www.konkur.in

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی وقف عام

آزمون غیرحضوری

دروس اختصاصی

فارغ‌التحصیلان ریاضی

(۱۶ آذر ۱۳۹۷)

(مباحث ۳۰ آذر ۹۷)

گروه فنی و تولید:

مسئول تولید آزمون غیرحضوری	محمد اکبری
مسئول دفترچه آزمون غیرحضوری	نرگس غنی‌زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: مریم صالحی — مسئول دفترچه: آتنه اسفندیاری
حروف‌چین	حسن خرّم‌جو
ناظر چاپ	سوران نعیمی

بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی « وقف عام»

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین – پلاک ۹۲۳ – تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام دارایی‌ها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»

forum.konkur.in

www.konkur.in

دیفرانسیل

۱. حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos 3x}{\cos x\sin 4x}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۲. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} a\left[\frac{1}{x-1}\right] & ; \ x>0 \\ \sqrt{2} & ; \ x=0 \\ \frac{\sqrt{1-\cos x}}{b\sin x} & ; \ x<0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، حاصل $a.b$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۳. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{\sin(x^2-1)}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{\sin(-1)}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

۴. اگر $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2-2\cos(x^2)}}{\sqrt{a-x^2}-1}=b$ باشد، مقدار عددی $a+b$ کدام است؟ $(b\neq 0)$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) -۳

۵. اگر $f(x)=\begin{cases} \frac{4x^2+2}{x^2+1} & ; \ x<1 \\ \frac{2x+7}{x+2} & ; \ x\geq 1 \end{cases}$ باشد، تابع fof چند نقطهٔ ناپیوستگی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۶. مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4 x}{(\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[2]{\sin x})^2}$ کدام است؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۵۷۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۷. حاصل $\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)\left|\tan\frac{\pi x}{2}\right|$ برابر است با:

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $-\frac{2}{\pi}$ ۳) $-\frac{4}{\pi}$ ۴) $\frac{4}{\pi}$

۸. حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^5+(1-\tan x)^5-2}{x^2}$، کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) $+\infty$

دیفرانسیل
حد و پیوستگی
صفحه‌های ۶۱ تا ۱۲۰
حسابان
حد و پیوستگی
صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۳۹ و ۱۴۵ تا ۱۵۸

Konkur.in

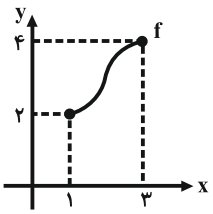
forum.konkur.in

www.konkur.in

۹. تابع $f(x)=\begin{cases}\tan^{-1}(\frac{-1}{x^2-1}) & ; \quad x\neq 1\\ \frac{\pi}{2} & ; \quad x=1\end{cases}$ در $x=1$ چگونه است؟

۱) فقط پیوستگی راست دارد.
۲) فقط پیوستگی چپ دارد.
۳) پیوسته است.
۴) پیوستگی چپ و راست ندارد.

۱۰. اگر منحنی تابع f به‌صورت زیر باشد، کدام گزینه در مورد تابع معکوس g با ضابطهٔ $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ صحیح است؟



۱) g^{-1} در $[\frac{1}{3},1]$ پیوسته و صعودی اکید است.
۲) g^{-1} در $[\frac{1}{3},1]$ پیوسته و نزولی اکید است.
۳) g^{-1} در بازهٔ $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ پیوسته و نزولی اکید است.
۴) g^{-1} در $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ پیوسته و صعودی اکید است.

هندسه تحلیلی

هندسه تحلیلی
مقاطع مخروطی
(بیضی و سهمی)
صفحه‌های ۵۵ تا ۷۰

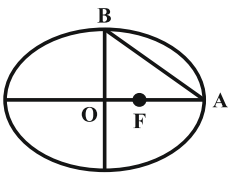
۱۱. نقطه S رأس یک سهمی افقی، بر نقطه F کانون بالایی بیضی به معادلهٔ $\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(x-3)^2}{12}=1$ منطبق است و نقطهٔ F_1 کانون سهمی، روی بیضی قرار دارد. اگر دهانهٔ سهمی به طرف راست باز شود، معادلهٔ آن کدام است؟

۱) $(y-4)^2=12(x+3)$
۲) $(y-4)^2=8(x+3)$
۳) $(y-4)^2=8(x-3)$
۴) $(y-4)^2=12(x-3)$

۱۲. طول قطر غیرکانونی بیضی گذرنده از نقطهٔ $(10,1)$، با کانون‌های $F(2,5)$ و $F'(2,-3)$ کدام است؟

۱) ۱۶
۲) $8\sqrt{5}$
۳) ۸
۴) $4\sqrt{5}$

۱۳. در شکل مقابل، پاره‌خط‌های $OA=a$، $OB=b$ و $OF=c$ به‌ترتیب نصف قطر بزرگ، نصف قطر کوچک و نصف فاصلهٔ کانونی بیضی هستند. اگر $AB=a+c$، آنگاه خروج از مرکز بیضی کدام عدد است؟



۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$
۳) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
۴) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

۱۴. نقطهٔ متغیر P روی یک بیضی با کانون‌های F و F' حرکت می‌کند. زمانی که فاصلهٔ P تا مرکز بیضی، کم‌ترین مقدار ممکن و برابر $2\sqrt{3}$ است، مساحت مثلث PFF' برابر ۶ می‌شود. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
۳) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۵. مکان هندسی نقاطی که فاصلهٔ آنها از نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر محور yها برابر $\frac{۱}{۳}$ فاصلهٔ آنها از خط $x=-۴$ باشد، یک مقطع مخروطی است. طول بزرگترین وتر این مقطع مخروطی کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۶ ۴) ۳

۱۶. در یک سهمی که رو به راست باز می‌شود، خط $y=۲$ محور تقارن، خط $x=-۲$ خط هادی و فاصلهٔ کانون از خط هادی برابر ۴ است. معادلهٔ سهمی کدام است؟

۱) $y^۲=۴(x-۱)$ ۲) $x^۲=۸(y-۲)$ ۳) $(y-۲)^۲=۸x$ ۴) $(x-۱)^۲=۴y$

۱۷. اگر $S=(\frac{m}{۲},n)$ رأس سهمی به معادلهٔ $x^۲+۴x-۲y+۱۴=۰$ باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۸. کانون مقطع مخروطی $(y-۱)^۲+۸=۴x$، در چه فاصله‌ای از خط هادی $(x-۱)^۲=-۸y$ قرار دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۹. اگر از کانون سهمی به معادلهٔ $y^۲-۴x+۱۲=۰$، خطی موازی خط هادی سهمی رسم نماییم تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند، زاویهٔ $A\hat{S}B$ کدام است؟ (S رأس سهمی است)

۱) $۲\tan^{-۱}۲$ ۲) $۲\cos^{-۱}\frac{۳}{۵}$ ۳) $۲\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}$ ۴) $۲\cot^{-۱}۲$

۲۰. اگر نقطهٔ $A(-۳,۳)$ روی یک سهمی قائم با کانون $F(۱,۰)$ قرار داشته باشد، آنگاه کدام‌یک از خطوط زیر، می‌تواند خط هادی این سهمی باشد؟

۱) $y=۶$ ۲) $y=۵$ ۳) $y=-۱$ ۴) $y=-۲$

ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته
نظریهٔ اعداد
(اعداد اول)
صفحه‌های ۳۸ تا ۴۷

۲۱. بین $۱۰+۱۳۹۳!$ تا $۱۳۹۶+۱۳۹۳!$، چند عدد اول وجود دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۲. اگر p، q و r، سه عدد اول و $p+q^۳=r^۳$ باشد، جمع آنها کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۷۲

۲۳. اگر a یک عدد طبیعی بزرگتر از یک و $(a,۴۸)=۱$، آنگاه تعداد مقسوم علیه‌های صحیح و مثبت کمترین مقدار $a^۲-۱$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۶

۲۴. اگر a یک عدد طبیعی دلخواه باشد به گونه‌ای که $(a,۲۴)=۶$ و $(a,۲۵)=۵$، آن‌گاه $(a,۶۳۰۰)$ به ازای مقادیر مختلف a، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

forum.konkur.in

www.konkur.in

۲۵. برای تشخیص اول یا مرکب بودن عدد ۱۷۳، آن را باید حداقل به چند عدد اول تقسیم کرد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۲۶. حاصل $(۸n+۶,۱۲n+۱۰)$ کدام است؟ $(n \in N)$

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۲ یا ۴

۲۷. اگر $ab = ۲(a,b)^۲ + ۱$، حاصل $a^۲ + b^۲$ چیست؟ $(a,b \in N)$

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۷ ۴) چنین چیزی غیرممکن است.

۲۸. در سمت راست عدد $۱۲!$ در مبنای ۶، چند صفر وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۲۹. مجموع ۳ عدد اول متمایز ۲۰ است. چه تعداد از اعضای مجموعه $\{۱۳۰,۱۴۴,۱۵۴,۱۸۲,۲۶۰\}$، می‌توانند حاصل ضرب این سه عدد باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

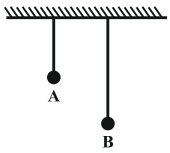
۳۰. کوچکترین عدد طبیعی مجموعهٔ $\{۱۵m + ۲۴n - ۱۷\}$ کدام است؟ $(m,n \in Z)$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

فیزیک پیش‌دانشگاهی

فیزیک پیش‌دانشگاهی
حرکت نوسانی
موج‌های مکانیکی
صفحه‌های ۹۳ تا ۱۲۰

۳۱. در شکل زیر، با انجام کدام‌یک از کارهای زیر، گلوله‌های آونگ‌های کم‌دامنهٔ A و B که هر دو از جنس آهن هستند با هم به تشدید در می‌آیند؟



۱) در زیر آونگ A آهنربایی قرار دهیم.

۲) در زیر آونگ B آهنربایی قرار دهیم.

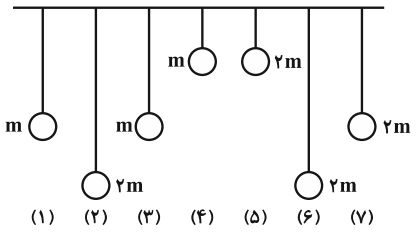
۳) طول آونگ B را زیاد کنیم.

۴) طول آونگ A را کم کنیم.

۳۲. دو آونگ سادهٔ کم‌دامنه با دوره تناوب‌های ۵s و ۳s به نوسان در می‌آیند. اگر در مدت t ثانیه، تعداد نوسانات آونگ اول ۶ واحد کم‌تر از تعداد نوسان‌های آونگ دوم باشد، t چند ثانیه است؟

۱) ۴۵ ۲) ۶۰ ۳) ۹۰ ۴) ۱۲۰

۳۳. مطابق شکل زیر، هفت آونگ از یک میلهٔ افقی آویزان شده‌اند. اگر آونگ شماره یک با دامنهٔ کم شروع به نوسان کند، کدام آونگ یا آونگ‌ها با آونگ شمارهٔ یک به حالت تشدید در می‌آید؟



۱) آونگ‌های ۲ و ۵

۲) آونگ‌های ۶ و ۳

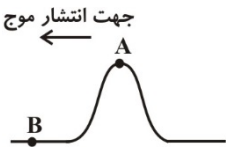
۳) فقط آونگ ۳

۴) آونگ‌های ۳ و ۷

forum.konkur.in

www.konkur.in

۳۴. در شکل زیر، طناب همگنی بین دو نقطه با نیروی ۲۵N کشیده شده است. اگر فاصلهٔ افقی بین دو نقطهٔ A و B برابر با ۱۰m باشد و تپ نشان داده شده ۴ ثانیه طول بکشد تا از نقطهٔ A به نقطهٔ B برسد، هر سانتی‌متر از این طناب چند گرم جرم دارد؟

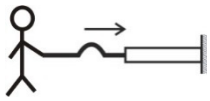


۱) ۰/۰۴
۲) ۰/۴
۳) ۴
۴) ۴۰

۳۵. نیروی کشش طنابی ۱۲N و جرم واحد طول آن $۳۰\frac{g}{m}$ است. اگر سر این طناب را با دیاپازونی که بسامد آن ۱۰۰Hz است، عمود بر راستای طناب به نوسان در آوریم، طول موج ایجاد شده در طناب چند سانتی‌متر خواهد بود؟

۱) ۰/۲ ۲) ۲ ۳) ۲۰ ۴) ۲۰۰

۳۶. مطابق شکل، تپی با طول موج ۶ سانتی‌متر در طناب نازک ایجاد می‌کنیم. اگر قطر طناب ضخیم دو برابر قطر طناب نازک باشد و هر دو طناب هم‌جنس باشند، بسامد، طول موج و سرعت انتشار موج در طناب ضخیم، به‌ترتیب از راست به چپ چند برابر طناب نازک می‌شود؟

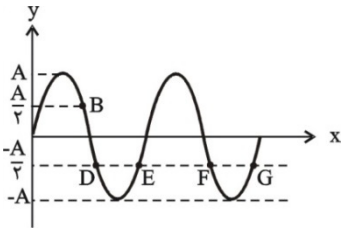


۱) $\frac{۱}{۲}$ ، ۳ ، ۳
۲) $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، ۱
۳) $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$
۴) ۱ ، ۲ ، ۲

۳۷. دو طناب با چگالی‌های مساوی، توسط نیروهای یکسان، به‌طور جداگانه بین دو نقطه کشیده شده‌اند و در آن‌ها امواج عرضی منتشر می‌شود. اگر قطر طناب اول ۲۵٪ بیش‌تر از قطر طناب دوم باشد، آنگاه سرعت انتشار امواج عرضی در طناب اول . . . درصد . . . از طناب دوم است.

۱) ۲۰، بیش‌تر
۲) ۳۶، بیش‌تر
۳) ۲۰، کم‌تر
۴) ۳۶، کم‌تر

۳۸. نقش موج عرضی طنابی، در یک لحظه مطابق شکل زیر است. کدام یک از نقاط نشان داده شده، با نقطهٔ B در فاز مخالف‌اند؟



۱) F و G
۲) D و G
۳) E و G
۴) D و F

۳۹. یک موج مکانیکی، فاصلهٔ ۱/۲ متری بین چهار نقطهٔ هم‌فاز متوالی از محیط انتشار موج را در مدت ۰/۱۵s طی می‌کند. بسامد این موج چند هرتز است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۴۰. دو نقطهٔ A و B واقع بر یک ریسمان که در طول آن موج عرضی با بسامد ۲۰۰Hz ایجاد شده است قرار دارند. اگر نقطهٔ B سومین نقطهٔ هم‌فاز با نقطهٔ A باشد و سرعت انتشار موج عرضی در طول ریسمان $۱۰۰\frac{m}{s}$ باشد، فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از یک‌دیگر چند متر است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

forum.konkur.in

www.konkur.in

شیمی پیش‌دانشگاهی: صفحه‌های ۶۰ تا ۷۵

۴۱- عبارت کدام گزینه، صحیح است؟

۱) اغلب داروها نمک‌های اسیدی، خنثی و یا بازی هستند.

۲) افزودن آهک به خاک، سبب کاهش میزان اسیدی بودن خاک می‌شود.

۳) با ورود فاضلاب‌های صنعتی به محیط زیست، یون‌های واسطه سبب افزایش pH محیط می‌شوند.

۴) شیمی‌دان‌ها مدت‌ها قبل از شناخت ویژگی‌های اسیدها و بازها، ساختار آن‌ها را توجیه کرده‌اند.

۴۲- کدام موارد از عبارت‌های زیر، جمله: «طبق نظریه آرنیوس .....» را به‌درستی تکمیل می‌کند؟

آ) اسید ماده‌ای است که پس از حل شدن در آب پروتون پدید می‌آورد.

ب) هیدروژن‌کلرید $(HCl(g))$ یک اسید است.

پ) $NaOH(s)$ یک باز است زیرا در آب تولید یون هیدروکسید می‌کند.

ت) $N_2O_5(g)$ یک اسید است و معادلهٔ انحلال آن در آب به‌صورت $N_2O_5(g)+H_2O(l)\rightarrow 2H^+(aq)+2NO_3^-(aq)$ است.

۱) آ، ب، پ ۲) ب ، پ ۳) ب ، ت ۴) آ، پ

۴۳- کدام یک از واکنش‌های زیر توسط نظریهٔ لوری – برونستد قابل توجیه، ولی توسط نظریهٔ آرنیوس غیر قابل توجیه است؟

۱) $HBr(g)+H_2O(l)\rightarrow H_3O^+(aq)+Br^-(aq)$

۲) $NH_3(g)+HCl(g)\rightarrow NH_4Cl(s)$

۳) $BaO(s)+H_2O(l)\rightarrow Ba^{2+}(aq)+2OH^-(aq)$

۴) $NH_3(g)+BF_3(g)\rightarrow NH_3BF_3(s)$

۴۴- کدام موارد از مطالب زیر به‌درستی بیان شده‌اند؟

آ) آرنیوس که روی رسانایی الکتریکی و آبکافت ترکیب‌های محلول درآب کار می‌کرد، به نظریه‌ای در مورد اسیدها و بازها دست یافت.

ب) باز مزدوج $H_2PO_4^-$ یک آمفوتر به حساب می‌آید.

پ) در بین بازهای مزدوج اسیدهای هیپوکلرواسید، هیدروسیانیک اسید و نیترو اسید، باز مزدوج هیپوکلرواسید رتبهٔ دوم از نظر قدرت بازی را دارد.

ت) از سولفوریک اسید به عنوان مادهٔ افزودنی در نوشابه‌های گازدار استفاده می‌شود.

۱) آ، ت ۲) آ، پ ۳) ب، پ ۴) ب، ت

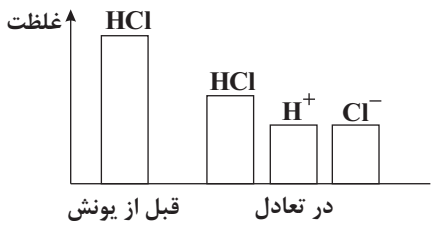
۴۵- کدام یک از مطالب زیر به‌درستی بیان شده است؟

۱) OH^- باز مزدوج O^{2-} و اسید مزدوج H_2O می‌باشد.

۲) بر اثر انحلال ۱۰۰ مولکول HF در آب، اگر تعداد یون‌های ایجاد شده برابر ۲۰ باشد، درصد یونش آن ۱۰٪ می‌باشد.

۳) اگر $\alpha=0/2$ و غلظت اولیهٔ HA برابر با ۲ مول بر لیتر باشد، آنگاه ثابت یونش آن برابر $0/01$ می‌باشد.

۴) نمودار مقابل فرایند یونش HCl در آب را نشان می‌دهد.



forum.konkur.in

www.konkur.in

۴۶- چند مورد از مطالب زیر نادرست‌اند؟

- در تبدیل یون اکسید به یون هیدروکسید درآب، H_2O نقش باز را ایفا می‌کند.
- در واکنش یون سیانید با یون هیدروژن سولفات، یون سیانید باز است.
- Al_2O_3 ماده‌ای آمفوتر است؛ یعنی نه خاصیت اسیدی و نه خاصیت بازی دارد.
- خاصیت بازی یون نیتریت از یون نیترات کم‌تر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷- اگر درجه یونش و ثابت یونش نیترواسید به‌ترتیب برابر ۰/۰۳ و $4/5\times10^{-4}$ باشد، مجموع غلظت یون‌ها با صرف نظر از یونش آب برحسب مول بر لیتر چقدر است؟

۱) $2/91\times10^{-2}$ ۲) $5/82\times10^{-2}$ ۳) $5/82\times10^{-3}$ ۴) $2/91\times10^{-3}$

۴۸- کدام گزینه نادرست است؟

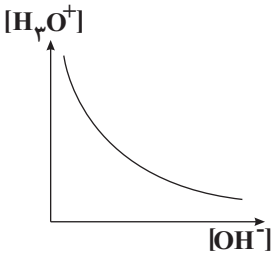
۱) باز مزدوج حاصل از هیپوکلرواسید پایدارتر از باز مزدوج حاصل از هیپوبرمواسید است.

۲) چون قدرت اسیدی HSO_4^- بیش‌تر از $HOCl$ است، بنابراین SO_4^{2-} پایدارتر از ClO^- است.

۳) اگر قدرت بازی B^- بیش‌تر از A^- باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول ۱ مولار HB بیش‌تر از محلول ۱ مولار HA است.

۴) قدرت جذب پروتون توسط CN^- بیش‌تر از NO_2^- است، بنابراین در دما و غلظت یکسان، سرعت تولید گاز هیدروژن حاصل از واکنش نوار منیزیم با محلول HCN کم‌تر از محلول HNO_2 است.

۴۹- با توجه به واکنش خود یونش آب، چه تعداد از عبارت‌های داده شده، درست هستند؟



آ) ثابت تعادل این واکنش به‌صورت $K_W=[H_3O^+][OH^-]$ نوشته می‌شود.

ب) مقدار ثابت تعادل خودیونش آب در هر دمایی برابر با $10^{-14}\,mol^2.L^{-2}$ می‌باشد.

پ) رابطه ثابت تعادل خودیونش آب نشان می‌دهد که در دمای معین با داشتن غلظت یکی از دو یون، غلظت دیگری را می‌توان به‌دست آورد.

ت) نمودار تغییرات غلظت یون‌های OH^- و H_3O^+ در دمای ثابت برای آب به‌صورت روبه‌رو است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۰- در یک محلول آبی غلظت یون هیدرونیوم 10^6 برابر غلظت یون هیدروکسید است، کدام عبارت درباره این محلول نادرست است؟ (دمای آزمایش را برابر دمای اتاق در نظر بگیرید)

۱) غلظت یون هیدرونیوم 10^{-4} مولار و غلظت یون هیدروکسید 10^{-10} مولار است.

۲) این محلول می‌تواند متعلق به اسید معده باشد.

۳) غلظت یون هیدروکسید این محلول 10^4 برابر ثابت یونش آب خالص در دمای $25^\circ C$ است.

۴) غلظت یون هیدرونیوم این محلول 10^3 برابر غلظت این یون در آب خالص در دمای $25^\circ C$ است.

forum.konkur.in

www.konkur.in

دیفرانسیل

۱- گزینهٔ «۲»

راه حل اول: با فرض $t=\frac{\pi}{2}-x$ داریم:

$$\begin{pmatrix} t=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}-t \\ (x\to\frac{\pi}{2})\Rightarrow(t\to 0)\end{pmatrix}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos 3x}{\cos x\sin 4x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi-2t)\cos(\frac{3\pi}{2}-3t)}{\cos(\frac{\pi}{2}-t)\sin(2\pi-4t)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 2t\sin 3t}{-\sin t\sin 4t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t\times 3t}{t\times 4t}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

راه حل دوم: عبارت داده شده را به حاصل ضرب دو کسر تبدیل کرده و سپس قاعدهٔ هوپیتال را روی هر دو اجرا می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x\cos 3x}{\cos x\sin 4x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 2x}{4\cos 4x}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3\sin 3x}{-\sin x}=\frac{-2}{4}\times\frac{3}{-1}=\frac{3}{2}$$

توجه: اگر $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ شود، آنگاه اگر f و g در $x=\alpha$ مشتق‌پذیر باشند، حاصل حد را درصورت وجود می‌توان از $\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ به‌دست آورد. به این قاعده، هوپیتال می‌گویند.

۲- گزینهٔ «۴»

$$f(0)=\sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}a\left[\frac{1}{x-1}\right]$$

برای محاسبهٔ حد فوق به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(x\to 0^+)\Rightarrow x>0\Rightarrow x-1>-1\Rightarrow\frac{1}{x-1}<\frac{1}{-1}=-1$$

$$\Rightarrow\left[\frac{1}{x-1}\right]=-2$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=a(-2)=-2a$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{b\sin x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2\sin^2(\frac{x}{2})}}{b\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2}\,\overbrace{|\sin\frac{x}{2}|}^{\text{منفی}}}{2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{2}}{2b\cos\frac{x}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2b}$$

پس:

$$\begin{cases}\sqrt{2}=-2a\Rightarrow a=\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{2}=\frac{-\sqrt{2}}{2b}\Rightarrow b=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow a.b=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۳- گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x^3-3x+2}}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{\sin(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2(3)}}{x^2-1}\Rightarrow\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{3}\overbrace{|x-1|}^{\text{منفی}}}{(x+1)(x-1)}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

۴- گزینهٔ «۲»

راه حل اول:

هنگامی که $x\to 0$ صورت کسر صفر می‌شود، چون $b\neq 0$ است، پس حتماً حد باید به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درآید.

$$\sqrt{a-0}-1=0\Rightarrow\sqrt{a}=1\Rightarrow a=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2(1-\cos x^2)}}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2(2\sin^2\frac{x^2}{2})}(\sqrt{1-x^2}+1)}{1-x^2-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2\sin\frac{x^2}{2})(2)}{-x^2}=\lim_{x\to 0}4(\frac{\frac{x^2}{2}}{-x^2})=-2\Rightarrow b=-2$$

$$\Rightarrow a+b=1+(-2)=-1$$

راه حل دوم:

وقتی $u\to 0$ می‌توان از هم ارزی‌های $(1-\cos u)\sim\frac{u^2}{2}$ و $\sqrt[n]{1+u}\sim 1+\frac{u}{n}$ استفاده کرد.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2(1-\cos x^2)}}{\sqrt{1-x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2(\frac{x^4}{2})}}{1-\frac{x^2}{2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}=-2$$

۵- گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+7}{x+2}=3=f(1)\qquad(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{4x^2+2}{x^2+1}=3\qquad(2)$$

$(1),(2)\Rightarrow\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ پیوسته است. f در $x=1$

بنابراین f در تمامی نقاط دامنه‌اش پیوسته است، پس fof روی دامنه‌اش پیوسته است.

forum.konkur.in

www.konkur.in

۶- گزینهٔ «۱»

اگر فرض کنیم $\sqrt[6]{\sin x}=t$، خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix}\sqrt[6]{\sin x}=t\Rightarrow \sin x=t^6\\ (x\to\frac{\pi}{2})\Rightarrow(t\to 1^-)\end{pmatrix}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin^2 x)^2}{(\sqrt[3]{\sin x}-\sqrt[2]{\sin x})^2}=\lim_{t\to 1^-}\frac{(1-t^{12})^2}{(\sqrt[3]{t^6}-\sqrt[2]{t^6})^2}$$

$$=\lim_{t\to 1^-}\frac{(1-t)^2(1+t+t^2+\ldots+t^{11})^2}{(t^2-t^3)^2}=\lim_{t\to 1^-}\frac{12^2(1-t)^2}{t^4(1-t)^2}$$

$$=\frac{12^2}{1^4}=144$$

۷- گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)\underbrace{|\tan\frac{\pi x}{2}|}_{\text{منفی}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x^2}{\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2})}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)(1+x)}{\tan\frac{\pi}{2}(1-x)}$$

چون وقتی $x\to 1^+$، داریم: $\frac{\pi}{2}(1-x)\to 0^-$، پس می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(1-x)(1+x)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1+x}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$$

۸- گزینهٔ «۳»

به بسط زیر توجه کنید:

$$(1\pm\tan x)^5=1\pm\binom{5}{1}\tan x+\binom{5}{2}\tan^2 x\pm\ldots\pm\binom{5}{5}\tan^5 x$$

داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^5+(1-\tan x)^5-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+5\tan x+10\tan^2 x+..+\tan^5 x)+(1-5\tan x+10\tan^2 x-\ldots-\tan^5 x)-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+20\tan^2 x+10\tan^4 x-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{10\tan^2 x(2+\tan^2 x)}{x^2}$$

$$=10\times 2=20$$

دقت کنید که $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=1$.

۹- گزینهٔ «۲»

$$f(x)=\begin{cases}\tan^{-1}(\frac{-1}{x^2-1}) & ;\quad x\neq 1\\ \frac{\pi}{2} & ;\quad x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\tan^{-1}(-\frac{1}{x^2-1})=\tan^{-1}(\frac{-1}{0^+})=\tan^{-1}(-\infty)=\frac{-\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\tan^{-1}(-\frac{1}{x^2-1})=\tan^{-1}(\frac{-1}{0^-})=\tan^{-1}(+\infty)=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین تابع در $x=1$ فقط از چپ پیوسته است. $f(1)=\frac{\pi}{2}$

۱۰- گزینهٔ «۳»

f در $[1,3]$ تعریف شده و مثبت است، پس دامنهٔ g برابر $D_g=[1,3]$ است. f در این بازه صعودی اکید و مثبت است پس $g=\frac{1}{f}$ نزولی اکید است.

چون g در $[1,3]$ پیوسته و نزولی اکید است، پس g^{-1} نیز در $[g(3),g(1)]$ پیوسته و نزولی اکید است.

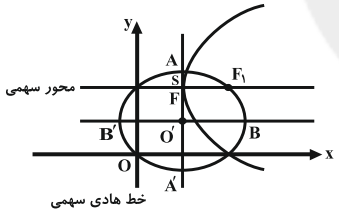
$$g(3)=\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{4}$$

$$g(1)=\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{2}$$

سپس g^{-1} در $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ پیوسته و نزولی اکید است.

هندسه تحلیلی

۱۱- گزینهٔ «۴»



بیضی قائم است با مشخصات:

مرکز $O'(\alpha=3,\beta=2)$

$\Rightarrow a=4\ ،\ b=2\sqrt{3}$ و $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$

$\Rightarrow F=(\alpha,\beta+c)\Rightarrow F=(3,4)$

معادلهٔ کلی سهمی افقی: $(y-\beta')^2=4a(x-\alpha')$

که در آن $a=SF_1$ نصف فاصله کانون F_1 از خط هادی سهمی است.

رأس سهمی $S=D=(\alpha'=3,\beta'=4)$ و $F_1=(\alpha'+a,\beta')$ (۱)

نقطه F_1 کانون سهمی از طرفی بر محور سهمی به معادلهٔ $y=\beta'=4$ و از طرف دیگر روی بیضی قرار دارد.

$$y=4\Rightarrow\frac{(4-2)^2}{16}+\frac{(x-3)^2}{12}=1$$

$$\Rightarrow(x-3)^2=9\Rightarrow x=6\ \text{و}\ x=0\ (\text{غ ق ق})$$

$$\Rightarrow F_1(6,4)\Rightarrow(1)\longrightarrow\alpha'+a=6\Rightarrow a=3$$

معادلهٔ سهمی $(y-4)^2=12(x-3)$

forum.konkur.in

www.konkur.in

۱۲- گزینهٔ «۱»

اگر P نقطه‌ای دلخواه از بیضی باشد، داریم: $PF + PF' = ۲a$

$$\sqrt{(۱۰-۲)^۲+(۱+۳)^۲}+\sqrt{(۱۰-۲)^۲+(۱-۵)^۲}=۲a$$

$$\Rightarrow ۲\sqrt{۸۰}=۲a \Rightarrow a=۴\sqrt{۵}$$

از طرفی: $FF' = ۲c \Rightarrow ۸ = ۲c \Rightarrow c = ۴$

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۸۰ - ۱۶ = ۶۴ \Rightarrow b = ۸$$

طول قطر غیرکانونی $= ۲b = ۱۶$

۱۳- گزینهٔ «۳»

در مثلث قائم‌الزاویه ABC:

$$AB^۲ = OA^۲ + OB^۲ \Rightarrow (a+c)^۲ = a^۲ + b^۲$$ و

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ \Rightarrow a^۲ + ۲ac + c^۲ = a^۲ + a^۲ - c^۲$$

$$\Rightarrow ۲c^۲ + ۲ac - a^۲ = ۰$$

جمله‌های این معادلهٔ همگن را بر $a^۲ \neq ۰$ تقسیم می‌کنیم،

$$۲(\frac{c}{a})^۲ + ۲(\frac{c}{a}) - ۱ = ۰ \Rightarrow \frac{c}{a} = e$$ خروج از مرکز بیضی

$$۲e^۲ + ۲e - ۱ = ۰ \ ,\ e > ۰ \Rightarrow e = \frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$$

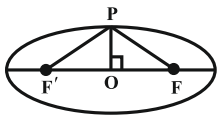
۱۴- گزینهٔ «۲»

کم‌ترین فاصلهٔ نقاط بیضی تا مرکز آن، برابر نصف طول قطر کوچک بیضی است. پس داریم:

$$S_{PFF'} = \frac{۱}{۲}b(۲c) = bc \Rightarrow ۶ = ۲\sqrt{۳}c \Rightarrow c = \frac{۶}{۲\sqrt{۳}} = \sqrt{۳}$$

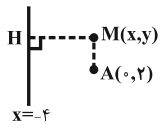
$$a = \sqrt{b^۲ + c^۲} = \sqrt{۱۲+۳} = \sqrt{۱۵}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۱۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$$



۱۵- گزینهٔ «۴»

اگر نقاط مورد نظر را به‌صورت $M(x,y)$ نمایش دهیم و $A(۰,۲)$ آن‌گاه طبق فرض $|MA|$ باید $\frac{۱}{۳}$ فاصلهٔ M تا خط $x = -۴$ باشد.



بنابراین:

$$|MA| = \frac{۱}{۳}|MH| \Rightarrow \sqrt{(x-۰)^۲+(y-۲)^۲} = \frac{۱}{۳}|x+۴|$$

$$\Rightarrow ۹x^۲ + ۹(y-۲)^۲ = x^۲ + ۸x + ۱۶ \Rightarrow ۸x^۲ - ۸x + ۹(y-۲)^۲ = ۱۶$$

$$\Rightarrow ۸(x-\frac{۱}{۲})^۲ + ۹(y-۲)^۲ = ۱۸ \Rightarrow \frac{(x-\frac{۱}{۲})^۲}{\frac{۹}{۴}} + \frac{(y-۲)^۲}{۲} = ۱$$

مکان هندسی مورد نظر یک بیضی افقی است. $a^۲ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲a = ۳$

۱۶- گزینهٔ «۳»

سهمی افقی و معادلهٔ کلی آن به‌صورت $(y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha)$ است. که در آن، $S(\alpha,\beta)$ رأس، $۲a$ فاصله کانون از خط هادی، $y=\beta$ معادلهٔ محور تقارن و $x = \alpha - a$ معادلهٔ خط هادی است.

$۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$ فاصله کانون از خط هادی، $y = \beta = ۲$ محور تقارن

$$x = \alpha - a \Rightarrow -۲ = \alpha - ۲ \Rightarrow \alpha = ۰$$

$$(y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha) \Rightarrow (y-۲)^۲ = ۸x$$

۱۷- گزینهٔ «۲»

$$x^۲ + ۴x + ۴ = ۲y - ۱۴ + ۴ = ۲y - ۱۰ \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۲(y-۵)$$

$$\Rightarrow S = (-۲,۵) \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{۲} = -۲ \Rightarrow m = -۴ \\ n = ۵ \end{cases} \Rightarrow m + n = -۴ + ۵ = ۱$$

۱۸- گزینهٔ «۲»

$$(y-۱)^۲ + ۸ = ۴x \Rightarrow (y-۱)^۲ = ۴(x-۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ \alpha = ۲ \Rightarrow F(\alpha+a,\beta) \Rightarrow F(۳,۱) \\ \beta = ۱ \end{cases}$$

$$(x-۱)^۲ = -۸y \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ \alpha = ۱ \\ \beta = ۰ \end{cases}$$ معادلهٔ خط هادی: $y = -a + \beta \Rightarrow y = ۲$

فاصلهٔ نقطهٔ $F(۳,۱)$ از خط $y = ۲$، یک واحد است.

۱۹- گزینهٔ «۱»

$$y^۲ = ۴(x-۳) \Rightarrow S(۳,۰) \Rightarrow F(۴,۰)$$

$$y^۲ = ۴(۴-۳) = ۴ \Rightarrow \begin{cases} y_A = ۲ \\ y_B = -۲ \end{cases}$$ معادلهٔ خط AB: $x = ۴$

$$\tan A\hat{S}F = \frac{AF}{SF} = \frac{۲}{۱} \Rightarrow A\hat{S}F = \tan^{-۱}۲ \Rightarrow A\hat{S}B = ۲\tan^{-۱}۲$$

۲۰- گزینهٔ «۴»

می‌دانیم هر نقطهٔ روی سهمی، از کانون و خط هادی آن، به یک فاصله است.

داریم: $AF = \sqrt{(۱+۳)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$

پس فاصلهٔ نقطهٔ A از خط هادی سهمی باید برابر ۵ باشد. چون سهمی قائم است، معادلهٔ خط هادی آن به صورت $y = k$ است. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط هادی برابر است با $|k-۳|$ و در نتیجه:

$$|k-۳| = ۵ \Rightarrow \begin{cases} k-۳ = ۵ \Rightarrow k = ۸ \\ k-۳ = -۵ \Rightarrow k = -۲ \end{cases}$$

پس دو خط $y = ۸$ و $y = -۲$، می‌توانند خط هادی این سهمی باشند.

forum.konkur.in

www.konkur.in

ریاضیات گسسته

۲۱- گزینهٔ «۴»

عدد $۱۳۹۳!+۱۰$ اول نیست چون به ۱۰ بخش‌پذیر است. $۱۳۹۳!+۱۱$ نیز اول نیست چون به ۱۱ بخش‌پذیر است. کلاً عدد $n!+r$ وقتی $۲ \le r \le n$، اول نیست، چون r در حاصلضرب $n!$ وجود دارد و این عدد به r بخش‌پذیر است. پس تا $۱۳۹۳!+۱۳۹۳$ عدد اول وجود ندارد. $۱۳۹۳!+۱۳۹۴$ و $۱۳۹۳!+۱۳۹۶$ هم زوجند و اول نیستند. $۱۳۹۳!+۱۳۹۵$ هم به ۵ بخش‌پذیر است، پس اول نیست.

۲۲- گزینهٔ «۱»

روش اوّل:

$$p = r^۳ - q^۳ = (r-q)(r^۲ + rq + q^۲)$$

امّا p اول است و نمی‌تواند ضرب دو پرانتز باشد. پس حتماً $r-q=۱$ و داریم:

$$r = ۳, q = ۲ \Rightarrow p = ۳^۳ - ۲^۳ = ۱۹$$

جمع اعداد هم می‌شود:

$$۱۹ + ۲ + ۳ = ۲۴$$

روش دوم: اعداد اول بجز ۲ فرد هستند. پس رابطه $p + q^۳ = r^۳$ در آنها برقرار نمی‌شود. (چپ عددی زوج و راست عدد فرد است) پس باید q یا p برابر ۲ باشند. امّا $p=۲$ به جوابی نمی‌رسد. پس $q=۲$ و داریم:

$$p = r^۳ - ۸ = (r-۲)(r^۲ + ۲r + ۴) \xrightarrow[\text{اول}]{p} r - ۲ = ۱$$
$$\Rightarrow r = ۳ \Rightarrow p = ۳^۳ - ۸ = ۱۹$$
$$p + q = r = ۱۹ + ۲ + ۳ = ۲۴$$

۲۳- گزینهٔ «۲»

$$(a,۴۸) = ۱ \Rightarrow (a,۶) = ۱ \Rightarrow (a,۲) = ۱, (a,۳) = ۱$$

کوچکترین عدد طبیعی مخالف یک که نسبت به ۲ و ۳، اول باشد، عدد ۵ است.

اگر $a=۵$، آن‌گاه $a^۲ - ۱ = ۲۴$.

$$۲۴ = ۲^۳ \times ۳$$
$$\varphi(۲۴) = (۳+۱)(۱+۱) = ۸$$

۲۴- گزینهٔ «۴»

$$(a, ۲^۳ \times ۳) = ۲ \times ۳ \ , \ (a,۵^۲) = ۵$$

بنابراین a دارای دقیقاً یک عامل ۲ و یک عامل ۵ است و همچنین حداقل یک عامل ۳ دارد. داریم:

$$(a,۶۳۰۰) = (a, ۲^۲ \times ۳^۲ \times ۵^۲ \times ۷) = ۲ \times ۳ \times ۵ \times k$$

اما k می‌تواند در حالت‌های مختلف a، برابر ۱، ۳، ۷ و ۳×۷ باشد. پس ۴ مقدار مختلف برای $(a,۶۳۰۰)$ وجود دارد.

۲۵- گزینهٔ «۳»

اگر عدد n مرکب باشد، حداقل یک مقسوم‌علیه اول کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ دارد. بنابراین برای تشخیص اول یا مرکب بودن عدد ۱۷۳، آن را به اعداد اول کوچکتر از $\sqrt{۱۷۳}$ تقسیم می‌کنیم، اگر بر هیچ یک بخش‌پذیر نبود، اول است.

$$\sqrt{۱۷۳} = ۱۳/۰۰۰$$

اعداد اول: $۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳$

۲۶- گزینهٔ «۲»

$$d = (۸n+۶, ۱۲n+۱۰) = ۲(۴n+۳, ۶n+۵) = ۲d'$$
$$d' = (۴n+۳, ۶n+۵)$$
$$\begin{cases} d' \mid ۴n+۳ \xrightarrow{\times ۳} \\ d' \mid ۶n+۵ \xrightarrow{\times ۲} \end{cases} \begin{cases} d' \mid ۱۲n+۹ \\ d' \mid ۱۲n+۱۰ \end{cases} \Rightarrow d' \mid ۱ \Rightarrow d' = ۱ \Rightarrow d = ۲$$

۲۷- گزینهٔ «۲»

فرض کنید $(a,b) = d$. دراین‌صورت $a = a_۱ d$ و $b = b_۱ d$. دراین‌صورت $ab = a_۱ b_۱ d^۲$. لذا:

$$\begin{cases} d^۲ \mid ۲d^۲ + ۱ \\ d^۲ \mid ۲d^۲ \end{cases} \Rightarrow d^۲ \mid ۱ \Rightarrow d^۲ = ۱ \Rightarrow d = ۱$$

لذا $ab = ۲d^۲ + ۱ = ۳$. چون $(a,b) = ۱$ و $ab = ۳$، حتماً یکی از آنها ۱ و دیگری ۳ است. در هر حال $a^۲ + b^۲$ برابر ۱۰ است.

۲۸- گزینهٔ «۴»

صورت مسئله یعنی توان ۶ در $۱۲!$ را بیابید. چون $۳ \times ۲ = ۶$، می‌توان توان‌های ۲ و ۳ را در $۱۲!$ یافت:

توان ۲ :
$$\left[\frac{۱۲}{۲}\right] + \left[\frac{۱۲}{۴}\right] + \left[\frac{۱۲}{۸}\right] = ۶ + ۳ + ۱ = ۱۰$$

توان ۳ :
$$\left[\frac{۱۲}{۳}\right] + \left[\frac{۱۲}{۹}\right] = ۴ + ۱ = ۵$$

لذا در تجزیهٔ $۱۲!$، عامل $۲^{۱۰} \times ۳^۵$ وجود دارد که: $۲^{۱۰} \times ۳^۵ = ۶^۵ \times ۲^۵$

لذا توان ۶ در این تجزیهٔ برابر ۵ است.

۲۹- گزینهٔ «۲»

چون جمع سه عدد اول، عددی زوج شده است، یا هر سه عدد زوج یا یک عدد زوج و دوتای دیگر فرد هستند. چون سه عدد زوج متمایز اول نداریم. بنابراین داریم:

$$a+b+c = ۲۰ \Rightarrow a = ۲, b+c = ۱۸$$
$$\begin{cases} a=۲, b=۱۳, c=۵ & \Rightarrow a.b.c = ۱۳۰ \\ a=۲, b=۱۱, c=۷ & \Rightarrow a.b.c = ۱۵۴ \end{cases}$$

۳۰- گزینهٔ «۳»

می‌دانیم کوچکترین عضو مثبت مجموعهٔ ترکیب‌های خطی a و b برابر با ب.م.م a و b است.

همچنین می‌دانیم کوچکترین عضو مثبت مجموعهٔ $\{a - bq \mid q \in Z\}$ باقیماندهٔ تقسیم a بر b است.

پس:

$$\{\underbrace{۱۵m + ۲۴n}_{d=۳} - ۱۷ \mid m,n \in Z\} = \{۳k - ۱۷ \mid k \in Z\}$$

با فرض $k=۶$، کوچکترین عدد طبیعی عضو این مجموعه، برابر ۱ است.

forum.konkur.in

www.konkur.in

فیزیک پیش دانشگاهی

۳۱- گزینهٔ «۲»

با گذاشتن آهنربا زیر آونگ آهنی، نیرویی هم‌راستا و هم‌جهت با نیروی وزن آونگ به آن وارد می‌شود. بنابراین طبق رابطهٔ $(T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}})$، مخرج کسر افزایش می‌یابد. با توجه به این‌که طول آونگ B از طول آونگ A بیش‌تر است، بنابراین قراردادن آهنربا زیر گلولهٔ آونگ B، دورهٔ نوسان آن‌را به دورهٔ نوسان آونگ A نزدیک می‌کند. هم‌چنین مطابق رابطهٔ دورهٔ نوسان‌های آونگ سادهٔ کم‌دامنه، با کاستن طول آونگ B یا افزایش طول آونگ A نیز می‌توان دورهٔ نوسان دو آونگ را به یک‌دیگر نزدیک نمود.

۳۲- گزینهٔ «۱»

اگر دورهٔ نوسان آونگ‌ها T_1 و T_2 باشد و در مدت t ثانیه آونگ اول n نوسان کامل کم‌تر از آونگ دوم نوسان کند، داریم:

$$N_2 - N_1 = \frac{t}{T_2} - \frac{t}{T_1} = n$$

$$\Rightarrow t = \frac{nT_1T_2}{T_1 - T_2} \xrightarrow[n=6]{T_1=5s\ ,\ T_2=3s} t = \frac{6\times5\times3}{5-3} = 45s$$

۳۳- گزینهٔ «۴»

آونگ‌هایی با آونگ یک تشدید می‌کنند که دوره یا به عبارت دیگر بسامد زاویه‌ای برابر با بسامد زاویه‌ای آونگ یک داشته باشند. با توجه به این‌که $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ است و g برای تمامی آونگ ها یکسان است، فقط آونگ‌هایی با آونگ یک تشدید می‌شوند که طولی برابر با طول آن داشته باشند، یعنی آونگ‌های ۳ و ۷. دقت کنید که جرم آونگ تأثیری در دورهٔ نوسان‌های کم‌دامنهٔ آن ندارد.

۳۴- گزینهٔ «۴»

با استفاده از رابطهٔ سرعت انتشار امواج عرضی در یک طناب افقی، داریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{FL}{m}} \Rightarrow \frac{10}{4} = \sqrt{\frac{25\times10^{-2}}{m}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{25}kg \Rightarrow m = 40g$$

۳۵- گزینهٔ «۳»

با استفاده از رابطهٔ بین نیروی کشش وارد بر طناب، جرم واحد طول طناب و سرعت انتشار امواج عرضی در آن، می‌توان نوشت:

$$\mu = 30\frac{g}{m} = 0/03\frac{kg}{m}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{12}{0/03}} \Rightarrow v = 20\frac{m}{s}$$

بنابراین طول موج در طناب برابر است با: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{20}{100} = 0/2m = 20cm$

۳۶- گزینهٔ «۲»

بسامد موج از ویژگی‌های منبع تولید موج بوده و با تغییر محیط تغییر نمی‌کند. با توجه به ثابت ماندن بسامد موج و رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ طول موج با سرعت انتشار موج رابطهٔ مستقیم دارد.

$$v = \frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}} \Rightarrow v \propto \frac{1}{D} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{D}{2D} = \frac{1}{2}$$ سرعت انتشار

با نصف شدن سرعت انتشار، طول موج نیز نصف می‌شود.

۳۷- گزینهٔ «۳»

با استفاده از رابطهٔ مقایسه‌ای سرعت انتشار امواج عرضی در تار، داریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}} = \frac{2}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

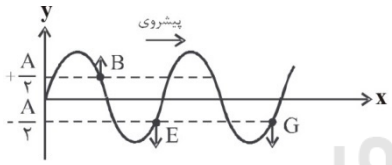
$$\xrightarrow[\rho_2=\rho_1]{F_2=F_1} \frac{v_1}{v_2} = \frac{D_2}{D_1} \xrightarrow{D_1=\frac{5}{4}D_2} \frac{v_1}{v_2} = \frac{D_2}{\frac{5}{4}D_2} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{v_1 - v_2}{v_2}\times100 = \frac{\frac{4}{5}v_2 - v_2}{v_2}\times100 = -20\%$$

پس سرعت انتشار امواج عرضی در طناب اول، ۲۰ درصد کم‌تر از طناب دوم است.

۳۸- گزینهٔ «۳»

چون وضعیت نوسانی نقطه‌های در فاز مخالف قرینهٔ یک‌دیگرند، بنابراین نقطه‌هایی که مکان و سرعت آن‌ها قرینهٔ هم باشند با هم در فاز مخالف‌اند.



در این شکل بین نقطه‌های داده شده، نقطه‌های E و G در فاز مخالف با نقطهٔ B هستند.

۳۹- گزینهٔ «۲»

فاصلهٔ دو نقطهٔ هم‌فاز متوالی از محیط انتشار موج برابر با طول موج است، بنابراین فاصلهٔ n نقطهٔ هم‌فاز متوالی برابر با $(n-1)\lambda$ خواهد بود. داریم:

$$3\lambda = 1/2 \Rightarrow \lambda = 0/4m$$

برای محاسبهٔ سرعت موج مکانیکی، داریم:

$$x = vt \xrightarrow[t=0/15s]{x=1/2m} 1/2 = v\times0/15 \Rightarrow v = 8\frac{m}{s}$$

برای محاسبهٔ بسامد موج، داریم: $v = \lambda f \Rightarrow 8 = 0/4f \Rightarrow f = 20Hz$

۴۰- گزینهٔ «۳»

فاصلهٔ n امین نقطهٔ هم‌فاز متوالی با نقطهٔ A از آن برابر با $d = n\lambda$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$d = n\lambda \xrightarrow{\lambda=\frac{v}{f}} d = \frac{nv}{f} \xrightarrow[v=100\frac{m}{s},f=200Hz]{n=3} d = \frac{3\times100}{200} = 1/5m$$

forum.konkur.in

www.konkur.in

شیمی پیش‌دانشگاهی

۴۱- گزینهٔ «۲»

گزینهٔ «۱»: اغلب داروها، ترکیب‌های شیمیایی با خاصیت اسیدی یا بازی هستند.

گزینهٔ «۲»: برای کاهش میزان اسیدی‌بودن خاک به آن آهک می‌افزایند.

گزینهٔ «۳»:با ورود فاضلاب‌های صنعتی، یون‌های واسطه سبب کاهش pH محیط می‌شوند.

گزینهٔ «۴»: شیمی‌دان‌ها مدت‌ها قبل از شناخت ساختار اسیدها و بازها، با ویژگی‌های آن‌ها آشنا بودند.

۴۲- گزینهٔ «۱»

عبارت «ت» جمله را به‌درستی تکمیل نمی‌کند.

توضیح برخی عبارت‌ها:

عبارت «ب»: طبق نظریهٔ آرنیوس هیدروژن کلرید $(HCl(g))$ یک اسید است، زیرا پس از حل شدن در آب، یون‌های هیدروژن (H^+) و کلرید (Cl^-) تولید می‌کند و محلول هیدروکلریک اسید $(HCl(aq))$ را پدید می‌آورد.

$$HCl(g) \xrightarrow{\text{آب}} H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

عبارت «پ»: معادله بازی بودن سدیم هیدروکسید $(NaOH(s))$ به‌صورت زیر است و این یک باز آرنیوس است، زیرا پس از حل شدن در آب تولید یون هیدروکسید می‌نماید.

$$NaOH(s) \xrightarrow{\text{آب}} Na^+(aq) + OH^-(aq)$$

عبارت «ت»: معادلهٔ اسیدی بودن $N_2O_5(g)$ به صورت زیر است:

$$N_2O_5(g) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

۴۳- گزینهٔ «۲»

نظریهٔ آرنیوس تنها در حالت محلول آن هم هنگامی کاربرد دارد که از آب به عنوان حلال استفاده شود.

نظریهٔ لوری – برونستد علاوه بر فاز محلول در فازهای دیگر نیز کاربرد دارد.

همچنین در این نظریه یک گونه، دهندهٔ H^+ و یک گونه، گیرندهٔ H^+ است.

تنها گزینهٔ «۲» این مطالب را بیان می‌کند.

۴۴- گزینهٔ «۳»

الف) آرنیوس روی رسانایی الکتریکی و برقکافت ترکیب‌های محلول در آب کار می‌کرد و به نظریه‌ای در مورد اسیدها و بازها دست یافت.

ب) باز مزدوج $H_2PO_4^-$، HPO_4^{2-} می‌باشد که یک آمفوتر است.

پ) ترتیب قدرت اسیدی: $HNO_2 > HOCl > HCN$

ترتیب قدرت بازی: $NO_2^- < ClO^- < CN^-$

ت) از فسفریک اسید به عنوان مادهٔ افزودنی در نوشابه‌های گازدار استفاده می‌شود.

۴۵- گزینهٔ «۲»

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: اسید مزدوج $O^{2-} \leftarrow OH^-$ و اسید مزدوج $H_2O \leftarrow H_3O^+$ می‌باشد.

گزینهٔ «۲»: بر اثر انحلال ۱۰۰ مولکول HF در آب ۱۰ مولکول یونیده شده است. (از یونیده شدن هر مولکول HF، دو یون H^+ و F^- ایجاد می‌شود)، بنابراین:

$$\text{درصد یونش} = \frac{10}{100} \times 100 = 10\%$$

گزینهٔ «۳»:

$$K_a = \frac{\alpha^2 M}{1-\alpha} = \frac{(0/2)^2 \times 2}{1-0/2} = \frac{0/08}{0/8} = 0/1$$

گزینهٔ «۴»: HCl یک اسید قوی است که در هنگام انحلال در آب تقریباً به‌طور کامل یونیده می‌شود.

۴۶- گزینهٔ «۳»

مورد اول نادرست است.

(حاشیه صفحهٔ ۶۳) $\underbrace{O^{2-}(aq)}_{\text{باز}} + \underbrace{H_2O(l)}_{\text{اسید}} \rightarrow 2OH^-(aq)$

مورد دوم درست است. (خود را بیازمایید صفحهٔ ۶۳)

مورد سوم نادرست است. مواد آمفوتر در برابر اسیدها نقش باز و در برابر بازها نقش اسید دارند.

مورد چهارم نادرست است. نیتریک اسید قوی‌تر از نیترو اسید است، پس باز مزدوج آن ضعیف‌تر از باز مزدوج نیترو اسید خواهد بود. لذا خاصیت بازی نیتریت از نیترات بیش‌تر است. (جدول صفحهٔ ۶۷)

forum.konkur.in

www.konkur.in

۴۷– گزینهٔ «۱»

$$HNO_2(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons H_3O^+(aq) + NO_2^-(aq)$$

غلظت اولیه	M	۰	۰
غلظت تعادلی	$M - M\alpha$	$M\alpha$	$M\alpha$

$$K_a = \frac{(M\alpha)^2}{M - M\alpha} = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow ۴/۵\times۱۰^{-۴} = \frac{۹\times۱۰^{-۴}M}{۰/۹۷}$$

$$\Rightarrow M = \frac{۴/۵\times۱۰^{-۴}\times۰/۹۷}{۹\times۱۰^{-۴}} = ۰/۴۸۵ mol.L^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع غلظت یون‌ها} = [H_3O^+] + [NO_2^-] = ۲M\alpha$$

$$= ۲\times۰/۴۸۵\times۰/۰۳ = ۰/۰۲۹۱ mol.L^{-1} = ۲/۹۱\times۱۰^{-۲} mol.L^{-1}$$

۴۸– گزینهٔ «۳»

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: براساس جدول صفحه ۶۷ کتاب درسی، ثابت یونش هیپوکلرواسید **(HOCl)** بیش‌تر از هیپوبرمواسید **(HOBr)** است، بنابراین باز مزدوج حاصل از **HOCl**، پایدارتر از باز مزدوج حاصل از **HOBr** می‌باشد.

گزینهٔ «۲»: هر چه اسید قوی‌تر باشد، باز مزدوج آن ضعیف‌تر بوده و در نتیجه پایدارتر است.

گزینهٔ «۳»: چون قدرت بازی B^- بیش‌تر از A^- است، بنابراین قدرت اسیدی **HA** بیش‌تر از **HB** بوده و در نتیجه غلظت هیدرونیوم حاصل از اسید **HA** بیشتر از اسید **HB** با همان غلظت خواهد بود.

گزینهٔ «۴»: قدرت جذب پروتون یون CN^- بیشتر از NO_2^- است، بنابراین CN^- قدرت بازی بیشتری دارد، پس HNO_2 قدرت اسیدی بیشتری داشته و در دما و غلظت یکسان، سرعت تولید گاز هیدروژن حاصل از واکنش نوار منیزیم با محلول HNO_2 بیشتر خواهد بود.

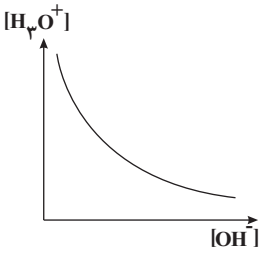
۴۹– گزینهٔ «۳»

$$H_2O(l) + H_2O(l) \rightleftharpoons H_3O^+(aq) + OH^-(aq)$$

$$K_W = [H_3O^+][OH^-]$$

این مقدار در دمای اتاق (۲۵ درجه سانتی‌گراد) برابر با $۱۰^{-۱۴} mol^۲.L^{-۲}$ است. K_W به دما وابسته است و با تغییر دما این مقدار نیز تغییر خواهد کرد.

$$K_W = [H_3O^+][OH^-] \Rightarrow [H_3O^+] = K_W(\underbrace{\frac{۱}{[OH^-]}}_{\text{ثابت}})$$



۵۰– گزینهٔ «۲»

گزینهٔ «۱»:

$$\left.\begin{matrix} K_W = [OH^-][H_3O^+] = ۱۰^{-۱۴} \\ [H_3O^+] = ۱۰^{۶}[OH^-] \end{matrix}\right\} [OH^-]\times۱۰^{۶}[OH^-] = ۱۰^{-۱۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [OH^-] = ۱۰^{-۱۰} mol.L^{-1} \\ [H_3O^+] = ۱۰^{-۴} mol.L^{-1} \end{cases}$$

گزینهٔ «۲»: طبق نمودار صفحهٔ ۷۰ کتاب درسی این محلول متعلق به آب گازدار می‌باشد.

گزینهٔ «۳»: ثابت یونش آب در دمای $۲۵^\circ C$ برابر $۱۰^{-۱۴}$ است، پس:

$$\frac{[OH^-]\ \text{محلول}}{۱۰^{-۱۴}} = \frac{۱۰^{-۱۰}}{۱۰^{-۱۴}} = ۱۰^{۴}$$

گزینهٔ «۴»: غلظت یون هیدرونیوم در آب خالص در دمای $۲۵^\circ C$ برابر $۱۰^{-۷}$ است، پس:

$$\frac{[H_3O^+]\ \text{محلول}}{[H_3O^+]\ \text{آب}} = \frac{۱۰^{-۴}}{۱۰^{-۷}} = ۱۰^{۳}$$

سایت کنکور Konkur.in

forum.konkur.in

www.konkur.in

سایت کنکور
Konkur.in

forum.konkur.in