt{x}-۲}{۴-x}$

ر) $\lim_{x\to ۰^+}\frac{x}{\sqrt{x}}$

ز) $\lim_{x\to -۵}\frac{x+۵}{\sqrt{۳x+۱۶}-۱}$

ژ) $\lim_{x\to -۲}\frac{۲x+\sqrt{x+۱۸}}{\sqrt{۳x+۷}-۱}$

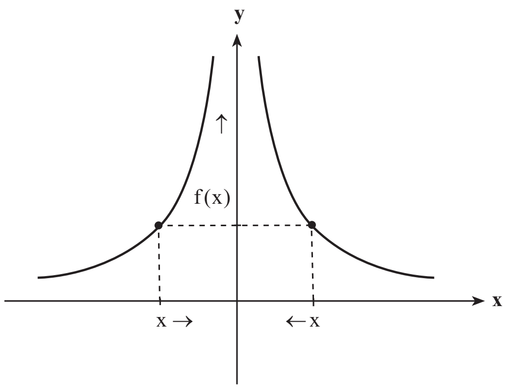
تعمیم حد

می‌دانیم تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|}$ در صفر تعریف نشده است و برای رسم نمودار آن در حوالی صفر بهتر است رفتار این تابع را در حوالی صفر بررسی کنیم. به ازای مقدارهای نزدیک صفر برای x روشن است که مقدارهای $\frac{۱}{|x|}$ بسیار بزرگ می‌شوند و هرچه مقدارهای x را به صفر نزدیک‌تر کنیم

مقدارهای $\frac{۱}{|x|}$ بزرگ‌تر خواهند شد. جدول زیر درستی این مطلب را نشان می‌دهد.

x	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\to ۰$.	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
$\frac{۱}{\lvert x\rvert}$	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$\to$.	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰

از طریق این جدول می‌توان تشخیص داد که نمودار این تابع در حوالی صفر به شکل زیر است.



با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه تابع) به صفر مقدارهای $\frac{۱}{|x|}$ بزرگ می‌شوند به‌گونه‌ای که $\frac{۱}{|x|}$ می‌تواند از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شود به شرط آن که x به اندازه کافی به صفر نزدیک شده باشد. در این حالت گوییم با نزدیک شدن x به صفر، $\frac{۱}{|x|}$ به سمت +. می‌رود و حد این تابع در صفر +. است و می‌نویسیم :

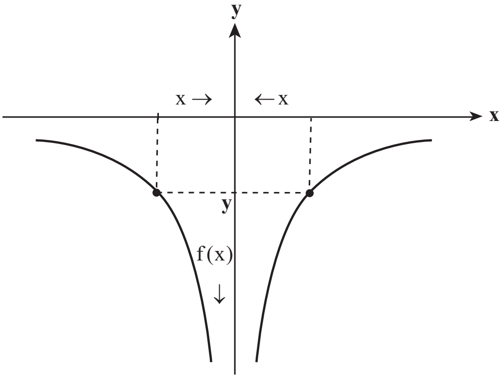
$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{|x|}=+.$$

به‌طور کلی برای هر تابع $y=f(x)$ که روی بازه I تعریف شده باشد و نقطه a به‌گونه‌ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد و با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه تابع) به a مقدارهای f(x) بزرگ می‌شوند به‌گونه‌ای که f(x) بتواند از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شود به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشد. در این حالت می‌گوییم با نزدیک شدن x به a، f(x) به سمت +. می‌رود و حد این تابع در a، +. است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a}f(x)=+.$$

در برخی موارد با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه یک تابع) به نقطه‌ای مانند a مقدارهای تابع

از هر عدد از پیش داده شده‌ای کمتر می‌شوند. مثلاً در مورد تابع $y=-\frac{۱}{|x|}$ با نزدیک شدن x به صفر مقدارهای تابع از هر عدد از پیش داده شده‌ای کمتر می‌شوند. نمودار این تابع به شکل زیر است.



در چنین حالاتی می‌گویند با نزدیک شدن x به a، f(x) به سمت −. می‌رود و حد این تابع در a، −. است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -.$$

برای مثال $\lim_{x\to ۰} -\frac{۱}{|x|} = -.$

در حالتی که a یک نقطه میانی دامنه تابع باشد و متغیر x فقط با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک شود و مقدارهای f(x) از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند می‌گوییم حد راست تابع در a، +. است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +.$$

و اگر متغیر x فقط با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک شود و مقدارهای f(x) از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند می‌گوییم حد چپ تابع در a، +. است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +.$$

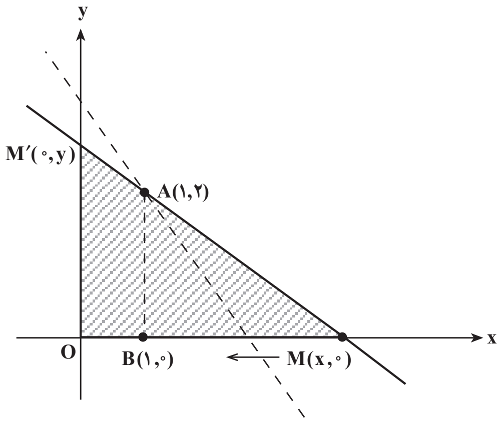
به‌طور مشابه حدهای راست و چپ با مقدار −. تعریف می‌شوند.

برای مثال برای تابع $y=\frac{۱}{x}$ داریم:

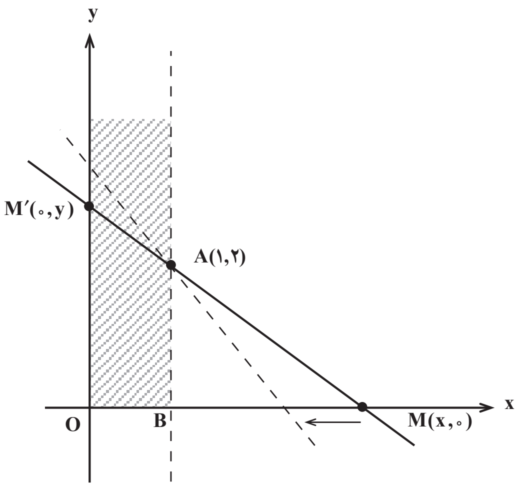
$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +. \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -.$$

مثال ۱: در دستگاه محورهای مختصات xoy، از نقطهٔ $A=(۱,۲)$ خطی رسم می‌کنیم تا

محور xها را در نقطهٔ $M=(x,\circ)$ ، ۱ x ؛ و محور yها را در نقطهٔ $M'=(\circ,y)$ قطع کند. مساحت مثلث OMM' را به $S_{OMM'}$ نشان می‌دهیم. (شکل زیر)



وقتی خط مذکور حول نقطهٔ A چنان دوران کند که نقطهٔ M به نقطهٔ $B(۱,\circ)$ نزدیک شود، مساحت مثلث تغییر می‌کند (درواقع x از طرف راست به عدد ۱ نزدیک می‌شود ولی همواره $x \neq ۱$ است زیرا اگر $x=۱$ باشد، مثلثی وجود نخواهد داشت.)



با استفاده از تشابه دو مثلث OMM' و ABM می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{BM}{OM}=\frac{AB}{OM'} \Rightarrow \frac{x-۱}{x}=\frac{۲}{y} \Rightarrow y=\frac{۲x}{x-۱}$$

بنابراین مساحت مثلث OMM' برابر است با :

$$S_{OMM'} = \frac{1}{2}OM.OM' = \frac{1}{2}x.y = \frac{1}{2}x \times \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$S_{OMM'} = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

حال اگر x (که بزرگ‌تر از ۱ است) از طرف راست به ۱ نزدیک شود، خواهیم داشت :

x	۱	. … .	۱/۰۰۰۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲	…
f(x)	$+\infty$	. … .	۱۰۰۰۰۰۲	۱۰۰۰۲	۱۰۰۲	۱۰۲	۱۲/۱	۴/۵	۴	…

به‌طوری که دیده می‌شود، با نزدیک شدن x به عدد ۱ مقدار f(x) افزایش می‌یابد و هرگاه x به‌قدر کافی به عدد ۱ نزدیک شود، مقدار f(x) از هر عدد مثبت از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد. پس بنا به تعریف، می‌گوییم f(x) به سمت $+\infty$ می‌رود. یعنی :

$$\lim_{x\to 1^+} S_{OMM'} = +\infty$$

مثال ۲: تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$ را درنظر می‌گیریم و مقدارهای f(x) را برای xهایی که به صفر نزدیک می‌شوند محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	…	−۱	−۰/۲	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	…→	۰	←…	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۲	۱	…
f(x)	…	۱	۲۵	10^2	10^4	10^6	10^8	…→	$+\infty$	←…	10^8	10^6	10^4	10^2	۲۵	۱	…

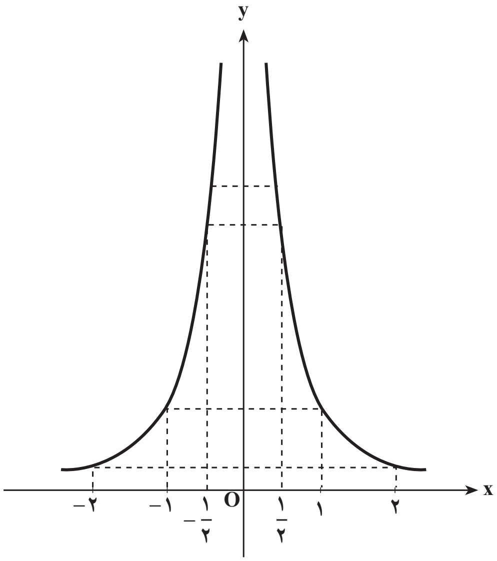
به‌طوری که دیده می‌شود وقتی x از طرف راست یا چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود، مقادیر f(x) به‌تدریج بزرگ می‌شوند و اگر x به عدد صفر بسیار نزدیک شود، مقدار f(x) نیز بسیار بزرگ خواهد شد. بنابراین تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، به سمت $+\infty$ می‌رود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

اینک با استفاده از نمودار، حد این تابع را در $x = 0$ بررسی می‌کنیم.

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲
y	$\frac{1}{4}$	۱	۴	تعریف نشده	۴	۱	$\frac{1}{4}$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، f(x) به سمت .+ می‌رود.



مثال ۳: حد تابع $f(x)=\frac{-۵}{(x-۲)^{۲}}$ را در $x=۲$ تعیین کنید.

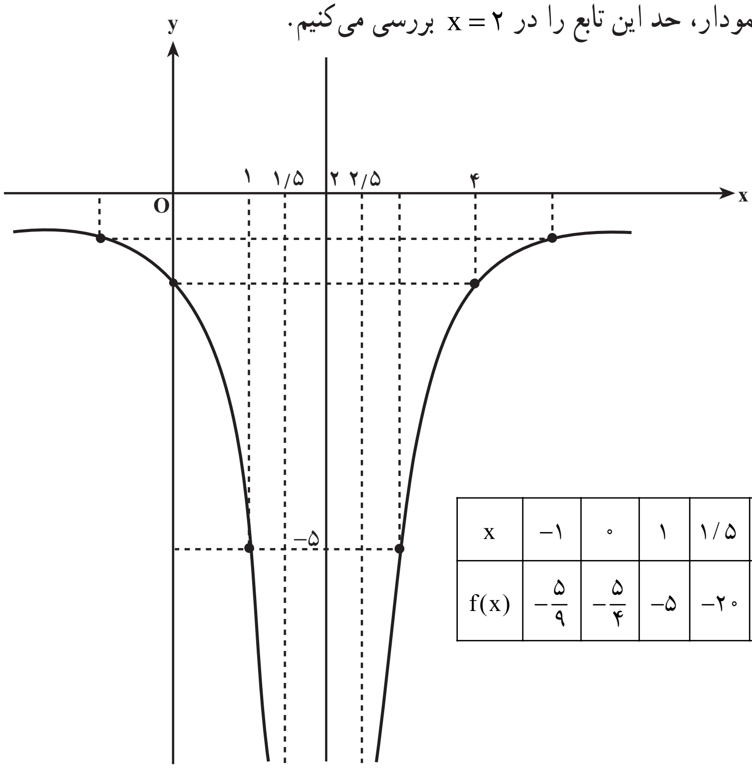
حل: جدول زیر مقدارهای تابع را برای بعضی از مقدارهای x نزدیک عدد ۲ نشان می‌دهد.

x	…	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	…→	۲	….	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	…
f(x)	…	−۵	−۲۰	−۵۰۰	-۵×۱۰^{۴}	-۵×۱۰^{۶}	…→	−.	…. −	۵×۱۰^{۶}	-۵×۱۰^{۴}	−۵۰۰	−۲۰	−۵	…

به‌طوری که دیده می‌شود وقتی x از طرف راست یا چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقدارهای f(x) به‌تدریج کم می‌شوند، و وقتی x به‌قدر کافی به عدد ۲ نزدیک شود، f(x) از هر عدد منفی داده شده‌ای کمتر خواهد شد. بنابراین، بنا به تعریف می‌توان گفت که در تابع بالاوقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، f(x) به سمت .– می‌رود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to۲} f(x)=\lim_{x\to۲}\frac{-۵}{(x-۲)^{۲}}=-.$$

اینک با استفاده از نمودار، حد این تابع را در $x=۲$ بررسی می‌کنیم.



x	−۱	۰	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۴
f(x)	$-\frac{۵}{۹}$	$-\frac{۵}{۴}$	−۵	−۲۰	تعریف نشده	−۲۰	−۵	$-\frac{۵}{۴}$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که وقتی x به عدد ۲ نزدیک می‌شود، f(x) به سمت −. می‌رود.

مثال ۴: برای یافتن حد $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ در $x=۱$ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	...	→	۱		.	...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲	...
f(x)	−۱	−۲	−۱۰	−۱۰۰	−۱۰۰۰	...	→	−.	+.	.	...	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۲	۱	...

به‌طوری که دیده می‌شود، هنگامی که x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک می‌شود، مقادیر f(x) به‌تدریج کم می‌شوند و وقتی x به اندازه کافی به عدد ۱ نزدیک شود، f(x) از هر عدد منفی داده شده‌ای کمتر خواهد شد. پس f(x) به سمت −. می‌رود یعنی :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۱}{x-۱}=-.$$

وقتی x از طرف راست به عدد ۱ نزدیک می‌شود، مقادیر f(x) به‌تدریج بزرگ می‌شوند و هنگامی که x به عدد ۱ به اندازه کافی نزدیک شود، مقدار f(x) از هر عدد داده شده‌ای بزرگ‌تر

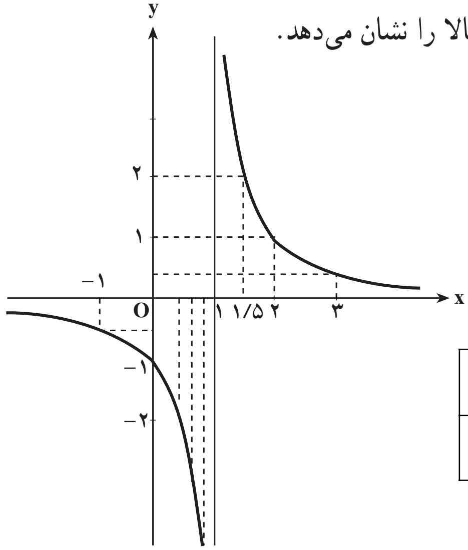
خواهد شد. پس f(x) به سمت .+ می‌رود. یعنی در این حالت :

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{x-۱} = +.$$

بنابراین در تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ وقتی x به عدد ۱ نزدیک می‌شود داریم :

$$\lim_{x\to ۱^-}\left(f(x)=\frac{۱}{x-۱}\right)=-. \quad , \quad \lim_{x\to ۱^+}\left(f(x)=\frac{۱}{x-۱}\right)=+.$$

نمودار تغییرات تابع نیز درستی محاسبات بالا را نشان می‌دهد.



x	−۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
f(x)	$-\frac{۱}{۲}$	−۱	−۲	تعریف نشده	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$

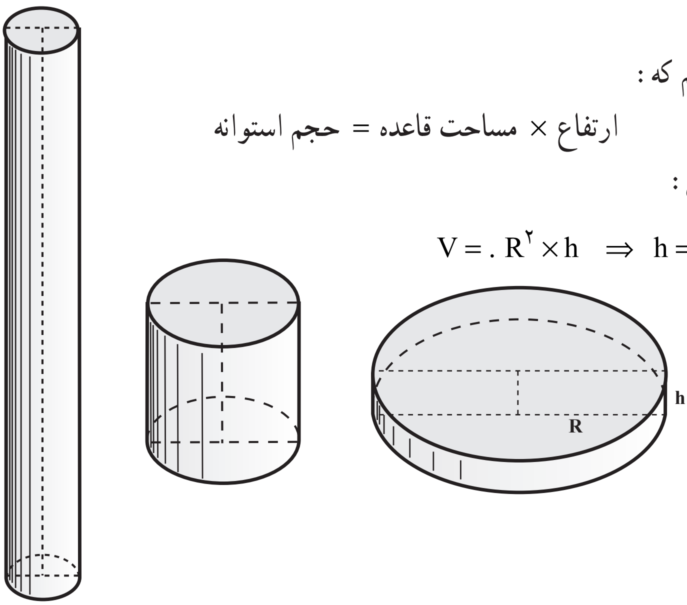
مثال ۵: استوانه‌ای به حجم ثابت V داده شده است. شعاع قاعدهٔ استوانه را R و ارتفاع آن را h می‌نامیم. می‌خواهیم تغییرات ارتفاع استوانه را هنگامی که شعاع قاعدهٔ استوانه تغییر می‌کند، بررسی کنیم.

می‌دانیم که :

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم استوانه

بنابراین :

$$V = .\,R^۲ \times h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{.\,R^۲}$$



امّا دامنهٔ تغییرات R بازهٔ $(0,+.\ )$ است بنابراین :

$$\lim_{R\to 0^+} h = \lim_{R\to 0^+} \frac{V}{.\ R^2} = +.$$

پس دو کمیت R و h چنان به یکدیگر وابسته‌اند که هرگاه R به صفر نزدیک شود h به سمت $+.$ می‌رود.

مثال ۶: حد دو تابع $f_1(x) = x - 3$ و $f_2(x) = \frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{x-3}$ را در $x = 3$ با محاسبهٔ مقادیر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متناظر با xهای نزدیک ۳ به‌کمک جدول زیر تعیین می‌کنیم.

x	…	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	… →	۳		.	…	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴	…
$x-3$	…	−۱	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	… →	۰		.	…	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱	…
$\frac{1}{x-3}$	…	−۱	−۲	−۱۰	−۱۰۰	−۱۰۰۰	… →	−.	+.	.	…	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰	۲	۱	…

به‌طوری که دیده می‌شود $\lim_{x\to 3}(x-3) = 0$ اما $\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}$ برابر است با $+.$ یا $-.$، بنابر آن‌که x از طرف راست یا از طرف چپ به ۳ نزدیک شود.

نکته: می‌دانیم که $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +.$. ارتباط این‌گونه حدها در ماهیت کسرها نهفته است که وقتی مخرج کسر کوچک‌تر می‌شود، مقدار کسر بزرگ‌تر می‌گردد. بنابراین می‌توانیم چنین نتیجه بگیریم که :

الف ــ هرگاه $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ و همواره $f(x)\ \ 0$ (یعنی f(x) با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود)، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +.$$

ب ــ هرگاه $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ و همواره $f(x)\ .\ 0$ ، یعنی f(x) با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = -.$$

به مثال‌های زیر توجه کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$　　ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x} = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{-۲}{x} = -\infty$　　ت) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{-۲}{x} = +\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to -۳^+} \frac{۴}{(x+۳)^۲} = +\infty$　　ج) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{-۱۱}{(x-۲)^۲} = -\infty$

چ) $\lim\limits_{x\to ۳^-} \frac{۵}{(x-۳)^۳} = -\infty$

تمرین

هر یک از حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \frac{۲x+۳}{x-۱}$　　ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{۳}{x-۲}$　　پ) $\lim\limits_{x\to -۲^-} \frac{۴x}{(x+۲)^۲}$

ت) $\lim\limits_{x\to -۱^+} \frac{-۱}{(x+۱)^۲}$　　ث) $\lim\limits_{x\to ۳^+} \frac{۲x+۳}{(x-۳)^۲}$　　ج) $\lim\limits_{x\to ۲^-} \frac{-x+۳}{(x-۲)^۳}$

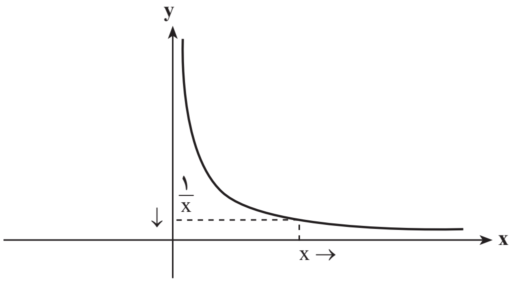
چ) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{۳x+۵}{x^۲-۴}$　　ح) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{۴}{۲x-۱}$　　خ) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{-۱}{x^۴}$

د) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{۱}{(x+۱)^۴}$　　ذ) $\lim\limits_{x\to ۳} \frac{x+۱}{x^۲-۹}$　　ر) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{-۵x^۲}{x^۲-۱}$

ز) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x$　　س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \tan^۲ x$　　ش) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۹}^+} \tan(۳x - \frac{\pi}{۳})$

ص) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \cot^۳ x$　　ض) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{۱}{\sin x}$　　ط) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+} \frac{۱}{\cos x}$

ظ) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \frac{۱}{۱-\cos x}$　　ع) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^-} \frac{\tan x + \sqrt{۳}}{\tan x - \sqrt{۳}}$



اگر تابعی مانند $y = f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد و بخواهیم چگونگی نمودار آن را برای مقادیر بزرگ x تشخیص دهیم. باید با بزرگ شدن مقادیر x تشخیص دهیم $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند. برای مثال برای تابع $y = \frac{۱}{x}$ با بزرگ شدن مقادیر x، مقدارهای $\frac{۱}{x}$ کوچک می‌شوند و به صفر نزدیک می‌شوند. نمودار این تابع برای مقادیر بزرگ x به شکل بالا است.

در این مورد می‌گویند با رفتن x به سمت $+\infty$ مقدار تابع $y = \frac{۱}{x}$ به صفر نزدیک می‌شود.

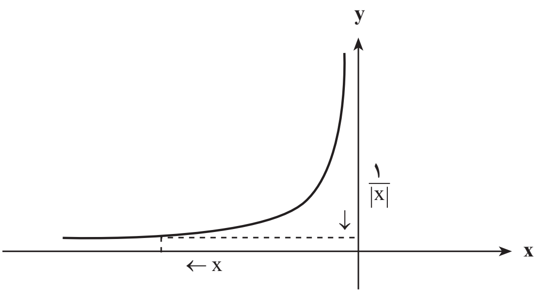
به‌طور کلی برای هر تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد و با بزرگ شدن متغیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به‌گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرط آن که x به اندازه کافی بزرگ شده باشد، در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $+\infty$، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود و حد این تابع در $+\infty$ برابر L است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

برای مثال : $\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{x} = ۰$

همچنین اگر تابعی مانند $y = f(x)$ در بازه‌ای مانند $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد و بخواهیم چگونگی نمودار آن را برای مقادیر منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ x تشخیص دهیم، باید با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی، تشخیص دهیم $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند. برای مثال

برای تابع $y = \frac{۱}{|x|}$ با کم شدن مقادیرx در اعداد منفی و بزرگ شدن آن‌ها از لحاظ قدر مطلق، مقدارهای $\frac{۱}{|x|}$ کوچک می‌شوند و به صفر نزدیک می‌شوند. نمودار این تابع برای مقادیر بزرگ x به شکل مقابل است.



در این مورد می‌گویند با رفتن x به سمت $-\infty$ مقدار تابع $y = \frac{۱}{|x|}$ به صفر نزدیک می‌شود.

به طور کلی برای هر تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد و با کم شدن

مقادیر x در اعداد منفی، مقدارهای f(x) به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به‌گونه‌ای که f(x) بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرط آن که x به اندازه کافی در اعداد منفی کم شده باشد، در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $-.$ ، f(x) به سمت L نزدیک می‌شود و حد این تابع در $-.$ برابر L است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to -.} f(x) = L$$

برای مثال : $\lim_{x \to -.} \frac{۱}{|x|} = ۰$

مثال ۱: سیبی را به‌طور برابر میان دو نفر تقسیم می‌کنیم. به هر یک نصف سیب می‌رسد. اگر ۲ سیب را میان ۳ نفر به تساوی تقسیم کنیم به هر یک $\frac{۲}{۳}$ سیب می‌رسد و از تقسیم ۳ سیب میان ۴ نفر، سهم هر یک $\frac{۳}{۴}$ سیب می‌شود. این تقسیم را با افزودن یک سیب در مقابل افزایش یک نفر ادامه می‌دهیم. هنگامی که شمارهٔ نفرات به ۱۰۰ می‌رسد تعداد سیب‌ها ۹۹ تاست و سهم هر نفر $۰/۹۹ = \frac{۹۹}{۱۰۰}$ می‌شود و وقتی شمارهٔ نفرات ۱۰۰۰ باشد شمارهٔ سیب‌ها ۹۹۹ و سهم هر نفر $۰/۹۹۹ = \frac{۹۹۹}{۱۰۰۰}$ است. آشکار است هر قدر شمارهٔ نفرات بیش‌تر شود سهم هر نفر بیش‌تر می‌شود. اگر این روند را همچنان ادامه دهیم سرانجام سهم هر نفر چه خواهد شد؟

اگر شمارهٔ نفرات را با x و سهم هر نفر را که تابعی از x است با f(x) نشان دهیم خواهیم داشت :

$$f(x) = \frac{x-۱}{x}$$

پاسخ نهایی، یافتن حد تابع f در $+.$ است، این مطلب را با تشکیل یک جدول بررسی و جواب را پیدا کنید.

مثال ۲: تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را درنظر می‌گیریم و مقادیر f(x) را برای xهای به‌قدر کافی بزرگ محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	…	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	…	→	+.
$f(x) = \frac{۱}{x}$	…	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	…	→	۰

این جدول نشان می‌دهد که وقتی x به سمت $+.$ می‌رود $\frac{۱}{x}$ به صفر نزدیک می‌شود. یعنی :

$$\lim_{x\to+.} \frac{۱}{x} = ۰$$

هم‌چنین مقادیر f(x) برای xهای منفی که از لحاظ قدرمطلق بزرگ هستند را محاسبه و در جدول زیر می‌نویسیم :

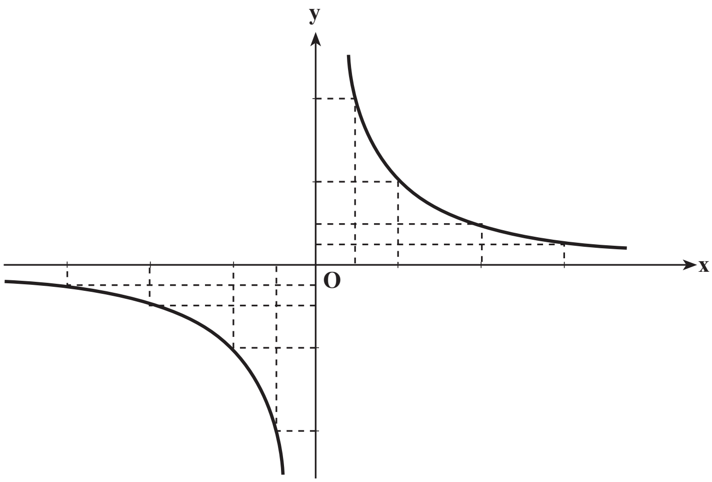
x	$-.$	.	...	-۱۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰	...
f(x)	۰	.	...	$-۰/۰۰۰۰۱$	$-۰/۰۰۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۱$	...

به‌طوری که دیده می‌شود وقتی x به سمت $-.$ می‌رود، $\frac{۱}{x}$ به ۰ نزدیک می‌شود یعنی

$$\lim_{x\to-.} \frac{۱}{x} = ۰$$

بنابراین داریم : $\lim_{x\to-.} \frac{۱}{x} = ۰$ و $\lim_{x\to+.} \frac{۱}{x} = ۰$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که درxهای مثبت بزرگ و xهای منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ، f(x) به ۰ نزدیک می‌شود.



x	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
y	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	تعریف نشده	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$

مثال ۳: در تابع $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ مقادیر تابع را برای مقدارهایی از x که در جدول زیر نوشته‌ایم محاسبه می‌کنیم و در جای خود می‌نویسیم و از روی آن حد تابع را در .+ در .− مشخص می‌کنیم.

x	−.	.	…	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	… →	+.
f(x)	۲	.	…	۲/۰۰۰۰۵	۲/۰۰۰۵	۲/۰۰۵	۲/۰۵	$-\frac{۱}{۲}$	۱/۹۵۱	۱/۹۹۵	۱/۹۹۹۵	۱/۹۹۹۹۵	… →	۲

جدول بالا نشان می‌دهد که :

$$\lim_{x\to+.}\frac{۲x-۱}{x+۲}=۲ \quad , \quad \lim_{x\to-.}\frac{۲x-۱}{x+۲}=۲$$

نکته: دیدیم که $\lim_{x\to+.}\frac{۱}{x}=۰$ و $\lim_{x\to-.}\frac{۱}{x}=۰$ است. هم‌چنین $\lim_{t\to۰}t=۰$، پس اگر $t=\frac{۱}{x}$ خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to(\ .}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to۰}t=۰$$

به این ترتیب با استفاده از این تعویض متغیر می‌توان محاسبهٔ حد در . را به محاسبهٔ حد در صفر $(t\to۰)$ بازگردانید.

اینک با استفاده از مطلب بالا حد $\frac{۲x-۱}{x+۲}$ را در (.) به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{۲x-۱}{x+۲}=\frac{x(۲-\frac{۱}{x})}{x(۱+\frac{۲}{x})}=\frac{۲-\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۲}{x}} \quad , \quad x\neq۰$$

$$\frac{۱}{x}=t \Rightarrow \lim_{x\to(\ .}\frac{۲x-۱}{x+۲}=\lim_{t\to۰}\frac{۲-t}{۱+۲t}=\frac{۲-۰}{۱+۰}=۲$$

بنابراین حد کسر بالا در (.) برابر با ۲ است.

مثال ۴: حد $\frac{۶x-۱}{۲x+۳}$ را در (.) تعیین کنید.

می‌توان نوشت :

$$\frac{۶x-۱}{۲x+۳}=\frac{x(۶-\frac{۱}{x})}{x(۲+\frac{۳}{x})}=\frac{۶-\frac{۱}{x}}{۲+\frac{۳}{x}} \quad , \quad \frac{۱}{x}=t$$

$$\lim_{x\to(\ .}\frac{۶x-۱}{۲x+۳}=\lim_{t\to ۰}\frac{۶-t}{۲+۳t}=\frac{۶-۰}{۲+۰}=۳$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to(\ .}\frac{۶x-۱}{۲x+۳}=۳$$

مثال ۵: کسر $\frac{-۲x^۲+x-۱}{x^۲+۷x+۲}$ داده شده است. می‌خواهیم حد این کسر را در (.) تعیین کنیم.

چون $x\neq ۰$ است،

$$\frac{-۲x^۲+x-۱}{x^۲+۷x+۲}=\frac{x^۲(-۲+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x^۲})}{x^۲(۱+\frac{۷}{x}+\frac{۲}{x^۲})}$$

$$\frac{۱}{x}=t\ \Rightarrow\ \lim_{x\to(\ .}f(x)=\lim_{t\to ۰}\frac{-۲+t-t^۲}{۱+۷t+۲t^۲}=\frac{-۲+۰-۰}{۱+۰+۰}=\frac{-۲}{۱}=-۲$$

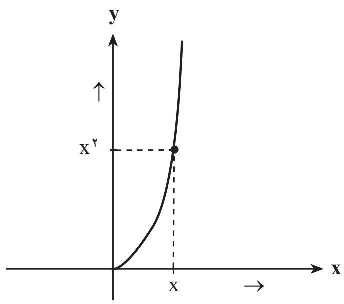
$$\Rightarrow\ \lim_{x\to(\ .}\frac{-۲x^۲+x-۱}{x^۲+۷x+۲}=-۲$$

مثال ۶: حد $\frac{۳x+۱}{x+\sqrt{x+۱}}$ را در .+، تعیین می‌کنیم.

$$\frac{۳x+۱}{x+\sqrt{x+۱}}=\frac{x(۳+\frac{۱}{x})}{x(۱+\sqrt{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}})}\quad,\quad \frac{۱}{x}=t\quad,\quad ۰.\ t$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to +.}f(x)=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۳+t}{۱+\sqrt{t+t^۲}}=\frac{۳}{۱}=۳$$

در محاسبه حد توابع در .+ و .– ممکن است با بزرگ شدن مقادیر x، مقدارهای f(x) به عدد خاصی نزدیک نشوند و مقادیر f(x) نیز بزرگ شوند و از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند. مثلاً در مورد تابع $y=x^۲$ وضعیت به همین شکل است و با بزرگ شدن x، مقدار $x^۲$ نیز بزرگ می‌شود و از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر می‌شود. نمودار تابع نیز این مطلب را نشان می‌دهد.



این به معنای آن است که با رفتن x به سمت $+\infty$ ، x^2 نیز به سمت $+\infty$ می‌رود. در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده است اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، f(x) نیز به سمت $+\infty$ برود. گوییم حد این تابع در $+\infty$ ، $+\infty$ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

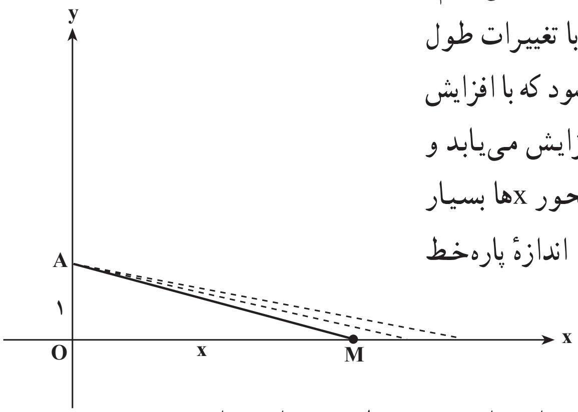
برای مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

اما اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، f(x) به سمت $-\infty$ برود. گوییم حد این تابع در $+\infty$ ، $-\infty$ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

برای مثال $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2=-\infty$. به شکل مشابه مفاهیم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ تعریف می‌شوند. مثلاً $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2=-\infty$.

مثال ۱ : نقطهٔ ثابت A را به عرض ۱ روی محور yها و نقطهٔ متغیر M را به طول x($x>0$) روی محور طول‌ها درنظر گرفته از A به M وصل می‌کنیم.



آن‌گاه تغییرات طول پاره‌خط AM را با تغییرات طول پاره‌خط OM مقایسه می‌کنیم. دیده می‌شود که با افزایش طول OM اندازهٔ پاره‌خط AM نیز افزایش می‌یابد و هنگامی که نقطهٔ M در جهت مثبت محور xها بسیار دور شود، یعنی x به سمت $+\infty$ برود، اندازهٔ پاره‌خط AM نیز به سمت $+\infty$ می‌رود.

اگر طول پاره‌خط AM را که تابعی از x است f(x) بنامیم، خواهیم داشت :

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

زیرا

$$OA=1\ ,\ OM=x\ ,\ A\hat{O}M=90^\circ \ \Rightarrow\ AM^2=OM^2+OA^2$$
$$=x^2+1$$

درنتیجه

$$AM=\sqrt{x^2+1}$$

با تشکیل جدول تغییرات تابع نشان دهید که وقتی x که به سمت $+.$ برود ، f(x) نیز به سمت $+.$ می‌رود.

مثال ۲: تابع همانی f(x)=x را درنظر می‌گیریم و مقادیر f(x) متناظر با xهای از لحاظ قدرمطلق بزرگ مثبت و منفی محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	$\boxed{-.}$	.	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	→	$\boxed{+.}$
f(x)	$\boxed{-.}$	.	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	→	$\boxed{+.}$

این جدول نشان می‌دهد که وقتی x به سمت $-.$ می‌رود، f(x) نیز به سمت $-.$ می‌رود و هنگامی که x به سمت $+.$ می‌رود، f(x) نیز به سمت $+.$ می‌رود. یعنی داریم :

$$\lim_{x\to -.} f(x) = \lim_{x\to -.} (x) = -.$$

$$\lim_{x\to +.} f(x) = \lim_{x\to +.} (x) = +.$$

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to (\ .} (x) = (\ .$$

مثال ۳: تابع $f(x) = x^۲ + ۱$ را درنظر می‌گیریم و مقادیر f(x) متناظر با مقادیر از لحاظ قدرمطلق بزرگ x را محاسبه کرده و در جدولی می‌نویسیم :

x	$\boxed{-.}$	.	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	→	$\boxed{+.}$
f(x)	$\boxed{+.}$	.	$۱۰^{۱۰}+۱$	$۱۰^{۸}+۱$	$۱۰^{۶}+۱$	$۱۰^{۴}+۱$	۱	$۱۰^{۴}+۱$	$۱۰^{۶}+۱$	$۱۰^{۸}+۱$	$۱۰^{۱۰}+۱$	→	$\boxed{+.}$

این جدول نشان می‌دهد که :

$$\lim_{x\to -.} (x^۲+۱) = +. \quad \text{و} \quad \lim_{x\to +.} (x^۲+۱) = +.$$

به‌صورت خلاصه :

$$\lim_{x\to (\ .} (x^۲+۱) = +.$$

نکتهٔ ۱: دیدیم که $\lim_{x\to (\ .} (x) = (\ .$. با توجه به حد توان nام یک تابع، حد تابع $f(x) = x^n$ (n عدد صحیح مثبت) در $+.$ و $-.$ به‌صورت زیر تعیین می‌شود :

اگر $n = ۲k$ آن‌گاه،

$$\lim_{x\to +.} x^n = +. \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -.} x^n = +.$$

اگر $n = ۲k + ۱$ آن‌گاه،

$$\lim_{x\to +.} x^n = +. \quad و \quad \lim_{x\to -.} x^n = -.$$

یعنی حد تابع $f(x) = x^n$ در (.) حالتی که n عددی زوج باشد برابر .+ است، و هنگامی که n عددی فرد باشد، $\lim_{x\to +.} x^n = +.$ و $\lim_{x\to -.} x^n = -.$. در این حالت به‌طور خلاصه می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to (\,.} x^n = (\,.$$

مثال ۱: حد $f(x) = x^۲$ در (.) برابر است با .+

مثال ۲: حد $f(x) = x^۳$ در (.) برابر است با (.) یعنی :

$$\lim_{x\to +.} x^۳ = +. \quad و \quad \lim_{x\to -.} x^۳ = -.$$

نکتهٔ ۲: اگر $a \neq ۰$ عددی حقیقی باشد حد $f(x) = ax^n$ (n عدد صحیح مثبت) را در (.) با توجه به علامت a می‌توانیم به‌دست آوریم.

مثال

$$\lim_{x\to +.} ۲x^۲ = ۲(+.\ ) = +. \qquad \lim_{x\to +.} (-۲x^۲) = -۲(+.\ ) = -.$$

$$\lim_{x\to +.} ۲x^۳ = ۲(+.\ ) = +. \qquad \lim_{x\to -.} (-۲x^۳) = -۲(-.\ ) = +.$$

قضایای حد مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع برای حدهای در (.) که مقدار حد اعداد باشند، نیز برقرار است. اما این قضایا را نباید در مورد توابعی که حد (.) دارند به‌کار برد. زیرا توابع با حدهای (.) ، اصولاً جزو توابعی که دارای حد باشند محسوب نمی‌شوند.

حد چند جمله‌ای‌ها در (.) : چند جمله‌ای $f(x) = ۲x^۳ + ۵x^۲ + ۴x - ۱$ را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم حد آن را در (.) محاسبه کنیم. برای این کار $f(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$f(x) = ۲x^۳ + ۵x^۲ + ۴x - ۱ = ۲x^۳(۱ + \frac{۵x^۲}{۲x^۳} + \frac{۴x}{۲x^۳} - \frac{۱}{۲x^۳})$$

$$= ۲x^۳(۱ + \frac{۵}{۲x} + \frac{۴}{۲x^۲} - \frac{۱}{۲x^۳})$$

پس :

$$\lim_{x\to (\,.} (۲x^۳ + ۵x^۲ + ۴x - ۱) = \lim_{x\to (\,.} ۲x^۳(۱ + \frac{۵}{۲x} + \frac{۴}{۲x^۲} - \frac{۱}{۲x^۳})$$

$$= \lim_{x\to (\,.} (۲x^۳) \times \lim_{x\to (\,.} (۱ + \frac{۵}{۲x} + \frac{۴}{۲x^۲} - \frac{۱}{۲x^۳})$$

حد مجموع جمله‌های داخل پرانتز دوم در .) برابر با ۱ است پس :

$$\lim_{x\to(\ .} (۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱)=\lim_{x\to(\ .}(۲x^۳)\times ۱=\lim_{x\to(\ .}(۲x^۳)=(\ .$$

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\quad +1$ (n عدد صحیح مثبت) در .) ، مساوی حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to(\ .}(ax^n+bx^{n-۱}+\quad +1)=\lim_{x\to(\ .} ax^n$$

مثال ۱: حد چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۲+۳x-۱$ در .) برابر است با حد $(۲x^۲)$ در .) ، یعنی :

$$\lim_{x\to(\ .}(۲x^۲+۳x-۱)=\lim_{x\to(\ .}(۲x^۲)=+.$$

مثال ۲: حد تابع $f(x)=-۳x^۲+۴x+۵$ در .) برابر است با حد $(-۳x^۲)$ در .) ، یعنی :

$$\lim_{x\to(\ .}(-۳x^۲+۴x+۵)=\lim_{x\to(\ .}(-۳x^۲)=-.$$

مثال ۳: حد تابع $f(x)=۳x^۵-۲x^۴+x^۳+۲x^۲+۱$ در .) برابر است با حد $(۳x^۵)$ در .) ، پس داریم :

$$\lim_{x\to(\ .}(۳x^۵-۲x^۴+x^۳+۲x^۲+۱)=\lim_{x\to(\ .}(۳x^۵)=(\ .$$

مثال ۴: حد تابع $f(x)=-۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱$ در .) چنین است :

$$\lim_{x\to(\ .}(-۲x^۳+۵x^۲+۴x-۱)=\lim_{x\to(\ .}(-۲x^۳)=(\ .$$

حد تابع $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{ax^m+bx^{m-۱}+\quad +1}{a'x^n+b'x^{n-۱}+\quad +1'}$ در .) (m و n اعداد صحیح مثبت):

چون حد هر چند جمله‌ای در .) ، برابر حد جملهٔ بزرگ‌ترین درجهٔ آن می‌باشد، پس می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to(\ .}\frac{ax^m+bx^{m-۱}+\quad +1}{a'x^n+b'x^{n-۱}+\quad +1'}=\lim_{x\to(\ .}\frac{ax^m}{a'x^n}=\lim_{x\to(\ .}(\frac{a}{a'}x^{m-n})$$

بنابراین یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید :

حالت اول m n

$$m\quad n\Rightarrow m-n\quad \circ\Rightarrow \lim_{x\to(\ .}(\frac{a}{a'}x^{m-n})=(\ .$$

یعنی : وقتی درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج کسر بیش‌تر است، حد کسر در $\pm\infty$، برابر ∞ است و علامت آن بستگی به علامت $\frac{a}{a'}$ و زوج یا فرد بودن $m-n$ دارد.

مثال: با به‌کار بردن روش بالا حد کسرهای زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$۱)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۳+x^۲-x+۱}{۵x^۲-x+۶}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۳}{۵x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{۲}{۵}x)=\pm\infty$$

زیرا $\lim_{x\to+\infty}(\frac{۲}{۵}x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(\frac{۲}{۵}x)=-\infty$

$$۲)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۲x^۲+x-۱}{۴x+۳}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{-۲x^۲}{۴x})=\lim_{x\to\pm\infty}(-\frac{۱}{۲}x)=\mp\infty$$

زیرا $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(-\frac{۱}{۲}x)=+\infty$

$$۳)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^۳+۲x-۱}{۲x+۵}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{۴x^۳}{۲x})=\lim_{x\to\pm\infty}(۲x^۲)=+\infty$$

زیرا $\lim_{x\to+\infty}(۲x^۲)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(۲x^۲)=+\infty$

$$۴)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۴-۲x^۲+۵}{-۲x^۲+x-۱}=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{۳x^۴}{-۲x^۲})=\lim_{x\to\pm\infty}(-\frac{۳}{۲}x^۲)=-\infty$$

زیرا $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{۳}{۲}x^۲)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(-\frac{۳}{۲}x^۲)=-\infty$

حالت دوم m=n

$$m=n \Rightarrow m-n=۰ \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{a}{a'}x^{m-n})=\frac{a}{a'}$$

یعنی وقتی درجهٔ صورت و درجهٔ مخرج کسر برابرند، حد کسر در $\pm\infty$ برابر است با :

$$\frac{\text{ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ صورت}}{\text{ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ مخرج}}$$

مثال:

$$۱)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۶x-۱}{۲x+۳}=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$۲)\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۲x^۲+x-۱}{x^۲+۷x+۲}=\frac{-۲}{۱}=-۲$$

$$۳)\ \lim_{n\to+.} \frac{۵n^{۳}+۶n-۲}{۲n^{۳}-۶n+۴}=\frac{۵}{۲}$$

$$۴)\ \lim_{x\to. .} \frac{۶x^{n}-x^{۲}+۵}{-۲x^{n}+۳x-۴}=\frac{۶}{-۲}=-۳$$

حالت سوم m<n

$$m\ .\ n \Rightarrow m-n\ .\ ۰ \Rightarrow \lim_{x\to. .}\left(\frac{a}{a'}x^{m-n}\right)=\lim_{x\to. .}\left(\frac{a}{a'x^{n-m}}\right)=۰$$

یعنی وقتی درجهٔ صورت کسر از درجهٔ مخرج کسر کم‌تر است، حد کسر در . . مساوی صفر است.

مثال:

$$۱)\ \lim_{x\to. .} \frac{۲}{۳x+۴}=۰$$

$$۲)\ \lim_{x\to. .} \frac{۲x+۵}{۳x^{۲}+x+۲}=۰$$

$$۳)\ \lim_{n\to. .} \frac{۲n^{۲}+n-۱}{n^{۳}+n^{۲}-۵}=۰$$

نکته: در برخی حالت‌ها که تابع f(x) کسری است، اما صورت کسر، یا مخرج آن، یا هیچ‌کدام چند جمله‌ای نیستند، باز هم می‌توان با فاکتورگیری از جمله‌هایی از صورت و مخرج که دارای بزرگ‌ترین درجه هستند، حد تابع را به‌دست آورد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to. .} \frac{x^{۲}+x+۲}{۲x^{۲}+\sqrt{x^{۲}+۱}}=\lim_{x\to. .}\frac{x^{۲}(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x^{۲}})}{x^{۲}(۲+\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}}})}$$

$$=\lim_{x\to. .}\frac{(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x^{۲}})}{۲+\sqrt{\frac{۱}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۴}}}}=\frac{۱+۰+۰}{۲+\sqrt{۰+۰}}=\frac{۱}{۲+۰}=\frac{۱}{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to+.} \frac{-۳x+\sqrt{x+۱}}{۶x+\sqrt{۴x^{۲}-۱}}=\lim_{x\to+.}\frac{x(-۳+\sqrt{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}})}{x(۶+\sqrt{۴-\frac{۱}{x^{۲}}})}=\frac{-۳+\sqrt{۰+۰}}{۶+\sqrt{۴-۰}}=\frac{-۳+۰}{۶+۲}=\frac{-۳}{۸}$$

تمرین

حد هریک از تابع‌های زیر را در .) ، تعیین کنید. در دو تمرین آخر فقط حد در .+ را به‌دست آورید.

۱) $y=\frac{-۱}{۳}x+۴$

۲) $y=\frac{۲}{۷}x+۱$

۳) $y=۳x^{۲}-x+۲$

۴) $y=-۲x^{۲}-x+۳$

۵) $y=x^{۳}+۲x^{۲}-۱$

۶) $y=-x^{۳}+۳x-۲$

۷) $y=-(۲x-۱)^{۳}$

۸) $y=۳x^{۴}+۵x^{۲}-۱$

۹) $y=-x^{۴}+x^{۲}+۲$

۱۰) $y=x^{۵}-۳x^{۳}+x-۱$

۱۱) $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$

۱۲) $y=\frac{-۳x+۲}{x}$

۱۳) $y=\frac{-x^{۲}+۲}{۳x^{۲}+۵x+۱}$

۱۴) $y=\frac{۴x^{۳}-x^{۲}+۱}{-۲x^{۳}+x-۲}$

۱۵) $y=\frac{۱۲x^{n}-x^{۲}+۱}{۶x^{n}+x^{۳}+۲}(n\ .\ N,n\quad ۳)$

۱۶) $y=\frac{۳x^{۲}+۵x-۱}{x^{۳}+۷x-۲}$

۱۷) $y=\frac{x-۵}{۲x^{۲}+x-۱}$

۱۸) $y=\frac{۳x^{n}-۷x+۲}{۲x^{n+۱}+۶x^{n}-۱}(n\ .\ N,n\quad ۱)$

۱۹) $y=\frac{۲x+۱}{۳}$

۲۰) $y=\frac{۶x^{۲}+x-۲}{۳x-۵}$

۲۱) $y=\frac{-۳x^{۲}+۶x-۱}{۲x-۷}$

۲۲) $y=\frac{۲x^{۳}+x-۲}{x+۳}$

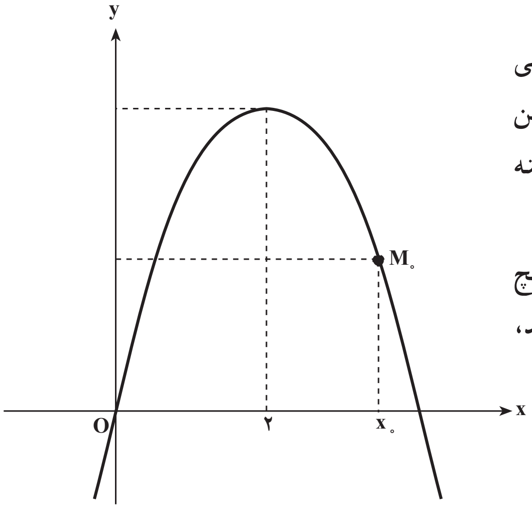
۲۳) $y=\frac{۳x^{۴}+x^{۲}-۱}{-x^{۲}+۵}$

۲۴) $y=\frac{-۳x^{۲}+\sqrt{x+۲}}{x^{۲}+۵x-۱}$

۲۵) $y=\frac{۲x+۱}{x^{۲}+\sqrt{x+۲}}$

پیوستگی

پیوستگی در یک نقطه: تابع $f(x)=-x^{۲}+۴x$ و نمودار آن را که یک سهمی است درنظر می‌گیریم. این تابع برای همهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است، یعنی $D_f=\mathbb{R}$. بنابراین برای هر $\mathbb{R}$. $x_{\circ}$ نقطهٔ $M_{\circ}(x_{\circ},f(x_{\circ}))$ نقطه‌ای از سهمی است. اما همان‌طوری که می‌دانیم سهمی در هیچ



نقطه‌ای بریدگی ندارد. به‌عبارت دیگر سهمی یک منحنی یک تکه یا پیوسته است. به این علت تابع $f(x) = -x^۲ + ۴x$ را نیز پیوسته می‌گویند.

به‌طور کلی اگر نمودار تابع f در هیچ نقطه‌ای از دامنهٔ تعریفش بریدگی نداشته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامند.

اکنون مقدار تابع f و حد آن را در یک نقطه، مثلاً در $x = ۱$ ، به‌دست می‌آوریم. داریم :

$$f(۱) = -(۱)^۲ + ۴(۱) = -۱ + ۴ = ۳$$

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = \lim_{x \to ۱}(-x^۲ + ۴x) = -۱ + ۴ = ۳$$

به‌طوری که دیده می‌شود، در این مثال که f تابعی پیوسته است، مقدار تابع و حد آن در نقطهٔ $x = ۱$ با یکدیگر برابرند، یعنی :

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = f(۱) = ۳$$

این ویژگی در هر نقطهٔ دیگر نیز برقرار است. یعنی به‌طور کلی برای هر عدد حقیقی دلخواه $x_\circ$ داریم :

$$\lim_{x \to x_\circ} f(x) = f(x_\circ) \quad \text{و} \quad \lim_{x \to x_\circ} (-x^۲ + ۴x) = -x_\circ^۲ + ۴x_\circ$$

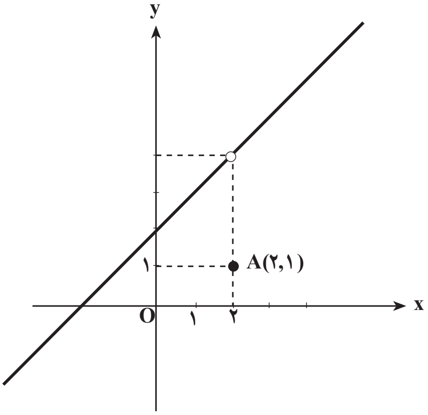
اینک به‌عنوان مثالی دیگر تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۴}{x - ۲} & , \quad x \neq ۲ \\ ۱ & , \quad x = ۲ \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم. دامنهٔ تعریف این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $D_f = \mathbb{R}$ است.

برای هر $x \neq ۲$ داریم $x - ۲ \neq ۰$ و می‌توان نوشت :

$$f(x) = \frac{(x - ۲)(x + ۲)}{x - ۲} = x + ۲$$

پس :

$$f(x) = \begin{cases} x + ۲ & , \quad x \neq ۲ \\ ۱ & , \quad x = ۲ \end{cases}$$



نمودار این تابع را رسم می‌کنیم. این نمودار اجتماع نقطهٔ $A(۲,۱)$ و یک خط است که تنها در نقطهٔ $x=۲$ بریدگی دارد (مطابق شکل). زیرا نقطهٔ $A(۲,۱)$ روی این خط نیست و نقطهٔ $B(۲,۴)$ نیز به نمودار تابع تعلق ندارد. بدین جهت گفته می‌شود که این تابع در $x=۲$ پیوسته نیست (این تابع در سایر نقاط پیوسته می‌باشد).

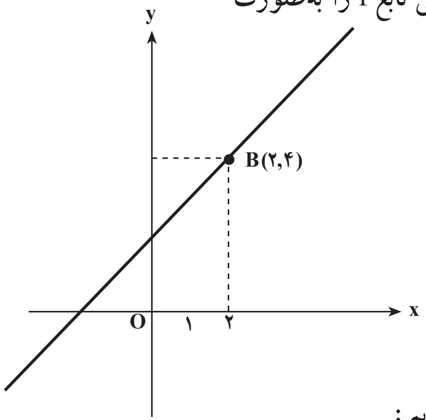
امّا در نقطهٔ $x=۲$ داریم :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۲+۲=۴\neq f(۲)=۱$$

یعنی حد تابع در $x=۲$ با مقدار تابع در $x=۲$ برابر نیست.

اگر در تابع بالا، $f(۲)$ را مساوی ۴ بگیریم، یعنی تابع f را به‌صورت

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & ,\ x\neq ۲\\ ۴ & ,\ x=۲\end{cases}$$



تعریف کنیم نقطهٔ $B(۲,۴)$ روی نمودار تابع قرار می‌گیرد و در نتیجه نمودار در هیچ نقطه‌ای بریدگی نخواهد داشت و در این صورت تابع در همهٔ نقاط تعریفش پیوسته است.

از آنچه که گذشت به تعریف زیر رهنمون می‌شویم :

تعریف: تابع f که در بازه I تعریف شده است در نقطه x_0 از دامنه آن را پیوسته گویند، هرگاه :

۱ــ تابع در $x=x_0$ حد داشته باشد.

۲ــ حد تابع در $x=x_0$ با مقدار تابع در x_0 برابر باشد یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

بنابراین هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه آن، دست کم یکی از دو شرط بالا را نداشته باشد در آن نقطه ناپیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x)=\begin{cases}-x^۲+۲x & ,\ x\ .\ -۱\\ x^۲+۱ & ,\ x\ .\ -۱\end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x=-۱$ بررسی کنیم.

این تابع در $x=-۱$ تعریف شده است و داریم :

$$f(-۱)=-(-۱)^{۲}+۲(-۱)=-۳$$

امّا تابع $f(x)$ در $x=-۱$ دارای حد نیست زیرا :

$$\lim_{x\to -۱^{+}} f(x)=\lim_{x\to -۱^{+}}(-x^{۲}+۲x)=-(-۱)^{۲}+۲(-۱)=-۳$$

$$\lim_{x\to -۱^{-}} f(x)=\lim_{x\to -۱^{-}}(x^{۲}+۱)=(-۱)^{۲}+۱=۲$$

یعنی $\lim_{x\to -۱^{+}} f(x)=-۳\neq ۲=\lim_{x\to -۱^{-}} f(x)$

در نتیجه این تابع در $x=-۱$ پیوسته نیست.

مثال ۲: تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x^{۲}+۱ \ , & x\neq ۲ \\ ۳ \ , & x=۲ \end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x=۲$ بررسی کنیم.

این تابع در $x=۲$ تعریف شده است زیرا $f(۲)=۳$ است، و در $x=۲$ تابع دارای حد است و مقدار این حد برابر است با :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲}(۲x^{۲}+۱)=۹$$

به‌طوری که دیده می‌شود مقدار تابع در $x=۲$ یعنی $f(۲)=۳$ با حد تابع در این نقطه برابر نیست $(۹\neq ۳)$. بنابراین تابع بالا در نقطهٔ $x=۲$ پیوسته نیست.

مثال ۳: می‌خواهیم پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۳x-۱ \ , & x \,.\, -۲ \\ -۴x+۱ \ , & x \,.\, -۲ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=-۲$ بررسی کنیم.

۱ــ تابع در $x=-۲$ تعریف شده است و داریم $f(-۲)=(-۲)^{۲}-۳(-۲)-۱=۹$

۲ــ در $x=-۲$ تابع دارای حد است چون :

$$\text{حد راست}=l_{۱}=\lim_{x\to -۲^{+}} f(x)=\lim_{x\to -۲^{+}}(x^{۲}-۳x-۱)=(-۲)^{۲}-۳(-۲)-۱=۹$$

$$\text{حد چپ}=l_{۲}=\lim_{x\to -۲^{-}} f(x)=\lim_{x\to -۲^{-}}(-۴x+۱)=-۴(-۲)+۱=۹$$

$$\Rightarrow\ l_{۱}=l_{۲}=۹\ \Rightarrow\ \lim_{x\to -۲} f(x)=۹$$

۳ــ حد تابع در $x=-۲$ با مقدار تابع در $x=-۲$ برابر است.

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=f(-۲)=۹$$

بنابراین تابع بالا در نقطهٔ $x=-۲$ پیوسته می‌باشد.

مثال ۴: پیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ که دامنه آن $.-۱,۱.$ است را در نقاط ۱ و ۱− بررسی می‌کنیم. ۱ و ۱− در دامنه تعریف تابع هستند و داریم $f(۱)=f(-۱)=۰$. حد تابع در این نقاط نیز همان حد چپ یا راست در این نقاط است و داریم :

$$\lim_{x\to ۱}\sqrt{۱-x^۲}=\lim_{x\to -۱}\sqrt{۱-x^۲}=۰$$

بنابراین حد این تابع در این نقاط با مقدار تابع در این نقاط برابر است و تابع در این نقاط پیوسته است. البته این تابع در سایر نقاط دامنه خود نیز پیوسته است.

مثال ۵: تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۳ & , \ x\neq ۱ \ (a\neq ۰) \\ ۵ & , \ x=۱ \end{cases}$ مفروض است. مقدار a را طوری تعیین کنید که این تابع در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته باشد.

تابع در $x=۱$ تعریف شده است و

$$f(۱)=۵$$

هم‌چنین در $x=۱$ تابع دارای حد است.

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=\lim_{x\to ۱}(ax+۳)=a+۳$$

حال برای آن که تابع در $x=۱$ پیوسته باشد باید داشته باشیم :

$$\lim_{x\to ۱}f(x)=f(۱) \ \Rightarrow \ a+۳=۵ \ \Rightarrow \ a=۲$$

مثال ۶: تابع $f(x)=\begin{cases} ax^۲+۲ & , \ x \quad -۱ \ (a\neq ۰) \\ ۳ & , \ x=-۱ \\ -۳x+b & , \ x \ . \ -۱ \end{cases}$ داده شده است. a و b را چنان بیابید که تابع در $x=-۱$ پیوسته باشد.

داریم :

$$f(-۱)=۳$$

$$\text{حد راست} = l_۱ = \lim_{x\to -۱^+} f(x)=\lim_{x\to -۱^+}(ax^۲+۲)=a(-۱)^۲+۲=a+۲$$

$$\text{حد چپ} = l_۲ = \lim_{x\to -۱^-} f(x)=\lim_{x\to -۱^-}(-۳x+b)=-۳(-۱)+b=۳+b$$

برای این که تابع دارای حد باشد باید $l_۱=l_۲$ یعنی :

$$a+۲=۳+b \ \Rightarrow \ a-b=۱ \qquad (۱)$$

و برای این که تابع در $x=-۱$ پیوسته باشد باید :

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=f(-۱) \Rightarrow a+۲=۳ \Rightarrow a=۱$$

با جایگذاری مقدار a در رابطهٔ (۱) مقدار b تعیین می‌شود. $b=۰$

تمرین

۱ــ پیوستگی هریک از تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده‌شده بررسی کنید.

الف) $f(x)=۲x^۲-۵x+۱ \ , \ (x=۲)$

ب) $f(x)=\dfrac{۲x^۲+x}{x-۲} \ , \ (x=-۲)$

پ) $f(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x^۲+۱} \ , \ (x=-۱)$

ت) $f(x)=\dfrac{x+۲}{۲x-۳} \ , \ (x=۳)$

ث) $f(x)=\begin{cases} ۳x^۲-x \ , \ x \quad -\dfrac{۳}{۲} \\ -۲x+۳ \ , \ x \,.\, -\dfrac{۳}{۲} \end{cases} \ , \ (x=-\dfrac{۳}{۲})$

ج) $f(x)=\begin{cases} -۳x+۵ \ , \ x \,.\, -۱ \\ x^۲+۴ \ , \ x \,.\, -۱ \end{cases} \ , \ (x=-۱)$

چ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+۱}{x-۱} \ , \ x \quad ۳ \\ ۲ \ , \ x=۳ \\ ۵x-۱۳ \ , \ x \,.\, ۳ \end{cases} \ , \ (x=۳)$

ح) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۴x^۲+۱} \ , \ x \,.\, ۰ \\ (۲x-۱)^۲ \ , \ x \,.\, ۰ \end{cases} \ , \ (x=۰)$

خ) $f(x)=\begin{cases} \sin ۲x \ , \ x \quad \dfrac{\cdot}{۴} \\ \dfrac{۱}{۲}+\cos^۲ x \ , \ x \le \dfrac{\cdot}{۴} \end{cases} \ , \ (x=\dfrac{\cdot}{۴})$

د) $f(x)=\begin{cases} \sin x+\cos x \ , \ x \,.\, \dfrac{\cdot}{۲} \\ ۲\sin^۲ x-۱ \ , \ x \,.\, \dfrac{\cdot}{۲} \end{cases} \ , \ (x=\dfrac{\cdot}{۲})$

ر) $f(x)=\sqrt{۱-x} \quad , \quad x=۱$

ز) $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۴} \quad , \quad x=-۲$

۲ــ عددهای a و b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۱ & , \; x \quad -۲ \\ ۱۳ & , \; x=-۲ \\ ۲ax^{۲}+bx-۱ & , \; x \,.\, -۲ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=-۲$ پیوسته باشد.

۳ــ حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} -۲x+a & , \; x \,.\, ۱ \\ x^{۲}+۳x & , \; x \,.\, ۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x=۱$ پیوسته نباشد.

فصل چهارم

مشتق

بررسی چگونگی تغییرات مقادیر یک تابع، از مسائل مهم ریاضی است. مفهوم مشتق در ارتباط با چگونگی تغییرات یک تابع است. از آنجا که توابع در تمام علوم تجربی به‌کار گرفته می‌شوند، بررسی رفتار این توابع بسیار اساسی است و مشتق چگونگی رفتار توابع را بیان خواهد کرد.

آهنگ تغییر

بسیاری از مسائل ریاضی به بررسی تغییرات تابع نسبت به تغییرات متغیر مربوط می‌شود. مطالعهٔ آهنگ این تغییرات است که سرانجام به تعریف مشتق می‌انجامد. می‌دانیم که از دو چیز یا دو پدیده که تغییر یکی سبب تغییر دیگری می‌شود، مانند مساحت یک دایره و شعاع آن، حجم یک گاز و دمای آن، افزایش سرمایه و بهرهٔ آن، رشد جمعیت و شمار نوزادان، قطر یک درخت و سنّ آن[1] ... یکی را به‌عنوان متغیر (یا متغیر مستقل) و دیگری را به‌عنوان تابع (یا متغیر وابسته) انتخاب و همان‌طورکه در بخش تابع دیده شد، متغیر را با x و تابع را با y مشخص می‌کنند و بستگی میان آن‌ها را با f نشان می‌دهند و می‌نویسند :

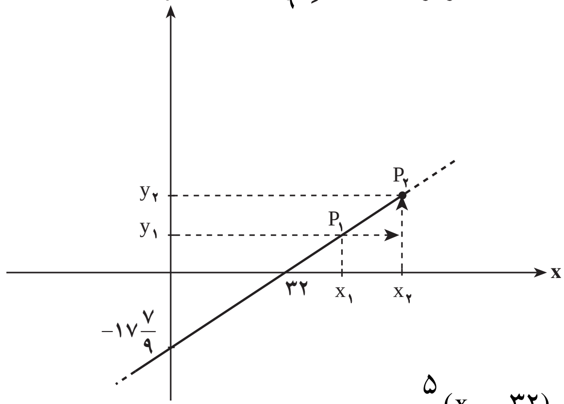
$$y = f(x)$$

عموماً با تغییر x مقدار $f(x)$ نیز تغییر خواهد کرد. ما در اینجا می‌خواهیم آهنگ نسبت این تغییرها را که دارای اهمیت ویژه‌ای است مورد بررسی قرار دهیم.

مثال ۱: تابع یا معادلهٔ $y = \frac{۵}{۹}(x - ۳۲)$ را، که درجهٔ گرما را برحسب سانتی‌گراد به‌صورت تابعی از درجهٔ گرما برحسب فارنهایت مشخص می‌کند، در نظر می‌گیریم. در ریاضی ۱ خواندیم که رابطهٔ بین x و y خطی است. در ریاضی ۲ این رابطه با عنوانِ تابع خطی معرفی شد. در آنجا اشاره شد که در چنین حالتی نسبت تغییرات y به تغییرات x همواره عددی ثابت است که به آن شیب خط

۱ــ در اغلب مثال‌های بالا متغیرهای دیگری نیز دخالت دارد که در اینجا ما آن‌ها را در نظر نگرفته‌ایم. مثلاً افزایش سرمایه به‌مدت، حجم گاز به فشار، رشد جمعیت به میزان مرگ‌ومیر... .

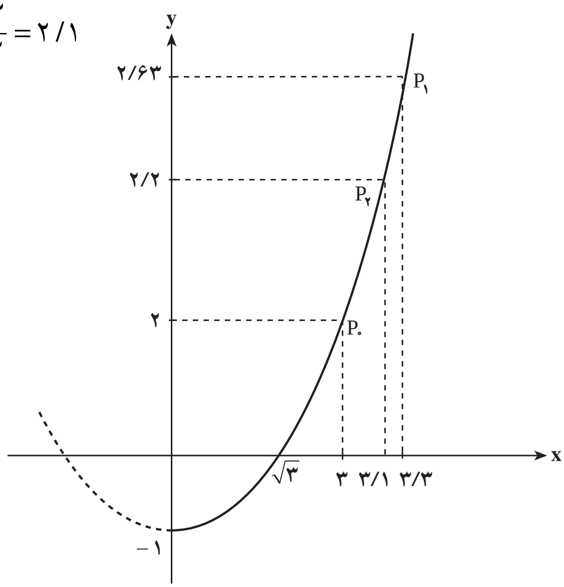
می‌گوییم. در اینجا این عددِ ثابت $\frac{۵}{۹}$ است. به عبارت دیگر هنگامی که x به اندازهٔ ۹ درجهٔ فارنهایت افزایش یابد، y به اندازهٔ ۵ درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد. بیان ریاضی این مطلب آن است که «آهنگ تغییراتِ y نسبت به x» برابر مقدار ثابتِ $\frac{۵}{۹}$ است.



$$\text{(شیب خط } P_۱P_۲ \text{)}\ \text{آهنگ تغییر y نسبت به x} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{\frac{۵}{۹}(x_۲ - ۳۲) - \frac{۵}{۹}(x_۱ - ۳۲)}{x_۲ - x_۱} = \frac{۵}{۹}$$

مثال ۲: تابع $y = f(x) = \frac{۱}{۳}x^۲ - ۱$ را در نظر بگیرید. در سال‌های گذشته دیدید که نمودار این تابع، منحنی (سهمی) و تابعِ غیرخطی است. درنتیجه نسبت تغییراتِ y به تغییرات x در فواصل مختلف ثابت نیست. مثلاً وقتی x از $x_۰ = ۳$ به $x_۱ = ۳/۳$ تغییر کند، y از $f(x_۰) = ۲$ به $f(x_۱) = ۲/۶۳$ تغییر خواهد کرد و نسبت تغییرات برابر است با :

$$\frac{f(x_۱) - f(x_۰)}{x_۱ - x_۰} = \frac{۲/۶۳ - ۲}{۳/۳ - ۳} = ۲/۱$$



اما اگر x از $x_{\circ}=۳$ به $x_۲=۳/۱$ تغییر کند خواهیم داشت :

$$\frac{f(x_۲)-f(x_{\circ})}{x_۲-x_{\circ}}=\frac{f(۳/۱)-f(۳)}{۳/۱-۳}=\frac{۲/۲۰۳-۲}{۰/۱}=\frac{۰/۲۰۳}{۰/۱}=۲/۰۳$$

برای این‌که نسبت تغییرات این تابع را در نزدیکی ۳ بهتر ببینیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	۲	۲/۶	۲/۸	۲/۹	۳	۳/۱	۳/۳	۴
$f(x)$	۰/۳۳	۱/۲۵	۱/۶۱	۱/۸۰	۲	۲/۲۰	۲/۶۳	۴/۳۳
$x-۳$	−۱	−۰/۴	−۰/۲	−۰/۱	۰	۰/۱	۰/۳	۱
$f(x)-f(۳)$	−۱/۶۷	−۰/۷۵	−۰/۳۹	−۰/۱۹۷	۰	۰/۲	۰/۶۳	۲/۳۳
$\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$	۱/۶۷	۱/۸۷	۱/۹۳	۱/۹۷	?	۲/۰۳	۲/۱	۲/۳۳

با توجه به این‌که :

$$\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\frac{\frac{۱}{۳}x^۲-۱-۲}{x-۳}=\frac{\frac{۱}{۳}(x^۲-۹)}{x-۳}=\frac{x+۳}{۳}$$

سطر آخر جدول را می‌توان با قرار دادن مقادیر x در عبارت $\frac{x+۳}{۳}$ به‌آسانی محاسبه کرد. در واقع اعداد سطر آخر جدول آهنگ متوسط تغییرات تابع را در نقطهٔ $x_{\circ}=۳$ نشان می‌دهند. به‌طوری که دیده می‌شود این آهنگ علاوه‌بر تابع f به نقطهٔ $x_{\circ}=۳$ و مقدار $x-x_{\circ}$ نیز بستگی دارد، و وقتی که x با مقادیر کوچک‌تر از ۳ یا بزرگ‌تر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شود این نسبت به ۲ نزدیک می‌گردد. بنابراین حد این آهنگ تغییر در نقطهٔ $x_{\circ}=۳$ برابر با ۲ می‌باشد یعنی :

$$\lim_{x\to x_{\circ}}\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}=\lim_{x\to ۳}\frac{x+۳}{۳}=۲$$

اگر به جای $x_{\circ}=۳$ مثلاً $x_{\circ}$ را برابر با ۶ بگیریم آهنگ متوسط تغییر متفاوت خواهد بود و می‌توان دید که در این صورت نسبت مورد نظر به ۴ نزدیک خواهد شد.

تمرین: جدولی مشابه جدول بالا برای همان تابع f در نقطهٔ $x_{\circ}=۶$ تشکیل دهید.

هنگامی که متغیر از $x_{\circ}$ به x تغییر می‌کند مقدار $x-x_{\circ}$ را نمو متغیر و مقدار $f(x)-f(x_{\circ})$ را نمو تابع در $x_{\circ}$ می‌نامند و نسبت $\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$ را آهنگ متوسط تغییرات تابع در $x_{\circ}$ با نمو داده شده می‌نامند.

مثال ۳: در تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)=x^۲-۵x+۶$ می‌خواهیم :

الف ــ آهنگ متوسط تغییر تابع را در $x_1 = ۳$ با نمو ۲ تعیین کنیم.

ب ــ آهنگ متوسط تغییر تابع را در $x_1 = ۵$ با نمو ۲ به‌دست آوریم.

الف)
$$x_1 = ۳ \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(۳) = ۹ - ۱۵ + ۶ = ۰$$
$$x_۲ = ۳ + ۲ = ۵ \Rightarrow y_۲ = f(x_۲) = f(۵) = ۲۵ - ۲۵ + ۶ = ۶$$
$$y_۲ - y_1 = f(x_۲) - f(x_1) = ۶ - ۰ = ۶$$

آهنگ متوسط تغییر در $x_1 = ۳$ با نمو ۲ به‌صورت زیر تعیین می‌شود :

$$\frac{f(۵) - f(۳)}{۵ - ۳} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

ب)
$$x_1 = ۵ \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(۵) = ۲۵ - ۲۵ + ۶ = ۶$$
$$x_۲ = ۵ + ۲ = ۷ \Rightarrow y_۲ = f(x_۲) = f(۷) = ۴۹ - ۳۵ + ۶ = ۲۰$$
$$y_۲ - y_1 = ۲۰ - ۶ = ۱۴$$

آهنگ متوسط تغییر در $x_1 = ۵$ با نمو ۲ به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\frac{f(۷) - f(۵)}{۷ - ۵} = \frac{۱۴}{۲} = ۷$$

به‌طورکلی آهنگ متوسط تغییر تابع $y = f(x)$ نسبت به متغیر x، هنگامی که متغیر روی بازه‌ای از x_1 تا $x_۲$ از دامنهٔ تابع تغییر می‌کند به‌صورت زیر است :

$$\frac{f(x_۲) - f(x_1)}{x_۲ - x_1}$$

اگر قرار دهیم $x_۲ - x_1 = h$ ، داریم $x_۲ = x_1 + h$ و مقدار آهنگ متوسط تغییر تابع در x_1 با نمو h عبارت است از :

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

مثال ۴: تابع f با ضابطهٔ $y = x^۲ + ۳$ داده شده است. می‌خواهیم آهنگ متوسط تغییر این تابع را به‌ازای $x_1 = ۲$ و $h = ۰/۳$ به‌دست آوریم.

داریم :
$$x_1 = ۲ \ , \ x_1 + h = ۲ + ۰/۳ = ۲/۳$$
$$f(x_1) = f(۲) = ۴ + ۳ = ۷$$
$$f(x_1 + h) = f(۲/۳) = ۵/۲۹ + ۳ = ۸/۲۹$$

درنتیجه

$$\frac{f(x_۱+h)-f(x_۱)}{h}=\frac{۸/۲۹-۷}{۰/۳}=\frac{۱/۲۹}{۳}=۴/۳$$

مثال ۵: می‌خواهیم دستور کلی محاسبهٔ آهنگ متوسط تغییر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^۲+۳x+۳$ را وقتی متغیر از $x_۱$ به اندازهٔ h تغییر کند به‌دست آوریم.

داریم :

$$\frac{f(x_۱+h)-f(x_۱)}{h}$$

$$f(x_۱)=x_۱^۲+۳x+۳$$

$$f(x_۱+h)=(x_۱+h)^۲+۳(x_۱+h)+۳$$

$$f(x_۱+h)-f(x_۱)=(x_۱+h)^۲+۳(x_۱+h)+۳-(x_۱^۲+۳x_۱+۳)$$

$$=۲x_۱h+۳h+h^۲$$

$$\frac{f(x_۱+h)-f(x_۱)}{h}=\frac{۲x_۱h+۳h+h^۲}{h}$$

$$=\frac{h(۲x_۱+۳+h)}{h}=۲x_۱+۳+h$$

به‌عنوان نمونه، آهنگ متوسط تغییر تابع بالا نسبت به متغیر x به‌ازای $x_۱=۴$ و $h=۰/۰۵$ برابر است با :

$$\frac{f(۴+۰/۰۵)-f(۴)}{۰/۰۵}=۲(۴)+۳+۰/۰۵=۱۱/۰۵$$

نکته: در دستور بالا می‌توان به جای $x_۱$ ، مقدار x را قرار داد در این صورت خواهیم داشت :

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال ۶: تابع f با ضابطهٔ $y=f(x)=x^۲+۵x+۴$ داده شده است.

الف ــ دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب ــ حد آهنگ متوسط تغییر این تابع را در $h=۰$، تعیین کنید.

پ ــ آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x=۳$ و $h=۰/۴$ به‌دست آورید.

ت ــ حد آهنگ متوسط تغییر این تابع در قسمت پ را در $h=۰$ تعیین کنید.

حل:

الف)
$$f(x)=x^{۲}+۵x+۴$$
$$f(x+h)=(x+h)^{۲}+۵(x+h)+۴$$
$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^{۲}+۵(x+h)+۴-(x^{۲}+۵x+۴)$$

درنتیجه

$$f(x+h)-f(x)=۲xh+۵h+h^{۲}$$

پس

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{۲xh+۵h+h^{۲}}{h}=\frac{h(۲x+۵+h)}{h}=۲x+۵+h$$

ب)
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲x+۵+h)=۲x+۵$$

پ)
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=۲x+۵+h=۲(۳)+۵+۰/۴=۱۱/۴$$

ت)
$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=۲(۳)+۵=۱۱$$

حد به‌دست‌آمده در قسمت (ت) مثال بالا را آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x=۳$ می‌نامند.

به‌طور کلی تعریف زیر را داریم :

آهنگ لحظه‌ای تغییریک تابع: در تابع f مقدار $\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_{۱}+h)-f(x_{۱})}{h}$ را آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x_{۱}$ می‌نامند.

به عنوان مثال آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x)=x^{۳}+۲x+۱$ در نقطهٔ $x_{۱}=-۲$ برابر است با :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(-۲+h)^{۳}+۲(-۲+h)+۱-(-۸-۴+۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۱۴h-۶h^{۲}+h^{۳}}{h}=\lim_{h\to ۰}(۱۴-۶h+h^{۲})=۱۴$$

نکته: اگر ضابطهٔ تابع به‌صورت $x=f(t)$ باشد، دستور بالا به صورت زیر درمی‌آید :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

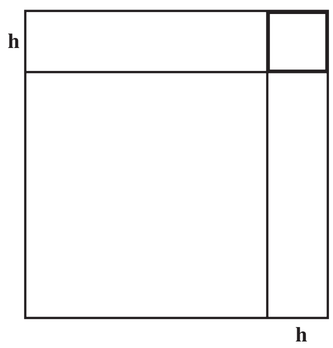
مثال ۱: اندازهٔ مساحت مربعی را که طول ضلع آن x است برابر با y می‌گیریم. بنابراین $y = f(x) = x^{۲}$. آهنگ تغییر y نسبت به x در $x_{\circ} = ۵$ برای نموهای $h = ۰/۱ ، ۰/۲ ، ۰/۳ ، ۰/۴$ در جدول زیر آمده است :

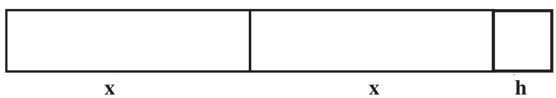
x	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
$y = x^{۲}$	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶
h	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
$f(۵+h)-f(۵)$	۰	۱/۰۱	۲/۰۴	۳/۰۹	۴/۱۶
$\frac{f(۵+h)-f(۵)}{h}$	?	۱۰/۱	۱۰/۲	۱۰/۳	۱۰/۴

به‌طوری‌که دیده می‌شود وقتی x به ۵ نزدیک می‌گردد یعنی h کوچک می‌شود، $\frac{f(۵+h)-f(۵)}{h}$ به ۱۰ نزدیک می‌شود. در واقع داریم :

$$\lim_{x \to x_{\circ}} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}} = \lim_{x \to ۵} \frac{x^{۲}-۲۵}{x-۵} = \lim_{x \to ۵}(x+۵) = ۱۰$$

شکل زیر تعبیر هندسی این مطلب است.





$f(x+h)-f(x) = (۲x+h)h$

پس :
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(۲x+h)h}{h}=۲x+h$$

یعنی اگر h به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ تقریباً با ۲x برابر می‌شود، پس :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲x+h)=۲x$$

مثال ۲: معادلهٔ حرکت یک متحرک روی یک خط مستقیم به‌صورت $x=f(t)۲t^{۲}-۵t+۱$ است.

الف ــ آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان این متحرک را در نقطهٔ $t_۱=-۱$ به‌دست آورید.

ب ــ آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطهٔ $t_۱=۳$ به‌دست آورید.

پ ــ دستورکلی آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان این متحرک را تعیین کنید.

حل:

الف) در نقطهٔ $t_۱=-۱$ داریم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۱+h)-f(-۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(-۱+h)^{۲}-۵(-۱+h)+۱-(۲+۵+۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۹h+۲h^{۲}}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}(-۹+۲h)=-۹$$

ب) در نقطهٔ $t_۱=۳$ داریم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۳+h)^{۲}-۵(۳+h)+۱-(۱۸-۱۵+۱)}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۷h+۲h^{۲}}{h}$$
$$=\lim_{h\to ۰}(۷+۲h)=۷$$

پ) برای تعیین دستور کلی آهنگ لحظه‌ای تغییر متحرک در نقطهٔ t داریم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(t+h)^2 - 5(t+h) + 1 - (2t^2 - 5t + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 4th - 5h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2h + 4t - 5) = 4t - 5$$

همان‌طورکه در مثال‌های بالا دیده شد، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع برابر حد آهنگ متوسط تغییر تابع است، وقتی نمو متغیر به صفر نزدیک می‌شود.

تمرین

۱ــ تابع $f(x) = x^2 + 6x - 7$ داده شده است.

الف ــ آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 6$ تغییر کند، تعیین کنید.

ب ــ آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطهٔ $x_0 = 4$ به‌دست آورید.

۲ــ نقطهٔ $M(x,y)$ را بر نمودار تابع $y = x^2$ انتخاب می‌کنیم و تصاویر M را بر ox و oy به‌ترتیب A و B می‌نامیم $(x \quad 0)$. اگر S اندازهٔ مساحت مستطیل OAMB باشد S را به‌صورت تابعی از x مشخص کنید. آهنگ تغییر S نسبت به x و آهنگ لحظه‌ای تغییر را در $x_0 = 4$ به‌دست آورید.

۳ــ یک بادکنک کره‌ای شکل را باد کرده‌ایم تا به شکل کره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر درآمده است. اگر به بادکردن آن ادامه دهیم به‌طوری که در هر ثانیه یک میلی‌متر به شعاع آن افزوده شود، آهنگ متوسط تغییر مساحت این بادکنک را در ۲۰ ثانیهٔ اول به‌دست آورید. آهنگ لحظه‌ای افزایش مساحت سطح کره را در ثانیه ۱۰ حساب کنید.

۴ــ اگر $p(t) = 3000 + 100t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد (t بر حسب ساعت)، آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول پس از زمان $t_0 = 2$ به‌دست آورید. آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت را در $t = 3$ حساب کنید.

۵ــ حجم آب یک استخر در حال تخلیه برحسب لیتر به‌وسیلهٔ برابری $V = 120(2500 - 50t + t^2)$ به زمان t برحسب دقیقه بستگی دارد. آهنگ متوسط تخلیه در ۸ دقیقهٔ اول را پیدا کنید. آهنگ لحظه‌ای خالی‌شدن را در دقیقهٔ دهم از آغاز تخلیه به‌دست آورید.

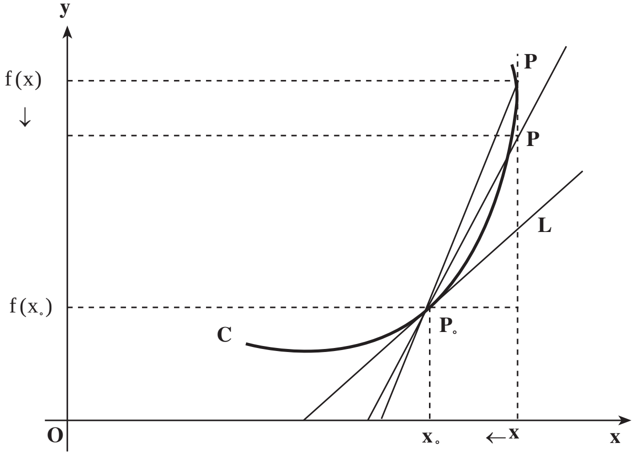
تعریف مشتق

اگر به نمودار تابع خطی ذکر شده در مثال ۱ از بخش قبل توجه کنید، آهنگ متوسط تغییر تابع

در هر بازه‌ای ثابت است. به‌عبارت دیگر نقطهٔ $P_۲$ و $P_۱$ هر چه که باشند این نسبت تغییر نمی‌کند. بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر با آهنگ متوسط تغییر همواره مساوی و برابر با شیب خط $P_۱P_۲$ می‌باشد. ولی در مثال ۲ نسبت تغییرات y به تغییراتِ x ثابت نیست. اولین نسبتِ محاسبه شده (قبل از جدول) شیب خط $P_{\circ}P_۱$ و در ادامه شیب خطِ $P_{\circ}P_۲$ می‌باشد. هریک از نسبت‌های محاسبه شده در جدول نیز شیب خطِ گذرنده از دو نقطه نمودار تابع مانند دو خط یاد شده می‌باشد.

در آن مثال این سؤال می‌تواند مطرح شود که وقتی نقطهٔ $P(x,f(x))$ بر روی نمودار تابع به نقطهٔ $P_{\circ}(۳,f(۳))$ نزدیک و نزدیک‌تر شود، خط گذرا از دو نقطهٔ P و $P_{\circ}$ به چه خطی نزدیک می‌شود، یعنی $\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$ به شیب چه خطی نزدیک می‌شود.

به نمودار زیر توجه کنید. شیب خط $P_{\circ}P$ برابر است با : $\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$



امّا وقتی نقطهٔ P بر روی نمودار تابع به نقطهٔ ثابتِ $P_{\circ}$ نزدیک شود آنگاه x به $x_{\circ}$ نزدیک می‌شود. از طرفی خطِ قاطع $P_{\circ}P$ به خطِ مماس بر منحنی (L) نزدیک خواهد شد پس :

$$\text{حد شیب خط قاطع } P_{\circ}P \underset{P\to P_{\circ}}{} = \text{شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه } P_{\circ}$$

$$= \lim_{x\to x_{\circ}} \frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}$$

این همان آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ به طول $x_{\circ}$ می‌باشد.

مثال ۱: می‌خواهیم شیب خط مماس بر نمودار تابعی به معادلهٔ $y=x^۲-x$ را در نقطهٔ $P_{\circ}(۲,۲)$ به‌دست آوریم.

$$x = ۲ \text{ شیب خط مماس در نقطهٔ } = \lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-x-۲}{x-۲} = \lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۱)}{x-۲} = ۳$$

مثال ۲: تابع $y = \frac{x}{x-۱}$ و نقطهٔ $P_◦$ به طول صفر را روی نمودار آن در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم شیب خط مماس بر نمودار تابع را در $P_◦$ به‌دست آوریم.

$$x = ◦ \text{ شیب خط مماس در نقطهٔ } = \lim_{x\to ◦}\frac{f(x)-f(◦)}{x-◦} = \lim_{x\to ◦}\frac{\frac{x}{x-۱}}{x} = \lim_{x\to ◦}\frac{۱}{x-۱} = -۱$$

تذکر: شیب نمودار تابع در یک نقطه به معنی شیب خط مماس بر نمودار یا آهنگ لحظه‌ای تغییر در آن نقطه (در صورتِ وجود) می‌باشد.

تابع $y = f(x)$ و نقطهٔ $x_◦$ از دامنهٔ این تابع را در نظر می‌گیریم. اگر h نمو متغیر در نقطه $x_◦$ باشد، برای تابع، نمو $f(x_◦+h)-f(x_◦)$ را خواهیم داشت. حد نسبت نمو تابع به نمو متغیر را، هنگامی که نمو متغیر به صفر نزدیک می‌شود، یعنی :

$$\lim_{h\to ◦}\frac{f(x_◦+h)-f(x_◦)}{h}$$

را (در صورتی که این حد وجود داشته باشد)، مشتق تابع f در نقطهٔ $x_◦$ می‌نامند و آن را با $f'(x_◦)$ یا $y'(x_◦)$ نشان می‌دهند. یعنی :

$$y'(x_◦) = f'(x_◦) = \lim_{h\to ◦}\frac{f(x_◦+h)-f(x_◦)}{h}$$

با قراردادن $x = x_◦ + h$ ، مشتق تابع f در نقطهٔ $x_◦$ را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to x_◦}\frac{f(x)-f(x_◦)}{x-x_◦} = f'(x_◦)$$

از تعریف بالا و مطالبِ خوانده شده در بخش‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت که :

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطهٔ $x_◦$ برابر است با مشتق تابع در نقطهٔ $x_◦$.

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $x_◦$ برابر است با مشتق تابع در نقطهٔ $x_◦$.

بدیهی است گزاره‌های فوق وقتی اعتبار دارند که حدهای به‌کار رفته در تعاریفِ مفاهیمِ فوق وجود داشته باشند.

تابع f در نقطهٔ $x_◦$ مشتق‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه $f'(x_◦)$ وجود داشته باشد. هم‌چنین تابع f را در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر گویند هرگاه f در هر نقطهٔ دلخواه x از آن بازه مشتق‌پذیر باشد. در این صورت مشتق را با $f'(x)$ یا به‌طور ساده با y' نمایش می‌دهند (گاهی برای مشتق نمادهای $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{df}{dx}$ نیز به‌کار برده می‌شود).

مثال ۱: محاسبهٔ مشتق $f(x)=3x^2-4x$ در نقطهٔ $x=-1$:

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[3(-1+h)^2-4(-1+h)]-[3(-1)^2-4(-1)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-6h+3h^2-4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-10h+3h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-10+3h)=-10$$

مثال ۲: می‌خواهیم مشتق $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ را در نقطهٔ $x=2$ به‌دست آوریم.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x+1}{x-1}-5}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{-3x+6}{x-1}}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-3(x-2)}{(x-1)(x-2)}=-3$$

نکته: هنگامی که بخواهیم مشتق یک تابع را در چند نقطه حساب کنیم، بهتر است نخست $f'(a)$ یعنی مشتق را در نقطهٔ دلخواه a حساب کنیم، آن‌گاه به‌جای a هریک از مقادیر داده شده را بگذاریم.

مثال ۳: مشتق $f(x)=x^2-x$ را در $x=-1$ و $x=0$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=3$ به‌دست آورید.

ابتدا مشتق تابع را در نقطهٔ a محاسبه می‌کنیم :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-x)-(a^2-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a-1)}{x-a}=2a-1$$

بنابراین :

$$f'(-1)=-2-1=-3 \quad , \quad f'(\tfrac{1}{2})=1-1=0$$

$$f'(0)=-1 \quad , \quad f'(3)=6-1=5$$

تمرین: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده‌شده به‌دست آورید :

۱) $f(x)=3x-1 \quad , \quad x=2$

۲) $f(x)=x^3+3x^2-2 \quad , \quad x=1$

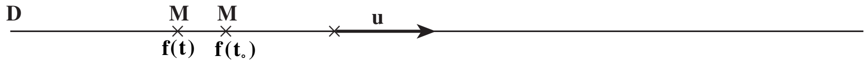
۳) $f(x)=\frac{1}{1-x} \quad , \quad x=-1$

۴) $f(x)=\frac{x}{1+x} \quad , \quad x=0$

۵) $f(x)=2\sqrt{1-x} \quad , \quad x=-3$

۶) $f(x)=ax^2+bx+c \quad , \quad x=-\frac{b}{2a}$

سرعت یک متحرک: متحرکی روی خط D در حرکت است. با انتخاب یک نقطهٔ O از D به‌عنوان مبدأ و یک بردار واحد $\vec{u}$ روی آن، خط D را به یک محور تبدیل می‌کنیم، به‌طوری که در هر لحظه فاصلهٔ (جهت‌دار) متحرک از O یک عدد حقیقی می‌باشد. این فاصله را که تابعی است از زمان t با معادلهٔ $s=f(t)$ مشخص می‌کنیم. چنانچه در لحظهٔ $t_{۰}$ متحرک در نقطهٔ $M_{۰}$ و فاصلهٔ آن از $O: s_{۰}=f(t_{۰})$، و در لحظهٔ t در نقطهٔ M و فاصلهٔ آن از $O: s=f(t)$ باشد، متحرک در زمان $t-t_{۰}$ مسافت $M_{۰}M$ را که برابر است با $s-s_{۰}=f(t)-f(t_{۰})$ پیموده است. بنابراین سرعت متوسط آن



$\dfrac{f(t)-f(t_{۰})}{t-t_{۰}}$ است. در واقع این عبارت همان آهنگ تغییر متوسط تابع $f(t)$ نسبت به تغییر t است.
هنگامی که زمان $t-t_{۰}$ بی‌اندازه کوچک باشد، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای متحرک نزدیک می‌شود. سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t_{۰}$ همان حد سرعت متوسط آن در $t=t_{۰}$ است که آن را با $v(t_{۰})$ نمایش می‌دهند.

بنابراین :

$$v(t_{۰})=\lim_{t\to t_{۰}}\frac{f(t)-f(t_{۰})}{t-t_{۰}}$$

اما حد بالا همان مشتق تابع $f(t)$ در لحظهٔ $t_{۰}$ است. یعنی $v(t_{۰})=f'(t_{۰})$، به‌طورکلی $v(t)=f'(t)$، یعنی سرعت متحرک برابر است با مشتق مسافت نسبت به زمان. $f'(t)$ ممکن است منفی نیز باشد. در چنین حالتی برای محاسبهٔ اندازه سرعت قدرمطلق $f'(t)$ را در نظر می‌گیرند. در هر حال علامت $f'(t)$ جهت حرکت متحرک را مشخص می‌کند. برابری بالا را گاهی به صورت $v(t)=\dfrac{ds}{dt}$ نیز می‌نویسند.

مثال ۴: اگر طول نقطهٔ متحرک M که بر محور $x'ox$ در حرکت است، در زمان t (ثانیه) برابر با x (سانتی‌متر) باشد به‌طوری که $x=t^{۲}-۴t+۳$، سرعت متحرک را در ثانیه‌های ۱ و ۳ و ۵ به‌دست آورید.

حل: برای یافتن سرعت (لحظه‌ای) به محاسبهٔ مشتق می‌پردازیم :

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\left[(t+h)^{۲}-۴(t+h)+۳\right]-\left[t^{۲}-۴t+۳\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{۲th-۴h+(h)^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲t-۴+h)=۲t-۴$$

پس $v(t)=f'(t)=۲t-۴$ بنابراین در ثانیه‌های ۱، ۳ و ۵ سرعت به‌ترتیب برابر است با :

$$v(۱)=۲-۴=-۲ \qquad v(۳)=۶-۴=۲ \qquad v(۵)=۱۰-۴=۶$$

یعنی در ثانیه‌های ۱ و ۳ مقدار سرعت ۲ سانتی‌متر در ثانیه و در ثانیهٔ ۵ ، ۶ سانتی‌متر در ثانیه است. به‌علاوه در $v(۱)=-۲$ علامت منفی بیانگر این است که متحرک با سرعت ۲ سانتی‌متر در ثانیه از راست به چپ در حرکت است. در لحظه‌ای که جهت حرکت تغییر می‌کند سرعت صفر می‌شود. اما داریم $v(t)=۲t-۴$. پس $v(t)$ در لحظهٔ $t=۲$ صفر می‌شود و در این لحظه $x=-۱$. بنابراین هنگامی که متحرک در حرکت خود از راست به چپ به -۱ می‌رسد سرعتش صفر شده و جهت حرکتش تغییر می‌کند و از چپ به راست می‌شود.

مشتق دوم: مشتق $y=f(x)$ یعنی $y'=f'(x)$ را (درصورتی که وجود داشته باشد) مشتق اول، و مشتق $y'=f'(x)$ را (در صورت وجود) مشتق دوم تابع $y=f(x)$ می‌نامند و با $y''=f''(x)$ نشان می‌دهند.

مثال ۵: به‌طوری که در مثال ۴ دیده شد مشتق اول $y=x^۲-x$ عبارت است از $y'=۲x-۱$ و مشتق دوم آن :

$$y''=۲$$

نکته: گفتیم که اگر معادلهٔ حرکت یک متحرک $s=f(t)$ باشد مشتق اول آن یعنی $s'=f'(t)$ را سرعت می‌نامند و با $v(t)$ نمایش می‌دهند. مشتق دوم $f(t)$، یا مشتق $v(t)$ را شتاب متحرک می‌گویند و با $a(t)$ نشان می‌دهند، یعنی $v(t)=f'(t)$ و $a(t)=v'(t)=f''(t)$.

در مثال ۴ دیدیم که اگر $f(t)=t^۲-۴t+۳$ باشد داریم : $v(t)=f'(t)=۲t-۴$

پس : $a(t)=f''(t)=۲$.

تمرین

۱ــ شیب خط مماس بر نمودار تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده‌شده به‌دست آورید. (از مشتق این توابع که در صفحه‌های پیش محاسبه شده است استفاده کنید) :

۱) $y=\frac{۱}{۳}x^۲-۱ \quad , \quad x=۳$

۲) $y=x^۲ \quad , \quad x=-۱$

۳) $y=۳x^۲-۴x \quad , \quad x=-۱$

۴) $y=x^۲-x \quad , \quad x=\frac{۱}{۲}$

۲ــ متحرکی که بـر محور xها در حرکت است دارای معادلهٔ $x = t^{۲} - ۲t - ۱$ است (t را برحسب ثانیه و x را سانتی‌متر بگیرید). سرعت متوسط این متحرک را در فاصلهٔ زمانی $t = ۱$ و $t = ۴$ و سرعت لحظه‌ای آن را در زمان‌های $t = ۰$ و $t = ۱$ و $t = ۳$ به‌دست آورید.

۳ــ توپی را با سرعت اولیهٔ ۳۰ متر در ثانیه به‌طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطهٔ پرتاب به‌طرف بالا باشد، معادلهٔ حرکت به شکل $S = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + ۳۰t$ است که در آن $g = ۹/۸ m/s^{۲}$ شتاب گرانش زمین است. بنابراین، $x = f(t) = -۴/۹t^{۲} + ۳۰t$. مطلوب است محاسبهٔ :

الف ــ سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه پس از پرتاب.

ب ــ سرعت لحظه‌ای توپ در پایان ۳ ثانیه پس از پرتاب.

۴ــ توپ تنیسی را به هوا پرتاب کرده‌ایم. اگر مسافت پیموده‌شده‌به‌وسیلهٔ توپ، برحسب متر، تابعی از زمان t برحسب ثانیه به‌صورت $s = ۱۲t - ۳t^{۲}$ باشد، سرعت متوسط توپ را در ۲ ثانیهٔ اول به‌دست آورید. سرعت آن را در لحظهٔ t حساب کنید. در چه زمانی این سرعت صفر می‌شود و در چه ارتفاعی؟ در لحظهٔ $t = ۴$ ثانیه پس از پرتاب، وضعیت توپ چگونه است و سرعت آن چقدر است؟

دستورها و قضیه‌های مشتق‌گیری

به‌طوری که در مثال‌های بالا دیدید در محاسبهٔ مشتق یک تابع، با استفاده از تعریف آن، عملیات نسبتاً زیادی را باید انجام داد. به‌ویژه هرگاه تابع f(x) دارای عبارتی پیچیده باشد این کار بسیار مشکل و خسته‌کننده است. اما خوشبختانه روش دیگری وجود دارد که مبتنی بر چند دستور و قضیهٔ ساده است و محاسبهٔ مشتق را بسیار آسان می‌کند.

به‌طوری‌که گفته شد دستورها و قضیه‌هایی وجود دارند که محاسبهٔ مشتق توابع را آسان می‌سازند. اینک به بیان آن‌ها می‌پردازیم. برخی را اثبات می‌کنیم و برخی دیگر را بدون اثبات می‌پذیریم.

۱ــ اگر c یک عدد ثابت و $f(x) = c$ ، آنگاه داریم $f'(x) = ۰$

زیرا :
$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{c-c}{h} = \lim_{h \to ۰} ۰ = ۰$$

پس می‌توان گفت : مشتق توابع ثابت برابر با صفر است.

مثال ۶: اگر $y = ۸$ باشد، آن‌گاه $y' = ۰$

۲ــ اگر $y = f(x) = x^{n}$ ، آن‌گاه $y' = f'(x) = nx^{n-۱}$

مثال ۷: اگر $y=x^{۶}$ آن‌گاه $y'=۶x^{۵}$

نتیجه: اگر $y=x$ آن‌گاه $y'=۱$

۳ـ اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و a عددی ثابت و $y=af(x)$ آن‌گاه :

$$y'=(af(x))'=af'(x)$$

مثال ۸: اگر $y=-۵x^{۷}$ آن‌گاه $y'=-۵(۷x^{۶})=-۳۵x^{۶}$

۴ـ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر و $y=f(x)+g(x)$ ، آن‌گاه :

$$y'=f'(x)+g'(x)$$

زیرا :

$$y'=\lim_{h\to ۰}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$$

بنابراین می‌توان گفت : مشتق مجموع دو تابع برابر است با مجموع مشتق‌های آن دو تابع. این مطلب را می‌توان به بیش از دو تابع تعمیم داد.

نتیجه: اگر $y=ax+b$ آن‌گاه $y'=a$

مثال ۹: مشتق $y=۳x^{۵}-۵x^{۲}$ را محاسبه کنید.

حل: اگر قرار دهیم $f(x)=۳x^{۵}$ و $g(x)=-۵x^{۲}$ خواهیم داشت :

$$g'(x)=-۱۰x \quad \text{و} \quad f'(x)=۱۵x^{۴}$$

پس :

$$y'=f'(x)+g'(x)=۱۵x^{۴}-۱۰x$$

۵ـ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند و $y=f(x)g(x)$ آن‌گاه داریم :

$$y'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$

مثال ۱۰: مشتق $y=(۳x-۲)(x^{۲}+۱)$ برابر است با :

$$y'=۳(x^{۲}+۱)+۲x(۳x-۲)=۳x^{۲}+۳+۶x^{۲}-۴x=۹x^{۲}-۴x+۳$$

اگر ابتدا y را به‌صورت $y=۳x^{۳}-۲x^{۲}+۳x-۲$ به‌دست آوریم و سپس از آن مشتق بگیریم باز هم به همان نتیجهٔ بالا می‌رسیم.

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید :

۱) $f(x)=73$

۲) $f(x)=7x+3$

۳) $f(x)=x^3+3x^2+7x+3$

۴) $f(x)=2-5x+4x^2$

۵) $f(x)=3x-4x^3$

۶) $f(x)=\frac{4-5x}{3}+x^2$

۷) $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+1$

۸) $f(x)=(1+3x)^2$

۹) $f(x)=a_0+a_1x$

۱۰) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

۱۱) $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

۱۲) $f(x)=x+(3x+2)^2$

۱۳) $f(x)=(2x+3)(3x-7)$

۱۴) $f(x)=(x^3-x)(x-9)$

۱۵) $f(x)=(x+1)(\frac{x^2}{2}+x)$

۱۶) $f(x)=(5x-4)(1-\frac{x}{2})$

۱۷) $f(x)=x^3(3x-2)$

۱۸) $f(x)=3x(x^2+1)(x+2)$

۶ــ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند و $g(x)\neq 0$ و $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ آن‌گاه داریم :

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

یعنی : مشتق یک تابع کسری برابر است با حاصل‌ضرب مشتق صورت در مخرج منهای حاصل‌ضرب مشتق مخرج در صورت، تقسیم بر توان دوم مخرج.

مثال ۱۱: مشتق تابع $y=\frac{3x}{x-2}$ هنگامی که $x\neq 2$ باشد چنین است :

$$y'=\frac{3(x-2)-(1)3x}{(x-2)^2}=\frac{3x-6-3x}{(x-2)^2}=\frac{-6}{(x-2)^2}$$

و مشتق $y=\frac{1}{x^2}$ ، $x\neq 0$:

$$y'=\frac{-2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}$$

مشتق تابع مرکب

۷ــ اگر $y=f(u)$ و $u=g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند آن‌گاه y نسبت به x دارای مشتق است. اگر مشتق y نسبت به u را با y'_u ومشتق y نسبت به x را با y'_x نشان می‌دهیم. داریم :

$$y'_x=y'_u.u'(x)=f'(u)g'(x)$$

مثال ۱۲: اگر $y=u^{۲}+u$ و $u=x^{۲}-۱$ باشد، داریم :

$$y'_x=y'_u.u'(x)=(۲u+۱)(۲x)=\left[۲(x^{۲}-۱)+۱\right](۲x)=۴x^{۳}-۲x$$

مثال ۱۳: می‌خواهیم مشتق $y=(x^{۴}-۳x^{۲}+۱)^{۳}$ را حساب کنیم :

فرض می‌کنیم $u=x^{۴}-۳x^{۲}+۱$ پس $y=u^{۳}$ و خواهیم داشت :

$$y'_u=۳u^{۲} \quad \text{و} \quad u'_x=۴x^{۳}-۶x$$

بنابراین :

$$y'_x=y'_u.u'_x=۳(x^{۴}-۳x^{۲}+۱)^{۲}(۴x^{۳}-۶x)$$
$$=۶x(۲x^{۲}-۳)(x^{۴}-۳x^{۲}+۱)^{۲}$$

نتیجه: اگر $y=u^{n}$ و u تابعی از x باشد، خواهیم داشت :

$$y'_x=nu'.u^{n-۱}$$

زیرا داریم :

$$y'_x=y'_u.u'_x \quad \text{و} \quad y'_u=nu^{n-۱}$$

که چون y'_x و u'_x همان y' و u' هستند، دستور بالا را چنین می‌نویسند : $y'=nu'.u^{n-۱}$

مثال ۱۴: اگر $y=(۲x^{۳}+x)^{۵}$ باشد، آن‌گاه : $y'=۵(۶x^{۲}+۱)(۲x^{۳}+x)^{۴}$

۸ ــ اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و مثبت باشد و $y=\sqrt{f(x)}$، آن‌گاه داریم :

$$y'=\frac{f'(x)}{۲\sqrt{f(x)}} \quad \text{و} \quad (f(x)>۰)$$

مثال ۱۵: مشتق $y=\sqrt{x}$ برابر است با : $y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

مشتق $y=\sqrt{۷x+۳}$، $(x>-\frac{۳}{۷})$ برابر است با : $y'=\frac{۷}{۲\sqrt{۷x+۳}}$

مشتق $y=\sqrt{(۱+x^{۲})^{۳}}$ برابر است با : $y'=\frac{۳\times ۲x(۱+x^{۲})^{۲}}{۲\sqrt{(۱+x^{۲})^{۳}}}=۳x\sqrt{۱+x^{۲}}$

مشتق $y=\sqrt{\frac{۲x+۵}{۳x-۱}}$ برابر است با :

$$y'=\frac{\frac{۲(۳x-۱)-۳(۲x+۵)}{(۳x-۱)^{۲}}}{۲\sqrt{\frac{۲x+۵}{۳x-۱}}}=\frac{-۱۷}{۲\sqrt{(۲x+۵)(۳x-۱)^{۳}}}$$

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید و دامنهٔ مشتق‌پذیری هر تابع را مشخص کنید :

۱) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ ۲) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ۳) $f(x)=\frac{2x-3}{3x+5}$

۴) $f(x)=\frac{3(2x+5)^2}{x^3}$ ۵) $f(x)=\frac{4}{(x-1)^3}$ ۶) $f(x)=\frac{x+1}{x(x-1)}$

۷) $f(x)=\frac{x^3-1}{x^3+1}$ ۸) $f(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$ ۹) $f(x)=\left(\frac{x-1}{3-x}\right)^2$

۱۰) $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ ۱۱) $f(x)=(2x+3)^4$ ۱۲) $f(x)=(5x^2-2)^3$

۱۳) $f(x)=\sqrt{3x-2}$ ۱۴) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ ۱۵) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

۱۶) $f(x)=\sqrt{x(x-2)}$ ۱۷) $f(x)=\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ ۱۸) $f(x)=(1+\sqrt{x})^3$

۱۹) $f(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x}}$ ۲۰) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

مشتق تابع‌های مثلثاتی

۱ــ مشتق $y = \sin x$: برای به‌دست آوردن مشتق $\sin x$ همان روش کلی را به‌کار می‌بریم،

یعنی حد نسبت $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ را در $h=0$ حساب می‌کنیم.

بنابر اتحاد مثلثاتی $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ می‌توان آن را چنین نوشت :

$$\sin(x+h)-\sin x=\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x$$

پس خواهیم داشت :

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{(\cos h-1)\sin x+\cos x\sin h}{h}=\frac{\cos h-1}{h}\sin x+\frac{\sin h}{h}\cos x$$

از طرفی می‌دانیم که : $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ پس $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$

و از طرف دیگر :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\cos t-1)(\cos t+1)}{t(\cos t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos^2 t-1}{t(\cos t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin^2 t}{t(\cos t+1)}=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{\cos t+1}\right)=-1\times\frac{0}{2}=0$$

بنابراین :
$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{x} = \lim_{h\to 0}(\frac{\cosh-1}{h}\sin x + \frac{\sinh}{h}\cos x)$$
$$= \lim_{h\to 0}(\frac{\cosh-1}{h}\sin x) + \lim_{h\to 0}(\frac{\sinh}{h}\cos x)$$
$$= 0\times\sin x + 1\times\cos x = \cos x$$

درنتیجه مشتق $\sin x$ برابر است با $\cos x$، یا $y' = \cos x$. پس می‌توان گفت : تابع $\sin x$ برای هر مقدار x از $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن $\cos x$ است.

۲ــ مشتق $y = \cos x$: مشتق کسینوس را نیز می‌توان به روش مشابه به‌دست آورد. اما راه ساده‌تر آن این است که آن را به سینوس که مشتق آن را می‌شناسیم تبدیل کنیم، آن‌گاه با به‌کار بردن قاعدهٔ مشتق تابع مرکب، مشتق آن را حساب کنیم :

$$y=\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sin u \quad , \quad u=\frac{\pi}{2}-x$$

پس :
$$y' = (\cos u)u' = (-1)\cos(\frac{\pi}{2}-x) = -\sin x$$

بنابراین تابع $\cos x$ برای هر مقدار x مشتق‌پذیر است و مشتق آن $-\sin x$ است.

۳ــ مشتق $y = \tan x$: برای محاسبهٔ این مشتق ابتدا می‌نویسیم : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ آن‌گاه دستور مشتق تابع کسری را درمورد آن به‌کار می‌بریم، خواهیم داشت :

$$y' = \frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$

پس تابع $\tan x$ برای هر مقدار $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ است.

۴ــ مشتق $y = \cot x$: در این‌جا نیز روش بالا را به‌کار می‌بریم :

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{(-\sin x)\sin x-(\cos x)\cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$$

پس تابع $\cot x$ برای هر مقدار $x = k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن $\frac{-1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$ است.

مثال ۱۶:

اگر : $y=۲\sin x+۳\cos x$ ، آن‌گاه $y'=۲\cos x-۳\sin x$

اگر : $y=\sin ۵x$ ، آن‌گاه $y'=۵\cos ۵x$

اگر : $y=\cos\frac{x}{۳}$ ، آن‌گاه $y'=-\frac{۱}{۳}\sin\frac{x}{۳}$

اگر : $y=\tan(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲})$ ، آن‌گاه با قرار دادن $y=\tan u$ و $u=\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲}$

خواهیم‌داشت : $y'=u'(۱+\tan^۲ u)=-\frac{۱}{۲}\left[۱+\tan^۲(\frac{\pi}{۳}-\frac{x}{۲})\right]$

نتیجه: اگر u و v را توابعی از x بگیریم، همهٔ دستورهای محاسبهٔ مشتق را که تاکنون دیده‌ایم می‌توان در جدولی به‌صورت زیر خلاصه کرد :

تابع	مشتق	مثال
$y=c$	$y'=۰$	$y=۷\Rightarrow y'=۰\ ,\ y=-\sqrt{۳}\Rightarrow y'=۰\ ,\ y=۱۳۷۳\Rightarrow y'=۰$
$y=ax+b$	$y'=a$	$y=۴x-۹\Rightarrow y'=۴\ ,\ y=-۵x+۷\Rightarrow y'=-۵$
x^n	$nx^{n-۱}$	$y=x^۶\Rightarrow y'=۶x^۵$
au	au'	$y=-۳x^۵\Rightarrow y'=-۳(۵x^۴)=-۱۵x^۴$
$u+v$	$u'+v'$	$y=x^۳+۴x\Rightarrow y'=۳x^۲+۴$
$u.v$	$u'.v+v'.u$	$y=(۳x^۲-x)(۲x-۳)\Rightarrow y'=(۶x-۱)(۲x-۳)+۲(۳x^۲-x)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^۲}$	$y=\frac{۲x-۱}{۳x^۲+۵}\Rightarrow y'=\frac{۲(۳x^۲+۵)-۶x(۲x-۱)}{(۳x^۲+۵)^۲}=\frac{-۶x^۲+۶x+۱۰}{(۳x^۲+۵)^۲}$
$\frac{۱}{v}$	$-\frac{v'}{v^۲}$	$y=\frac{۱}{x^۳}\Rightarrow y'=-\frac{۳x^۲}{x^۶}=-\frac{۳}{x^۴}$
$\frac{۱}{x^n}=x^{-n}$	$\frac{-n}{x^{n+۱}}=-nx^{-n-۱}$	$y=\frac{۱}{x^۵}\Rightarrow y'=\frac{-۵}{x^۶}=-۵x^{-۶}$
$f(u)$	$u'f'(u)$	$y=(۳x^۲+۱)^۴\Rightarrow y'=(۶x)\left[۴(۳x^۲+۱)^۳\right]=۲۴x(۳x^۲+۱)^۳$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{x^۴+۱}\Rightarrow y'=\frac{۴x^۳}{۲\sqrt{x^۴+۱}}\ ,\ y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$
$\sin u$	$u'\cos u$	$y=\sin(۳x-۱)\ ,\ y'=۳\cos(۳x-۱)$
$\cos u$	$-u'\sin u$	$y=\cos(x^۲+۱)\ ,\ y'=-۲x\sin(x^۲+۱)$
$\tan u$	$u'(۱+\tan^۲ u)$	$y=\tan(۱-x^۲)\ ,\ y'=-۲x\left[۱+\tan^۲(۱-x^۲)\right]$
$\cot u$	$-u'(۱+\cot^۲ u)$	$y=\cot(-۵x)\ ,\ y'=۵\left[۱+\cot^۲(-۵x)\right]$

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید و در شماره‌های زوج مقدار مشتق را در نقطهٔ داده‌شده حساب کنید.

۱) $y = \sin x - \cos x$

۲) $y = ۳\cos x \sin ۲x$ و $x = \pi$

۳) $y = ۳\sin^۲ x + ۲\cos^۳ x$

۴) $y = (\sin x + \cos x)^۲$ و $x = ۳\frac{\pi}{۲}$

۵) $y = \sin(-\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۳}) + \cos\frac{x}{۲}$

۶) $y = \sin x \cos ۳x$ و $x = \frac{\pi}{۳}$

۷) $y = \frac{۱}{\cos x + \sin x}$

۸) $y = \frac{\sin^۲ x}{۱ + \cos^۲ x}$ و $x = ۰$

۹) $y = ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴})$

۱۰) $y = x + \sin\sqrt{x}$ و $x = \pi^۲$

۱۱) $y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

۱۲) $y = \sin x \tan x$ و $x = \frac{\pi}{۴}$

۱۳) $y = \tan^۲ x - ۲\cot x$

۱۴) $y = \frac{۱ - \tan\frac{x}{۲}}{۱ + \tan\frac{x}{۲}}$ و $x = \frac{\pi}{۲}$

۱۵) $y = \sqrt{۱ + \sin x}$

۱۶) $y = \frac{\sin x}{۱ + x}$ و $x = ۰$

۱۷) $y = \sin^۳\sqrt{t}$

۱۸) $y = \sin\omega t + \cos\omega t$ و $t = \frac{\pi}{۲\omega}$

سرگرمی ریاضی

پدری ۴۶ ساله، یک پسر ۲۶ ساله و یک دختر دارد. اگر بعد از چند سال، سن پدر برابر با مجموع سن دو فرزندش و سه‌برابر سن دخترش شود، سن کنونی دختر چقدر است؟

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳- گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (Email) **talif@talif.sch.ir** ارسال نمایند.

دفتر برنامه ریزی و تألیف کتاب های درسی