۷۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\mathrm{Cotg}\,۷۵^\circ = \mathrm{tg}\,۱۵^\circ = \mathrm{tg}(۶۰ - ۴۵) = \frac{\mathrm{tg}\,۶۰ - \mathrm{tg}\,۴۵}{۱ + \mathrm{tg}\,۶۰\,\mathrm{tg}\,۴۵} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۱ + \sqrt{۳}} = \frac{\left(\sqrt{۳} - ۱\right)^۲}{۳ - ۱} = ۲ - \sqrt{۳}$$

۷۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sqrt{۶} - ۴\,\mathrm{Cos}\,۱۵^\circ}{\sqrt{۲} + ۴\,\mathrm{Cos}\,۷۵^\circ} = \frac{\sqrt{۶} - ۴\,\mathrm{Cos}\,(۴۵^\circ - ۳۰^\circ)}{\sqrt{۲} + ۴\,\mathrm{Cos}\,(۴۵^\circ + ۳۰^\circ)} = \frac{\sqrt{۶} - ۴\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right)}{\sqrt{۲} + ۴\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{۶} - \left(\sqrt{۶} + \sqrt{۲}\right)}{\sqrt{۲} + \left(\sqrt{۶} - \sqrt{۲}\right)} = \frac{-\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = -\mathrm{tg}\,۳۰^\circ$$

۷۸- بر اساس قوانین مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$۲\,\mathrm{Cos}^۲\left(\frac{۷\pi}{۴} - x\right) = ۲\,\mathrm{Cos}^۲\left(\frac{۸\pi - \pi}{۴} - x\right) = ۲\,\mathrm{Cos}^۲\left(۲\pi - \frac{\pi}{۴} - x\right) = ۲\,\mathrm{Cos}^۲\left(-\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)\right)$$

$$= ۲\,\mathrm{Cos}^۲\left(\frac{\pi}{۴} + x\right)$$

$$\mathrm{Cos}^۲x\left(۱ + \mathrm{tg}^۲x\right) = \mathrm{Cos}^۲x \,.\, \frac{۱}{\mathrm{Cos}^۲x} \Rightarrow ۲\,\mathrm{Cos}^۲\left(\frac{\pi}{۴} + x\right) - \mathrm{Cos}^۲x \,.\, \frac{۱}{\mathrm{Cos}^۲x}$$

$$= \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{۲} + ۲x\right) + ۱ - ۱ = -\mathrm{Sin}\,۲x$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۷۹- هر یک از عبارات را بسط می‌دهیم:

$$\mathrm{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) = \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\frac{\pi}{۳} + \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}\,x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{Cos}\,x$$

$$\mathrm{Cos}\left(x + \frac{\pi}{۶}\right) = \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Cos}\frac{\pi}{۶} - \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{Cos}\,x - \frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}\,x$$

$$\mathrm{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) - \mathrm{Cos}\left(x + \frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\mathrm{Sin}\,x}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{Cos}\,x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\mathrm{Cos}\,x + \frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Sin}\,x$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۸۰- روابط $\text{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$, $\text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$ را بسط می‌دهیم :

$$\text{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\text{Sin }x\ \text{Cos}\frac{\pi}{۴}+\text{Cos }x\ \text{Sin}\frac{\pi}{۴}$$

$$\text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\text{Cos }x\ \text{Cos}\frac{\pi}{۴}-\text{Sin }x\ \text{Sin}\frac{\pi}{۴}$$

با جایگذاری $\text{Sin}\frac{\pi}{۴}=\text{Cos}\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ داریم:

$$\sqrt{۲}\left[\text{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)+\text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)\right]=\sqrt{۲}\left[\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\text{Sin }x+\text{Cos }x)+\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\text{Cos }x-\text{Sin }x)\right]$$
$$=\text{Sin }x+\text{Cos }x+\text{Cos }x-\text{Sin }x=۲\text{Cos }x$$

پس گزینه ۱ صحیح است

۸۱- می‌دانیم $\text{tg}\left(\frac{\pi}{۲}+x\right)=-\text{Cotg }x$ پس :

$$\sqrt{۲}\text{Sin}\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)-\text{tg}\left(\frac{\pi}{۲}+x\right)\text{Sin }x=\sqrt{۲}\left[\text{Sin }x\text{Cos}\frac{\pi}{۴}-\text{Cos }x\text{Sin}\frac{\pi}{۴}\right]+\text{Cotg }x\text{Sin }x$$
$$=\sqrt{۲}\left[\text{Sin }x\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\text{Cos }x\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]+\frac{\text{Cos }x}{\text{Sin }x}\times\text{Sin }x=(\text{Sin }x-\text{Cos }x)+\text{Cos }x=\text{Sin }x$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۸۲-
$$\frac{۱}{۲\text{Sin }a}[\text{Sin}(a+b)+\text{Sin}(a-b)]=\frac{۱}{۲\text{Sin }a}\left[۲\text{Sin}\frac{a+b+a-b}{۲}\text{Cos}\frac{a+b-a+b}{۲}\right]$$
$$=\frac{۱}{۲\text{Sin }a}[۲\text{Sin }a\text{Cos }b]=\text{Cos }b$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

۸۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Sin }\alpha=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{\alpha \text{ در ربع اول}}\text{Cos }\alpha=\sqrt{۱-\text{Sin}^{۲}\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

$$\text{Cos }\beta=-\frac{۵}{۱۳}\xrightarrow{\beta \text{ در ربع دوم}}\text{Sin }\beta=\sqrt{۱-\text{Cos}^{۲}\beta}=\sqrt{۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}}=\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\text{Cos}(\alpha-\beta)=\text{Cos}\alpha\ \text{Cos}\beta+\text{Sin}\alpha\ \text{Sin}\beta=\frac{۴}{۵}\times\left(-\frac{۵}{۱۳}\right)+\frac{۳}{۵}\times\frac{۱۲}{۱۳}=\frac{۱۶}{۶۵}$$

۸۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\mathrm{Sin}\alpha = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \mathrm{Cos}\alpha = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۹}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\mathrm{Cos}\beta = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \mathrm{Sin}\beta = -\sqrt{۱ - \frac{۴}{۹}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$\mathrm{Sin}(\alpha - \beta) = \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta - \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sin}\beta = \frac{۱}{۳}\left(-\frac{۲}{۳}\right) - \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\left(\frac{-\sqrt{۵}}{۳}\right)$$

در نتیجه: $\mathrm{Sin}(\alpha - \beta) = \frac{۲}{۹}\left(\sqrt{۱۰} - ۱\right)$، پس: $A = \sqrt{۱۰} - ۱$.

۸۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\mathrm{Sin}(\alpha + \beta) + \mathrm{Cos}(\alpha - \beta) = \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Sin}\beta + \mathrm{Cos}\alpha\,\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Sin}\alpha\,\mathrm{Sin}\beta$$
$$= \mathrm{Sin}\alpha\,(\mathrm{Cos}\beta + \mathrm{Sin}\beta) + \mathrm{Cos}\alpha\,(\mathrm{Sin}\beta + \mathrm{Cos}\beta) = (\mathrm{Sin}\beta + \mathrm{Cos}\beta)(\mathrm{Sin}\alpha + \mathrm{Cos}\alpha)$$

$$\mathrm{Sin}\alpha = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \mathrm{Cos}\alpha = \sqrt{۱ - \mathrm{Sin}^{۲}\alpha} = \sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = \frac{۴}{۵}$$

$$\mathrm{Cos}\beta = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \mathrm{Sin}\beta = \sqrt{۱ - \mathrm{Cos}^{۲}\beta} = \sqrt{۱ - \frac{۲۵}{۱۶۹}} = \frac{۱۲}{۱۳}$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با:

$$\left(\frac{۵}{۱۳} + \frac{۱۲}{۱۳}\right)\left(\frac{۴}{۵} + \frac{۳}{۵}\right) = \frac{۱۷}{۱۳} \times \frac{۷}{۵} = \frac{۱۱۹}{۶۵} \Rightarrow m = ۱۱۹$$

۸۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف $\text{Cotg}(\alpha+\beta)=\frac{1}{\text{tg}(\alpha+\beta)}$**، مقدار** $\text{tg}(\alpha+\beta)$ **را از فرمول** $\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}$ **به دست می‌آوریم.**

$$\text{Sin}\alpha=\frac{4}{5}\xrightarrow{\text{a حاده است.}}\text{Cos}\alpha=\sqrt{1-\text{Sin}^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

$$\text{Sin}\beta=\frac{15}{17}\xrightarrow{\beta\text{ منفرجه است.}}\text{Cos}\beta=-\sqrt{1-\text{Sin}^2\beta}=-\sqrt{1-\frac{225}{289}}=-\sqrt{\frac{64}{289}}=-\frac{8}{17}$$

$$\Rightarrow\text{tg}\alpha=\frac{\text{Sin}\alpha}{\text{Cos}\alpha}=\frac{4}{3},\ \text{tg}\beta=\frac{\text{Sin}\beta}{\text{Cos}\beta}=-\frac{15}{8}\Rightarrow\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{1-\text{tg}\alpha\,\text{tg}\beta}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{15}{8}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{15}{8}}$$

$$=\frac{-\frac{13}{24}}{\frac{84}{24}}=-\frac{13}{84}\Rightarrow\text{Cotg}(\alpha+\beta)=-\frac{84}{13}$$

۸۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته : $\text{Sin}\alpha\,\text{Cos}\beta-\text{Cos}\alpha\,\text{Sin}\beta=\text{Sin}(\alpha-\beta)$

نکته : $2\text{Sin}x\,\text{Cos}x=\text{Sin}2x$

$$\frac{1}{\text{Sin}x}-\frac{\sqrt{3}}{\text{Cos}x}=\frac{\text{Cos}x-\sqrt{3}\text{Sin}x}{\text{Sin}x\,\text{Cos}x}=\frac{2\left(\frac{1}{2}\text{Cos}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{Sin}x\right)}{\frac{1}{2}\text{Sin}2x}$$

$$=\frac{2\left(\text{Sin}\frac{\pi}{6}\text{Cos}x-\text{Cos}\frac{\pi}{6}\text{Sin}x\right)}{\frac{1}{2}\text{Sin}2x}=\frac{2\text{Sin}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\frac{1}{2}\text{Sin}2x}=4\frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\text{Sin}2x}$$

با جای‌گذاری $x=\frac{\pi}{18}$**، مقدار عبارت موردنظر برابر می‌شود با:**

$$4\frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{18}\right)}{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{9}\right)}=4\frac{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{9}\right)}{\text{Sin}\left(\frac{\pi}{9}\right)}=4$$

۸۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sqrt{۳}}{\text{Sin }۱۵^\circ}+\frac{۱}{\text{Cos }۱۵^\circ}=\frac{\sqrt{۳}\text{ Cos }۱۵^\circ+\text{Sin }۱۵^\circ}{\text{Sin }۱۵^\circ\text{ Cos }۱۵^\circ}=\frac{۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\text{Cos }۱۵^\circ+\frac{۱}{۲}\text{Sin }۱۵^\circ\right)}{\frac{۱}{۲}\text{Sin }۳۰^\circ}$$

$$\frac{۲(\text{Cos }۳۰^\circ\text{ Cos }۱۵^\circ+\text{Sin }۳۰^\circ\text{ Sin }۱۵^\circ)}{\frac{۱}{۴}}=۸\text{ Cos }(۳۰^\circ-۱۵^\circ)=۸\text{ Cos }۱۵^\circ$$

۸۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A=\frac{\text{Cos}\,۱۰^\circ+\tan ۶۰^\circ\text{ Sin}\,۱۰^\circ}{\text{Sin}\,۱۴۰^\circ}=\frac{\text{Cos}\,۱۰^\circ+\frac{\text{Sin}\,۶۰^\circ}{\text{Cos}\,۶۰^\circ}\text{Sin}\,۱۰^\circ}{\text{Sin}\,۱۴۰^\circ}$$

$$=\frac{\text{Cos}\,۱۰^\circ\text{ Cos}\,۶۰^\circ+\text{Sin}\,۶۰^\circ\text{ Sin}\,۱۰^\circ}{\text{Cos}\,۶۰^\circ\text{ Sin}\,۱۴۰^\circ}=\frac{\text{Cos}(۶۰^\circ-۱۰^\circ)}{\frac{۱}{۲}\text{Sin}\,۱۴۰^\circ}=\frac{\text{Cos}\,۵۰^\circ}{\frac{۱}{۲(\text{Sin}(۹۰^\circ+۵۰^\circ))}}$$

$$=\frac{۲\text{Cos}\,۵۰^\circ}{\text{Cos}\,۵۰^\circ}=۲$$

۹۰- به جای $\sqrt{۳}$ عبارت $\text{tg }۶۰^\circ=\frac{\text{Sin }۶۰^\circ}{\text{Cos }۶۰^\circ}$ را قرار می‌دهیم پس:

$$\frac{\text{Cos }۲۰^\circ+\sqrt{۳}\text{Sin }۲۰^\circ}{\text{Cos }۴۰^\circ}=\frac{\text{Cos }۲۰^\circ+\frac{\text{Sin }۶۰^\circ}{\text{Cos }۶۰^\circ}\text{Sin }۲۰^\circ}{\text{Cos }۴۰^\circ}=\frac{\text{Cos }۲۰^\circ\text{Cos }۶۰^\circ+\text{Sin }۲۰^\circ\text{Sin }۶۰^\circ}{\text{Cos }۴۰^\circ\text{Cos }۶۰^\circ}$$

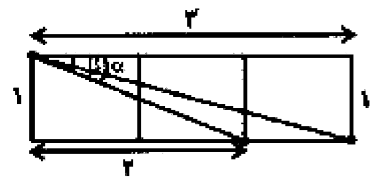
$$=\frac{\text{Cos }(۶۰-۲۰)}{\text{Cos }۴۰\text{ Cos }۶۰}=\frac{۱}{\text{Cos }۶۰}=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}=۲$$

و لذا گزینه ۳ جواب صحیح است.

۹۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر سینوس و کسینوس زوایای α و β را به دست می‌آوریم:

$$\sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \qquad \cos\alpha = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\sin\beta = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} \qquad \cos\beta = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

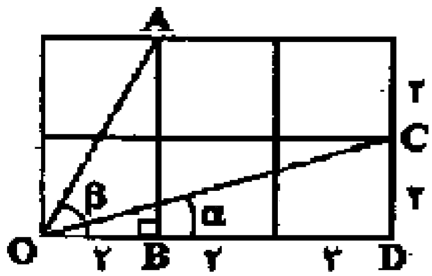


$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta = \frac{۶}{۵\sqrt{۲}} - \frac{۱}{۵\sqrt{۲}} = \frac{۵}{۵\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۹۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته : $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

با توجه به شکل مقابل در دو مثلث OAB و OCD می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{CD}{OC} = \dfrac{۲}{\sqrt{۴۰}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۱۰}} \quad \text{و} \quad \cos\alpha = \dfrac{۶}{\sqrt{۴۰}} = \dfrac{۳}{\sqrt{۱۰}} \\ \sin\beta = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{۴}{\sqrt{۲۰}} = \dfrac{۲}{\sqrt{۵}} \quad \text{و} \quad \cos\beta = \dfrac{۲}{\sqrt{۲۰}} = \dfrac{۱}{\sqrt{۵}} \end{cases}$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{۳}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{۱}{\sqrt{۵}} + \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۵}{\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۵}}$$

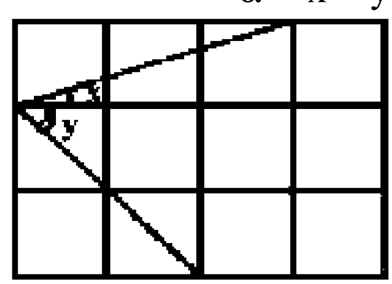
$$= \frac{۵}{۵\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۹۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:

$\alpha = x + y$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{۱ - \operatorname{tg}x\ \operatorname{tg}y}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{۱}{۳} + ۱}{۱ - \frac{۱}{۳}\times ۱} = \frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = ۲$$



۹۴- چون عبارت مطلوب برحسب tg بیان شده است، از دو طرف عبارت داده شده tg می‌گیریم :

$$\alpha + \beta = \frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow tg(\alpha + \beta) = tg\frac{۵\pi}{۴} \Rightarrow \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{۱ - tg\,\alpha\, tg\,\beta} = ۱ \Rightarrow tg\,\alpha + tg\,\beta = ۱ - tg\alpha\, tg\,\beta \Rightarrow$$

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\alpha\, tg\,\beta = ۱ \Rightarrow ۱ + tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\alpha\, tg\,\beta = ۲ \Rightarrow (۱ + tg\,\alpha)(۱ + tg\,\beta) = ۲$$

پس گزینه ۳ جواب صحیح است.

۹۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} Cos\,x - Sin\,x = a \\ Cos\,x + Sin\,x = b \end{cases}$$

$$Cos\,x = \frac{a + b}{۲} \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به دو معادله فوق

$$Sin\,x = b - \frac{a + b}{۲} = \frac{b - a}{۲} \qquad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) می‌توان نوشت

$$tg\,x = \frac{Sin\,x}{Cos\,x} = \frac{b - a}{b + a}$$

با توجه به بسط

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{۱ - tg\alpha\ tg\beta}$$

می‌توان نوشت

$$tg\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \frac{tg\,x + ۱}{۱ - tg\,x} = \frac{۱ + \frac{b - a}{b + a}}{۱ - \frac{b - a}{b + a}} = \frac{b}{a}$$

۹۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۱ + tg(a)\ tg(b) = \frac{۴}{\frac{tg(a) - tg(b)}{۱ + tg(a)tg(b)}} \Rightarrow ۱ + tg(a)tg(b) = \frac{۴(۱ + tg(a)tg(b))}{tg(a) - tg(b)}$$

$$\Rightarrow tg(a) - tg(b) = ۴ \xrightarrow{tg(a) = \frac{۱}{۲}} tg(b) = -\frac{۷}{۲}$$

$$tg(a + b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{۱ - tg(a)tg(b)} = \frac{\frac{۱}{۲} - \frac{۷}{۲}}{۱ + \frac{۷}{۴}} = \frac{-۳}{\frac{۱۱}{۴}} = \frac{-۱۲}{۱۱}$$

-۹۷

$$۲۵ - \alpha = ۴۵ - (\alpha + ۲۰) \Rightarrow tg\,(۲۵ - \alpha) = tg(۴۵ - (\alpha + ۲۰)) = \frac{tg\,۴۵ - tg\,(\alpha + ۲۰)}{۱ + tg\,۴۵\,tg\,(\alpha + ۲۰)} = \frac{۱ - \frac{۳}{۴}}{۱ + \frac{۳}{۴}} = \frac{۱}{۷}$$

چون $Cotg\,\alpha = \frac{۱}{tg\,\alpha}$ ، پس :

$$Cotg\,(۲۵ - \alpha) = ۷$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

-۹۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$۲\beta = (\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \tan ۲\beta = \tan((\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)}{۱ + \tan(\alpha + \beta)\,\tan(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{۶}{۵} - \frac{۲}{۳}}{۱ + \frac{۶}{۵} \times \frac{۲}{۳}} = \frac{\frac{۸}{۱۵}}{\frac{۲۷}{۱۵}} = \frac{۸}{۲۷}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{\tan ۲\beta} = \sqrt[۳]{\frac{۸}{۲۷}} = \frac{۲}{۳}$$

-۹۹ با توجه به اینکه $۲a = (a + b) + (a - b)$ می‌باشد. پس :

$$tg\,۲a = \frac{tg\,(a + b) + tg\,(a - b)}{۱ - tg\,(a + b)\,tg\,(a - b)} = \frac{\frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۷}}{۱ - \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۷}} = \frac{۱۴ + ۱۵}{۳۵ - ۶} = ۱$$

در نتیجه $tg\,۲a = ۱$ **پس گزینه ۳ جواب صحیح است.**

-۱۰۰

$$\frac{۲\beta}{۳} = ۲\alpha + \frac{\beta}{۳} - ۲\alpha + \frac{\beta}{۳} = ۲\alpha + \frac{\beta}{۳} - \left(۲\alpha - \frac{\beta}{۳}\right) \Rightarrow$$

$$tg\frac{۲\beta}{۳} = tg\left(\left(۲\alpha + \frac{\beta}{۳}\right) - \left(۲\alpha - \frac{\beta}{۳}\right)\right) = \frac{tg\left(۲\alpha + \frac{\beta}{۳}\right) - tg\left(۲\alpha - \frac{\beta}{۳}\right)}{۱ + tg\left(۲\alpha + \frac{\beta}{۳}\right).tg\left(۲\alpha - \frac{\beta}{۳}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{۳} + ۱ - \sqrt{۳} + ۱}{۱ + \left(\sqrt{۳} + ۱\right)\left(\sqrt{۳} - ۱\right)} = \frac{۲}{۱ + (۳ - ۱)} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۱۰۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $(a+b)-(b-a)=۲a$ در نتیجه

$$tg\,۲a = tg((a+b)-(b-a))$$

با توجه به رابطه مثلثاتی $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha - tg\beta}{۱+tg\alpha\, tg\beta}$ می‌توان نوشت:

$$tg\,۲a=\frac{tg(a+b)-tg(a-b)}{۱+tg(a+b)\,tg(a-b)}=\frac{-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}}=-\frac{۴}{۳}$$

در نتیجه:

$$Cotg\,۲a=\frac{۱}{tg\,۲a}=-\frac{۳}{۴}$$

۱۰۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. از رابطه‌ی داده شده، $tg(\alpha+۲۰^\circ)$ را به دست می‌آوریم:

$$tg\alpha+tg\,۲۰^\circ=۳(۱-tg\alpha\;tg\,۲۰^\circ)\Rightarrow\frac{tg\alpha+tg\,۲۰^\circ}{۱-tg\alpha\;tg\,۲۰^\circ}=۳\Rightarrow tg(\alpha+۲۰^\circ)=۳$$

از مقدار $tg(\alpha+۲۰^\circ)$، $tg(۴۵^\circ-(\alpha+۲۰^\circ))$ را به دست می‌آوریم:

$$tg(۲۵^\circ-\alpha)=tg(۴۵^\circ-(\alpha+۲۰^\circ))=\frac{tg(۴۵^\circ)-tg(\alpha+۲۰^\circ)}{۱+tg(۴۵^\circ)\,tg(\alpha+۲۰^\circ)}=\frac{۱-۳}{۱+۳}=\frac{-۲}{۴}=\frac{-۱}{۲}$$

پس $Cotg(۲۵^\circ-\alpha)$ برابر ۲- است.

۱۰۳-

$$tg\,۱۳۵^\circ=-۱\Rightarrow tg(۵۰+۸۵)=-۱\Rightarrow\frac{tg\,۵۰+tg\,۸۵}{۱-tg\,۵۰.tg\,۸۵}=-۱\Rightarrow$$

$$tg\,۵۰+tg\,۸۵=-۱+tg\,۵۰.tg\,۸۵\Rightarrow tg\,۵۰+tg\,۸۵-tg\,۵۰.tg\,۸۵=-۱$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ درست است.

۱۰۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی‌ها را به توان ۲ می‌رسانیم از جمع طرفین دو تساوی خواهیم داشت:

$$\begin{cases}Cos^۲a+Cos^۲b+۲Cos\,a\;Cos\,b=\frac{۹}{۴}\\ Sin^۲a+Sin^۲b+۲Sin\,a\;Sin\,b=\frac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$۲(Cos\,a\;Cos\,b+Sin\,a\;Sin\,b)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow Cos(a-b)=\frac{۱}{۴}$$

۱۰۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا طرفین تساوی را به توان دو می‌رسانیم و سپس با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۹\text{Sin}^۲ A + ۲۴\text{Sin}A\,\text{Cos}B + ۱۶\text{Cos}^۲ B = ۱ \\ ۱۶\text{Sin}^۲ B + ۲۴\text{Sin}B\,\text{Cos}A + ۹\text{Cos}^۲ A = ۳۶ \end{cases}$$

$$۹ + ۱۶ + ۲۴(\text{Sin}A\,\text{Cos}B + \text{Sin}B\,\text{Cos}A) = ۳۷ \Rightarrow ۲۴\text{Sin}(A+B) = ۱۲ \Rightarrow \text{Sin}(A+B) = \frac{۱}{۲}$$

از طرفی:

$$\text{Cotg}^۲(A+B) = \frac{۱}{\text{Sin}^۲(A+B)} - ۱ = \frac{۱}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲} - ۱ = ۴ - ۱ = ۳$$

۱۰۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{Cos}\,\alpha = -\sqrt{۱- \text{Sin}^{۲}\alpha} = -\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\text{Cos}\,۲\alpha = \text{Cos}^{۲}\alpha - \text{Sin}^{۲}\alpha = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} - \frac{۲۵}{۱۶۹} = \frac{۱۱۹}{۱۶۹}$$

۱۰۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha+\frac{\pi}{۴}=\beta \Rightarrow \alpha=\beta-\frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۲\alpha=۲\beta-\frac{\pi}{۲}$$

$$\text{Sin}\,۲\alpha=\text{Sin}\left(۲\beta-\frac{\pi}{۲}\right)=\text{Sin}\left(-\left(\frac{\pi}{۲}-۲\beta\right)\right)=-\text{Sin}\left(\frac{\pi}{۲}-۲\beta\right)=-\text{Cos}(۲\beta)$$

۱۰۸-

$$\left(\text{Cos}^{۴}x - \text{Sin}^{۴}x\right)\left(۱ + \text{tg}^{۲}x\right) + \text{tg}^{۲}x = \left(\text{Cos}^{۴}x - \text{Sin}^{۴}x\right)\frac{\left(\text{Cos}^{۲}x + \text{Sin}^{۲}x\right)}{\text{Cos}^{۲}x} + \text{tg}^{۲}x$$

$$= \left(\text{Sin}^{۲}x + \text{Cos}^{۲}x\right)\left(\text{Cos}^{۲}x - \text{Sin}^{۲}x\right)\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}x} + \text{tg}^{۲}x$$

$$= \left(\text{Cos}^{۲}x - \text{Sin}^{۲}x\right)\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}x} + \text{tg}^{۲}x = ۱ - \text{tg}^{۲}x + \text{tg}^{۲}x = ۱$$

بنابراین گزینه ۲ جواب صحیح است.

۱۰۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح ست.

$$\tan\frac{۶\pi}{۳}\text{Cos}\left(\frac{۳\pi}{۲} + x\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan\left(۳\pi - \frac{\pi}{۳}\right)\text{Sin}\,x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\tan\left(\frac{\pi}{۳}\right)\text{Sin}\,x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\sqrt{۳}\,\text{Sin}\,x = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\,x = -\frac{۱}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow \text{Cos}\,۲x = ۱ - ۲\text{Sin}^{۲}x = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۱۲}\right) = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

۱۱۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اتحاد $\text{Cos}(\alpha\pm\beta) = \text{Cos}\,\alpha\,\text{Cos}\,\beta \pm \text{Sin}\,\alpha\,\text{Sin}\,\beta$ داریم:

$$\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۶} - x\right) - \text{Cos}\left(\frac{\pi}{۶} + x\right)$$

$$= \left(\cancel{\text{Cos}\frac{\pi}{۶}\text{Cos}\,x} + \text{Sin}\frac{\pi}{۶}\text{Sin}\,x\right) - \left(\cancel{\text{Cos}\frac{\pi}{۶}\text{Cos}\,x} - \text{Sin}\frac{\pi}{۶}\text{Sin}\,x\right)$$

$$= ۲\text{Sin}\frac{\pi}{۶}\text{Sin}\,x = ۲\times\frac{۱}{۲}\times\text{Sin}\,x = \text{Sin}\,x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \text{Cos}\,۲x = ۱ - ۲\text{Sin}^{۲}x = ۱ - ۲\times\frac{۱}{۹} = \frac{۷}{۹}$$

۱۱۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)+\text{Cos}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۲}{۳}\Rightarrow(\text{Cos }x)\left(\frac{۱}{۲}\right)-\cancel{(\text{Sin }x)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)}+(\text{Cos }x)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$
$$+\cancel{(\text{Sin }x)\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \text{Cos }x=\frac{۲}{۳}$$
$$\text{Cos }۲x=۲\ \text{Cos}^۲x-۱=۲\left(\frac{۲}{۳}\right)^۲-۱=-\frac{۱}{۹}$$

۱۱۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Sin }x\ \text{Cos}\frac{\pi}{۶}+\text{Cos }x\ \text{Sin}\frac{\pi}{۶}+\text{Sin }x\ \text{Cos}\frac{\pi}{۶}-\text{Cos }x\ \text{Sin}\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$
$$\Rightarrow ۲\text{Sin }x\ \text{Cos}\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times \text{Sin }x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow \text{Sin }x=\frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \text{Cos }۲x=۱-۲\text{Sin}^۲x\Rightarrow \text{Cos }۲x=۱-۲\left(\frac{۱}{۱۶}\right)=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

۱۱۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Cos}۳\beta\,\text{Cos}۲\beta+\text{Sin}۳\beta\,\text{Sin}۲\beta=\text{Cos}(۳\beta-۲\beta)=\text{Cos}\beta=\frac{۲}{۳}\Rightarrow\text{Sin}\beta=\sqrt{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$
$$\text{Sin}۲\beta=۲\text{Sin}\beta\,\text{Cos}\beta=۲\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)=\frac{۴\sqrt{۵}}{۹}$$

۱۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{Sin}\alpha-\text{Cos}\alpha=\frac{۱}{۲}\rightarrow(\text{Sin}\alpha-\text{Cos}\alpha)^۲=\frac{۱}{۴}$$
$$۱-\text{Sin}۲\alpha=\frac{۱}{۴}\rightarrow\text{Sin}۲\alpha=\frac{۳}{۴}$$
$$\text{Cos}\left(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha\right)=-\text{Sin}۲\alpha=-\frac{۳}{۴}$$

-۱۱۵

$$\sin x + \cos x = \sqrt{۲} \Rightarrow \sin^{۲} x + \cos^{۲} x + ۲\sin x \cos x = ۲ \Rightarrow ۱ + \sin ۲x = ۲ \Rightarrow$$

$$\sin ۲x = ۱ \Rightarrow \cos ۲x = \pm\sqrt{۱ - \sin^{۲} ۲x} = \pm\sqrt{۱ - ۱} = ۰$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

-۱۱۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم

$$\cos ۲x = \cos^{۲} x - \sin^{۲} x = (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)$$

در نتیجه

$$\Rightarrow \frac{\cos ۲x}{\sqrt{۲}\sin x - ۱} - \sqrt{۲}\frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x + \sin x)} + \sqrt{۲}\cos x$$

$$= \frac{\cos ۲x}{-۱ + \sqrt{۲}\sin x} - \sqrt{۲}\cos x + \sqrt{۲}\sin x + \sqrt{۲}\cos x = \frac{\cos ۲x + ۲\sin^{۲} x - \sqrt{۲}\sin x}{-۱ + \sqrt{۲}\sin x}$$

$$= \frac{۱ - \sqrt{۲}\sin x}{-۱ + \sqrt{۲}\sin x} = -۱$$

-۱۱۷ گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x)^{۲} - (\cos x - \sin x)^{۲}}{\cos^{۲} x - \sin^{۲} x}$$

$$= \frac{۴\sin x \cos x}{\cos ۲x} = \frac{۲\sin ۲x}{\cos ۲x} = ۲\tan ۲x$$

۱۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته : $\operatorname{Cos}۲\alpha = \operatorname{Cos}^۲\alpha - \operatorname{Sin}^۲\alpha = ۱ - ۲\operatorname{Sin}^۲\alpha$

$$\operatorname{Cos}۲\alpha = ۱ - ۲\operatorname{Sin}^۲\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{۸}} \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱ - ۲\operatorname{Sin}^۲\frac{\pi}{۸} \Rightarrow -۲\operatorname{Sin}^۲\frac{\pi}{۸} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} - ۱$$

$$= \frac{\sqrt{۲} - ۲}{۲} \Rightarrow \operatorname{Sin}^۲(\frac{\pi}{۸}) = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴} \xrightarrow{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۸} > ۰} \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۸} = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$$

حال با جای‌گذاری مقدار $\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۸}$ داریم:

$$\sqrt{۲ + \sqrt{۲}}\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۸} = \sqrt{۲ + \sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲} = \frac{\sqrt{۲^۲ - \sqrt{۲}^۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۴ - ۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۱۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۱ - \operatorname{Cos}۲(۱۵^\circ)}{۲} - \frac{۱ + \operatorname{Cos}۲(۲۲/۵^\circ)}{۲} = \frac{-۱}{۲}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۳} + \sqrt{۲}}{-۴}$$

۱۲۰- بر اساس روابط نصف قوس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{Sin}۲\alpha = ۲\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha \\ ۱ + \operatorname{Cos}۲\alpha = ۲\operatorname{Cos}^۲\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\operatorname{Sin}۲\alpha}{۱ + \operatorname{Cos}۲\alpha} = \frac{۲\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha}{۲\operatorname{Cos}^۲\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۱۲۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{Cos}۲(۲۲/۵^\circ) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۲(۱ + ۲\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x)}{۱ + ۲\operatorname{Cos}^۲x - ۱} = \frac{۲(\operatorname{Sin}x + \operatorname{Cos}x)^۲}{۲\operatorname{Cos}^۲x} = \left(\frac{\operatorname{Cos}x + \operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}\right)^۲ = (۱ + \operatorname{tg}x)^۲$$

۱۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. صورت و مخرج کسر را برحسب نسبت‌های مثلثاتی $\frac{x}{2}$ می‌نویسیم

$$\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\ ,\ \tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

پس $\tan x = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ یا $\tan x = \frac{4}{3}$

۱۲۴-

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \frac{1-\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}-2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}} = 4 \Rightarrow$$

$$3\tan^2\frac{x}{2}+10\tan\frac{x}{2}+3=0 \Rightarrow \begin{cases} \tan\frac{x}{2} = -3 \\ \text{یا} \\ \tan\frac{x}{2} = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

با توجه به جواب‌های بدست آمده، گزینه ۱ پاسخ صحیح می‌باشد.

۱۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲}\right) = -\text{Cotg}\frac{\alpha}{۲}$$

حال فرض سؤال را ساده می‌کنیم:

$$۲\text{Sin}\alpha = ۱+\text{Cos}\alpha \rightarrow ۴\text{Sin}^۲\alpha = \text{Cos}^۲\alpha + ۲\text{Cos}\alpha + ۱$$

$$\rightarrow ۴\left(۱-\text{Cos}^۲\alpha\right) - \text{Cos}^۲\alpha - ۲\text{Cos}\alpha - ۱ = ۰$$

$$-۵\text{Cos}^۲\alpha - ۲\text{Cos}\alpha + ۳ = ۰ \rightarrow \begin{cases} \text{Cos}\alpha = -۱ \quad \otimes \\ \text{Cos}\alpha = \frac{۳}{۵} \xrightarrow{\frac{\text{Sin}\alpha}{۱+\text{Cos}\alpha}=\frac{۱}{۲}} \text{Sin}\alpha = \frac{۴}{۵} \end{cases}$$

$$\text{Cos}\alpha = \frac{۱-\text{tg}^۲\frac{\alpha}{۲}}{۱+\text{tg}^۲\frac{\alpha}{۲}} = \frac{۳}{۵} \rightarrow \text{tg}^۲\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow[\text{Cos}\alpha>۰]{\text{Sin}\alpha>۰} \text{tg}\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{۲} \rightarrow -\text{Cotg}\frac{\alpha}{۲} = -۲$$

روش دوم:

$$\frac{\text{Sin}\alpha}{۱+\text{Cos}\alpha} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۲\text{Sin}\frac{\alpha}{۲}\text{Cos}\frac{\alpha}{۲}}{۲\text{Cos}^۲(\frac{\alpha}{۲})} = \frac{\text{Sin}\frac{\alpha}{۲}}{\text{Cos}\frac{\alpha}{۲}} = \tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{\alpha}{۲}\right) = -\cot\frac{\alpha}{۲} = -۲$$

۱۲۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Cos}\left(\frac{۴\pi}{۳}\right) = \text{Cos}\left(\pi+\frac{\pi}{۳}\right) = -\text{Cos}\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲},\ \text{Sin}\left(\frac{\pi}{۲}+x\right) = \text{Cos}\,x \Rightarrow \frac{-۱}{۲}\text{Cos}\,x = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲۰}$$

$$\Rightarrow \text{Cos}\,x = -\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰},\ ۱+\text{tg}^۲x = \frac{۱}{\text{Cos}^۲x} \Rightarrow ۱+\text{tg}^۲x = \frac{۱}{\frac{۱}{۱۰}} = ۱۰ \Rightarrow \text{tg}^۲x = ۹$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,x = \pm ۳ \xrightarrow{\frac{\pi}{۲}<x<\pi} \text{tg}\,x = -۳ \Rightarrow \text{tg}۲x = \frac{۲\text{tg}\,x}{۱-\text{tg}^۲x} = \frac{-۶}{۱-۹} = \frac{۳}{۴}$$

۱۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\text{Cos } ۲x}{\sqrt{۲}\ \text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}=\frac{\text{Cos}^۲ x-\text{Sin}^۲ x}{\sqrt{۲}\left(\text{Cos } x\ \text{Cos}\frac{\pi}{۴}-\text{Sin } x\ \text{Sin}\frac{\pi}{۴}\right)}$$

$$\frac{(\text{Cos } x-\text{Sin } x)(\text{Cos } x+\text{Sin } x)}{\sqrt{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\text{Cos } x-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\text{Sin } x\right)}=\frac{(\text{Cos } x-\text{Sin } x)(\text{Cos } x+\text{Sin } x)}{\text{Cos } x-\text{Sin } x}$$

$$=\text{Cos } x+\text{Sin } x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

برای به‌دست آوردن مقدار $\text{Sin } ۲x$ طرفین عبارت $\text{Cos } x+\text{Sin } x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\text{Cos } x+\text{Sin } x)^۲=\underbrace{\text{Cos}^۲ x+\text{Sin}^۲ x}_{۱}+\underbrace{۲\text{Sin } x\ \text{Cos } x}_{\text{Sin } ۲x}=۱+\text{Sin } ۲x=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \text{Sin } ۲x=\frac{۳}{۴}-۱=-\frac{۱}{۴}$$

۱۲۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{۲}\left(\text{Sin}x.\text{Cos}\frac{۳\pi}{۴}+\text{Cos}x.\text{Sin}\frac{۳\pi}{۴}\right)=\text{Sin}x$$

$$\sqrt{۲}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\text{Sin}x+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\text{Cos}x\right)=\text{Sin}x\Rightarrow -\text{Sin}x+\text{Cos}x=\text{Sin}x$$

$$\xrightarrow{\div\ \text{Cos}x} \text{tg}x+۱=\text{tg}x\Rightarrow \text{tg}x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \text{Sin}۲x=\frac{۲\text{tg}x}{۱+\text{tg}^۲x}=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{۴}{۵}$$

۱۲۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$A=\text{Sin}۲(۷۵°)=\text{Sin}۱۵۰°=\text{Sin}۳۰°=\frac{۱}{۲}$$

$$B=۲\text{Cotg}۲(۱۵°)=۲\sqrt{۳}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۱۲}$$

۱۳۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\tan\frac{x}{۲}-\cot\frac{x}{۲}=۱\Rightarrow\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}-\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=۱\Rightarrow\frac{\sin^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)-\cos^{۲}\left(\frac{x}{۲}\right)}{\sin\left(\frac{x}{۲}\right).\cos\left(\frac{x}{۲}\right)}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{-\cos x}{\frac{۱}{۲}\sin x}=۱\Rightarrow -\cot x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \tan x=-۲$$

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^{۲}x}=\frac{۲(-۲)}{۱-(-۲)^{۲}}=\frac{-۴}{۱-۴}=\frac{۴}{۳}$$

۱۳۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$tg\,x-\mathrm{Cotg}\,x=۴\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=۴\Rightarrow\frac{\sin^{۲}x-\cos^{۲}x}{\sin x\cos x}=۴$$

با توجه به روابط $\cos^{۲}x-\sin^{۲}x=\cos ۲x$ و $\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$ داریم:

$$\frac{-\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=۴\Rightarrow \mathrm{Cotg}\,۲x=-۲$$

حال با کمک رابطه‌ی $۱+\mathrm{Cotg}^{۲}u=\frac{۱}{\sin^{۲}u}$، حاصل $\sin ۲x$ را می‌یابیم:

$$۱+\mathrm{Cotg}^{۲}۲x=\frac{۱}{\sin^{۲}۲x}\xrightarrow{\mathrm{Cotg}\,۲x=-۲}۵=\frac{۱}{\sin^{۲}۲x}\Rightarrow\sin^{۲}۲x=\frac{۱}{۵}$$

$$\Rightarrow\sin ۲x=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

۱۳۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$tg\,x+\mathrm{Cotg}\,x=\frac{۲}{\sin ۲x}=\frac{۲}{\frac{۱}{۳}}=۶$$

$$tg^{۲}x+\mathrm{Cotg}^{۲}x=(tg\,x+\mathrm{Cotg}\,x)^{۲}-۲\,tg\,x\,\mathrm{Cotg}\,x=۶^{۲}-۲(۱)=۳۴$$

$$tg^{۳}x+\mathrm{Cotg}^{۳}x=(tg\,x+\mathrm{Cotg}\,x)\left(tg^{۲}x+\mathrm{Cotg}^{۲}x-tg\,x\,\mathrm{Cotg}\,x\right)=۶(۳۴-۱)=۱۹۸$$

$$\Rightarrow\frac{tg^{۲}x+\mathrm{Cotg}^{۲}x}{tg^{۳}x+\mathrm{Cotg}^{۳}x}=\frac{۳۴}{۱۹۸}=\frac{۱۷}{۹۹}$$

۱۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نکته: $tg\frac{x}{۲} = \frac{\operatorname{Sin} x}{۱ + \operatorname{Cos} x}$

ابتدا مقدار $\operatorname{Cos} x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\operatorname{Sin}^{۲} x + \operatorname{Cos}^{۲} x = ۱ \Rightarrow \left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)^{۲} + \operatorname{Cos}^{۲} x = ۱ \Rightarrow \operatorname{Cos} x = \pm\frac{۵}{۱۳}$$

با توجه به این‌که $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$، مقدار $\operatorname{Cos} x = -\frac{۵}{۱۳}$ قابل قبول است، پس داریم:

$$tg\frac{x}{۲} = \frac{\operatorname{Sin} x}{۱ + \operatorname{Cos} x} = \frac{\frac{۱۲}{۱۳}}{۱ - \frac{۵}{۱۳}} = \frac{\frac{۱۲}{۱۳}}{\frac{۸}{۱۳}} = \frac{۳}{۲}$$

۱۳۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۱ + \operatorname{Cotg}^{۲}\alpha}{۱ - \operatorname{Cotg}^{۲}\alpha} = \frac{۱ + \frac{\operatorname{Cos}^{۲}\alpha}{\operatorname{Sin}^{۲}\alpha}}{۱ - \frac{\operatorname{Cos}^{۲}\alpha}{\operatorname{Sin}^{۲}\alpha}} = \frac{۱}{-\operatorname{Cos} ۲\alpha} = \frac{۱}{-\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

۱۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌توان نوشت:

(۱)

$$A = \sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x} \Rightarrow A^{۲} = \tan x + \cot x + ۲\sqrt{\tan x \cot x} = \frac{۲}{\operatorname{Sin} ۲x} + ۲$$

از طرفی

(۲)

$$(\operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x)^{۲} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow ۱ + \operatorname{Sin} ۲x = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \operatorname{Sin} ۲x = \frac{۹}{۱۶}$$

با توجه به (۲) می‌توان (۱) را محاسبه کرد.

$$\Rightarrow A^{۲} = \frac{۲}{\frac{۹}{۱۶}} + ۲ = \frac{۳۲}{۹} + ۲ = \frac{۵۰}{۹} \Rightarrow A = \frac{۵\sqrt{۲}}{۳}$$

۱۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا $tg\alpha$ را محاسبه می‌کنیم. $tg\left(\frac{\pi}{۴}-\alpha\right)=۰/۲\Rightarrow\frac{۱-tg\alpha}{۱+tg\alpha}=\frac{۱}{۵}$

در نتیجه $tg\alpha=\frac{۲}{۳}$ از دستور مثلثاتی $Sin۲\alpha=\frac{۲tg\alpha}{۱+tg^۲\alpha}$ خواهیم داشت $Sin۲\alpha=\frac{\frac{۴}{۳}}{۱+\frac{۴}{۹}}=\frac{۱۲}{۱۳}$

۱۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$tg\left(\frac{\pi}{۴}+\alpha\right)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{tg\frac{\pi}{۴}+tg\alpha}{۱-tg\frac{\pi}{۴}tg\alpha}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۱+tg\alpha}{۱-tg\alpha}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳+۳tg\alpha=۱-tg\alpha$$

$$\Rightarrow ۴tg\alpha=-۲\Rightarrow tg\alpha=-\frac{۱}{۲}$$

حال با کمک رابطه $Cos۲\alpha=\frac{۱-tg^۲\alpha}{۱+tg^۲\alpha}$، مقدار $Cos۲\alpha$ را می‌یابیم:

$$\Rightarrow Cos۲\alpha=\frac{۱-\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲}{۱+\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲}=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

۱۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دستور مثلثاتی $tg(\alpha+\beta)$ را می‌نویسیم با جانشینی $tg\frac{\pi}{۴}=۱$ خواهیم داشت:

$$tg\left(\frac{\pi}{۴}+\alpha\right)=\frac{۱+tg\alpha}{۱-tg\alpha}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲+۲tg\alpha=۱-tg\alpha\Rightarrow tg\alpha=-\frac{۱}{۳}$$

$$tg۲\alpha=\frac{۲tg\alpha}{۱-tg^۲\alpha}\Rightarrow tg۲\alpha=\frac{-\frac{۲}{۳}}{۱-\frac{۱}{۹}}=-\frac{۳}{۴}$$

۱۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{۴}}{۱-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{۴}}=\frac{۱+\operatorname{tg}x}{۱-\operatorname{tg}x}=۳\Rightarrow \operatorname{tg}x=\frac{۱}{۲}\qquad (۱)$$

از طرفی:

$$\operatorname{Cotg}\left(۲x-\frac{۵\pi}{۴}\right)=-\operatorname{Cotg}\left(\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}-۲x\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{۴}-۲x\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۴}+۲x\right)=\frac{۱+\operatorname{tg}۲x}{۱-\operatorname{tg}^۲x}$$

با توجه به رابطه $\operatorname{tg}۲x=\frac{۲\operatorname{tg}x}{۱-\operatorname{tg}^۲x}$ داریم:

$$\xrightarrow{(۱)}\operatorname{tg}۲x=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

بنابراین:

$$\operatorname{Cotg}\left(۲x-\frac{۵\pi}{۴}\right)=\frac{۱+\frac{۳}{۴}}{۱-\frac{۳}{۴}}=۷$$

۱۴۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\alpha=\beta+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{\tan\beta+\tan\frac{\pi}{۴}}{۱-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{۴}}=\frac{\frac{۱}{۲}+۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=۳$$

$$\operatorname{Sin}۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۶}{۱+۹}=۰/۶$$

۱۴۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\tan۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}=\frac{۲(۲)}{۱-۴}=-\frac{۴}{۳}$$

$$\tan(۲\alpha-\beta)=\frac{\tan۲\alpha-\tan\beta}{۱+\tan۲\alpha.\tan\beta}=\frac{-\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۴}{۹}}=\frac{-\frac{۵}{۳}}{\frac{۵}{۹}}=-۳$$

-۱۴۲ $\operatorname{tg}\left(y-\frac{x}{۳}\right)=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{\operatorname{tg}y-\operatorname{tg}\frac{x}{۳}}{۱+\operatorname{tg}y.\operatorname{tg}\frac{x}{۳}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{\operatorname{tg}y-\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۱}{۳}\operatorname{tg}y}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۴\operatorname{tg}y-\frac{۴}{۳}=۱+\frac{۱}{۳}\operatorname{tg}y\Rightarrow$

$\frac{۱۱}{۳}\operatorname{tg}y=\frac{۷}{۳}\Rightarrow\operatorname{tg}y=\frac{۷}{۱۱}$

$$\operatorname{tg}\left(y+\frac{x}{۳}\right)=\frac{\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}\frac{x}{۳}}{۱-\operatorname{tg}y.\operatorname{tg}\frac{x}{۳}}=\frac{\frac{۷}{۱۱}+\frac{۱}{۳}}{۱-\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۳۲}{۳۳}}{\frac{۲۶}{۳۳}}=\frac{۳۲}{۲۶}=\frac{۱۶}{۱۳}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

-۱۴۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا $\operatorname{tg}۲x$ را از رابطه مثلثاتی زیر به دست می‌آوریم

$$\operatorname{tg}۲x=\frac{۲\operatorname{tg}x}{۱-\operatorname{tg}^۲x}=\frac{۲\left(\sqrt{۲}-۱\right)}{۱-\left(\sqrt{۲}-۱\right)^۲}=۱$$

از اینکه $\operatorname{Cotg}(۲x+y)=۲$ نتیجه می‌گیریم $\operatorname{tg}(۲x+y)=\frac{۱}{۲}$ با استفاده از رابطه مثلثاتی زیر می‌توان نوشت

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{۱-\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}\Rightarrow\operatorname{tg}(۲x+y)=\frac{\operatorname{tg}۲x+\operatorname{tg}y}{۱-\operatorname{tg}۲x\ \operatorname{tg}y}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۱+\operatorname{tg}y}{۱-\operatorname{tg}y}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲+۲\operatorname{tg}y=۱-\operatorname{tg}y\Rightarrow\operatorname{tg}y=-\frac{۱}{۳}$$

-۱۴۴ کافی است که در کسر مفروض $\operatorname{tg}۴۵^\circ$ را بجای عدد ۱ قرار دهیم تا فرمول $\operatorname{tg}(a-b)$ حاصل شود.

$$\frac{۱-\operatorname{tg}۲۰^\circ}{۱+\operatorname{tg}۲۰^\circ}=\frac{\operatorname{tg}۴۵^\circ-\operatorname{tg}۲۰^\circ}{۱+\operatorname{tg}۴۵^\circ\operatorname{tg}۲۰^\circ}=\operatorname{tg}(۴۵-۲۰)=\operatorname{tg}۲۵^\circ$$

گزینه ۲ جواب صحیح است.

۱۴۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\operatorname{tg}15^\circ - \operatorname{tg}^3 15^\circ}{\left(1+\operatorname{tg}^2 15^\circ\right)^2} = \frac{\operatorname{tg}15^\circ\left(1-\operatorname{tg}^2 15^\circ\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2 15^\circ\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}\right)\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}{1+\operatorname{tg}^2 15^\circ}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Sin}30^\circ \operatorname{Cos}30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

۱۴۶-

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg}\alpha\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}2\alpha\,.\operatorname{Cos}2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow 2\operatorname{Sin}2\alpha\,.\operatorname{Cos}2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Sin}4\alpha = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.

۱۴۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\operatorname{Cos}^2 70^\circ - \operatorname{Sin}^2 10^\circ}{\operatorname{Sin}10^\circ} = \frac{\frac{1+\operatorname{Cos}140^\circ}{2} - \frac{1-\operatorname{Cos}20^\circ}{2}}{2\operatorname{Sin}10^\circ} = \frac{\operatorname{Cos}140^\circ + \operatorname{Cos}20^\circ}{2\operatorname{Sin}10^\circ}$$

$$= \frac{2\operatorname{Cos}80^\circ\ \operatorname{Cos}60^\circ}{2\operatorname{Sin}10^\circ} = \frac{\operatorname{Cos}80^\circ}{2\operatorname{Sin}10^\circ} = \frac{\operatorname{Sin}10^\circ}{2\operatorname{Sin}10^\circ} = \frac{1}{2}$$

۱۴۸- هرگاه نسبت‌های مثلثاتی $2x$ را به نسبت‌های مثلثاتی x تبدیل کنیم، کسر خلاصه خواهد شد. پس داریم:

$$\frac{\operatorname{Sin}x + 2\operatorname{Sin}x\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Cos}x + 2\operatorname{Cos}^2 x} = \frac{\operatorname{Sin}x(1+2\operatorname{Cos}x)}{\operatorname{Cos}x(1+2\operatorname{Cos}x)} = \operatorname{tg}x$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۱۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر دستور مثلثاتی داریم: $\operatorname{Cos}2x = 2\operatorname{Cos}^2 x - 1$، پس خواهیم داشت:

$$\operatorname{Cos}2x = 2\left(\frac{2}{3}\right) - 1 = \frac{1}{3},\ \operatorname{Cos}4x = 2\operatorname{Cos}^2 2x - 1$$

یعنی: $\operatorname{Cos}4x = 2\left(\frac{1}{9}\right) - 1 = -\frac{7}{9}$

۱۵۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left(\cos^{۲}\alpha - \sin^{۲}\alpha\right)\left(\cos^{۲}\alpha + \sin^{۲}\alpha\right) = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \cos ۲\alpha = \frac{۲}{۳}$$

از طرفی داریم:

$$\cos ۴\alpha = ۲\cos^{۲} ۲\alpha - ۱ \Rightarrow \cos ۴\alpha = ۲\left(\frac{۴}{۹}\right) - ۱ = -\frac{۱}{۹}$$

۱۵۱- می‌دانیم $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha . \cos\beta}$ پس داریم:

$$(\operatorname{tg} ۵۰ + \operatorname{tg} ۴۰)\ \sin ۲۰ = \frac{\sin(۵۰ + ۴۰)}{\cos ۵۰ \ . \ \cos ۴۰} \times \sin ۲۰ = \frac{۱ \times \sin ۲۰}{\cos ۵۰ \ . \ \cos ۴۰} = \frac{\sin ۲۰}{\sin ۴۰ . \cos ۴۰}$$

$$\frac{۲\sin ۲۰}{۲\sin ۴۰ \cos ۴۰} = \frac{۲\sin ۲۰}{\sin ۸۰} = \frac{۴\sin ۱۰ \ . \ \cos ۱۰}{\cos ۱۰} = ۴\sin ۱۰$$

بنابراین گزینهٔ ۲ جواب صحیح است.

۱۵۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \ . \ \cos\beta} \Rightarrow \tan ۳۵ + \tan ۲۰ = \frac{\sin ۵۵}{\cos ۳۵ \ . \ \cos ۲۰}$$

$$\text{عبارت} = \frac{\cancel{\sin ۵۵}}{\cancel{\cos ۳۵} \ . \ \cos ۲۰} \times \sin ۲۰ = \tan ۲۰ \Rightarrow \frac{\tan ۲۰}{\tan ۲۰} = ۱$$

-۱۵۳

$$\operatorname{tg} ۲۰ (۱ + \cos ۴۰^\circ) = \frac{\sin ۲۰}{\cos ۲۰}\left(۲\cos^{۲} ۲۰\right) = ۲\sin ۲۰ \cos ۲۰ = \sin ۴۰^\circ$$

بنابراین گزینهٔ ۲، پاسخ صحیح است.

۱۵۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$\cos\theta = \frac{۱ - \operatorname{tg}^{۲}(\frac{\theta}{۲})}{۱ + \operatorname{tg}^{۲}(\frac{\theta}{۲})} , \ \sin\theta = \frac{۲\operatorname{tg}(\frac{\theta}{۲})}{۱ + \operatorname{tg}^{۲}(\frac{\theta}{۲})}$$

در نتیجه از فرض مساله داریم:

$$۲\sin\theta - ۳\cos\theta = ۳ \Rightarrow ۲\frac{۲\operatorname{tg}(\frac{\theta}{۲})}{۱ + \operatorname{tg}^{۲}(\frac{\theta}{۲})} - ۳\frac{۱ - \operatorname{tg}^{۲}(\frac{\theta}{۲})}{۱ + \operatorname{tg}^{۲}(\frac{\theta}{۲})} = ۳ \Rightarrow ۴\operatorname{tg}(\frac{\theta}{۲}) - ۳ + ۳\operatorname{tg}^{۲}(\frac{\theta}{۲})$$

$$= ۳ + ۳\operatorname{tg}^{۲}(\frac{\theta}{۲}) \Rightarrow ۴\operatorname{tg}(\frac{\theta}{۲}) = ۶ \Rightarrow \operatorname{tg}(\frac{\theta}{۲}) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲ \Rightarrow \sin(\frac{\theta}{۲}) = ۳\cos(\frac{\theta}{۲})$$

$$\Rightarrow ۲\sin(\frac{\theta}{۲}) - ۳\cos(\frac{\theta}{۲}) = ۰$$

۱۵۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cot ۲x = -۳ \Rightarrow \tan ۲x = -\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x} = -\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۶ \tan x = \tan^۲ x - ۱ \Rightarrow \tan^۲ x - ۶ \tan x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = ۳ + \sqrt{۱۰} \\ \tan x = ۳ - \sqrt{۱۰} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۵۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\cos ۱۵^\circ}{\cos ۵^\circ} = \frac{۴\cos^۳ ۵^\circ - ۳\cos ۵^\circ}{\cos ۵^\circ} = ۴\cos^۲ ۵^\circ - ۳ = ۴\left(\frac{۱ + \cos ۱۰^\circ}{۲}\right) - ۳$$
$$= ۲\cos ۱۰^\circ - ۱$$

۱۵۷-

$$\sin x + \cos x = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{۲}\sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = ۱ \Rightarrow$$

$$x + \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow ۳x = \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \sin ۳x = \sin \frac{۳\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

۱۵۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. کمان α در ناحیه‌ی سوم است الزاماً کمان $\frac{\alpha}{۲}$ در ناحیه‌ی دوم است.

$$\cos\alpha = -\sqrt{۱ - \sin^۲\alpha} = -\sqrt{۱ - \frac{۱۵}{۶۴}} = -\frac{۷}{۸}$$

$$\cos^۲\left(\frac{\alpha}{۲}\right) = \frac{۱ + \cos\alpha}{۲} = \frac{۱ - \frac{۷}{۸}}{۲} = \frac{۱}{۱۶} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{۲} = -\frac{۱}{۴}$$

$$\cos\frac{۳\alpha}{۲} = ۴\cos^۳\left(\frac{\alpha}{۲}\right) - ۳\cos\left(\frac{\alpha}{۲}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{۳\alpha}{۲}\right) = -\frac{۱}{۱۶} + \frac{۳}{۴} = \frac{۱۱}{۱۶}$$

۱۵۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $۲(۶۷/۵) = ۱۳۵^\circ$ و دستور مثلثاتی $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$ را داریم:

$$\text{cs } ۱۳۵^\circ = ۳\cos^۲ ۶۷/۵ - ۱ \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱ = ۲\cos^۲ ۶۷/۵$$

پس: $\cos^۲ ۶۷/۵ = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴}$، در نتیجه: $\cos ۶۷/۵ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$.

۱۶۰- راه حل اول:

می‌دانیم : $\text{Cos}\,\alpha.\text{Cos}\,(۶۰ - \alpha)\text{Cos}\,(۶۰ + \alpha) = \frac{۱}{۴}\text{Cos}\,۳\alpha$

با قرار دادن $\alpha = ۲۰^\circ$: $a = ۲۰^\circ \Rightarrow ۶۰ - a = ۴۰^\circ \,,\, ۶۰ + a = ۸۰^\circ$

$$۸\text{Cos}\,۲۰^\circ \times \text{Cos}\,۴۰^\circ \times \text{Cos}\,۸۰^\circ = ۸ \times \frac{۱}{۴} \times \text{Cos}\,۶۰^\circ = ۸ \times \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

راه حل دوم:

$$۸\text{Cos}\,۲۰\,\text{Cos}\,۴۰\,\text{Cos}\,۸۰ = \frac{\text{Sin}\,۲۰\,(۸\text{Cos}\,۲۰\,\text{Cos}\,۴۰\,\text{Cos}\,۸۰)}{\text{Sin}\,۲۰}$$
$$= \frac{۴(۲\text{Sin}\,۲۰\,\text{Cos}\,۲۰)\text{Cos}\,۴۰\,\text{Cos}\,۸۰}{\text{Sin}\,۲۰} = \frac{۴\text{Sin}\,۴۰\,\text{Cos}\,۴۰\,\text{Cos}\,۸۰}{\text{Sin}\,۲۰} = \frac{۲(۲\text{Sin}\,۴۰\,\text{Cos}\,۴۰)\text{Cos}\,۸۰}{\text{Sin}\,۲۰}$$
$$= \frac{۲\text{Sin}\,۸۰\,\text{Cos}\,۸۰}{\text{Sin}\,۲۰} = \frac{\text{Sin}\,۱۶۰}{\text{Sin}\,۲۰} = \frac{\text{Sin}(۱۸۰ - ۲۰)}{\text{Sin}\,۲۰} = \frac{\text{Sin}\,۲۰}{\text{Sin}\,۲۰} = ۱$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

یادآوری: الف) $\text{Sin}\,(۱۸۰ - \alpha) = \text{Sin}\,\alpha$ ب) $۲\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha = \text{Sin}\,۲\alpha$

۱۶۱- ریشهٔ بین $\left(\cdot\,,\,\frac{\pi}{۲}\right)$ در وسط است و نقطهٔ $\frac{\pi}{۴}$ است. $tg\left(\frac{\pi}{۲}+ax\right) = -Cotg\,(ax) \Rightarrow$

چون $f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \cdot$ می‌باشد پس داریم:

$$tg\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{a\pi}{۴}\right) = \cdot \Rightarrow \frac{\pi}{۲}+\frac{a\pi}{۴} = \cdot \Rightarrow \frac{a\pi}{۴} = -\frac{\pi}{۲} \Rightarrow a = -۲$$

و گزینه ۲ درست است.

راه حل دوم:

با توجه به شکل (نمودار)، y نزولی است. پس در نتیجه:

$y' < \cdot$

$$y = tg\left(\frac{\pi}{۲}+ax\right) = -Cotg\,ax = -\frac{Cos\,ax}{Sin\,ax} \Rightarrow y' = a\left(۱+Cotg^۲ ax\right) < \cdot \Rightarrow a < \cdot\,(I)$$

مجانب قائم $x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow$ ریشه مخرج است $x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow Sin\frac{a\pi}{۲} = \cdot \Rightarrow \frac{a\pi}{۲} = k\pi \Rightarrow a = ۲k\ (II)$

از $(I)\,,\,(II) \Rightarrow a = -۲$

۱۶۲- ابتدا تابع را ساده می‌کنیم :

$$y = tg\left(\pi ax + \frac{\pi}{۲}\right) = -Cotg\,(\pi ax)$$

خط $x = \cdot$ و $x = \frac{۴}{۳}$ مجانبهای منحنی هستند، پس دوره تناوب تابع $\frac{۴}{۳}$ است و طبق تعریف دوره تناوب :

$$T = \frac{\pi}{|\pi a|} = \frac{۱}{|a|} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow |a| = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{۳}{۴} \\ a = -\frac{۳}{۴} \end{cases}$$

چون تابع همواره نزولی است. با تعیین مشتق، a بدست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{l} y' = \pi a\left(۱+Cotg^۲ \pi ax\right) < \cdot \\ a < \cdot \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{-۳}{۴}$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

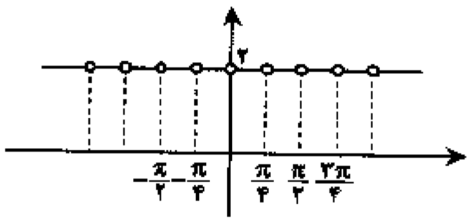
۱۶۳- تمام شکلهای داده شده در فاصلهٔ $\cdot \leq x \leq \frac{\pi}{۲}$ رسم شده است، پس $tg\,x > \cdot$ می‌باشد، بنابراین $y > \cdot$ است. پس گزینه‌های ۱ و ۳ نادرستند. از طرفی، $y' = ۱ + tg^۲ x > \cdot$ پس تابع y صعودی است. لذا گزینهٔ ۲ نیز نادرست است. بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

۱۶۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = k\,\mathrm{Sin}(ax+b)+c \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|a|} \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\left|-\frac{۲}{۳}\right|}=\frac{۲\pi}{\frac{۲}{۳}}=۳\pi$$

۱۶۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

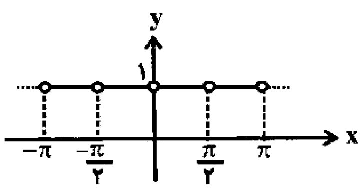
$$\begin{cases} y=\tan x\ .\ \cot x = ۱ & x\neq \frac{k\pi}{۲} \\ y=\tan ۲x\ .\ \cot ۲x = ۱ & ۲x \neq \frac{k\pi}{۲} \Rightarrow x\neq\frac{k\pi}{۴}\end{cases}$$



با توجه به نمودار $T=\frac{\pi}{۴}$

۱۶۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\tan x.\cot x=۱\ ,\ x\neq\frac{k\pi}{۲}\ (k\in Z)$$



با رسم نمودار تابع مشخص می‌شود که این تابع متناوب با دوره‌ی تناوب اصلی $\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد.

۱۶۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x)=tg(ax).Cotg(ax)$ برابر است با:

$$y=tg(۵x).Cotg(۵x) \Rightarrow T=\frac{\pi}{۲(۵)}=\frac{\pi}{۱۰}$$

پس:

$$T=\frac{\pi}{۲|a|}$$

۱۶۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $\cot x=\frac{۱}{\tan x}$ پس داریم:

$$f(x)=\tan x-\frac{۱}{\tan x}=\frac{\tan^{۲}x-۱}{\tan x}$$

$$f(x)=-۲\left(\frac{۱-\tan^{۲}x}{۲\tan x}\right)=-\frac{۱}{۲}\cot ۲x$$

دوره تناوب تابع حاصل $\frac{\pi}{۲}$ است.

۱۶۹- یادآوری: الف - $Cotg(u) - tg(u) = ۲Cotg(۲u)$ ، **ب - دوره تناوب** $Cotg(mx)$ **برابر** $\frac{\pi}{|m|}$ **است. پس:**

$$f(x) = tg(ax) - Cotg(ax) = -(Cotg(ax) - tg(ax)) = -۲Cotg(۲ax) \Rightarrow T = \frac{\pi}{|۲a|}$$

$$\text{طبق فرض}: T = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi}{|۲a|} \Rightarrow |۲a| = ۴ \Rightarrow ۲|a| = ۴ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \begin{cases} ۲ \\ -۲ \end{cases}$$

باتوجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

۱۷۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=Sin\,x\,Cos\,۲x+۲Cos^۲x\,Sin\,x=Sin\,x\,Cos\,۲x+(۲Cos\,x\,Sin\,x)Cos\,x$$

$$y=Sin\,x\,Cos\,۲x+Cos\,x\,Sin\,۲x=Sin(x+۲x)=Sin\,۳x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۳}$$

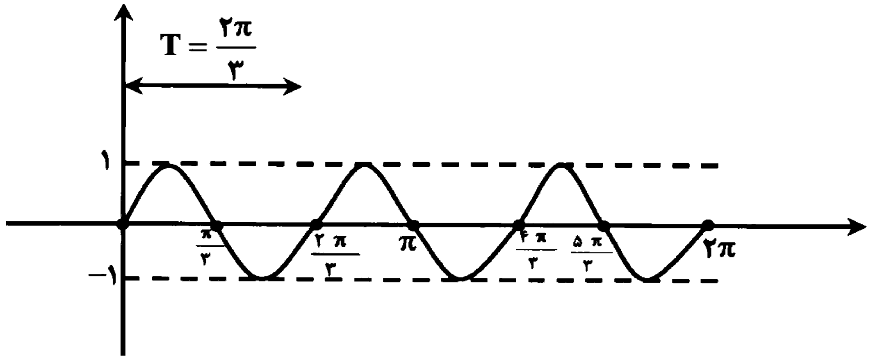
۱۷۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم: $\alpha \neq \frac{k\pi}{۲}$ و $tg\alpha \,.\, Cotg\alpha = ۱$ **پس:**

$$\left.\begin{array}{l} tg\,x \,.\, Cotg\,x = ۱ \text{ و } x \neq \frac{k\pi}{۲} \\ tg\,۳x \,.\, Cotg\,۳x = ۱ \text{ و } ۳x \neq \frac{k\pi}{۲} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{۶} \end{array}\right\} \Rightarrow y = ۲ \text{ و } x \neq \frac{k\pi}{۶} \Rightarrow T = \frac{\pi}{۶}$$

۱۷۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} T_۱ = \frac{\pi}{\frac{\pi}{۳}} = ۳ \\ T_۲ = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۴}} = ۸ \end{array}\right\} \Rightarrow T = [T_۱ , T_۲] = ۲۴$$

۱۷۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، منحنی سینوسی در فاصله‌ی $[۰ , \pi]$ هفت‌بار محور x ها را قطع کرده است. لذا دوره‌ی تناوب این تابع باید $T = \frac{۲\pi}{۳}$ باشد.

۱۷۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos(ax)$ برابر $T = \frac{۲\pi}{|a|}$ است. بنابراین دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos(\pi ax)$ برابر است با:

$$T = \frac{۲\pi}{\pi a} = \frac{۲}{a} = ۴ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right)$$

محل برخورد نمودار تابع با محور x ها از حل معادله‌ی $y = ۰$ به دست می‌آید:

$$\cos\left(\frac{\pi}{۲}x\right) = ۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۲}x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲}, \dots \Rightarrow x = ۱ , ۳ , ۵ , \dots$$

طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور x ها در بازه‌ی $[۰ , ۶]$ به‌صورت مقابل است:

$x = ۱ , ۳ , ۵ \Rightarrow$ مجموع x ها $= ۱ + ۳ + ۵ = ۹$

۱۷۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بیش‌ترین مقدار y برابر ۲ می‌باشد پس $a = ۲$ بازه $[-۲/۵ , ۳/۵]$ شامل ۳ دوره تناوب است پس دوره تناوب $\frac{۳/۵ , -(-۲/۵)}{۳}$ از طرفی از روی معادله تابع $T = \frac{۲\pi}{\pi b}$ در نتیجه $b = ۱$ یا

$a + b = ۳$

۱۷۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در توابع $y = a\cos bx$ و $y = a\sin bx$ دوره‌ی تناوب برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$ می‌باشد، بنابراین داریم: $(a, b \neq ۰)$

$$y = ۳ - ۵\sin ax \Rightarrow T_۱ = \frac{۲\pi}{|a|}$$

$$y = ۱ + \cos ۳x \Rightarrow T_۲ = \frac{۲\pi}{۳}$$

$$T_۱ = ۲T_۲ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|a|} = ۲\left(\frac{۲\pi}{۳}\right) \Rightarrow \frac{۱}{|a|} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow |a| = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{a > ۰} a = \frac{۳}{۲}$$

۱۷۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دوره‌ی تناوب تابع $y = b\cot ax (a , b \neq ۰)$ و $y = b\mathrm{Cos}^۲ ax$ برابر $T = \frac{\pi}{|a|}$ است. داریم:

$$T_۱ = \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow |a| = ۴ \Rightarrow a = \pm ۴ \qquad (*)$$

$$y_۲ = \tan ax - \cot ax = \frac{\mathrm{Sin}\, ax}{\mathrm{Cos}\, ax} - \frac{\mathrm{Cos}\, ax}{\mathrm{Sin}\, ax} = \frac{\mathrm{Sin}^۲ ax - \mathrm{Cos}^۲ ax}{\mathrm{Cos}\, ax\, \mathrm{Sin}\, ax}$$

$$\Rightarrow -۲\frac{\mathrm{Cos}\, ۲ax}{\mathrm{Sin}\, ۲ax} = -۲\cot(۲ax)$$

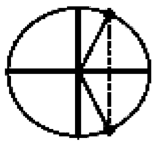
$$\Rightarrow T_۲ = \frac{\pi}{|۲a|} = \frac{\pi}{|\pm ۸|} = \frac{\pi}{۸}$$

۱۷۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نکته: در توابع $y = a\mathrm{Sin}\, bx$ و $y = a\mathrm{Cos}\, bx$، دوره‌ی تناوب برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$، ماکسیمم برابر $|a|$ و مینیمم برابر $-|a|$ است.

با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

$$A = ۳ , B = \frac{۲\pi}{۴} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow A \times B = \frac{۳}{\frac{\pi}{۲}} = \frac{۳\pi}{۲}$$

۱۷۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



$$\operatorname{Sin}x(۳\operatorname{Cos}x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Sin}x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ و } \pi \text{ و } ۲\pi \\ \operatorname{Cos}x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \text{دو جواب} \end{cases} \Rightarrow ۳ + ۲ = ۵ \text{ جواب}$$

۱۸۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\operatorname{Sin}۳x}{\operatorname{Cos}\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)} = ۱ \Rightarrow \frac{\operatorname{Sin}۳x}{\operatorname{Sin}x} \Rightarrow \operatorname{Sin}۳x = \operatorname{Sin}x$$

$$۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \quad \text{غ ق ق}$$

$$۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

دقت شود $\operatorname{Sin}x$ در مخرج کسر قرار دارد و ریشه‌های $\operatorname{Sin}x$ جزء دامنه نمی‌باشد. پس $x = k\pi$ باید از مجموعه جواب حذف شود، یعنی جواب کلی معادله برابر است با: $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$

۱۸۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$\operatorname{Cos}۳x + \operatorname{Cos}x = ۰ \Rightarrow \operatorname{Cos}۳x = -\operatorname{Cos}x \Rightarrow \operatorname{Cos}۳x = \operatorname{Cos}(\pi - x)$$

$$\Rightarrow ۳x = ۲k\pi \pm (\pi - x) \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \quad \text{ق ق} \\ ۳x = ۲k\pi - \pi + x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نکته: $x = k\pi - \frac{\pi}{۲}$ غیر قابل قبول است زیرا به‌ازای آن $\operatorname{Cos}x = ۰$ می‌شود که در صورت سؤال گفته شده $(\operatorname{Cos}x \neq ۰)$

روش دوم:
**

$$\operatorname{Cos}۳x = ۴\operatorname{Cos}^۳ x - ۳\operatorname{Cos}x$$

$$\operatorname{Cos}۳x + \operatorname{Cos}x = ۰ \Rightarrow ۴\operatorname{Cos}^۳ x - ۳\operatorname{Cos}x + \operatorname{Cos}x = ۰ \Rightarrow ۴\operatorname{Cos}^۳ x - ۲\operatorname{Cos}x = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\operatorname{Cos}x\left(۲\operatorname{Cos}^۲ x - ۱\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲\operatorname{Cos}x = ۰ \Rightarrow \operatorname{Cos}x = ۰ \quad \text{غ ق ق} \\ ۲\operatorname{Cos}^۲ x - ۱ = ۰ \Rightarrow \operatorname{Cos}x = \frac{\pm\sqrt{۲}}{۲} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

۱۸۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\mathrm{Sin}\ 5x + \mathrm{Sin}\ 4x = 1 + \mathrm{Cos}\ \pi \to \mathrm{Sin}\ 5x + \mathrm{Sin}\ 4x = 0$$

$$\to \mathrm{Sin}\ 5x = -\mathrm{Sin}\ 4x \to \mathrm{Sin}\ 5x = \mathrm{Sin}\ (-4x) \begin{cases} 5x = 2k\pi + (-4x) \\ 5x = 2k\pi + \pi - (-4x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{9} \to x = \frac{2\pi}{9} \text{ و } \frac{4\pi}{9} \text{ و } \dots \text{ و } \frac{18\pi}{9} \to \text{مجموع} = 11\ \pi \\ x = 2k\pi + \pi \to x = \pi \end{cases}$$

۱۸۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در جایی محور xها را قطع می‌کند که $f(x) = 0$ باشد:

$$\mathrm{Sin}\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 4x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \Rightarrow k = 1, 2, 3, \dots, 8$$

پس دارای ۸ جواب است.

۱۸۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در نقطه تلاقی منحنی، با محور xها مقدار $y = 0$ است.

$$\mathrm{Sin}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \pi\ ,\ 2\pi\ ,\ 3\pi\ ,\ 4\pi\ ,\ 5\pi\ ,\ 6\pi$$

پس در بازه $[0\ ,\ 2\pi]$ تعداد نقاط تلاقی برابر است با ۶

۱۸۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نکته : $\mathrm{Cos}\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 2k\pi$

نکته : $\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\beta - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta = \mathrm{Cos}(\alpha + \beta)$

با توجه به نکته‌های بالا داریم:

$$\mathrm{Cos}\,2x\,\mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,2x\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}(2x + x) = \mathrm{Cos}\,3x = 1 \xrightarrow{\text{طبق فرض}} 3x = 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

۱۸۶- از دستور کسینوس تفاضل دو کمان در طرف اول استفاده می‌نماییم :

$$\mathrm{Cos}\ 4x\,\mathrm{Cos}\ x + \mathrm{Sin}\ 4x\,\mathrm{Sin}\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathrm{Cos}\ (4x - x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathrm{Cos}\ 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Cos}\ 3x = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18}$$

جوابهای بین $[0\ ,\ \pi]$ با جایگزینی مقادیر صحیح ۰ و ۱ برای k حاصل می‌شود:

$$k = 0\ ,\ 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$$

بنابراین در بازه $[0, \pi]$ معادله دارای ۳ جواب می‌باشد، پس گزینه ۲ صحیح است.

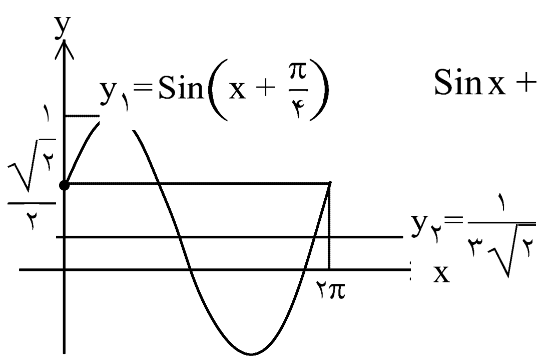
۱۸۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از $\operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x=\sqrt{۲}\,\operatorname{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$، معادله را حل می‌کنیم:

$$\sqrt{۲}\operatorname{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=۱\Rightarrow\operatorname{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi\\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

جواب‌های بین ۰ و ۲π این معادله عبارت اند از ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ و ۲π.

۱۸۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$\operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x=\sqrt{۲}\operatorname{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\operatorname{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}$$

نمودار توابع $y_۲=\frac{۱}{۳\sqrt{۲}}\,,\ y_۱=\operatorname{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$

با توجه به نمودار، معادله‌ی فوق ۲ جواب دارد.

۱۸۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\operatorname{Sin}\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)=-\operatorname{Cos}x\,,\ \operatorname{Cos}(\pi-x)=-\operatorname{Cos}x\Rightarrow\operatorname{Sin}\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)+\operatorname{Cos}(\pi-x)$$

$$=-\operatorname{Cos}x-\operatorname{Cos}x=-\sqrt{۳}\Rightarrow\operatorname{Cos}x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{۶}\right)\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\,,\ k\in Z$$

۱۹۰-

$$\frac{\text{Cos } ۲x}{\text{Sin } x+\text{Cos } x}=۱\Rightarrow\frac{\text{Cos}^۲ x-\text{Sin}^۲ x}{\text{Sin } x+\text{Cos } x}=\frac{(\text{Cos } x-\text{Sin } x)(\text{Cos } x+\text{Sin } x)}{\text{Sin } x+\text{Cos } x}=۱$$

$$\Rightarrow \text{Cos } x-\text{Sin } x=۱\Rightarrow\sqrt{۲}\,\text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=۱\Rightarrow\text{Cos}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\text{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right)\Rightarrow$$

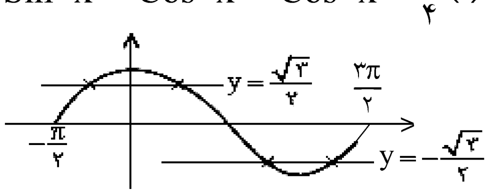
$$x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases} k=۰\Rightarrow\begin{cases} x+\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۰\\ x+\frac{\pi}{۴}=-\frac{\pi}{۴}\quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}\\ k=۱\Rightarrow\begin{cases} x+\frac{\pi}{۴}=۲\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲\pi\\ x+\frac{\pi}{۴}=۲\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}\end{cases}$$

معادله فوق به ازای $k=۰$ و $k=۱$ معادله دارای سه جواب می‌باشد که هیچکدام از سه جواب $\text{Sin } x+\text{Cos } x$ (مخرج کسر) را صفر نمی‌کند، پس هر سه جواب قابل قبول هستند. پس گزینه ۳ صحیح است.

۱۹۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{Sin}^۲ x+\text{Cos}^۲ x+\text{Cos}^۲ x=\frac{۷}{۴}\Leftrightarrow\text{Cos}^۲ x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\text{Cos}\,x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۴ جواب دارد.

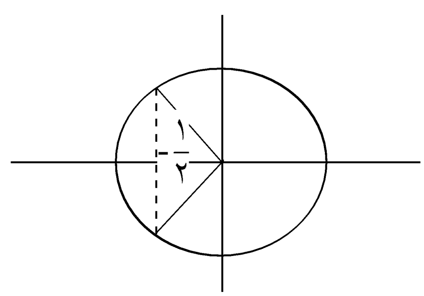


۱۹۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$۲\,\text{Sin}^۲ x+۳\,\text{Cos}\,x=۲\left(۱-\text{Cos}^۲ x\right)+۳\,\text{Cos}\,x=۲-۲\,\text{Cos}^۲ x+۳\,\text{Cos}\,x=۰$$

$$\rightarrow ۲\,\text{Cos}^۲ x-۳\,\text{Cos}\,x-۲=۰$$

$$\Delta=۹+۱۶=۲۵\qquad \text{Cos}\,x=\frac{۳\pm۵}{۴}=\underset{\text{غ ق ق}}{۲},\ \overset{\text{ق ق}}{-\frac{۱}{۲}}$$



$$\text{Cos}\,x=-\frac{۱}{۲}$$

$$x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

۱۹۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$2\cos^2 x - 1 + 1 - \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \end{cases}$$

۱۹۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\underbrace{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}_{1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}\ (k \in Z)$$

$$\xrightarrow{x \in (0\ ,\ \pi)} x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6}$$

این معادله فقط دو جواب در بازه‌ی $(0\ ,\ \pi)$ دارد.

۱۹۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin 4x = \sin^4 x - \cos^4 x \Rightarrow \sin 4x = \underbrace{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}_{1}\underbrace{\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)}_{-\cos 2x}$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x\ \cos x = -\cos 2x \Rightarrow 2\sin 2x\ \cos 2x + \cos 2x = 0$$
$$\Rightarrow \cos 2x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

مجموع جواب ها $= \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{30\pi}{12} = \frac{5\pi}{2}$

۱۹۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2\left(\frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)\underbrace{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}_{1} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۱۹۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\cos^2 x\sin^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$=1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2 2x=\frac{1}{2}+\cos 2x$$

$$\Rightarrow\cos^2 2x-2\cos 2x=0$$

$$\cos 2x(\cos 2x-2)=0\xrightarrow{\cos 2x\neq 2}\cos 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in Z)$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\xrightarrow{0\leq x\leq 2\pi}x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$$

۱۹۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$1+\cos x-\cos^3 x=\underbrace{\sin^2 2x+\cos^2 2x}_{1}\Rightarrow\cos x-\cos^3 x=0$$

$$\Rightarrow\cos x(1-\cos^2 x)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ \cos x=1\Rightarrow x=2k\pi\\ \cos x=-1\Rightarrow x=2k\pi+\pi\end{cases}$$

اجتماع جواب‌های بالا را به صورت $x=\frac{k\pi}{2}$ می‌توان نوشت.

۱۹۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$2\sqrt{2}\left(\sin 2x\,.\,\cos\frac{\pi}{4}-\cos 2x\,.\,\sin\frac{\pi}{4}\right)=1-\sin 4x\Rightarrow 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2x-\cos 2x)$$

$$=1-\sin 4x\quad\Rightarrow 2(\sin 2x-\cos 2x)=1-\sin 4x$$

اتحاد زیر را داریم:

$$1-\sin 4x=(\sin 2x-\cos 2x)^2\quad\Rightarrow 2(\sin 2x-\cos 2x)=(\sin 2x-\cos 2x)^2$$

$$\begin{cases}\sin 2x-\cos 2x=0\Rightarrow\tan 2x=1\Rightarrow 2x=k\pi+\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{8}\Rightarrow\\ \sin 2x-\cos 2x=2\quad\text{غیرممکن}\quad -\sqrt{2}\leqslant\sin 2x-\cos 2x\leqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

چهار نقطه روی دایره‌ی مثلثاتی

جواب‌ها بر روی دایره‌ی مثلثاتی چهار نقطه به فاصله‌ی برابر را نشان می‌دهند و چون زوایا قائمه هستند (زاویه‌ی محاطی کمان 180° هستند) پس جواب‌ها رئوس یک مربع می‌باشند.

۲۰۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

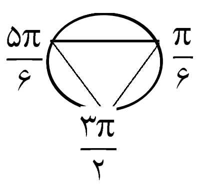
$$\mathrm{Sin}\,۲x = \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) \Rightarrow \mathrm{Sin}\,۲x = \mathrm{Sin}\,x \Rightarrow ۲\,\mathrm{Sin}\,x\ \mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x = ۰$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}\,x(۲\,\mathrm{Cos}\,x - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Sin}\,x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)} x_۱ = ۰ \\ ۲\,\mathrm{Cos}\,x - ۱ = ۰ \Rightarrow \mathrm{Cos}\,x = \frac{۱}{۲} = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ \xrightarrow{x \in \left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)} x_۲ = -\frac{\pi}{۳}\ ,\ x_۳ = \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

بنابراین، این معادله‌ی مثلثاتی در بازه‌ی $\left(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}\right)$، دارای ۳ جواب می‌باشد.

۲۰۱- معادله $\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,۲x$ **را حل می‌کنیم:**



$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,۲x \\ \mathrm{Cos}\,۲x = ۱ - ۲\,\mathrm{Sin}^۲ x \end{array}\right\} \Rightarrow ۲\,\mathrm{Sin}^۲ x + \mathrm{Sin}\,x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Sin}\,x = -۱ \Rightarrow x = \frac{۳\pi}{۲} \\ \mathrm{Sin}\,x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

با رسم دایره مثلثاتی متوجه می‌شویم که این ۳ نقطه، رأس یک متساوی‌الاضلاع می‌باشند. پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۰۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\mathrm{Sin}۲\ x = ۲\mathrm{Sin}\ x\mathrm{Cos}\ x\ ,\ \mathrm{Cos}(\pi + x) = -\mathrm{Cos}x$$

$$\mathrm{Sin}۲\ x + \mathrm{Cos}(\pi + x) = ۰ \Rightarrow ۲\mathrm{Sin}\ x\mathrm{Cos}\ x - \mathrm{Cos}x = ۰ \Rightarrow ۲\mathrm{Cos}\ x\left(\mathrm{Sin}\ x - \frac{۱}{۲}\right) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Cos}x = ۰ \xrightarrow{x \in (۰, ۲\pi)} x = \frac{\pi}{۲} \quad x = \frac{۳\pi}{۲} \\ \mathrm{Sin}x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{x \in (۰, ۲\pi)} x = \frac{\pi}{۶} \quad x = \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

بنابراین جواب معادله در بازه‌ی $(۰, ۲\pi)$ چهار جواب دارد.

۲۰۳- می‌دانیم: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ بنابراین:

$$\cos 2x - 5\cos x + 3 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 & \text{غ.ق} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

پس گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۰۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دقت کنید که $x \neq k\pi$ می‌باشد.

$$\frac{2\sin x\cos x}{\sin x} - \left(2\cos^2 x - 1\right) = 1 \Rightarrow 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ و } 2\pi & \text{غ ق} \end{cases}$$

۲۰۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$2\cos 2x = \cot x(4\sin x + \tan x)$$

$$\Rightarrow 2\cos 2x = 4\sin x\cot x + \cot x\tan x$$

$$\Rightarrow 2\left(2\cos^2 x - 1\right) = 4\cos x + 1 \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2\cos x + 1)(2\cos x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} & \text{غ ق} \\ \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

۲۰۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) \Rightarrow 2\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{8} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} \pi - \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$$

۲۰۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$۲\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{۲} - x - \frac{۳\pi}{۱۰}\right) = ۱ + \mathrm{Cos}^۲\left(x - \frac{\pi}{۵}\right) \Rightarrow ۲\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{۵} - x\right) = ۱ + \mathrm{Cos}^۲\left(x - \frac{\pi}{۵}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cos}^۲\left(x - \frac{\pi}{۵}\right) - ۲\mathrm{Cos}\left(x - \frac{\pi}{۵}\right) + ۱ = ۰ \Rightarrow \mathrm{Cos}\left(x - \frac{\pi}{۵}\right) = ۱$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{۵} = ۲k\pi \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۵}$$

۲۰۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\mathrm{Cos}\,۲x}{\sqrt{۲}\,\mathrm{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right)} = ۱ \Rightarrow \frac{\mathrm{Cos}^۲ x - \mathrm{Sin}^۲ x}{\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x} = ۱ \Rightarrow \mathrm{Cos}\,x - \mathrm{Sin}\,x = ۱$$

$$\sqrt{۲}\,\mathrm{Cos}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = ۱ \Rightarrow \mathrm{Cos}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \mathrm{Cos}\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$$

پس $۰ \,,\, \frac{۲\pi}{۲} \,,\, x = ۲\pi$ و مجموع این سه جواب $\frac{۷\pi}{۲}$ می‌باشد.

۲۰۹- $$۲\sqrt{۲}\,\mathrm{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۴}\right) = \mathrm{Cos}\,۲x \Rightarrow ۲\sqrt{۲}\left(\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{۴}\right) + \mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right) - \mathrm{Cos}\,۲x = ۰$$

$$\Rightarrow ۲(\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x) - \left(\mathrm{Cos}^۲ x - \mathrm{Sin}^۲ x\right) = ۰ \Rightarrow ۲(\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x) - (\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Sin}\,x) = ۰$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x)(۲ - \mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Sin}\,x) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x = ۰ \Rightarrow \mathrm{Sin}\,x = -\mathrm{Cos}\,x \Rightarrow \mathrm{tg}\,x = -۱ \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ ۲ - \mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Sin}\,x = ۰ \quad \text{امکان ندارد} \end{cases}$$

بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

۲۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{۳}(\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x) = ۱ + ۲\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x \Rightarrow \sqrt{۳}(\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x) = (\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x)^۲$$

الزاماً $\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x = ۰$ یا $\mathrm{tg}\,x = -۱$ در نتیجه $x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$

۲۱۱- معادله داده شده یک معادله کلاسیک نوع چهارم می‌باشد، پس :

$$\sqrt{3}(\sin x+\cos x)=(1+\sin 2x)=(\sin x+\cos x)^2 \Rightarrow \begin{cases}\sin x+\cos x=0\\ \sin x+\cos x=\sqrt{3}\end{cases}$$

چون حداکثر $\sin x+\cos x$ برابر با $\sqrt{2}$ است، پس پاسخ اول غیرممکن است. پس :

$$\sin x+\cos x=0 \Rightarrow \operatorname{tg} x=-1 \Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۲۱۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x=\sin x+\cos x \Rightarrow \sqrt{2}\sin 2x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow \sin 2x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi+x+\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4} & (1)\\ 2x=2k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4} & (2)\end{cases}$$

$$(1)\cup(2):\ x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$$

۲۱۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin^2 x-2\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=1 \rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

۲۱۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$2\cos^2 x+2\sin x.\cos x=1$$

نکته: دو فرمول روبه‌رو را یادآوری می‌کنیم:

$$\begin{cases}1:\ \sin 2x=2\sin x.\cos x\\ 2:\ \cos 2x=2\cos^2 x-1\end{cases}$$

داریم که: عبارت اصلی : $2\sin x.\cos x=1-2\cos^2 x$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به نکته}} \sin 2x=-\cos 2x \xrightarrow[\cos 2x]{\text{طرفین تقسیم بر}} \tan 2x=-1 \Rightarrow 2x=k\pi-\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$$

۲۱۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{Sin } ۲x \ (\text{Sin } x + \text{Cos } x) = \text{Cos } ۲x \ (\text{Cos } x - \text{Sin } x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Sin } ۲x \text{ Sin } x + \text{Sin } ۲x \text{ Cos } x = \text{Cos } ۲x \text{ Cos } x - \text{Cos } ۲x \text{ Sin } x$$

$$\Rightarrow \text{Sin } ۲x \text{ Cos } x + \text{Cos } ۲x \text{ Sin } x = \text{Cos } ۲x \text{ cosx} - \text{Sin } ۲x \text{ Sin } x$$

$$\Rightarrow \text{Sin } (۲x + x) = \text{Cos } (۲x + x) \Rightarrow \text{Sin } ۳x = \text{Cos } ۳x$$

$$\Rightarrow \tan ۳x = ۱ \Rightarrow ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲}$$

$$\Rightarrow x = (۴k + ۱) \frac{\pi}{۱۲}$$

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{۹\pi}{۱۲}$	غ ق ق

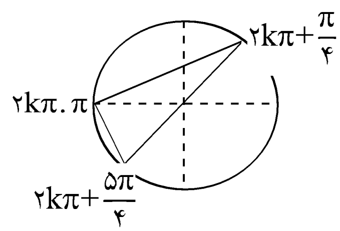
مجموع $= \frac{\pi + ۵\pi + ۹\pi}{۱۲} = \frac{۱۵\pi}{۱۲} = \frac{۵\pi}{۴}$

۲۱۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x}{۱ - \text{Cos}\,x} = ۱ + \text{Cos}\,x \Rightarrow \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x = ۱ - \text{Cos}^۲ x$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x = \text{Sin}^۲ x \Rightarrow \text{Cos}\,x = \text{Sin}\,x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Sin}\,x = ۰ \xrightarrow{\text{Cos}\,x \neq ۱} \text{Cos}\,x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \\ \text{Sin}\,x = \text{Cos}\,x \Rightarrow \tan x = ۱ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$



۲۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{۳}\,\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x = ۴\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\text{Cos}\,x + \frac{۱}{۲}\text{Sin}\,x = ۲\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x \Rightarrow \text{Sin}\left(x + \frac{\pi}{۳}\right) = \text{Sin}\,۲x$$

پس خواهیم داشت:

$$۲x = ۲k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{۳} \text{ یا } ۲x = ۲k\pi + x + \frac{\pi}{۳}$$

در نتیجه:

$$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}, \ x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{۲\pi}{۹}$$

در بازه $[۰, ۲\pi]$ خواهیم داشت: $x = \frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۹}, \frac{۸\pi}{۹}, \frac{۱۴\pi}{۹}$ که مجموع آن‌ها $۳\pi = \frac{۲۷\pi}{۹}$ می‌شود.

۲۱۸-

$$\left.\begin{matrix} -\operatorname{Sin} x + \sqrt{۳}\operatorname{Cos} x = ۱ \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۳}\right) = \sqrt{۳} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{Sin} x - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۳}\right)\operatorname{Cos} x = -۱ \Rightarrow$$

$$\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}\frac{\pi}{۳} - \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۳} = -\operatorname{Cos}\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \operatorname{Sin}\left(x - \frac{\pi}{۳}\right) = \frac{-۱}{۲} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} \\ x - \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۱۹- معادله داده شده، معادلهٔ کلاسیک نوع اول است. با جایگزینی $\sqrt{۳} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{۳}$:

$$\operatorname{Sin} ۲x + \sqrt{۳}\operatorname{Cos} ۲x = ۱ \Rightarrow \operatorname{Sin} ۲x + \frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۳}}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{۳}}\operatorname{Cos} ۲x = ۱ \Rightarrow \operatorname{Sin} ۲x \operatorname{Cos}\frac{\pi}{۳} + \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۳}\operatorname{Cos} ۲x = \operatorname{Cos}\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}\left(۲x + \frac{\pi}{۳}\right) = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \\ ۲x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

جوابهای بین ۰ تا π عبارتند از $\frac{\pi}{۴}$, $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ پس مجموع آنها $\frac{۱۴\pi}{۱۲}$ است و گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

۲۲۰-

$$۳\operatorname{Cos} x + \sqrt{۳}\operatorname{Sin} x = ۳ \Rightarrow \operatorname{Cos} x + \frac{\sqrt{۳}}{۳}\operatorname{Sin} x = ۱ \Rightarrow \operatorname{Cos} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{۶}\operatorname{Sin} x = ۱ \Rightarrow$$

$$\operatorname{Cos} x + \frac{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{۶}}{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{۶}}\operatorname{Sin} x = ۱ \Rightarrow \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos}\frac{\pi}{۶} + \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۶} = \operatorname{Cos}\frac{\pi}{۶} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Cos}\left(x - \frac{\pi}{۶}\right) = \operatorname{Cos}\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۲۲۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\cos\alpha\ \cos\beta=\frac{۱}{۲}\ (\mathrm{Cos}(\alpha+\beta)+\mathrm{Cos}(\alpha-\beta))$$

$$\mathrm{Cos}\left(x+\frac{\pi}{۳}\right)\mathrm{Cos}\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)=\frac{۱}{۳}\ \left(\mathrm{Cos}\ ۲x+\mathrm{Cos}\ \frac{۲\pi}{۳}\right)=-\frac{۱}{۲}$$

$$\mathrm{Cos}\ ۲x-\frac{۱}{۲}=-۱\Rightarrow \mathrm{Cos}\ ۲x=-\frac{۱}{۲}=\mathrm{Cos}\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)$$

$$\begin{cases} ۲x=۲k\pi+۲\pi\Rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{۳} \\ ۲x=۲k\pi-\dfrac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi-\dfrac{\pi}{۳} \end{cases}$$

k	x
۰	$\frac{\pi}{۳}$
۱	$\frac{۴\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳}$
۲	$\frac{۵\pi}{۳}$

$$\Rightarrow S=\frac{\pi}{۳}+\frac{۲\pi}{۳}+\frac{۴\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳}=\frac{۱۲\pi}{۳}=۴\pi$$

۲۲۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم $\mathrm{Sin}\ x\ \mathrm{Cos}\ x=\frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}\ ۲x$ پس خواهیم داشت $\frac{۱}{۲}\mathrm{Sin}\ ۲x=\frac{۱}{۲}\mathrm{Cos}\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$

$$\mathrm{Sin}\ ۲x=\mathrm{Cos}\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)\Rightarrow \mathrm{Sin}\ ۲x=\mathrm{Sin}\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$۲x=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$۲x=۲k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

پس جواب کلی به صورت $x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$ است.

۲۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$\frac{\mathrm{Sin}\,x}{۱-\mathrm{Cos}\,x}=\frac{۲\,\mathrm{Sin}\frac{x}{۲}\mathrm{Cos}\frac{x}{۲}}{۲\,\mathrm{Sin}^{۲}\frac{x}{۲}}=\mathrm{Cotg}\frac{x}{۲}$$

$$\frac{۱}{\mathrm{tg}\,x}=\frac{۱-\mathrm{tg}^{۲}\frac{x}{۲}}{۲\,\mathrm{tg}\frac{x}{۲}}$$

$$\frac{۱}{\mathrm{tg}\frac{x}{۲}}+\frac{۱-\mathrm{tg}^{۲}\frac{x}{۲}}{۲\,\mathrm{tg}\frac{x}{۲}}=۱\Rightarrow\frac{۳-\mathrm{tg}^{۲}\frac{x}{۲}}{۲\,\mathrm{tg}\frac{x}{۲}}=۱$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}^{۲}\frac{x}{۲}+۲\,\mathrm{tg}\frac{x}{۲}-۳=۰\xrightarrow{\mathrm{tg}\frac{\ }{۲}=t}\begin{cases}\mathrm{tg}\frac{x}{۲}=-۳\\ \mathrm{tg}\frac{x}{۲}=۱\end{cases}$$

با توجه به نمودار $y=\mathrm{tg}\frac{x}{۲}$ **در بازه** $\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right)$**، معادله جواب ندارد.**

۲۲۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۱+\mathrm{tg}\,x}{۱-\mathrm{tg}\,x}-\frac{\mathrm{tg}\,x-۱}{۱+\mathrm{tg}\,x}=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{(۱+\mathrm{tg}\,x)^{۲}+(۱-\mathrm{tg}\,x)^{۲}}{۱-\mathrm{tg}^{۲}x}=\frac{۲+۲\,\mathrm{tg}^{۲}x}{۱-\mathrm{tg}^{x}}=\frac{۲\left(۱+\mathrm{tg}^{۲}x\right)}{۱-\mathrm{tg}^{۲}x}=۲\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{\mathrm{Cos}\,۲x}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow\mathrm{Cos}\,۲x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۸}$$

۲۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر دستور مثلثاتی داریم:

$$۱+\mathrm{tg}^{۲}x=۴\,\mathrm{tg}\,x\Rightarrow\frac{۴\,\mathrm{tg}\,x}{۱+\mathrm{tg}^{۲}x}=۱\Rightarrow\frac{۲\,\mathrm{tg}\,x}{۱+\mathrm{tg}^{۲}x}=\frac{۱}{۲}$$

$$\mathrm{Sin}\,۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}$$

۲۲۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$\frac{\text{Sin}\,۳x}{\text{Sin}\,x} = ۲\text{Cos}^{۲}x \rightarrow \frac{۳\text{Sin}\,x - ۴\,\text{Sin}^{۳}x}{\text{Sin}\,x} = ۲\text{Cos}^{۲}x \Rightarrow ۳ - ۴\text{Sin}^{۲}x = ۲\text{Cos}^{۲}x$$

$$\Rightarrow ۳ - ۴\left(\frac{۱ - \text{Cos}\,۲x}{۲}\right) = ۲\left(\frac{۱ + \text{Cos}\,۲x}{۲}\right) \rightarrow ۳ - ۲ + ۲\text{Cos}\,۲x = ۱ + \text{Cos}\,۲x$$

$$\Rightarrow \text{Cos}\,۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

روش دوم:

$$\frac{\text{Sin}\,۳x}{\text{Sin}\,x} = ۲\text{Cos}^{۲}x \xrightarrow{\text{Sin}\,x \neq ۰} \text{Sin}\,۳x = ۲\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x.\text{Cos}\,x$$

$$\Rightarrow \text{Sin}(۲x + x) = \text{Sin}\,۲x.\text{Cos}\,x \Rightarrow \cancel{\text{Sin}\,۲x\,\text{Cos}\,x} + \text{Cos}\,۲x\,\text{Sin}\,x = \cancel{\text{Sin}\,۲x\,\text{Cos}\,x}$$

$$\Rightarrow \text{Cos}\,۲x.\text{Sin}\,x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{Cos}\,۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \\ \text{Sin}\,x = ۰ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۲۲۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴} - ۳\pi x = (۲k+۱)\pi \Rightarrow ۳\pi x = \frac{\pi}{۴} - ۲k\pi - \pi \Rightarrow ۳\pi x = ۲k\pi - \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k}{۳} - \frac{۱}{۴}$$

k	-۱	۰	۱
x	$-\frac{۱۱}{۱۲}$	$\frac{-۱}{۴}$	$\frac{۵}{۱۲}$

راه دوم: دوره‌ی تناوب اصلی این تابع $T = \frac{۲\pi}{|-۳\pi|} = \frac{۲}{۳}$ طول بازه $۲ = (-۱) - ۱$ است پس تعداد ماکزیمم‌ها در این بازه برابر $\frac{۲}{\frac{۲}{۳}} = ۳$ است.

۲۲۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۱ - \tan x}{۱ + \tan x} = \tan ۳x \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{۴} - x\right) = \tan ۳x \Rightarrow$$

$$۳x = k\pi - \frac{\pi}{۴} - x \Rightarrow ۴x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \xrightarrow{\div ۴} x = \frac{k\pi}{۴} + \frac{\pi}{۱۶}$$

۲۲۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۲\tan(x)}{۱ - \tan^{۲}(x)} = \sqrt{۳} \Rightarrow \tan(۲x) = \tan\left(\frac{\pi}{۳}\right) \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$$