۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که هیچ دو عضو آن دارای مؤلفه‌ی اول یکسان نمی‌باشد. چون این مجموعه دارای ۲ عضو مرتب است که دارای مولفه‌ی اولیه یکسان یعنی ۳ می‌باشند پس مولفه‌ی دوم آنها نیز باید یکسان باشد پس داریم: $m+۲=۴ \Rightarrow m=۲$

۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای‌این‌که رابطه‌ی $\left\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(۳,m+۲),(m,۴)\right\}$ یک تابع باشد، نباید دو (یا چند) زوج مرتب متمایز با مؤلفه‌های اول یکسان در آن رابطه وجود داشته باشند. دقت کنیم اگر در تابعی دو زوج مرتب دارای مؤلفه‌های اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌های دوم آن ها نیز مساوی باشند تا آن دو زوج مرتب برابر شده و در واقع تبدیل به یک زوج مرتب شوند. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در دو زوج مرتب اول و چهارم، مؤلفه‌های اول یکسان می‌باشند. در نتیجه با برابر قرار دادن مؤلفه‌های دوم آن دو، داریم:

$$m^۲=m+۲ \Rightarrow m^۲-m-۲=۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m=-۱ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \{(۳,۱)و(۲,۱)و(-۲,-۱)و(۳,۱)و(-۱,۴)\} \Rightarrow \text{تابع است} \\ m=۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \{(۳,۴)و(۲,۱)و(-۲,۲)و(۳,۴)و(۲,۴)\} \Rightarrow \text{تابع نیست} \end{cases}$$

$m=۲$ قابل قبول نمی‌باشد چون به‌ازای آن دو زوج مرتب دوم و پنجم مؤلفه‌های اول یکسان می‌شوند اما مؤلفه‌های دوم برابر نمی‌شوند.

۳- گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

شرط تابع بودن: $x_۱=x_۲ \Rightarrow f(x_۱)=f(x_۲)$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴b=b^۲+a \\ a-۱=۳ \Rightarrow a=۴ \end{cases} \Rightarrow ۴b=b^۲+۴ \Rightarrow b=۲ \Rightarrow a+b=۴+۲=۶$$

۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. یک رابطه را تابع می گویند که در آن اگر مختص اول عضوهایی برابر باشند آنگاه مختص دوم آنها باید برابر باشد. پس باید یکی از دو عضو (۱و۲) یا (۴و۲) حذف شود یعنی فقط با حذف ۱ عضو، درست است.

۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$a-b^۲=۲a \Rightarrow a=-b^۲$$

$$b^۲-a=۸ \Rightarrow b^۲-(-b^۲)=۸ \Rightarrow ۲b^۲=۸ \Rightarrow b^۲=۴ \Rightarrow b=\pm ۲$$

$$\left.\begin{array}{l} b=۲ \Rightarrow a=-(۲)^۲=-۴ \\ b=-۲ \Rightarrow a=(-۲)^۲=-۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{-۴}{۲}=-۲ \\ \frac{a}{b}=\frac{-۴}{-۲}=۲ \end{array}$$

۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x=۲ \Rightarrow ۰+|y-۱|=۴ \Rightarrow \begin{cases} y-۱=۴ \Rightarrow y=۵ \\ y-۱=-۴ \Rightarrow y=-۳ \end{cases}$$

رابطه به ازای ورودی $x=۲$ دارای ۲ خروجی است، بنابراین رابطه تابع نیست.

۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$x=۰ \Rightarrow |y-۱|=۲ \Rightarrow \begin{cases} y-۱=۲ \Rightarrow y=۳ \\ y-۱=-۲ \Rightarrow y=-۱ \end{cases} \Rightarrow$$ رابطه‌ی تابع نیست.

بررسی گزینه‌های نادرست: در گزینه‌ی ۱ رابطه تابع است: (جمع دو عبارت نامنفی هنگامی صفر است که هر دو عبارت صفر باشند.)

$$|x-۲|+|y+۱|=۰ \Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ y+۱=۰ \Rightarrow y=-۱ \end{cases} \Rightarrow f=\{(۲,-۱)\}$$

در گزینه‌ی ۲ رابطه تابع است:

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y=-۲ \Rightarrow x^۲-۲x+۱+y^۲+۲y+۱=۰ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۰ \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x=۱ \\ y=-۱ \end{cases} \Rightarrow f=\{(۱,-۱)\}$$

در گزینه‌ی ۴ رابطه تابع است:

$$y=\pm\sqrt{-x^۲+۲x-۱} \Rightarrow y=\pm\sqrt{-(x-۱)^۲} \Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \\ y=۰ \end{cases} \Rightarrow f=\{(۱,۰)\}$$

۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در تابع به‌ازای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y حاصل می‌شود عباراتی که شامل $y^۲$ و $|y|$ باشند تابع نیستند پس $y+x|x|=۲$ یک تابع است.

۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. برای رد گزینه‌های ۲ و ۴ از اتحاد مربع دو جمله‌ای کمک می‌گیریم و مثال نقض ارائه می‌کنیم:

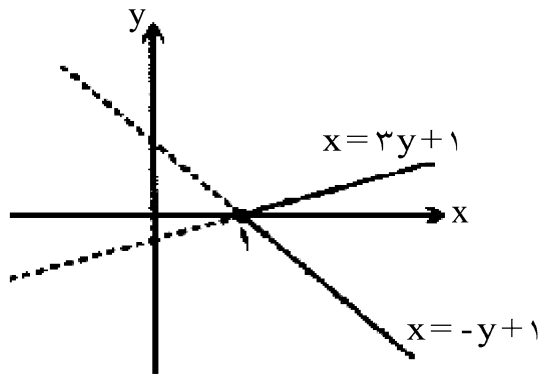
$$x^۲ + y^۲ + ۲y = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲y + ۱ = ۲ \Rightarrow x^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲$$

$$\xrightarrow{\text{مثال نقض}} x = ۰ \Rightarrow y + ۱ = \pm\sqrt{۲}$$

$$x^۲ + y^۲ + ۲x = ۱ \Rightarrow y^۲ + (x + ۱)^۲ = ۲ \xrightarrow{\text{مثال نقض}} x = -۱ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲}$$

در مورد گزینه‌های (۱) و (۳) می‌توانیم نمودار روابط را رسم کنیم:

گزینه‌ی ۱ : $x = y + ۲|y| + ۱ \Rightarrow \begin{cases} y \geq ۰ : & x = ۳y + ۱ \\ y < ۰ : & x = -y + ۱ \end{cases}$



۱۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. چهار گزینه را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$۱)\ \left|۳y^۲ - ۴y + ۱\right| + \sqrt{x - ۱} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \left|۳y^۲ - ۴y + ۱\right| = ۰ \\ \sqrt{x - ۱} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ۱ \text{ و } y = \frac{۱}{۳} \\ x = ۱ \end{cases}$$

بنابراین به ازای یک مقدار برای x**، دو مقدار برای** y **به دست می‌آید که معرف یک تابع نیست.**

$$۲)\ x^۲ + y^۲ - ۲y + ۴x + ۵ = ۰ \Rightarrow (x + ۲)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۰$$

$\Rightarrow (x + ۲)^۲ = ۰ \ , \ (y - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \ , \ y = ۱$ **تابع است.**

روابط چند ضابطه‌ای در صورتی نشانگر یک تابع هستند که اولاً هر یک از ضابطه‌ها خود تابع و چنانچه دامنه‌ی آن‌ها دارای عضو مشترک باشند مقدار هر یک از این ضابطه‌ها به ازای هر عضو دامنه‌ی مشترک، جواب یکسان داشته باشند. در گزینه‌ی «۳» اگر $x = ۱/۵$ **اختیار کنیم. داریم:**

$$۳)\ y = \begin{cases} ۳x - ۱ \ ; & x > ۱ \Rightarrow ۳\ (۱/۵) - ۱ = ۳/۵ \\ x + ۱ \ ; & x < ۲ \Rightarrow ۱/۵ + ۱ = ۲/۵ \end{cases} \Rightarrow ۳/۵ \neq ۲/۵ \Rightarrow$$ **تابع نیست.**

$$۴)\ x = -\left(y^۲ - ۲y + ۱\right) \Rightarrow x = -(y - ۱)^۲$$

اگر $x = -۱$ **اختیار کنیم، برای** y **دو مقدار صفر و ۲ به دست می‌آید. بنابراین تابع نیست.**

۱۱- می‌دانیم در زوج مرتب‌های $(x\ ,\ y)$ داریم $f(x)=y$ پس:

$$۲f(۲)-f(۴)=(۲\times۳)-۲=۶-۲=۴$$

یعنی گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$۲f(۱)-f(۲)=۲(۴)-۵=۳$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مقدار $f(x)$ را به ازای ۲ و ۲- محاسبه می‌نماییم:

$$f(x)=\frac{x^۳-۱}{x^۲+۲}\Rightarrow\begin{cases}f(۲)=\dfrac{۸-۱}{۴+۲}=\dfrac{۷}{۶}\\ f(-۲)=\dfrac{(-۸)-۱}{۴+۲}=\dfrac{-۹}{۶}\end{cases}$$

$$f(۲)-f(-۲)=\frac{۷}{۶}-\left(\frac{-۹}{۶}\right)=\frac{۷}{۶}+\frac{۹}{۶}=\frac{۱۶}{۶}=\frac{۸}{۳}$$

۱۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۱}{۴}-\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}\ ,\ F(۴)=۴-\sqrt{۴}=۲\Rightarrow f\left(\frac{۱}{۴}\right)\times f(۴)=-\frac{۱}{۲}$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{r}f\left(\sqrt{x}\right)=x+\sqrt{x}\\ \sqrt{x}=A\end{array}\right\}\Rightarrow f(A)=A^۲+A\Rightarrow f(۲)+f(۱)=\left(۲^۲+۲\right)+\left(۱^۲+۱\right)=۸$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(۴)=۴-\sqrt{۴}=۲\qquad \frac{۱}{۲}f(۴)=۱\qquad f\left(\frac{۱}{۲}f(۴)\right)=f(۱)=۱-\sqrt{۱}=۱-۱=۰$$

۱۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f\left(۱-\sqrt{۲}\right)=\left(۱-\sqrt{۲}\right)^۲-۲\left(۱-\sqrt{۲}\right)+۱=۱-۲\sqrt{۲}+۲-۲+۲\sqrt{۲}+۱=۲$$

۱۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=x^۲-۲x+۳=x^۲-۲x+۱+۲=(x-۱)^۲+۲$$

$$f\left(۱+\sqrt{۲}\right)=\left(۱+\sqrt{۲}-۱\right)^۲+۲=۲+۲=۴\qquad (۱)$$

$$f(۲)=(۲-۱)^۲+۲=۱+۲=۳\qquad (۲)\qquad (۱)-(۲)=۴-۳=۱$$

۱۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{۸}{۳}\right)=\left(\frac{۹}{۸}\times\frac{۸}{۳}+\frac{۳}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\left(۳+\frac{۳}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\left(\frac{۲۷}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

۲۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f=\{(۱,۲),(۱,۳),(-۱,۴),(۲,۴),(۴,۱)\}$$

$$f(۱)=۲\ ,\ f(-۱)=۴\ ,\ f(۴)=۱$$

$$\frac{۳f(۱)-۲f(-۱)}{[f(۴)]^۲}=\frac{۳\times۲-۲\times۴}{(۱)^۲}=\frac{۶-۸}{۱}=-۲$$

۲۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۱)\}\qquad g=\{(۲,-۱),(۱,۴),(۳,-۲),(-۱,۳)\}$$

$$f(۲)=۳\ ,\ f(۳)=۴,\ f(۴)=۱,\ g(۲)=-۱,\ g(۳)=-۲\Rightarrow\frac{\left[۲f(۳)-f^۲(۴)\times g(۳)\right](g(۲))}{g^۳(۲)+f(۲)}$$

$$=\frac{\left[۲\times۴-(۱)^۲\times(-۲)\right](-۱)}{(-۱)^۳+۳}=\frac{(۸+۲)(-۱)}{-۱+۳}=\frac{-۱۰}{۲}=-۵$$

۲۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=x\sqrt{x^۳+۱}\Rightarrow f(۲)=۲\sqrt{۲^۳+۱}=۲\sqrt{۹}=۲\times۳=۶$$

$$g(x)=\left|۱-x^۲\right|\Rightarrow g(-۲)=\left|۱-(-۲)^۲\right|=|۱-۴|=|-۳|=۳$$

$$\frac{۳f(۲)}{[g(-۲)]^۲}=\frac{۳\times۶}{۳^۲}=\frac{۱۸}{۹}=۲$$

۲۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\left|x^۲-۵\right|\Rightarrow f(-۲)=\left|(-۲)^۲-۵\right|=|-۱|=۱$$

$$g(x)=\frac{x}{۱+x^۲}\Rightarrow g(۲)=\frac{۲}{۱+۲^۲}=\frac{۲}{۵}$$

$$\frac{۱+f(-۲)}{g(۲)}=\frac{۱+۱}{\frac{۲}{۵}}=\frac{۲}{\frac{۲}{۵}}=۵$$

-۲۴

الف) $(۳\times۲)+۳=۹$ ۰/۷۵

ب) $\frac{۴-۱}{۵}=\frac{۳}{۵}$ ۰/۷۵

ج) $۵\times\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳}$ ۰/۵

۲۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اینکه در یک تابع $y=f(x)$ است، از شکل مفروض می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} f(۲)=۲ \\ f(۱)=۰ \\ f(۰)=-۲ \\ f(-۱)=۰ \end{cases}$$

$$\text{کسر}: \frac{f(۲)-f(۱)}{f(۰)-f(-۱)}=\frac{۲-۰}{-۲-۰}=-۱$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{matrix} f(۱) = ۳ \Rightarrow ۱ + a - b = ۳ \\ f(-۱) = ۱ \Rightarrow ۱ - a - b = ۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a - b = ۲ \\ a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = -۱ \end{cases} \Rightarrow ab = -۱$$

۲۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{matrix} f(x) = mx^۲ - (۲m + ۱) \Rightarrow f(۲) = ۴m - ۲m - ۱ \Rightarrow f(۲) = ۲m - ۱ \\ g(x) = x^۳ - mx \Rightarrow g(-۲) = -۸ + ۲m \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$۲m - ۱ + ۲m - ۸ = -۱ \Rightarrow ۴m = ۸ \Rightarrow m = ۲$$

۲۸-
$$\left.\begin{matrix} f(۱) = a + b \\ f(-۱) = -a + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(۱) - f(-۱) = (a + b) - (-a + b) = ۲a = -۴ \Rightarrow a = -۲$$

بنابراین گزینۀ ۳ پاسخ صحیح است.

۲۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر به‌جای x عدد (۱-) قرار دهیم، عبارت ۵ - ۲x برابر (۷-) می‌گردد، لذا داریم:

$$f(۲x - ۵) = ax^۲ + x - ۳a + ۹ \xrightarrow{x = -۱}$$

$$f(-۷) = a - ۱ - ۳a + ۹ \Rightarrow ۰ = -۲a + ۸ \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

۳۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f = \{(-۲, ۱), (۳, ۲), (۲, ۴), (-۶, x), (۶, y)\} \quad \text{و} \quad f(ab) = ۴(f(a) + f(b))$$

$$f(-۶) = f((-۲) \times ۳) = ۴(f(-۲) + f(۳)) = ۴(۱ + ۲) = ۱۲$$

$$f(۶) = f(۲ \times ۳) = ۴(f(۲) + f(۳)) = ۴(۴ + ۲) = ۲۴$$

$$\frac{x}{y} = \frac{f(-۶)}{f(۶)} = \frac{۱۲}{۲۴} = \frac{۱}{۲}$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۱ - x}{۱ + x} = ۳ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

$$f(۳) = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{-۱}{۲}\right) = -\frac{۱}{۴}$$

۳۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^{۲} - ۷x + ۷ = -۳ \Rightarrow x^{۲} - ۷x + ۷ + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۷ + ۱۰ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x - ۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x = ۲} f\left((۲)^{۲} - ۷(۲) + ۷\right) = ۲(۲)^{۲} + \sqrt{۲ + ۴} \Rightarrow f(-۳) = ۸ + \sqrt{۶}$$

$$\xrightarrow{x = ۵} f\left((۵)^{۲} - ۷(۵) + ۷\right) = ۲(۵)^{۲} + \sqrt{۵ + ۴} \Rightarrow f(-۳) = ۵۰ + \sqrt{۹} = ۵۳$$

۳۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. بدیهی است نقاط $(۱,۰)$ و$(۰,-۶)$ و$(-۲,-۶)$ در تابع $f(x)= ax^{۲}+bx+c$ صدق می‌کنند.

$$(۰,-۶) \Rightarrow c=-۶$$
$$(۱,۰) \Rightarrow a + b -۶ =۰$$
$$(-۲,-۶) \Rightarrow ۴a-۲b -۶ = -۶ \Rightarrow \begin{cases} a+b=۶ \\ ۲a-b=۰ \Rightarrow ۳a=۶ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۴ \end{cases} \end{cases}$$

پس تابع داده شده به صورت $f(x)=۲x^{۲}+۴x-۶$ خواهد بودکه $f(-۱)$ برابراست با:

$$f(-۱)=۲-۴-۶= -۸$$

۳۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=a.b^{x},\ \ b>۰$$
$$f(۰)=a\times b^{۰} \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}\ ,\ f(-۲)=ab^{-۲}=\frac{۳}{۳۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}b^{-۲}=\frac{۳}{۳۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{b^{۲}}=\frac{۱}{۱۶} \Rightarrow b=۴ \Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۲}\times ۴^{x} \Rightarrow f\left(\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۳}{۲}\times ۴^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۳}{۲}\times ۸=۱۲$$

۳۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (a + ۱)\ b^{x + ۲}$$

$$f(-۲) = -۲ \Rightarrow (a + ۱)\ \cancel{b^{۰}}^{۱} = -۲ \Rightarrow a + ۱ = -۲ \Rightarrow a = -۳$$
$$f(-۴) = -۸ \Rightarrow (a + ۱)\ b^{-۲} = -۸ \Rightarrow -۲b^{-۲} = -۸ \Rightarrow \frac{۱}{b^{۲}} = ۴ \Rightarrow b^{۲} = \frac{۱}{۴}$$
$$\Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{b > ۰} b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x) = -۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x + ۲}$$
$$\Rightarrow f(۴) = -۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶} = -۲\times \frac{۱}{۲^{۶}} = -\frac{۱}{۲^{۵}} = -\frac{۱}{۳۲}$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^۲ - ۲x + ۵ = (x - ۱)^۲ + ۴ \Rightarrow f(x+۱) = x^۲ + ۴$$

۳۷- اگر $x + ۱ = u$ **باشد در نتیجه :** $x = u - ۱$. **پس :**

$$f(x+۱) = f(u) = x^۲ - ۲x + ۱ = (x - ۱)^۲ = (u - ۱ - ۱)^۲ = (u - ۲)^۲ \Rightarrow F(u) = (u - ۲)^۲$$

که با تغییر متغیر $x \longrightarrow u$ **داریم :** $f(x) = (x - ۲)^۲$ **. که گزینه ۱ صحیح است.**

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۲x - ۱ = t \Rightarrow x = \frac{t+۱}{۲} \Rightarrow f(t) = ۴\left(\frac{t+۱}{۲}\right)^۲ - ۱ \Rightarrow f(t) = t^۲ + ۲t + ۱ - ۱ \Rightarrow f(x) = x^۲ + ۲x$$

۳۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \rightarrow -x+۴ \Rightarrow f(۱-x) = (-x+۴)^۲ - ۴(-x+۴) + ۵ = x^۲ - ۴x + ۵$$

راه دوم:

$$f(x-۳) = (x-۲)^۲ + ۱ \xrightarrow{x-۳=t} f(t) = (t+۳-۲)^۲ + ۱ = (t+۱)^۲ + ۱ \Rightarrow f(۱-x) = (۱-x+۱)^۲ + ۱ =$$
$$۴ - ۴x + x^۲ + ۱ = x^۲ - ۴x + ۵$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x+۲) = (x+۲)^۲ - ۴ \Rightarrow y = f(x-۲) = (x-۲)^۲ - ۴ \Rightarrow y = x^۲ - ۴x \Rightarrow (۱, -۳) \leftarrow \text{تابع}$$

۴۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x+۲) - ۲f(x-۱) = ۲^{x+۲} - ۲ \times ۲^{x-۱} = ۲^x\left(۲^۲ - ۱\right) = ۳f(x)$$

۴۲-

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x^۲ + ۲x + ۱\right) = x + ۱ \Rightarrow f\left((x+۱)^۲\right) = (x+۱) \\ \left.\begin{array}{l} (x+۱)^۲ = t \Rightarrow |x+۱| = \sqrt{t} \\ x \geqslant ۰ \Rightarrow x+۱ > ۰ \Rightarrow |x+۱| = x+۱ \end{array}\right\} \Rightarrow x+۱ = \sqrt{t} \end{array}\right\} \Rightarrow f(t) = \sqrt{t} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x}$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ درست است.

۴۳- ابتدا مقدار $f\left(\frac{۱}{x}\right)$ **را تعیین می‌کنیم:**

$$f\left(\frac{۱}{x}\right) = \frac{a\left(\frac{۱}{x}\right) + b}{b\left(\frac{۱}{x}\right) + a} = \frac{a + bx}{b + ax}$$

حال مقدار $f(x).f\left(\frac{۱}{x}\right)$ **را بدست می‌آوریم:**

$$f(x).f\left(\frac{۱}{x}\right) = \left(\frac{ax+b}{bx+a}\right)\left(\frac{a+bx}{b+ax}\right) = ۱$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

۴۴- با قرار دادن $x=۲$ و $x=-۲$ در معادله داده شده، داریم:

$$\begin{cases} f(۲)+۲f(-۲)=۵ \\ f(-۲)-۲f(۲)=۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۲)+۲f(-۲)=۵ \\ -۲f(-۲)+۴f(۲)=-۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۵f(۲)=-۵ \Rightarrow f(۲)=-۱$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۴۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x=۲: f(۲)+۲f(۲)=۹$$

$$۳f(۲)=۹ \Rightarrow f(۲)=۳ \Rightarrow f(x)=x^۳+۱-۳x$$
$$f(-۲)=-۸+۱+۶=-۱$$

۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(x)-۲xf(-x)=۴x^۲+۱ \\ f(-x)+۲xf(x)=۴x^۲+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x)-۲xf(-x)=۴x^۲+۱ \\ ۲xf(-x)+۴x^۲f(x)=۲x(۴x^۲+۱) \end{cases}$$

پس $(۴x^۲+۱)f(x)=(۴x^۲+۱)(۲x+۱)$ **در نتیجه** $f(x)=۲x+۱$ **و** $f(۶)=۱۳$

۴۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا می‌بایست $f(۵)$ را مشخص کنیم. پس:

$$f(-x)+f(۵)=۴x-۲$$
$$x=-۵: ۲f(۵)=-۲۲ \Rightarrow f(۵)=-۱۱$$
$$\Rightarrow f(-x)-۱۱=۴x-۲ \Rightarrow f(-x)=۴x+۹$$
$$\Rightarrow f(x)=-۴x+۹$$
$$\Rightarrow f(-۳)=۱۲+۹=۲۱$$

۴۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. کافی است به جای x عبارت $۱-x$ را قرار دهیم در نتیجه

$$۳f(۱-x)+f(x)=۸-۸x$$

حال با ساده‌سازی $f(x)$ را به دست می‌آوریم

$$\begin{cases} ۳f(x)+f(۱-x)=۸x \\ f(x)+۳f(۱-x)=۸-۸x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۹f(x)-۳f(۱-x)=-۲۴x \\ f(x)+۳f(۱-x)=۸-۸x \end{cases}$$
$$-۸f(x)=-۳۲x+۸$$
$$\Rightarrow f(x)=۴x-۱$$
$$\Rightarrow f(۵)-f(۰)=۱۹-(-۱)=۲۰$$

۴۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x-۱)=x^۲-۲x+۱=(x-۱)^۲$$

$$x-۱=t \Rightarrow g(t)=t^۲ \Rightarrow g(x)=x^۲ \Rightarrow g(-۱)=(-۱)^۲=۱$$
$$f(x)-۱-۳g(x)=۱-۳x^۲$$
$$f(-۱)=۱-۳(-۱)^۲=۱-۳=-۲$$

بنابراین: $f(-۱).g(-۱)=(-۲)\times(۱)=-۲$

۵۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر طول ضلع مربع را ۲a فرض کنیم، شعاع دایره برابر a است. داریم:

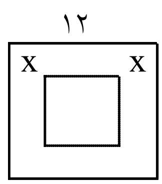
مساحت هاشورخورده : $S = (۲a)^۲ - \pi a^۲ = ۴a^۲ - \pi a^۲$

محیط دایره : $P = ۲\pi \times a \Rightarrow a = \frac{P}{۲\pi}$

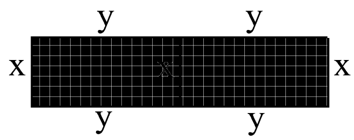
$$S = a^۲(۴ - \pi) = \left(\frac{P}{۲\pi}\right)^۲ (۴ - \pi) = \frac{P^۲}{\pi}\left(\frac{۱}{\pi} - \frac{۱}{۴}\right)$$

۵۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ابعاد جعبه x و ۱۲ - ۲x و ۱۲ - ۲x

تابع حجم = $x(۱۲ - ۲x)^۲$



۵۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



$$۳x + ۴y = ۱۵۰ \Rightarrow ۴y = ۱۵۰ - ۳x \Rightarrow y = \frac{۱۵۰ - ۳x}{۴} \quad (۱)$$

$$S = x \times ۲y \xrightarrow{(۱)} = x \times ۲ \times \frac{۱۵۰ - ۳x}{۴} \Rightarrow S(x) = \frac{۱۵۰x - ۳x^۲}{۲} \quad (۲)$$

حالا با توجه به این‌که طول و عرض مستطیل مثبت است، پس $y > ۰$ و از آن‌جا طبق (۱) داریم:

$$\frac{۱۵۰ - ۳x}{۴} > ۰ \Rightarrow ۱۵۰ - ۳x > ۰ \Rightarrow x > ۵۰ \xrightarrow{x > ۰} ۰ < x < ۵۰$$

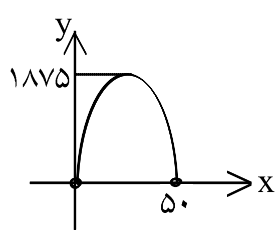
هم‌چنین طبق (۲) ، تابع $S(x)$ یک سهمی ماکسیمم‌دار است (چون ضریب $x^۲$ منفی است) و می‌دانیم که مقدار ماکسیمم (یا مینیمم) سهمی برابر $-\frac{\Delta}{۴a}$ است. پس بیش‌ترین مقدار تابع برابر است با:

$$S(x) = -\frac{۳}{۲}x^۲ + ۷۵x \Rightarrow S_{max} = \frac{(۷۵)^۲ - ۴\left(\frac{-۳}{۲}\right)(۰)}{۲\left(-\frac{۳}{۲}\right)} = \frac{(۷۵)^۲}{۳} = \frac{\cancel{۷۵} \times ۷۵}{\cancel{۳}} = ۲۵ \times ۷۵ = ۱۸۷۵$$

بنابراین تابع به صورت روبه‌روست:

$$\begin{cases} S : (۰\,,\,۵۰) \to (۰\,,\,۱۸۷۵) \\ S(x) = \dfrac{۱۵۰x - ۳x^۲}{۲} \end{cases}$$

به شکل تابع دقت کنید:

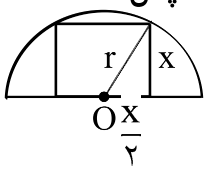


۵۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$V = \frac{۴\pi}{۳}R^۳\,,\; S = ۴\pi R^۲ \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{۴\pi}} \Rightarrow R^۳ = \frac{S}{۴\pi}\sqrt{\frac{S}{۴\pi}} \Rightarrow v = \frac{۴\pi}{۳}\,\frac{S}{۴\pi}\sqrt{\frac{S}{۴\pi}}$$

$$= \frac{S}{۳} \times \frac{\sqrt{S}}{۲\sqrt{\pi}} = \frac{S}{۶}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

۵۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر O وسط ضلع مربع باشد. آن‌گاه مرکز دایره نیز خواهد بود. پس:



$$x^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=r^2 \Rightarrow r^2=x^2+\frac{x}{2}=\frac{5x^2}{4} \Rightarrow x^2=\frac{4}{5}r^2 \quad *$$

$$\begin{cases} \text{مساحت مربع} = x^2 \Rightarrow S = x^2 \\ \text{محیط دایره} = 2\pi r \Rightarrow \text{محیط نیم دایره} = P = \pi r \Rightarrow r = \frac{P}{\pi} \end{cases} \xrightarrow{*} S=\frac{4}{5}\left(\frac{P}{\pi}\right)^2 \Rightarrow S(p)=\frac{4}{5\pi^2}P^2$$

۵۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر خوب به شکل دقت کنید، قطر دایره برابر با طول ضلع مربع بزرگ و هم‌چنین طول قطر دایره برابر با طول قطر مربع کوچک است. حال اگر شعاع دایره برابر r باشد، طول ضلع مربع بزرگ‌تر ۲r خواهد بود و اگر طول ضلع مربع کوچک x باشد، آن‌گاه طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$x^2+x^2=(2r^2) \Rightarrow 2x^2=4r^2 \Rightarrow x^2=2r^2 \quad *$$

$$\text{مساحت قسمت رنگی} = \text{مساحت مربع بزرگ} - \text{مساحت مربع کوچک} = (2r)^2 - x^2 \xrightarrow{*} 4r^2-2r^2=2r^2$$

و چون $P=2\pi r$ پس $r=\frac{P}{2\pi}$. بنابراین:

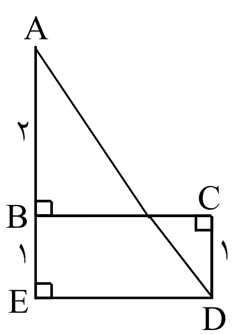
$$S_{\text{رنگی}}=2r^2=2\left(\frac{P}{2\pi}\right)^2 \Rightarrow S(P)=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{\pi}\right)^2$$

۵۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$A\hat{B}C - B\hat{D}C \Rightarrow \frac{DC}{BC}=\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{1}{AD}+x \Rightarrow AD+x=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow AD=\frac{1}{x}-x$$

۵۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر AB را به اندازه‌ی CD امتداد دهیم، طبق رابطه‌ی فیثاغورس خواهیم داشت:



$$(AE)^2+(ED)^2=(AD)^2 \Rightarrow 3^2+x^2=y^2 \Rightarrow y=\sqrt{x^2+9}$$

۵۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

انتقال اول:

$$y = ۱ + |x + ۲| \Rightarrow y = ۱ + |x - ۳ + ۲|$$

قرینه نسبت به محور yها:

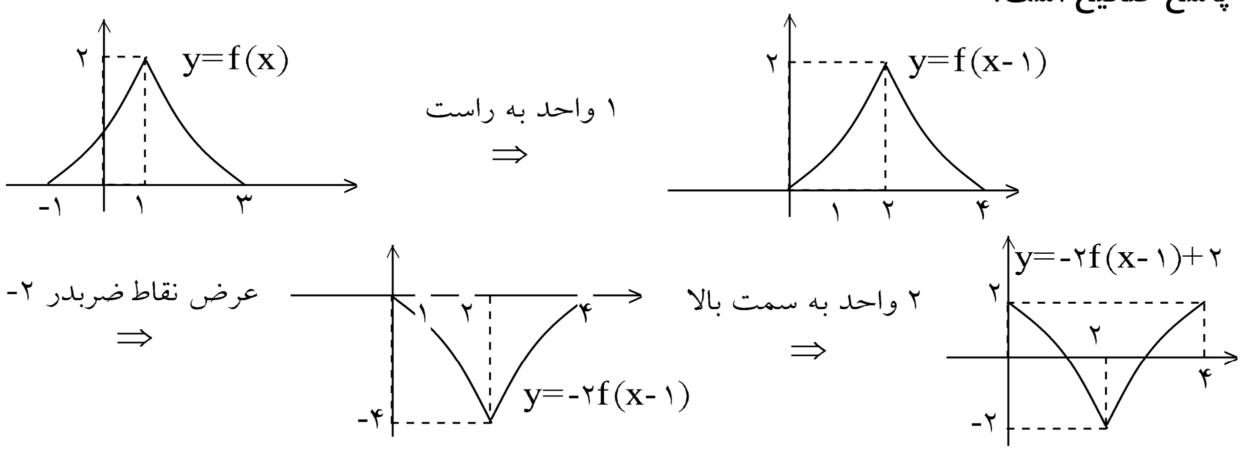
$$y = ۱ + |x - ۱| \Rightarrow y = ۱ + |-x - ۱|$$

دو برابر منقبض:

$$y = ۱ + |x + ۱| \Rightarrow y = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}|x + ۱|$$

در خاتمه قرینه نسبت به محور x به صورت $y = -\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲}|x + ۱|$

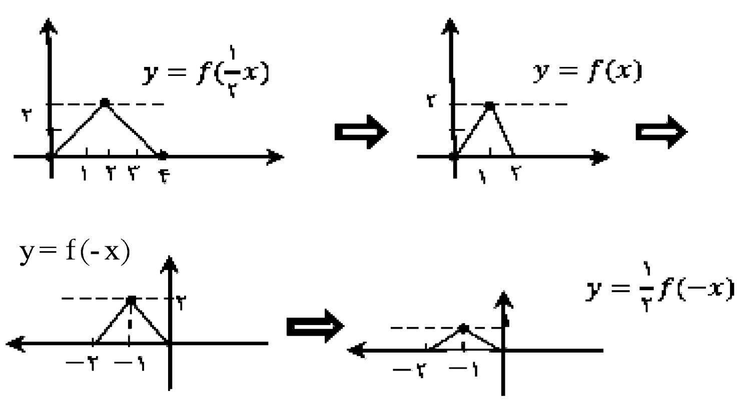
۵۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



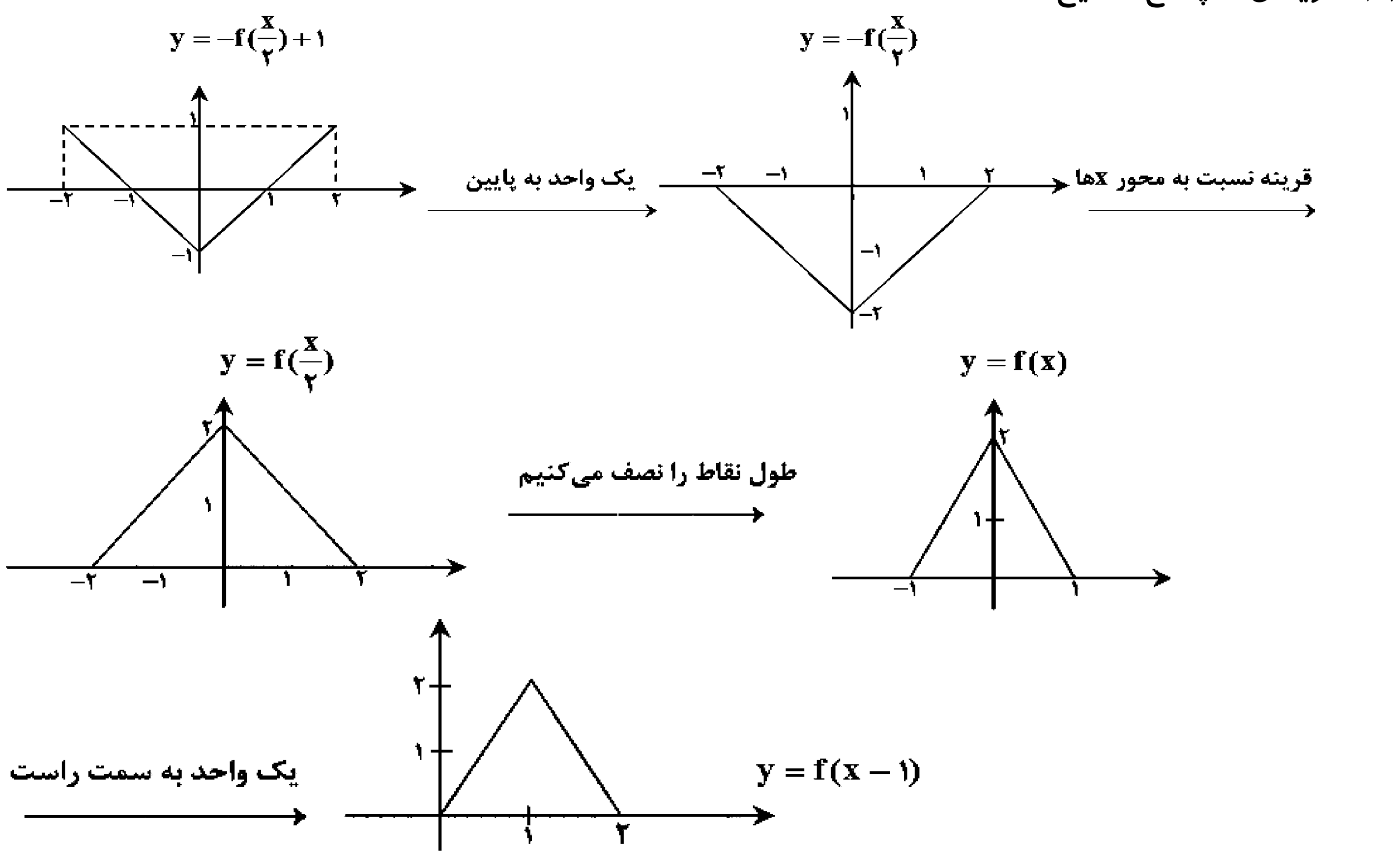
۶۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، دامنه‌ی تابع f برابر است با $D_f = [-۳و۳)$ ، بنابراین:

$$g(x)=۳f(-۲x+۱)-۱ \Rightarrow -۳\leqslant -۲x+۱ <۳ \quad \Rightarrow -۴\leqslant-۲x<۲ \Rightarrow -۱<x\leqslant۲ \Rightarrow D_g = (-۱و۲]$$

۶۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.



۶۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.



۶۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع داده شده به صورت $y = ۲x + ۱$

برای محاسبه‌ی مقدار a داریم:

$$۹ = ۲a + ۱ \Rightarrow ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴$$

و برای محاسبه‌ی مقدار b داریم:

$$y = ۲(۸) + ۱ = b \Rightarrow b = ۱۷$$
$$\Rightarrow a + b = ۲۱$$

۶۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

اگر نمایش جبری تابع خطی f را بصورت $f(x) = ax + b$ در نظر بگیریم، طبق صورت سؤال، نقاط $A = \left(-\frac{۱}{۲}, ۰\right)$ و $B = \left(۰, \frac{۱}{۲}\right)$ در آن صدق می‌کنن، پس:

$$\begin{cases} ۰ = a \times \left(-\frac{۱}{۲}\right) + b \\ \frac{۱}{۲} = a \times (۰) + b \end{cases} \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}\ ,\ \ a = ۱$$

پس نمایش جبری f به صورت $f(x) = x + \frac{۱}{۲}$ است. اگر $x_۰$ طول نقطه‌ی تقاطع نمودار تابع f با نیمساز ربع دوم و چهارم باشد، داریم:

$$f(x_۰) = -x_۰ \Rightarrow x_۰ + \frac{۱}{۲} = -x_۰ \Rightarrow x_۰ = -\frac{۱}{۴}$$

$\Rightarrow$ عرض نقطه ی تقاطع: $-x_۰ = \frac{۱}{۴}$

۶۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$\begin{matrix} f(۱) = ۴ \Rightarrow a + b = ۴ \\ f(۵) = ۸ \Rightarrow ۵a + b = ۸ \end{matrix} \Rightarrow a = ۱\ ,\ b = ۳$$

تابع خطی به‌صورت $f(x) = x + ۳ \Rightarrow f(-۳) = ۰$ می‌باشد.

۶۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنید $f(x) = Ax + B$ پس :

$$\begin{cases} f(۳) = ۵ \rightarrow ۳A + B = ۵ \\ f(-۲) = -۵ \rightarrow -۲A + B = -۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۵A = ۱۰ \rightarrow \begin{cases} A = ۲ \\ B = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{a}{۲}\right) = A\left(\frac{a}{۲}\right) + B = ۲\left(\frac{a}{۲}\right) - ۱ = a - ۱$$

۶۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(ax + b) = a(ax + b) + b = a^۲x + ab + b = ۹x + ۱۰$$

$ab + b = ۱۰\ ,\ a^۲ = ۹$ چون تابع نزولی است $a = -۳\ ,\ b = -۵$

۶۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع خطی $f(x) = ax + b$ است.

$$a(۲x + ۳) + b = ۲ax + ۲b \Rightarrow ۳a = b$$

$$f(-۲) = -۲a + b \Rightarrow (b = ۳a\ ,\ b - ۲a = ۵) \Rightarrow a = ۵\ ,\ b = ۱۵$$

در نتیجه $f(x) = ۵x + ۱۵$ پس $f(۳) = ۳۰$

۶۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تابع خطی به‌صورت $f(x) = ax + b$ است.

$$ax + b + a\left(\frac{۱}{x}\right) + b = \frac{x^۲ - ۱۲x + ۱}{۲x}$$

$$a\left(x + \frac{۱}{x}\right) + ۲b = \frac{۱}{۲}\left(x + \frac{۱}{x}\right) - ۶ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲}\ ,\ b = -۳ \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۲}x - ۳$$ و $f(-۴) = -۵$

۷۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع همانی به‌صورت $f(x) = x$ می‌باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^۳ + ax^۲ + bx + c - ۲}{x^۲ - x + ۱} \\ f(x) = x \end{cases} \longrightarrow \frac{x^۳ + ax^۲ + bx + c - ۲}{x^۲ - x + ۱} = x$$

$$\Rightarrow x^۳ + ax^۲ + bx + c - ۲ = x^۳ - x^۲ + x$$

$$\Rightarrow (a + ۱)x^۲ + (b - ۱)x + (c - ۲) = ۰$$

برای این که عبارت فوق همواره برقرار باشد، باید:

$$\begin{cases} a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱ \\ b - ۱ = ۰ \Rightarrow b = ۱ \\ c - ۲ = ۰ \Rightarrow c = -۲ \end{cases}$$

پس $a + b + c = -۱ + ۱ + ۲ = ۲$ است.

۷۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که $f(x)$ یک تابع ثابت است، لذا $h(x)=g(x)-16$ از درجه‌ی ۲ خواهد بود. از طرفی دامنه‌ی $f(x)$ عبارت است از $R-\{-2,2\}$، بنابراین اعداد ۲ و ۲- صفرهای تابع $h(x)=g(x)-16$ هستند و داریم:

$$h(x)=g(x)-16=k(x-2)(x+2)=k\left(x^2-4\right)$$
$$\Rightarrow g(x)-16=kx^2-4k \Rightarrow k=4 \Rightarrow g(x)=4x^2$$
$$\Rightarrow h(x)=g(x)-16=4\left(x^2-4\right)$$

از طرفی $f(x)$ برابر با یک مقدار ثابت مانند c است. پس:

$$f(x)=\frac{2x^2+ax+b}{4\left(x^2-4\right)}=c \Rightarrow 2x^2+ax+b=4cx^2-16c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=\frac{1}{2} \\ a=0 \\ b=-16c=-16\left(\frac{1}{2}\right)=-8 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)}{g(a)-2}=\frac{f(-8)}{g(0)-2}=\frac{\frac{1}{2}}{-2}=-\frac{1}{4}$$

۷۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق ضابطه تابع مقدار هر یک از توابع را به دست می‌آوریم:

$$3-\sqrt{2}>1: f\left(3-\sqrt{2}\right)=2\left(3-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}=6-3\sqrt{2}$$
$$3-2\sqrt{2}<1: f\left(3-2\sqrt{2}\right)=\left(3-2\sqrt{2}\right)\sqrt{2}=3\sqrt{2}-4$$
$$\Rightarrow f\left(3-\sqrt{2}\right)+f\left(3-2\sqrt{2}\right)=2$$

۷۳- $$\left.\begin{array}{r} \text{Log}\,10=1 \Rightarrow f(\text{Log}\,10)=f(1) \\ 1\leqslant 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=2\times 1^3+1=2+1=3$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

۷۴- $$\text{Sin}^2x\geqslant 0 \Rightarrow f\left(\text{Sin}^2x\right)=\text{Sin}^2x-1=-\text{Cos}^2x$$
$$-\text{Cos}^2x<0 \Rightarrow f\left(f\left(\text{Sin}^2x\right)\right)=f\left(-\text{Cos}^2x\right)=-\text{Cos}^2x+1=\text{Sin}^2x$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

۷۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(f(5))+f(f(1))=f(2)+f(5)=7+2=9$$

۷۶- باتوجه به تعریف داده شده $f(x)$ همواره مثبت است، پس $-f(x)$ منفی است. بنابراین با توجه به تعریف داده شده $f(-f(x))=1$ می‌باشد. پس گزینه ۱ صحیح است.

-۷۷

$$\left.\begin{array}{l} ۴ > ۰ \Rightarrow f(۴) = \sqrt{۴} = ۲ \\ -۴ < ۰ \Rightarrow f(-۴) = \sqrt{-(-۴)} = \sqrt{۴} = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow f(f) + f(-۴) = ۴$$

توجه: تابع داده شده را می‌توان بصورت $f(x) = \sqrt{|x|}$ نیز درنظر گرفت. پس:

$$f(x) + f(-x) = ۲f(x)$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

۷۸- طبق ضابطه تابع داریم:

$$\begin{cases} ۲ > ۰ \Rightarrow f(x) = -x^۲ \Rightarrow f(۲) = -۴ \\ -۴ < ۰ \Rightarrow f(x) = x^۲ \Rightarrow f(-۴) = ۱۶ \end{cases}$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۷۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ - ۲x^۲ & x < ۱ \\ x^۴ & ۱ \leqslant x \leqslant ۲ \\ ۱۶x - ۱ & x > ۲ \end{cases}$$

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$f\left(f\left(\frac{۱}{۲}\right)\right) = f\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲f\left(f\left(\frac{۱}{۲}\right)\right) = ۲\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱$$

$$f\left(\frac{۳}{۲}\right) = \left(\frac{۳}{۲}\right)^۴ = \frac{۸۱}{۱۶} \Rightarrow f\left(f\left(\frac{۳}{۲}\right)\right) = f\left(\frac{۸۱}{۱۶}\right) = ۱۶\left(\frac{۸۱}{۱۶}\right) - ۱ = ۸۰$$

$$۲f\left(f\left(\frac{۱}{۲}\right)\right) - f\left(f\left(\frac{۳}{۲}\right)\right) = ۱ - ۸۰ = -۷۹$$

-۸۰

$$f\left(\frac{۳}{۴}\right) = \frac{\frac{۳}{۴}}{\sqrt{۱ - \frac{۳}{۴}}} = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow f\left(f\left(\frac{۳}{۴}\right)\right) = f\left(\frac{۳}{۲}\right) = ۲ \times \left(\frac{۳}{۲}\right) - \frac{۳}{۴} = ۳ - \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ صحیح است.

۸۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تابع همانی به‌صورت $f(x) = x$ است.

$$f(-۱) = -۱ \Rightarrow \frac{c}{-۱ + ۳} = -۱ \Rightarrow c = -۲$$

$$\frac{x^۲ + ax + b}{x + ۱} = x \Rightarrow x^۲ + ax + b = x^۲ + x \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۰ \end{cases}$$

بنابراین: $a - b + c = -۱$

۸۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{۲}\in D_g \Rightarrow ۱\leqslant \frac{x}{۲}\leqslant ۲ \Rightarrow ۲\leqslant x\leqslant ۴ \\ ۲x\in D_f \Rightarrow ۲\leqslant ۲x\leqslant ۴ \Rightarrow ۱\leqslant x\leqslant ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D=\{۲\}$$

۸۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.دامنه‌ی $\frac{۲f-g}{g}$ برابر اشتراک دامنه‌های g,f است به شرطی که $g\neq ۰$ پس داديم:

$$D_{\frac{۲f-g}{g}}=(\{۱,۲,۳\}\cap\{۱,۲\})-\{x\mid g(x)=۰\}=\{۲\}$$

۸۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left(\frac{f+g}{۳f}\right)(۲)=\frac{f(۲)+g(۲)}{۳f(۲)}=\frac{۴+۳}{۳\times ۴}=\frac{۷}{۱۲}$$

۸۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} D_f=\{۱,۲,۳,۴\} \\ D_g=I-\{۳\} \end{array}\right\} \xrightarrow{I} D_{g-f}=\{۱,۲,۴\}$$

$$(g-f)\ (۱)=g(۱)-f(۱)=\frac{۱}{-۲}-(-۲)=\frac{۳}{۲}$$

$$(g-f)(۲)-g(۲)-f(۲)=\frac{۲}{-۱}-(۳)=-۵$$

$$(g-f)(۴)=g(۴)-f(۴)=۴-(-۱)=۵$$

بنابراین

$$g-f=\left\{\left(۱,\frac{۳}{۲}\right),(۲,-۵),(۴,۵)\right\}$$

۸۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} ۲f=\{(۱,۰),(۲,-۲),(۰,۴)\} \\ g^۲=\{(۱,۴),(-۲,۱),(۰,۱),(۲,.۰)\} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۲f}{g^۲}=\{(۱,۰),(۰,۴)\}$$

۸۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$۴^{x+۲}\div ۲\times ۴^{x+۱}=\frac{۴\times ۴^{x+۱}}{۲\times ۴^{x+۱}}=۲$$

-۸۸

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+۳}} \Rightarrow D_f = (-۳\,,\ +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x-۱}{\sqrt{x+۳}} \Rightarrow D_g = (-۳\,,\ +\infty)$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\} = (-۳\,,\ +\infty) - \left\{ \frac{x-۱}{\sqrt{x+۳}} = ۰ \right\} = (-۳\,,\ +\infty) - \{۱\}$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

-۸۹ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. در گزینه‌های ۱ و ۲ ، تساوی دامنه‌ها برقرار نیست. در گزینه‌ی ۳ ، $D_f = D_g = R$ و با توجه به اینکه $۰ < \frac{x^۲}{x^۲+۱} < ۱$ آنگاه $\left[\frac{x^۲}{x^۲+۱}\right] = ۰$

-۹۰ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم دو تابع f و g با هم برابراند، هرگاه اولاً: $D_f = D_g$ بوده و ثانیاً: به ازای هر x از دامنه‌ی آن‌ها $f(x) = g(x)$ شود.

$$D_f : x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow D_f = R - \{۳\}$$

دامنه‌ی تابع g نیز باید برابر با $R - \{۳\}$ شود، بنابراین مخرج کسر تابع g، باید ریشه‌ی مضاعف $x = ۳$ داشته باشد، لذا تابع g از ضرب کردن صورت و مخرج کسر تابع f در عبارت $(x - ۳)$ به‌دست می‌آید.

$$g(x) = f(x) \times \frac{x-۳}{x-۳} = \frac{۷(x-۳)}{(x-۳)^۲} = \frac{۷x - ۲۱}{x^۲ - ۶x + ۹} = \frac{ax+b}{x^۲ + cx + d}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۷ \\ b = -۲۱ \\ c = -۶ \\ d = ۹ \end{cases} \Rightarrow \frac{bc}{ad} = \frac{(-۲۱) \times (-۶)}{۷ \times ۹} = ۲$$

۹۱-
$$f(x) = \left[[x] - \frac{x}{۲}\right] \Rightarrow f\left(-\frac{۳}{۴}\right) = \left[\left[-\frac{۳}{۴}\right] - \frac{\left(-\frac{۳}{۴}\right)}{۲}\right] = \left[-۱ + \frac{۳}{۸}\right] = -۱$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح سوال است.

۹۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. طبق تعریف تابع جزء صحیح، می‌دانیم $n \leqslant x \leqslant n+۱ \Rightarrow [x] = n$

همچنین می‌دانیم $x < ۰ \Rightarrow |x| = -x$ بنابراین به ازاء $x = -\frac{۱}{۲}$ برای عبارت داده شده داریم :

$$\left|\left[\frac{-۷}{۲}\right] - \left|\left[\frac{-۵}{۲}\right]\right|\right| = |[-۳/۵] - |[-۲/۵]|| = |-۴ - |-۳|| = |-۴ - ۳| = ۷$$

۹۳-
۱) $۱^\circ < x < ۸۹^\circ\ ,\ ۹۱^\circ < x < ۱۸۰^\circ\ ,\ x = ۳۶۰^\circ \rightarrow [\mathrm{Sin}\, x] = ۰$

۲) $۱۸۱^\circ < x < ۳۵۹^\circ \rightarrow [\mathrm{Sin}\, x] = -۱$

۳) $x = ۹۰^\circ \rightarrow [\mathrm{Sin}\, x] = ۱$

تعداد براکت‌هایی که حاصل آنها ۱- است، برابر $۳۵۹ - ۱۸۱ = ۱۷۸$ است، پس $P = -۱۷۸ + ۱ = -۱۷۷$.

۹۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$|۲x - ۳| < ۱۱ \longrightarrow -۱۱ < ۲x - ۳ < ۱۱ \longrightarrow -۸ < ۲x < ۱۴$$

$$-۴ < x < ۷ \longrightarrow -\frac{۴}{۳} < \frac{x}{۳} < \frac{۷}{۳} \Rightarrow -۱/۳ < \frac{x}{۳} < ۲/۳ \Rightarrow \left[\frac{x}{۳}\right] = -۲, -۱, ۰, ۱, ۲$$

۹۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. جواب براکت همواره عددی صحیح است پس برای $\frac{۳}{۲}$، x وجود ندارد.

۹۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left[x + \frac{۱}{۲}\right] = -۲ \Rightarrow -۲ \le x + \frac{۱}{۲} < -۱ \Rightarrow -۲ - \frac{۱}{۲} \le x < -۱ - \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۵}{۲} \le x < -\frac{۳}{۲}$$

$\Rightarrow -۵ \le ۲x < -۳ \Rightarrow [۲x] = -۵$ یا -۴

۹۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left[\frac{۱ - ۴x}{۳}\right] = -۲ \Rightarrow -۲ \leqslant \frac{۱ - ۴x}{۳} < -۱ \Rightarrow ۱ < \frac{۴x - ۱}{۳} \leqslant ۲$$

$$۳ < ۴x - ۱ \leqslant ۶ \Rightarrow ۱ < x \leqslant \frac{۷}{۴} \Rightarrow -\frac{۷}{۴} \leqslant -x < -۱ \Rightarrow [-x] = -۲$$

۹۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$[x^۲ + x] = -۱ \xrightarrow[\text{جز صحیح}]{\text{تعریف}} -۱ \leqslant x^۲ + x < ۰ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^۲ + x < ۰ \Rightarrow x(x+۱) < ۰ \Rightarrow -۱ < x < ۰ \\ x^۲ + x + ۱ \geqslant ۰ \end{cases}$$

همواره برقرار است. (زیرا $\Delta < ۰$ و $a > ۰$ است.)

$$\Rightarrow [x] = -۱ \,,\, [x^۲] = ۰ \;\; [x^۳] = -۱ \Rightarrow [x] - [x^۲] + [x^۳] = -۱ - ۰ - ۱ = -۲$$

نکته: در عبارت درجه دوم $ax^۲ + bx + c$ **هر گاه** $\Delta < ۰$ **باشد، داریم:**

$$\begin{cases} \text{اگر } a < ۰ \Rightarrow ax^۲ + bx + c < ۰ \; (\text{همواره منفی}) \\ \text{اگر } a > ۰ \Rightarrow ax^۲ + bx + c > ۰ \; (\text{همواره مثبت}) \end{cases}$$

۹۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر $k \in Z$**، آن‌گاه** $[x + k] = [x] + k$

نکته: $[x] = k$ **اگر و تنها اگر** $k \le x < k + ۱$

با توجه به نکات بالا داریم:

$$[x + ۳] + [x - ۵] = ۴ \Rightarrow [x] + ۳ + [x] - ۵ = ۴ \Rightarrow ۲[x] = ۶ \Rightarrow [x] = ۳ \Rightarrow ۳ \le x < ۴$$

۱۰۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$[x + ۲[x]] = [x] + ۲[x] = ۳[x] \Rightarrow ۳[x] = ۴ \Rightarrow [x] = \frac{۴}{۳}$$

چون جزء صحیح عدد، صحیح است پس غیرممکن است که $\frac{۴}{۳}$ شود.

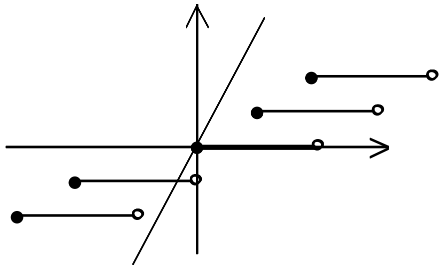
۱۰۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$[۲[x] + x] = -۹ \Rightarrow ۲[x] + [x] = -۹ \Rightarrow ۳[x] = -۹ \Rightarrow [x] = -۳ \Rightarrow -۳ \leqslant x < -۲$$

۱۰۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

طبق نمودار دو جواب $x = ۰$ و $x = -\frac{۱}{۴}$ وجود دارد.

$[x] = ۴x$



راه دوم:

$$[x] = ۴x = k \in z \Rightarrow \left[\frac{k}{۴}\right] = k \Rightarrow k \leqslant \frac{k}{۴} < k + ۱ \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{۴} \geqslant k \Rightarrow k \leqslant ۰ \\ \frac{k}{۴} < k + ۱ \Rightarrow \frac{۳k}{۴} > -۱ \Rightarrow k > -\frac{۴}{۳} \end{cases} \Rightarrow$$

$$-\frac{۴}{۳} < k \leqslant ۰ \Rightarrow \begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ k = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۴} \end{cases}$$

۱۰۳-

$$\left.\begin{array}{l} [x] = \frac{x}{۳} \\ [x] \in Z \Rightarrow \frac{x}{۳} = k \Rightarrow x = ۳k \end{array}\right\} \Rightarrow [۳k] = \frac{۳k}{۳} \Rightarrow [۳k] = k \Rightarrow k \leqslant ۳k < k + ۱ \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{cases} ۳k < k + ۱ \Rightarrow ۲k < ۱ \Rightarrow k < \frac{۱}{۲} \\ k \leqslant ۳k \Rightarrow ۲k \geqslant ۰ \Rightarrow k \geqslant ۰ \end{cases}\right\} \Rightarrow ۰ \leqslant k < \frac{۱}{۲} \\ k \in Z \end{array}\right\} \Rightarrow k = ۰$$

بنابراین معادله‌ی فوق فقط یک جواب دارد. پس گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

۱۰۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left[x+\frac{۱}{۴}\right] + \left[x+\frac{۱}{۴}-۱\right] = ۳ \Rightarrow \left[x+\frac{۱}{۴}\right] + \left[x+\frac{۱}{۴}\right] - ۱ = ۳$$

$$\Rightarrow ۲\left[x+\frac{۱}{۴}\right] = ۴ \Rightarrow \left[x+\frac{۱}{۴}\right] = ۲ \Rightarrow ۲ \leqslant x+\frac{۱}{۴} < ۳ \Rightarrow \frac{۷}{۴} \leqslant x < \frac{۱۱}{۴}$$

۱۰۵- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$[x] + \left[x - \frac{۱}{۲} - ۱\right] - \left[x - \frac{۱}{۲}\right] = ۳ \Rightarrow [x] + \left[x - \frac{۱}{۲}\right] - ۱ - \left[x - \frac{۱}{۲}\right] = ۳$$

$$[x] = ۴ \Rightarrow ۴ \leq x < ۵$$

۱۰۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$۲ = [x] + \left[x - \frac{۱}{۲}\right] - \left[x + \frac{۱}{۲}\right] = [x] + \left[x + \frac{۱}{۲} - ۱\right] - \left[x + \frac{۱}{۲}\right] = [x] - ۱ \Rightarrow [x] = ۳ \Rightarrow ۳ \leqslant x < ۴$$

۱۰۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$1 + [-x] + [x] + 3 = x + 5 \Rightarrow [-x] + [x] = x + 1$$

$x \in Z : 0 = x + 1 \Rightarrow x = -1$

$x \notin Z : -1 = x + 1 \Rightarrow x = -2$ غ ق ق

معادله ۱ جواب دارد.

۱۰۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$[2x + 5] + [x - 3] \in Z \Rightarrow x + 7 \in Z \Rightarrow x \in Z \Rightarrow \begin{cases} 2x + 5 \in Z \\ x - 3 \in Z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 5 + x - 3 = x + 7 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \ (\text{غ ق ق})$$

۱۰۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به:

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

معادله به‌ازای اعداد صحیح تعریف نمی‌شود.

$$x \in R - Z : x^2 - 3x + 1 = \frac{1}{-1} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$

با توجه به این‌که جواب‌های به‌دست آمده صحیح هستند قابل قبول نیستند، بنابراین معادله جواب ندارد.

۱۱۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^2 = [x] + [-x] + 2 \Rightarrow \begin{cases} x \in Z \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \ \text{غ ق ق} \\ x \notin Z \Rightarrow x^2 = -1 + 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

پس این معادله جواب ندارد.

۱۱۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون $0 \leqslant a - [a] < 1$ و $[a] + [-a] = 0$ یا -1 پس:

$$2x - [2x] = [x] + [-x] \Rightarrow x \in Z \Rightarrow x = 2 \text{ یا } 3$$

۱۱۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\underbrace{[x]}_{\in Z} + \underbrace{[-۳x]}_{\in Z}}_{\in Z} - ۲ = x$$

چون حاصل جزء صحیح همواره عددی صحیح است، پس طرف اول معادله همواره عددی صحیح است، بنابراین طرف دوم یعنی x هم باید عددی صحیح باشد، که در این صورت داریم:

$[-۳x] = -۳x \,,\, [x] = x$

در نتیجه:

$x \in z \Rightarrow x + (-۳x) - ۲ = x \Rightarrow -۳x = ۲ \Rightarrow x = -\frac{۲}{۳} \notin z$ غ ق ق

۱۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{۵} = a \Rightarrow \begin{cases} [a] - [-a] = ۳ \\ [a] + [-a] = -۱ \end{cases} \Rightarrow ۲[a] = ۲ \Rightarrow [a] = ۱$$

بنابراین $۱ < a < ۲$ پس $۵ < x < ۱۰$ (a نمی‌تواند صحیح باشد زیرا اگر $a \in Z$ آنگاه $[a] - [-a] = ۲a$ عددی زوج است و نمی‌تواند برابر ۳ باشد.)

۱۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $[x + y] = [x] + [y] + (۰ \text{ یا } ۱)$ بنابراین حاصل $\left[۲x^۲ + x\right] - \left[۲x^۲\right] - [x]$ یا برابر صفر است و یا برابر یک. یعنی هرگز برابر ۲ نمی‌گردد.

۱۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x \in Z \Rightarrow ۲x^۲ + x + ۲x + ۱ = ۲x + ۲ \Rightarrow ۲x^۲ + x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

که $x = \frac{۱}{۲}$ غیر قابل قبول است.

۱۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x = ۲ - ۳\left[x^۲\right] \Rightarrow x \in z \Rightarrow \left[x^۲\right] = x^۲ \Rightarrow ۳x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = \frac{۲}{۳} \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

۱۱۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که اگر $[u] = k$ (که در آن k عددی صحیح است)، آن‌گاه $k \le u < k + ۱$.

$$\left[x^۲ + ۴x\right] = -۴ \Rightarrow \underbrace{-۴ \le \overbrace{x^۲ + ۴x}^{(۱)} < -۳}_{(۲)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (۱): -۴ \le x^۲ + ۴x \Rightarrow ۰ \le x^۲ + ۴x + ۴ \Rightarrow ۰ \le (x + ۲)^۲ \text{ همواره برقرار است.} \\ (۲): x^۲ + ۴x < -۳ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۳ < ۰ \Rightarrow (x + ۱)(x + ۳) < ۰ \Rightarrow -۳ < x < -۱ \Rightarrow \end{cases}$$

$$x \in (-۳, -۱) \Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ b = -۱ \end{cases} \Rightarrow b - a = ۲$$

۱۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$[x] \leqslant ۲ \Rightarrow \begin{cases} [x] = ۲ \Rightarrow ۲ \leqslant x < ۳ \\ [x] = ۱ \Rightarrow ۱ \leqslant x < ۲ \end{cases} \Rightarrow x < ۳$$

۱۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$-۲ < [x] \leqslant ۳ \Rightarrow [x] \in \{-۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳\} \Rightarrow -۱ \leqslant x < ۴$$

۱۲۰- گزینه ۱ صحیح است.

$$۳[x^۲]^۲ - ۵[x^۲] + ۲ \leqslant ۰ \Rightarrow \frac{۲}{۳} \leqslant [x^۲] \leqslant ۱ \Rightarrow [x^۲] = ۱ \xrightarrow{x^۲ \in Z} x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$

۱۲۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$[\sin x] = \begin{cases} ۱ & \sin x = ۱ \\ ۰ & ۰ \leqslant \sin x < ۱ \\ -۱ & -۱ \leqslant \sin x < ۰ \end{cases} \Rightarrow [\sin x] = \begin{cases} ۱ & x = \frac{\pi}{۲} \\ ۰ & ۰ \leqslant x \leqslant \pi \,,\ x = ۲\pi \,,\ x \neq \frac{\pi}{۲} \\ -۱ & \pi < x < ۲\pi \end{cases}$$

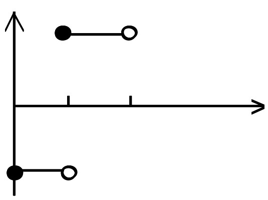
۱۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $y = [-۲x] + ۱$

$$-\frac{۱}{۲} < x \leqslant ۰ \Rightarrow y = ۱$$

$$۰ < x \leqslant \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۰$$

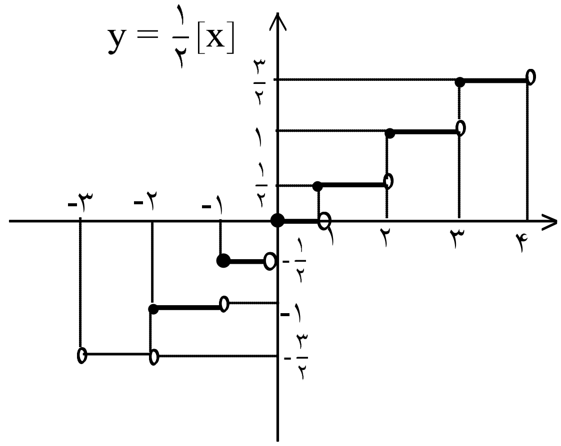
$$\frac{۱}{۲} < x \leqslant ۱ \Rightarrow y = -۱$$

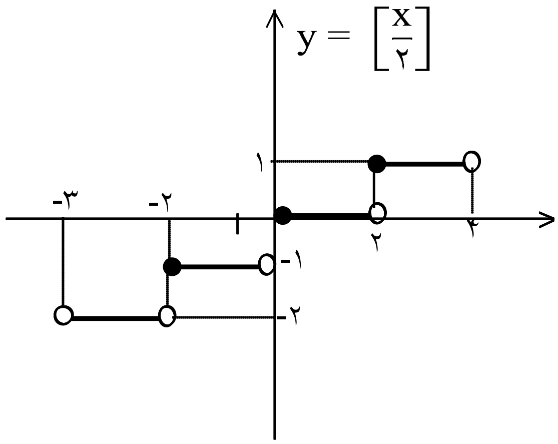
۱۲۳- $y = ۲[x] - ۱ = \begin{cases} ۲(۰) - ۱ & ۰ \leqslant x < ۱ \\ ۲(۱) - ۱ & ۱ \leqslant x < ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۱ & ۰ \leqslant x < ۱ \\ ۱ & ۱ \leqslant x < ۲ \end{cases}$

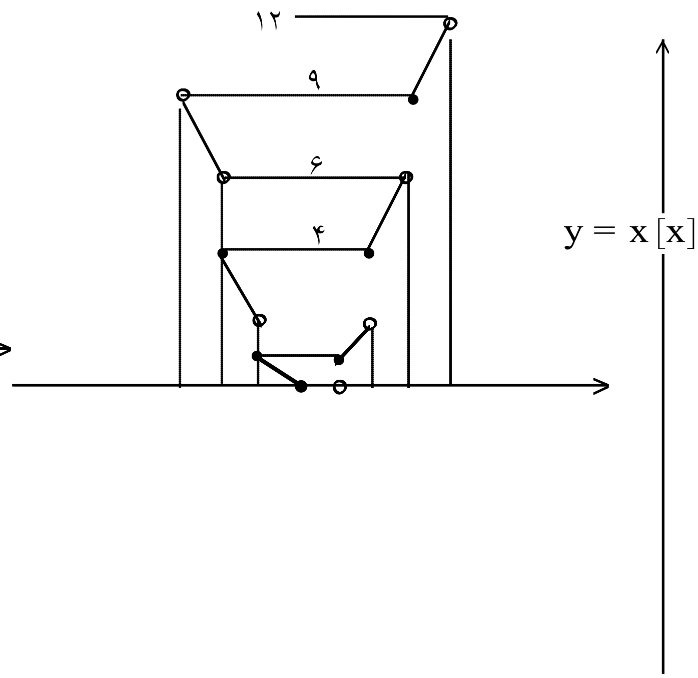


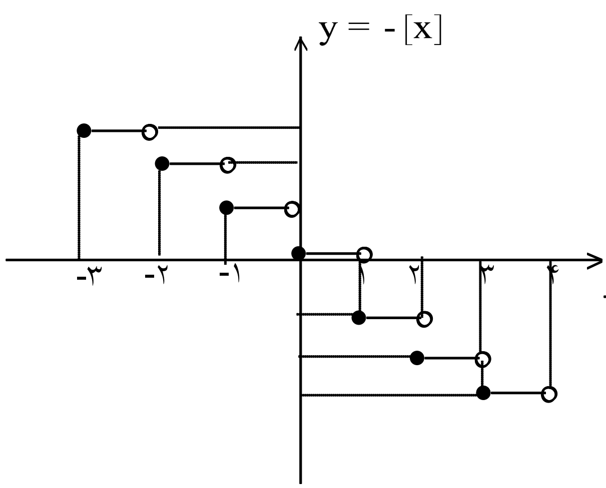
بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح سوال است.

-۱۲۴

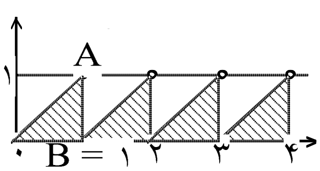








-۱۲۵ ناحیه مفروض را رسم می‌کنیم:

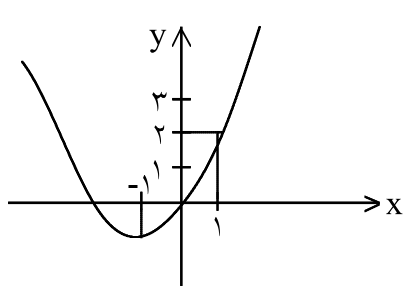


$$S = ۴S_{\widehat{OAB}} = ۴\left(\frac{۱\times ۱}{۲}\right) = ۲$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

-۱۲۶ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. منحنی $y=x^{۲}+۲x$ را رسم می‌کنیم تابع $x^{۲}+۲x$ در بازه‌ی ۱ ,۱- به‌صورت اکیداً صعودی است، در نتیجه تابع f صعودی است.

$f(۱)=[۳]=۳$ و $f(-۱)=[-۱]=-۱$ لذا مقادیر $f(x)$ پاره‌خطها به بلندی ۲ ,۱ ,۰ ,۱- می‌باشد و تعداد آن‌ها ۴ می‌باشد.



-۱۲۷ $۴x + x^۳ = ۰ \Rightarrow x\left(۴ + x^۲\right) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ ۴ + x^۲ = ۰ \quad \text{امکان ندارد} \end{cases}$

پس عبارت فوق فقط به ازای $x = ۰$ تعریف نشده است. بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

-۱۲۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است . چون فرجه‌ی رادیکال فرد است پس $\sqrt[۳]{۴ - x^۲}$ روی R تعریف شده است .

-۱۲۹ شرط بامعنی بودن y آن است که زیر رادیکال مثبت باشد. پس:

$$\frac{۱ - |x|}{۱ + |x|} \geqslant ۰$$

چون همواره مخرج مثبت است و هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، باید صورت کسر غیر منفی باشد. با توجه به تعریف قدر مطلق داریم:

$$۱ - |x| \geqslant ۰ \Rightarrow |x| \leqslant ۱ \Rightarrow -۱ \leqslant x \leqslant ۱$$

پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

-۱۳۰ $y = \sqrt{x(x - ۲)} \Rightarrow x(x - ۲) \geqslant ۰ \Rightarrow x \geqslant ۲ \, , \, x \leqslant ۰ \Rightarrow D_f = (-\infty \, , ۰] \cup [۲ \, , +\infty)$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

-۱۳۱ گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$y = \sqrt{۴x - x^۲} \Rightarrow ۴x - x^۲ \geqslant ۰ \Rightarrow x(۴ - x) \geqslant ۰ \Rightarrow$ ریشه ها: $x_۱ = ۰, \; x_۲ = ۴$

x		۰		۴	
x	−		+		+
۴ - x	+		+		−
x(۴ - x)	−		+		−

بنابراین محدودهٔ جواب $۰ \leqslant x \leqslant ۴$ است.

-۱۳۲ $y = \dfrac{\sqrt{x - ۱} + ۱}{\sqrt{x - ۱} - ۱} \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ \geqslant ۰ \Rightarrow x \geqslant ۱ \\ \sqrt{x - ۱} - ۱ \neq ۰ \Rightarrow \sqrt{x - ۱} \neq ۱ \Rightarrow x - ۱ \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۲ \end{cases}$

پس $D_f = x \geqslant ۱ \, , \, x \neq ۲$ ، بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

۱۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که رادیکالها با فرجه زوج، زمانی معنی‌دار هستند که عدد زیر رادیکال غیرمنفی باشد پس داریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x - ۱}{x - ۳}} + \sqrt{\frac{۲ - x}{x}}$$

$\frac{x - ۱}{x - ۳} \geqslant ۰ :$

x		۱		۳	
x - ۱	-		+		+
x - ۳	-		-		+
$\frac{x - ۱}{x - ۳}$	+		-		+

$\Rightarrow x \leqslant ۱$ یا $x > ۳$

$\frac{۲ - x}{x} \geqslant ۰ :$

x		۰		۲	
۲ - x	+		+		-
x	-		+		+
$\frac{۲ - x}{x}$	-		+		-

$\Rightarrow ۰ < x \leqslant ۲$

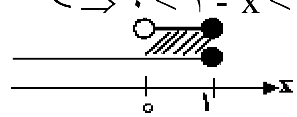
برای بدست آوردن دامنه تعریف تابع f ، اشتراک دامنه‌های دو عبارت لازم است. در نتیجه $x \in]۰ , ۱]$ حاصل می‌شود.

۱۳۴- $y = \sqrt{۱ - \sqrt{x - ۱}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - ۱ \geqslant ۰ \Rightarrow x \geqslant ۱ \\ ۱ - \sqrt{x - ۱} \geqslant ۰ \Rightarrow \sqrt{x - ۱} \leqslant ۱ \Rightarrow x - ۱ \leqslant ۱ \Rightarrow x \leqslant ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱ \leqslant x \leqslant ۲$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

۱۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به ضابطه‌ی تابع f، باید عبارت‌های زیر رادیکال غیر منفی بوده و مخرج کسر نیز مخالف صفر باشد، داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} ۱ - x > ۰ \Rightarrow x < ۱ \quad (۱) \\ ۱ - \sqrt{۱ - x} > ۰ \Rightarrow \sqrt{۱ - x} < ۱ \\ \Rightarrow ۰ < ۱ - x < ۱ \Rightarrow ۰ < x < ۱ \quad (۲) \end{array}\right.$$



$\xrightarrow{\text{اشتراک (۱) و (۲)}} [۰ , ۱]$

۱۳۶- $y = \sqrt{x + |x|} \Rightarrow x + |x| \geqslant ۰ \Rightarrow |x| \geqslant x$

که نامساوی فوق همواره برقرار است. پس $D_f = R$ است. لذا گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

۱۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left\{\begin{array}{l} x(x^۲ - ۱) \geqslant ۰ \\ x + |x| > ۰ \Rightarrow x > ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow x^۲ - ۱ \geqslant ۰ \Rightarrow x \geqslant ۱$$

۱۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x \leqslant -۱ \Rightarrow (-x-۱)+(x-۳) \geqslant ۰ \Rightarrow -۴ \geqslant ۰ \ \text{غ ق ق} \\ x \geqslant -۱ \Rightarrow (x+۱)+(x-۳) \geqslant ۰ \Rightarrow ۲x \geqslant ۲ \Rightarrow x \geqslant ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geqslant ۱ \end{cases}$$

۱۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|x+۱|+|x-۳|-۶ \geqslant ۰$$

$$\left.\begin{array}{l} x \leqslant -۱ \Rightarrow -۲x+۲ \geqslant ۶ \Rightarrow x \leqslant -۲ \ (I) \\ -۱ < x < ۳ \Rightarrow ۴ \geqslant ۶ \ \text{غ ق ق} \\ x \geqslant ۳ \Rightarrow ۲x-۲ \geqslant ۶ \Rightarrow x \geqslant ۴ \ (II) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = (I) \cup (II) = R-(-۲,۴)$$

توجه: می‌توان به روش عدد گذاری و با استفاده از گزینه‌ها، گزینه درست را انتخاب کرد.

۱۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دامنه $g(x)=\sqrt{||x-۱|-۳|-۲}$ را محاسبه می‌کنیم لذا:

$$||x-۱|-۳|-۲ \geq ۰ \Rightarrow ||x-۱|-۳| \geq ۲ \Rightarrow \begin{cases} |x-۱|-۳ \geq ۲ \\ |x-۳|-۳ \leq -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-۱| \geq ۵ \\ |x-۱| \leq ۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq ۶ \ \text{یا} \ x \leq -۴ \\ ۰ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

واضح است که این دو مجموعه فقط شامل اعداد صحیح $\{-۳,-۲,-۱,۳,۴,۵\}$ نمی‌باشند.

۱۴۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\frac{|x|\sqrt{x}}{\sqrt{x-۱}}-\frac{|x-۱|\sqrt{x-۱}}{x\sqrt{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-۱>۰ \Rightarrow x>۱ \\ x \neq ۰ \\ x>۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} x>۱ \Rightarrow D_f=(۱,+\infty)$$

۱۴۲- چون تابع بصورت رادیکالی و کسری است پس کافیست که مخرج بزرگتر از صفر باشد، پس داریم:

$$[x]-۱>۰ \Rightarrow [x]>۱ \Rightarrow x \geqslant ۲$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۱۴۳- $$y=\sqrt{[x]-۱}+\sqrt{۳-[x]} \Rightarrow \begin{cases} [x]-۱ \geqslant ۰ \Rightarrow [x] \geqslant ۱ \Rightarrow x \geqslant ۱ \\ ۳-[x] \geqslant ۰ \Rightarrow [x] \leqslant ۳ \Rightarrow x < ۴ \end{cases} \Rightarrow ۱ \leqslant x < ۴$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ پاسخ درست است.

۱۴۴- $$[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$$

مخرج عبارت $y=\frac{x-۱}{[x]+[-x]}$ نباید صفر باشد، پس $[x]+[-x]$ نباید صفر باشد، پس x نباید متعلق به اعداد صحیح باشد، پس: $D_f = x \notin Z$. بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

۱۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دامنه f را تعیین می‌کنیم $x^۲ - ۶x - ۱۶ \geq ۰ \Rightarrow x \leq -۲$ یا $x \geq ۸$

الزاماً خواهیم داشت: اولاً نشدنی است $x^۲ + ۲x \leq -۲ \Rightarrow x^۲ + ۲x + ۲ \leq ۰$

ثانیاً $x^۲ + ۲x \geq ۸ \Rightarrow x^۲ + ۲x - ۸ \geq ۰ \Rightarrow x \leq -۴$ یا $x \geq ۲$

۱۴۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$۲x - x^۲ \geqslant ۰ \to x(۲ - x) \geqslant ۰ \Rightarrow x \in [۰, ۲] \to ۰ \leqslant ۳ - x \leqslant ۲ \to -۳ \leqslant -x \leqslant -۱ \Rightarrow x \in [۱,۳]$$

۱۴۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x + |x + ۲|} \to f(-x) = \sqrt{-x + |-x + ۲|} \to -x + |-x + ۲| \geqslant ۰$$

$$\to x \leqslant |x - ۲| \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{به توان ۲}} x^۲ \leqslant x^۲ - ۴x + ۴ \to x \leqslant ۱$$

۱۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تغییر متغیر زیر را درنظر می‌گیریم :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - ۱}{x} = t \Rightarrow x = \dfrac{۱}{۱ - t} \\ f\left(\dfrac{x-۱}{x}\right) = \sqrt{۲x-۱} \end{array}\right\} \Rightarrow f(t) = \sqrt{۲\left(\dfrac{۱}{۱ - t}\right) - ۱} \Rightarrow f(t) = \sqrt{\dfrac{۱ + t}{۱ - t}} \Rightarrow$$

$$f(x) = \sqrt{\dfrac{۱ + x}{۱ - x}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۱ + x}{۱ - x} \geqslant ۰ \\ x \neq ۱ \end{cases} \Rightarrow -۱ \leqslant x < ۱$$

۱۴۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x - ۲) = \sqrt{۱ - x^۲} \xrightarrow{x \longrightarrow x + ۳} f(x + ۱) = \sqrt{۱ - (x + ۳)^۲}$$

$$(x + ۳)^۲ \leq ۱ \qquad -۱ \leq x + ۳ \leq ۱ \quad -۴ \leq x \leq -۲$$

۱۵۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. برای این که $D_f = (-\infty, ۱]$ باشد، باید یا عبارت زیر رادیکال $-(x-۱)^۳$ باشد که غیرممکن است (چرا؟) و یا به صورت $(x-۱) \times p(x)$ باشد که $p(x)$ باید یا همواره منفی باشد و یا ریشه‌ی مزدوج کوچک‌تر از ۱ (با شرط مثبت نبودن $p(x)$) داشته باشد. $x = ۱$ یکی از ریشه‌های عبارت $ax^۳ + bx^۲ + ۱$ است، پس:

$$x = ۱ \Rightarrow a(۱)^۳ + b(۱)^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow a + b = -۱$$
$$ax^۳ + bx^۲ + ۱ = (x-۱)\left(ax^۲ + (a+b)\,x + (a+b)\right) + (a+b) + ۱$$
$$\xrightarrow{a+b=-۱} ax^۳ + bx^۲ + ۱ = (x-۱)\left(ax^۲ - x - ۱\right)$$
$$ax^۲ - x - ۱ < ۰ \Rightarrow \begin{cases} a < ۰ \\ (-۱)^۲ - ۴(-۱)\,a < ۰ \Rightarrow a < \frac{-۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow a < \frac{-۱}{۴}$$

از طرفی به ازای $a = \frac{-۱}{۴}$ نیز عبارت به صورت $-\frac{۱}{۴}x^۲ - x - ۱$ می‌شود که ریشه‌ی مزدوج کوچک‌تر از ۱ دارد. بنابراین مجموعه‌ی جواب برابر $(-\infty, \frac{-۱}{۴}]$ است.

۱۵۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج همواره نامنفی است، لذا:

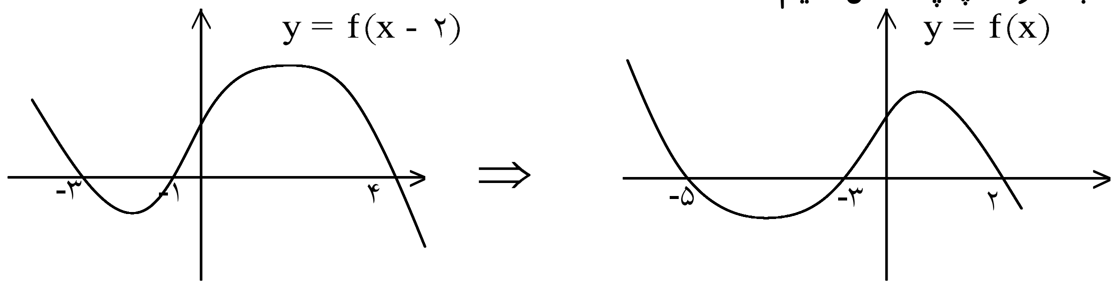
$$xf(x) \geqslant ۰ \Rightarrow \begin{cases} (x, f(x) \geqslant ۰ \Rightarrow x \in [۱, ۲]) \\ (x, f(x) \leqslant ۰ \Rightarrow x \in [-۳, ۰]) \end{cases} \Rightarrow x \in [-۳, ۰] \cup [۱, ۲]$$

۱۵۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ در بازه‌ای است که علامت $f(x)$ و x یکسان باشند یعنی تابع $f(x)$ در ناحیه‌ی اول و ناحیه‌ی سوم قرار می‌گیرند لذا بازه مورد نظر به‌صورت $[-۲, ۰] \cup [۱, ۴]$ است.

۱۵۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$۱ + f(x) \geqslant ۰ \Rightarrow f(x) \geqslant -۱ \Rightarrow y \geqslant -۱ \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} ۰ \leqslant x < ۲$$

۱۵۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که نمودار $y=f(x-۲)$ داریم برای رسم $y=f(x)$ باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم.



$$\sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geqslant ۰ \xrightarrow[\text{هم علامت باشند}]{f(x) \text{ و } x \text{باید}} \begin{cases} x \geqslant ۰ \text{ و } f(x) \geqslant ۰ \Rightarrow x \in [۰،۲] \\ x \leqslant ۰ \text{ و } f(x) \leqslant ۰ \Rightarrow x \in [-۵،-۳] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = [-۵, -۳] \cup [۰, ۲]$$

۱۵۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار $D_f = [-۳, +\infty)$ و $D_g = [-۵, ۴]$ می‌دانیم

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = ۰\} = [-۳, ۴] - \{-۳, ۱, ۳\}$$

در نتیجه دامنه $\frac{g}{f}$ شامل اعداد صحیح ۴ , ۲ , ۰ , -۱ , -۲ است.

۱۵۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(-x) = ۰ \Rightarrow x = ۰, ۲$$

$$D_{f(۱-x)} : -۲ \leq ۱ - x \leq ۰ \Rightarrow -۳ \leq -x \leq -۱ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۳$$

$$D_{f(-x)} : -۲ \leq -x \leq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲$$

$$D_g = D_{f(۱-x)} \cap D_{f(-x)} - \{x : f(-x) = ۰\} = [۱, ۳] \cap [۰, ۲] - \{۰, ۲\} = [۱, ۲)$$

۱۵۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. تابع $\sqrt{x - f(x)} = \sqrt{۴x - x^۳}$ وقتی با معنی است که $۴x - x^۳ \geqslant ۰$ باشد ریشه‌های نامعادله $x = -۲, ۰, ۲$ هستند پس $۰ \leqslant x \leqslant ۲$ یا $-\infty < x < -۲$ دامنه‌ی آن به‌صورت $[۰,۲] \cup (-\infty, -۲]$ است.

۱۵۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^۳ + x^۲ \Rightarrow \frac{۱}{f(x)} = \frac{۱}{x^۳ + x^۲} = \frac{۱}{x^۲(x+۱)} > ۰$$

در نتیجه:

$$x^۲(x+۱) > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x + ۱ > ۰ \Rightarrow x > -۱ \\ x^۲ > ۰ \Rightarrow x \neq ۰ \end{cases}$$

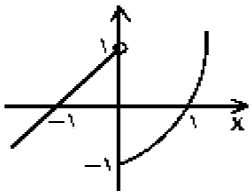
بنابراین:

$$D_f = (-۱, ۰) \cup (۰, +\infty)$$

۱۵۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x.f(x) \geq ۰ \Rightarrow (-\infty , -۱] \cup [۱ , +\infty) \cup \{۰\}$$

یعنی نقاطی که طول و عرضشان هم‌علامت باشد.



۱۶۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$(fog)\left(\sqrt{۲}\right) = f\left(g\left(\sqrt{۲}\right)\right) = f\left(\frac{\sqrt{۲}}{۱ - \sqrt{۲}}\right) = \left[\frac{\sqrt{۲}}{۱ - \sqrt{۲}}\right]$$

$$= \left[-\sqrt{۲}\left(\sqrt{۲} + ۱\right)\right] = \left[-۲ - \sqrt{۲}\right] = -۲ + \left[-\sqrt{۲}\right] = -۲ - ۲ = -۴$$

$$f(x) = ۱ - \sqrt{x} \Rightarrow f(۴) = ۱ - \sqrt{۴} \Rightarrow f(۴) = ۱ - ۲ = -۱$$ -۱۶۱

$$g(f(۴)) = g(-۱) = \frac{۱}{-۱} = -۱$$

بنابراین گزینهٔ ۴ صحیح است.

$$(fog)(۳) = f(g(۳)) = f(۴) = \sqrt{۴} - ۲ = ۰$$ -۱۶۲

بنابراین گزینه ۱ جواب صحیح است.

۱۶۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(f(x)) = ۲\sqrt{f(x) - ۱} = ۲x$$

در نتیجه:

$$۴(f(x) - ۱) = ۴x^۲ \Rightarrow f(x) - ۱ = x^۲ \Rightarrow f(x) = x^۲ + ۱$$

$$f\left(\sqrt{۲}\right) = \left(\sqrt{۲}\right)^۲ + ۱ = ۳ \Rightarrow f\left(f\left(\sqrt{۲}\right)\right) = f(۳) = ۳^۲ + ۱ = ۱۰$$

$$g(۵) = ۲\sqrt{۵ - ۱} = ۴ \Rightarrow f(g(۵)) = f(۴) = ۴^۲ + ۱ = ۱۷$$

بنابراین:

$$f\left(f\left(\sqrt{۲}\right)\right) - f(g(۵)) = ۱۰ - ۱۷ = -۷$$

۱۶۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x}\ ,\ g(f(x)) = |x| - ۵$$

$$g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = |x| - ۵$$

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^{۲}$$

$$g(t) = \left|t^{۲}\right| - ۵ = t^{۲} - ۵ \Rightarrow g(x) = x^{۲} - ۵$$

بنابراین:

$$g(۳) = ۳^{۲} - ۵ = ۹ - ۵ = ۴ \Rightarrow f(g(۳)) = f(۴) = \sqrt{۴} = ۲$$

$$g(-۲) = (-۲)^{۲} - ۵ = ۴ - ۵ = -۱ \Rightarrow g(g(-۲)) = g(-۱) = (-۱)^{۲} - ۵ = ۴$$

در نتیجه:

$$f(g(۳)) - g(g(-۲)) = ۲ - (-۴) = ۶$$

۱۶۵- طبق تعریف داریم: $fog(x) = f(g(x))$ پس در این سوال داریم:

$$\begin{matrix} fog(۲) = f(g(۲)) = f(۲ - ۴) = f(-۲) = -۱ \\ gof(-۱) = g(f(-۱)) = g(-۲ + ۳) = g(۱) = -۳ \end{matrix} \Rightarrow \text{حاصل کسر} = \frac{-۱}{-۳} = \frac{۱}{۳}$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۱۶۶-

$$\left.\begin{matrix} fog(۶) = f(g(۶)) = f(۶ - ۴) = f(۲) = \sqrt{۲^{۳} + ۱} = ۳ \\ gof(۰) = g(f(۰)) = g\left(\sqrt{۰^{۳} + ۱}\right) = g(۱) = ۱ - ۴ = -۳ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{fog(۶)}{gof(۰)} = \frac{۳}{-۳} = -۱$$

بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۶۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{\pi}{۴}\right) = Sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$gof\left(\frac{\pi}{۴}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{۴}\right)\right) = g\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \sqrt{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۶۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$(gof)\left(۱ + \sqrt{۳}\right) = g\left(f\left(۱ + \sqrt{۳}\right)\right) = g\left(\sqrt{۳} + ۳\right) = \left[\sqrt{۳} + ۳\right] = ۴$$

$$f\left(۱ + \sqrt{۳}\right) = \left(۱ + \sqrt{۳}\right)\left(۱ + \sqrt{۳} - ۱\right) = \sqrt{۳} + ۳$$

۱۶۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

نقطه ی توپر : $f(-۱) = ۲ \Rightarrow f(f(-۱)) = f(۲) = ۱$

۱۷۰- $g(5)=2$ چون $2 \geq 5$ است، پس:

$$fog(5)=f(g(5))=f(2)=3(2^2)-2=10$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۱۷۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x\in Q \Rightarrow f(x)=x\in Q \Rightarrow f(f(x))=f(x)=x \\ x\notin Q \Rightarrow f(x)=0\in Q \Rightarrow f(f(x))=f(0)=0 \end{cases} \Rightarrow f(f(x))=f(x)$$

۱۷۲-

$$fof(x)=f(f(x))=f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}}=\frac{2x}{2}=x$$

بنابراین گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۷۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به درجه‌ی fof، تابع چند جمله‌ای $f(x)$ فقط می‌تواند درجه‌ی اول باشد.

$$f(x)=ax+b$$

$$fof(x)=a(ax+b)+b \Rightarrow \begin{cases} a^2=\frac{4}{5} \Rightarrow a=\pm\frac{2}{\sqrt{5}} \\ ab+b=\frac{1}{5} \Rightarrow b=\frac{1}{5(a+1)} \end{cases}$$

برای هر مقدار a یک مقدار برای b به‌دست می‌آید. پس برای $f(x)$ دو ضابطه‌ی متفاوت خواهیم داشت.

۱۷۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع خطی $f(x)=ax+b$ است.

$$a(ax+b)+b=9x+10 \Rightarrow \left(a^2=9\ ,\ ab+b=10\right)$$

چون تابع خطی نزولی است: $a=-3$، در نتیجه: $b=-5$ و $f(x)=-3x-5$، پس: $f(1)=-8$.

۱۷۵-

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(x^2-3\right)=\left(x^2-3\right)+3=x^2$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

۱۷۶-

$$f(x)=3x-1 \quad , \quad g(x)=1-2x$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(1-2x)=3(1-2x)-1=3-6x-1=2-6x$$

گزینه ۱ صحیح است.

۱۷۷- بنابر تعریف تابع داریم:

$$f(2\cos x)=4\cos^2 x-2=2\left(2\cos^2 x-1\right)=2\cos 2x$$

$$f(f(2\cos x))=f(2\cos 2x)=2\cos 4x$$

$$f(f(f(2\cos x)))=f(2\cos 4x)=2\cos 8x$$

لذا گزینه ۴ صحیح است.

۱۷۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$fog(x)= f(g(x)) = \sin^4 x - \sqrt{\sin^4 x} = \sin^4 x - \sin^2 x$$

$$= \sin^2 x\left(\sin^2 x - 1\right) = -\sin^2 x \cos^2 x = -\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = -\frac{1}{4}\sin^2 2x$$

۱۷۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = t \Rightarrow f(g(x)) \Rightarrow t^2-t-2 = 0 \quad t= -1, 2$$

$$2x^2-3x = -1 \quad 2x^2-3x+1 = 0 \quad x= 1 ، \frac{1}{2}$$

$$2x^2-3x = 2 \quad 2x^2-3x-2 = 0 \quad x = \frac{3\pm 5}{4} = 2 ، -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ ۴ریشه

۱۸۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$gof(x) = 0 \Rightarrow g(f(x)) = 0 \Rightarrow 4f(x) + 5 = 0 : f(x) = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow x^2+ x - 2 = -\frac{5}{4} \Rightarrow x^2+ x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

۱۸۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$fog(x) = g^2-g-2 = 0 \Rightarrow g(x) = -1, 2 \Rightarrow \begin{matrix} 2x^2-3x = -1 \ \text{دو جواب} \\ 2x^2-3x = 2 \ \text{دو جواب} \end{matrix} \Rightarrow \text{۴نقطه}$$

۱۸۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$fog =f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \frac{2x-4}{x+2} - 1 = \frac{x-6}{x+2} , \ gof =g(2x-1) = \frac{2x-3}{2x+1}$$

$$\frac{2x-3}{2x+1} = \frac{x-6}{x+2} \Rightarrow 2x^2 - 11x - 6 = 2x^2 + x - 6 \quad \Rightarrow x = 0 \ \text{صفر}$$

۱۸۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$fog = f \rightarrow (2x+1)^2 = (2x-3)^2 \longrightarrow 2x + 1 = -(2x-3) \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

۱۸۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f = 0 \rightarrow ax - 1 = 0 \rightarrow ax = 1$$

$$fog = 0 \rightarrow a(1 - 2x) - 1 = 0 \rightarrow a - 2ax - 1 = 0 \rightarrow a - 2 - 1 = 0 \rightarrow a = 3$$

۱۸۵-

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=۲x+۲a \\ g(x)=x^۲+bx+c \end{array}\right\} \Rightarrow f(g(x))=۲g(x)+۲a=۲\left(x^۲+bx+c\right)+۲a$$

طبق فرض: $f(g(x))=۲x^۲+x+۱$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲bx+۲c+۲a=۲x^۲+x+۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲b=۱ \\ ۲c+۲a=۱ \end{cases} \Rightarrow ۲b+۲c+۲a=۲$$

$$\Rightarrow a+b+c=۱$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح سوال است.

۱۸۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$(gof)(x)>۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\left(x^۲+۳x\right)+۲>۰ \xrightarrow{\times(-۲)} x^۲+۳x-۴<۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۴)<۰ \Rightarrow -۴<x<۱$$

۱۸۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

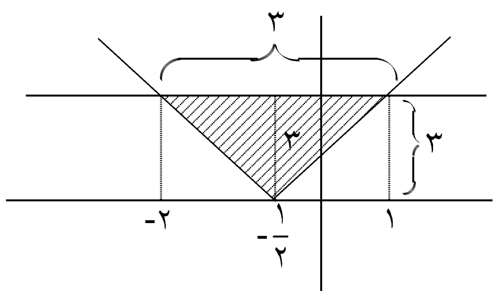
$$f(x)\leqslant ۰ \Rightarrow x^۲+x-۲\leqslant ۰ \Rightarrow -۲\leqslant x\leqslant ۱ \Rightarrow -۲\leqslant g(x)\leqslant ۱ \Rightarrow -۲\leqslant \frac{۱}{۲}(x-۳)\leqslant ۱$$

$$\Rightarrow -۴\leqslant x-۳\leqslant ۲ \Rightarrow -۱\leqslant x\leqslant ۵$$

۱۸۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(f(x))=\sqrt{۴\left(x^۲+x\right)+۱}=\sqrt{۴x^۲+۴x+۱}=\sqrt{(۲x+۱)^۲}=|۲x+۱|$$

$$|۲x+۱|=۳ \rightarrow \begin{array}{l} ۲x+۱=۳ \rightarrow x=۱ \\ ۲x+۱=-۳ \rightarrow x=-۲ \end{array}$$



$$S=۳\times۳\times\frac{۱}{۲}=۴/۵$$

۱۸۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. چون $gof(x)=۳-(f(x))^۲$ **است، پس:**

$$-۱<f(x)<۲ \Rightarrow ۰\leq(f(x))^۲<۴ \Rightarrow -۱<۳-(f(x))^۲\leq ۳ \Rightarrow -۱<g(f(x))\leq ۳$$

می‌توانستید فرض کنید $f(x)=t$ **و با رسم نمودار** $g(t)=۳-t^۲$ **در بازه‌ی** $(-۱,۲)$ **برد آن را به‌دست آورید.**

۱۹۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

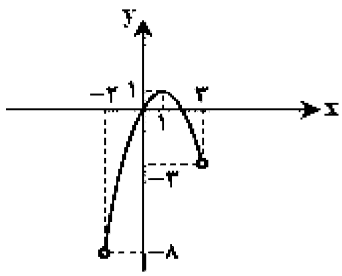
$$gof(x) = g(f(x)) \xrightarrow{t = f(x)} g(t) \; ; -۲ < t < ۳$$

بنابراین کافی است برد تابع $g(t) = ۲t - t^۲ = ۱ - (t - ۱)^۲$ را به‌ازای $t \in (-۲ , ۳)$ به دست آوریم.

$$-۲ < t < ۳ \Rightarrow -۳ < t - ۱ < ۲ \Rightarrow ۰ \le (t - ۱)^۲ < ۹$$

$$\Rightarrow -۸ < ۱ - (t - ۱)^۲ \le ۱ \Rightarrow -۸ < g(t) \le ۱ \Rightarrow R_g = (-۸ , ۱)$$

نمودار $g(x)$ در بازه‌ی $(-۲ , ۳)$ به صورت مقابل است:



۱۹۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته : $۰ \le u - [u] < ۱$

ابتدا برد f را محاسبه می‌کنیم و آن‌را به عنوان دامنه‌ی g درنظر می‌گیریم تا برد gof به دست بیاید.

$$f(x) = x - \frac{۱}{۲}[۲x] = \frac{۱}{۲}(۲x - [۲x]) \Rightarrow ۰ \le f(x) < \frac{۱}{۲} \Rightarrow (gof)(x) = ۳|f(x)|$$

$$\xrightarrow{۰ \le f(x) < \frac{۱}{۲}} ۰ \le ۳|f(x)| < \frac{۳}{۲}$$

بنابراین برد تابع gof شامل دو عدد صحیح ۰ و ۱ است.

۱۹۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ریشه‌های معادله $(fofof)(x) = ۰$ را باید به دست آورید.

طبق نمودار $f(۴) = f(-۱) = ۰$ در نتیجه

$$f(fof(x)) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} fof(x) = -۱ \\ fof(x) = ۴ \end{cases}$$

و این زمانی ممکن است که

$$\begin{cases} f(f(x)) = -۱ \\ f(f(x)) = -۴ \end{cases}$$

اما نقاطی با عرض ۱- و ۴ دارای طول‌های ۵ و ۱ هستند پس

$$\begin{cases} f(x) = ۵ \Rightarrow x = ۲ , ۳ \\ f(x) = ۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس معادله $(fofof)(x) = ۰$ دارای سه ریشه است.

۱۹۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. راه اول:

$$f(g(x))=۴\left(x^۲-۴x+۵\right)\Rightarrow f(۲x-۳)=۴\left(x^۲-۴x+۵\right)$$

$$۲x-۳=t\Rightarrow x=\frac{t+۳}{۲}\Rightarrow f(t)=۴\left(\frac{t^۲+۶t+۹}{۴}-۴\left(\frac{t+۳}{۲}\right)+۵\right)=t^۲-۲t+۵$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۲-۲x+۵$$

راه دوم:

$$f(۲x-۳)=۴\left(x^۲-۴x+۵\right)\xrightarrow{x=۲}f(۱)=۴$$

فقط گزینه‌ی ۳ به ازای $x=۱$ برابر ۴ می‌شود.

۱۹۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x))=۸x^۲+۶x+۵=۲(۲x+۱)^۲-(۲x+۱)+۴\rightarrow f(x)=۲x^۲-x+۴$$

۱۹۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(x-۳)=x^۲-۴x+۵$$

$$x-۳=t\Rightarrow x=t+۳\Rightarrow f(t)=(t+۳)^۲-۴(t+۳)+۵\Rightarrow f(t)=t^۲+۲t+۲\Rightarrow f(x)=x^۲+۲x+۲$$

۱۹۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر $g(x)=t$ فرض شود از رابطه $t=\frac{x-۱}{x}$ مقدار x برحسب t محاسبه می‌شود:

$$tx=x-۱\rightarrow x=\frac{۱}{۱-t}$$ در نتیجه $$f(x)=\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}$$

$$f(t)=\sqrt{\frac{۲}{۱-t}-۱}=\sqrt{\frac{t+۱}{۱-t}}$$

۱۹۷- یادآوری:

$$a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b)$$

$$f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^۳+\frac{۱}{x^۳}\Rightarrow f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۳-۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)\xrightarrow{t=x+\frac{۱}{x}}$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(t)=t^۳-۳t\Rightarrow f(x)=x^۳-۳x$$

۱۹۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. با در نظر گرفتن $\frac{x}{۲-x}=t$ داریم:

$$\frac{x}{۲-x}=t \longrightarrow ۲t-xt=x \longrightarrow xt+x=۲t \longrightarrow (t+۱)x=۲t \longrightarrow x=\frac{۲t}{t+۱}$$

حال با در دست داشتن نتیجه‌ی محاسبات فوق می‌توان نوشت:

$$g\left(\frac{x}{۲-x}\right)=\frac{۱}{۲}x \longrightarrow g(t)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲t}{t+۱}\right) \longrightarrow g(t)=\frac{t}{t+۱} \xrightarrow{t\to x} g(x)=\frac{x}{x+۱}$$

روش دوم: با استفاده از عددگذاری برای پیدا کردن گزینه‌ی صحیح داریم:

$$x=۱ \longrightarrow f(۱) \longrightarrow g(f(۱))=g(۱)=\frac{۱}{۲}$$

حال در گزینه‌ها $x=۱$ را جایگذاری می‌کنیم که به ترتیب $\frac{۱}{۲}$, ۰, تعریف نشده , ۲ به‌دست می‌آیند.

۱۹۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f\left(x-\frac{۱}{x}\right)=\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۲+۲-۴$$

$$f\left(x-\frac{۱}{x}\right)=\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۲-۲ \Rightarrow f(x)=x^۲-۲$$

۲۰۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(۲f(x))=\frac{x^۲}{۳} \xrightarrow{f(x)=x+۱} g(۲x+۲)=\frac{x^۲}{۳}$$

با فرض $t=۲x+۲$ داریم:

$$g(t)=\frac{\left(\frac{t-۲}{۲}\right)^۲}{۳}=\frac{(t-۲)^۲}{۱۲} \Rightarrow g(x)=\frac{(x-۲)^۲}{۱۲}$$

۲۰۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(f(x))=g\left(\frac{۴x-۱}{x+۲}\right)=\frac{۲x+۱}{x-۳}$$

$$\frac{۴x-۱}{x+۲}=۲ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲} \Rightarrow (gof)\left(\frac{۵}{۲}\right)=g(۲)=\frac{۲\times\frac{۵}{۲}+۱}{\frac{۵}{۲}-۳}=\frac{۶}{\frac{-۱}{۲}}=-۱۲$$

۲۰۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f\left(x-\frac{۱}{x}\right)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=\left(x-\frac{۱}{x}\right)^{۲}+۲\Rightarrow f\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^{۲}+۲=x+۲$$

۲۰۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(x-\frac{۱}{x}\right)=x^{۴}+\frac{۱}{x^{۴}}=\left(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{۲}-۲\Rightarrow g\left(x-\frac{۱}{x}\right)=$$

$$\left[\left(x-\frac{۱}{x}\right)^{۲}+۲\right]^{۲}-۲\xrightarrow{t=x-\frac{۱}{x}}g(t)=\left(t^{۲}+۲\right)^{۲}-۲\Rightarrow g(۲)=(۴+۲)^{۲}-۲=۳۴$$

۲۰۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(x)=۲x-۱\ ,\ (fog)(x)=\frac{x}{x-۳}\Rightarrow f(g(x))=\frac{x}{x-۳}$$

$$g(x)=۳\Rightarrow ۲x-۱=۳\Rightarrow x=۲$$

$$f(g(x))=\frac{x}{x-۳}\xrightarrow{g(x)=۳\quad x=۲}f(۳)=\frac{۲}{۲-۳}=-۲$$

۲۰۵- $f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}\Rightarrow f\left(x+\frac{۱}{x}\right)=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^{۲}-۲\Rightarrow f(x)=x^{۲}-۲\Rightarrow f(۳)=۹-۲=۷$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

۲۰۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=۳\Rightarrow x-\frac{۴}{x}=۳\Rightarrow x=-۱ \text{ یا } ۴$$

$$g(۳)=۸\Rightarrow g(f(x))=۸$$

$$\begin{cases}x=-۱\Rightarrow g(۳)=-a-۲=۸\Rightarrow a=-۱۰\\ x=۴\Rightarrow g(۴)=۶۴a+۸=۸\Rightarrow a=۰\end{cases}$$

۲۰۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(f(x))=۸x^{۲}+۲۲x+۲۰=۲(۲x+۳)^{۲}-(۲x+۳)+۵\rightarrow g(x)=۲x^{۲}-x+۵$$

$$fog=f(g(x))=۲\left(۲x^{۲}-x+۵\right)+۳=۴x^{۲}-۲x+۱۳$$

۲۰۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} g(f(x)) = \dfrac{x}{x-۱} \\ g(x) = \dfrac{-۱}{x} \end{array}\right. \Rightarrow g(f(x)) = \frac{-۱}{f(x)} = \frac{x}{x-۱} \Rightarrow f(x) = \frac{۱-x}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{x} - ۱$$

۲۰۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. از $f(x) = x^۲ - ۴x + ۳$ می‌توان دریافت $f(g(x)) = g^۲(x) - ۴g(x) + ۳$، پس می‌توان نوشت:

$$g^۲(x) - ۴g(x) + ۳ = x^۲ - ۲x$$

اگر به طرفین تساوی بالا عدد ۱ را اضافه کنیم، خواهیم داشت:

$$(g(x) - ۲)^۲ = (x - ۱)^۲ \Rightarrow \underbrace{|g(x) - ۲|}_{+} = |x - ۱| \Rightarrow g(x) = ۲ + |x - ۱|$$

۲۱۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ۲x \Rightarrow f(g(x)) = ۲g(x) \\ \text{طبق فرض}: f(g(x)) = ۲x + ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲g(x) = ۲x + ۲ \Rightarrow g(x) = x + ۱$$

۲۱۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x + ۱)^۲$$

$$f(g(x)) = (g(x) + ۱)^۲ = x^۴ \Rightarrow g(x) = x^۲ - ۱$$

۲۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{r} g(x) = y \Rightarrow f(y) = \dfrac{y}{۲y + ۱} \\ f(y) = \dfrac{۱}{x + ۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{۲y + ۱} = \frac{۱}{x + ۲} \Rightarrow xy + ۲y = ۲y + ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{x}$$

۲۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x-۱)^۲ \Rightarrow f(g(x)) = (g(x) - ۱)^۲ = x^۲ + ۸x + ۱۶ = (x + ۴)^۲$$

$$\left\{\begin{array}{l} g(x) - ۱ = x + ۴ \Rightarrow g(x) = x + ۵ \\ \qquad\qquad \text{یا} \\ g(x) - ۱ = -x - ۴ \Rightarrow g(x) = -x - ۳ \end{array}\right.$$

۲۱۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{aligned} g(x)=y \Rightarrow f(g(x)) &= y^{۲}-۲y \\ f(g(x)) &= -\cos^{۲}x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y^{۲}-۲y=-\cos^{۲}x$$

$$y^{۲}-۲y+۱=۱-\cos^{۲}x \Rightarrow (y-۱)^{۲}=\sin^{۲}x \Rightarrow y-۱=\pm\sin x \Rightarrow y=۱+\sin x$$

۲۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{aligned} gof(۳)&=۳\times ۳^{۲}-۳+۱=۲۵ \\ gof(۳)&=۱-۳f(۳) \end{aligned}\right\} \Rightarrow ۱-۳f(۳)=۲۵ \Rightarrow f(۳)=-۸$$

۲۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x))=f\left(\frac{۲}{x}+x\right)=\frac{۸}{x^{۳}}+x^{۳} \quad \text{و} \quad \frac{۲}{x}+x=t$$

داریم: $(a+b)^{۳}=a^{۳}+b^{۳}+۳ab(a+b) \Rightarrow \left(\frac{۲}{x}+x\right)^{۳}=\frac{۸}{x^{۳}}+x^{۳}+۳\left(\frac{۲}{x}\right)(x)\left(\frac{۲}{x}+x\right)$

$$\Rightarrow \left(\frac{۲}{x}+x\right)^{۳}=t^{۳} \Rightarrow \frac{۸}{x^{۳}}+x^{۳}+۶(t)=t^{۳} \Rightarrow \frac{۸}{x^{۳}}+x^{۳}=t^{۳}-۶t \Rightarrow$$

$$f(t)=t^{۳}-۶t \Rightarrow f(۳)=۲۷-۱۸=۹$$

راه دوم:

$$f\left(\frac{۲}{x}+x\right)=x^{۳}+\frac{۸}{x^{۳}} \xrightarrow{x=۱} f(۳)=۱+\frac{۸}{۱}=۹$$

۲۱۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. $f(x)=x^{۲}-x-۲$

$$f(g(x))=x^{۲}+x-۲$$

ابتدا تابع $f(g(x))$ را با $g(x)$ تشکیل داده و آن را مساوی $x^{۲}+x-۲$ قرار می‌دهیم.

$$f(g(x))=g^{۲}(x)-g(x)-۲=x^{۲}+x-۲ \Rightarrow g^{۲}(x)-g(x)=x^{۲}+x$$

$$\left(g(x)-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۴}=x^{۲}+x \Rightarrow \left(g(x)-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}=x^{۲}+x+\frac{۱}{۴} \Rightarrow \left(g(x)-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}=\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}$$

برای $g(x)$ دو جواب به‌دست می‌آید:

$$g(x)-\frac{۱}{۲}=\pm\left(x+\frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow \begin{cases} g(x)=x+۱ \\ g(x)=-x \end{cases}$$

$$(f+g)=(x)=f(x)+g(x)=x^{۲}-x-۲+x+۱=x^{۲}-۱$$

یا

$$(f+g)=(x)=f(x)+g(x)=x^{۲}-x-۲-x=x^{۲}-۲x-۲$$

۲۱۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$g(f(a))=۵ \Rightarrow f(a)=۶ \Rightarrow a+\sqrt{a}=۶ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰ \Rightarrow x=\sqrt{a}=۲$ یا $x=\sqrt{a}=-۳$ غ ق ق $\rightarrow a=۴$

۲۱۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا fog **و** gof **را تشکیل می‌دهیم:**

$fog = \{(۱,۱),(۳,۷)(a,۲)(b,۷)\} \qquad (۴,۲) \in fog \Rightarrow a = ۴$

با توجه به این که $(۴,۱)$ **در** gof **است پس:**

$g(f(۴))=۱ \Rightarrow g(۵)=۱ \Rightarrow b=۵$

۲۲۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(۲x - ۲) = \frac{۲x - ۲}{\sqrt{۲x - ۲} + ۱} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۳(x - ۱) = ۲\left(\sqrt{۲(x - ۱)} + ۱\right) \xrightarrow{\sqrt{x - ۱} = t} ۳t^۲ = ۲\left(t\sqrt{۲} + ۱\right) \Rightarrow ۳t$$

$$t = \sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{x - ۱} = \sqrt{۲} \Rightarrow x = ۳$$

تذکر: به کمک گزینه‌ها این تست به راحتی حل می‌شود.

۲۲۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$gof(x) = ۳x + ۱ \Rightarrow g(۲x - ۱) = ۳x + ۱$$
$$x = ۲ \Rightarrow g(۳) = ۷$$

۲۲۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x \xrightarrow{g} \left(۲x^۳ - ۱\right) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

با توجه به نمودار، نتیجه می‌شود:

$$g(x) = ۲x^۳ - ۱$$

بنابراین:

$$f(x) = -۳x + ۴ \Rightarrow f(g(x)) = -۳(g(x)) + ۴ = -۳\left(۲x^۳ - ۱\right) + ۴$$
$$f(g(x)) = -۶x^۳ + ۳ + ۴ = -۶x^۳ + ۷$$
$$f(g(۲)) = -۶(۲)^۳ + ۷ = -۶ \times ۸ + ۷ = -۴۸ + ۷ = -۴۱$$

یا:

$$g(x) = ۲x^۳ - ۱ \Rightarrow g(۲) = ۲(۲)^۳ - ۱ = ۱۵ \Rightarrow f(g(۲)) = -۳(۱۵) + ۴ = -۴۵ + ۴ = -۴۱$$

۲۲۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(f(x)) = x \to g\left(x^۳ + ۴x\right) = x \xrightarrow{x = -۱} g(-۵) = -۱$$

۲۲۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to \frac{۱}{x} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{۱}{x}$$

در $g(x)$ به جای x عبارت $f(x)$ را قرار می‌دهیم، داریم:

$$g(x) = \frac{x}{۱ + x} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{f(x)}{۱ + f(x)} = \frac{۱}{x} \xrightarrow{x = \frac{۱}{۳}} \frac{f\left(\frac{۱}{۳}\right)}{۱ + f\left(\frac{۱}{۳}\right)} = ۳$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{۱}{۳}\right) = ۳ + ۳f\left(\frac{۱}{۳}\right) \Rightarrow ۲f\left(\frac{۱}{۳}\right) = -۳ \Rightarrow f\left(\frac{۱}{۳}\right) = -\frac{۳}{۲}$$

-۲۲۵ $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow D_f = x \geqslant ۰ \quad , \quad g(x)=\sqrt{-x} \Rightarrow D_g = x \leqslant ۰$

$D_{fog} = \{x \mid x\in D_g\,,\ g(x)\in D_f\} = \left\{x \mid x\leqslant ۰\,,\ \sqrt{-x}\geqslant ۰\right\} \Rightarrow D_{fog} = x \leqslant ۰$

توجه: اگر $x \leqslant ۰$ باشد، $\sqrt{-x}$ با معنی بوده و همواره بزرگتر یا مساوی صفر است.

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ صحیح است.

-۲۲۶ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$D_g = [۱\,,\ +\infty)\,,\ D_f = (-\infty\,,\ ۱]$

$D_{fog} = \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} = \left\{x\geqslant ۱ \mid \sqrt{x-۱}\leqslant ۱\right\} = \{x\geqslant ۱ \mid x-۱\leqslant ۱ \Rightarrow x\leqslant ۲\}$

پس: $D_{fog} = [۱\,,\ ۲]$

-۲۲۷ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$۱-[x]\geqslant ۰ \longrightarrow [x]\leqslant ۱ \Rightarrow x<۲ \Rightarrow D_g = \{x \mid x<۲\}$

$D_{fog} = \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\} = \left\{x<۲ \mid \sqrt{۱-[x]}\leqslant ۲\right\}$

$\sqrt{۱-[x]}\leqslant ۲ \longrightarrow ۱-[x]\leqslant ۴ \Rightarrow [x]\geqslant -۳ \Rightarrow x\geqslant -۳ \Rightarrow D_f = [-۳\,,\ ۲)$

-۲۲۸ می‌دانیم $D_{fog} = \{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$. در این سوال :

$$\left.\begin{array}{l} D_f = \{x \mid ۰\leqslant x\leqslant ۱\} \\ D_g = \{x \mid ۰\leqslant x\leqslant ۲\} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{fog} = \left\{x \mid ۰\leqslant x\leqslant ۲\,,\ ۰\leqslant x^۲+۱\leqslant ۱\right\} = \{۰\}$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

-۲۲۹ گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$D_{fog} = \{x \mid x\in Dg,\ g(x)\in D_f\}$

$$\left\{\begin{array}{l} D_f = [۰, +\infty) \\ D_g = R-\{-۱\} \end{array}\right. \Rightarrow D_{fog} \begin{array}{l} = \left\{x \mid x\neq -۱,\ \dfrac{۲-x}{۱+x}\geqslant ۰\right\} \\ = \{x \mid x\neq -۱, -۱<x\leqslant ۲\} = (-۱\,,\ ۲] \end{array}$$

$\Rightarrow$ اعداد صحیح: $0, ۱, ۲$

۲۳۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. چون D_g داده شده پس می‌توان با تشکیل fog مستقیماً دامنه را از روی ضابطه به‌دست آورد.

$$fog(x) = \frac{\sqrt{۱ - tg^{۲} x}}{tg\, x}$$

$$\begin{cases} ۱ - tg^{۲} x \geq ۰ \Rightarrow tg^{۲} x \leq ۱ \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} \leq x \leq \frac{\pi}{۴} \\ tg\, x \neq ۰ \Rightarrow x \neq k\pi \end{cases}$$

$$D_{fog} = \left[-\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}\right] - \{۰\}$$

تذکر: به کمک گزینه‌ها هم می‌توان به این تست جواب داد.

۲۳۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$-x^{۲} + x + ۲ > ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$	-۱		۲	$+\infty$
$-x^{۲}+x+۲$	$-$	•	$+$	•	$-$
$-x^{۲}+x+۲ > ۰$			ج		

$D_f = (-۱, ۲)$

$D_g = R$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in R \mid -۱ < \left(\frac{۱}{۴}\right)^{x} < ۲\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{مثبت است}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{x}} \left\{x \in R \mid \left(\frac{۱}{۴}\right)^{x} < ۲\right\} = \{x \in R \mid ۲^{-۲x} < ۲^{۱}\}$$

$$\{x \in R \mid -۲x < ۱\} = \left\{x \in R \mid x > -\frac{۱}{۲}\right\} = \left(-\frac{۱}{۲}, +\infty\right)$$

۲۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار توابع داریم

$D_f = [-۳, ۰]$, $D_g = (-\infty, ۱)$

از طرفی

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

و چون f یک خطی است که از نقاط $(-۳, ۰)$ و $(۰, ۲)$ می‌گذرد لذا $f(x) = \frac{۲}{۳}x + ۲$ است در نتیجه:

$$D_{gof} = \left\{x \in [-۳, ۰] \mid \frac{۲}{۳}x + ۲ < ۱\right\} = \left\{x \in [-۳, ۰] \mid x < -\frac{۳}{۲}\right\} = \left[-۳, -\frac{۳}{۲}\right)$$

۲۳۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$D_f = [-۱, ۱]\ ,\ D_g = [۰, +\infty] \Rightarrow D_{f+g} = [۰, ۱]$$

$$D_{(f+g)of} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f+g}\} = \left\{x \in [-۱, ۱] \mid \sqrt{۱ - x^۲} \in [۰, ۱]\right\} = [-۱, ۱]$$

۲۳۴- یادآوری ۱ : تابع یک به یک، تابعی است که به ازای یک x حداکثر یک y داشته باشیم.
یادآوری ۲ : تابع اکیداً صعودی، یک به یک است.

گزینه ۱ : $y = x^{۳} + ۱ \Rightarrow$ اکیدا صعودی است $y \Rightarrow$ یک به یک است y

گزینه ۲ : $y = x^{۳} - x : (۱ , ۰) , (۰ , ۰) \in y \Rightarrow$ یک به یک نمی باشد y

گزینه ۳ : $(۱ , ۱) , \left(\frac{۱}{۲} , ۱\right) \in$ تابع $\Rightarrow$ یک به یک نمی باشد f(x)

گزینه ۴ : $(-۱ , ۱) , (۱ , ۱) \in$ تابع $\Rightarrow$ یک به یک نمی باشد y

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

۲۳۵- یادآوری: تابعی یک به یک است که در آن به ازای هر y ، حداکثر یک x وجود داشته باشد.
به این ترتیب مشخص است که گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ پاسخ درست نمی‌باشند زیرا:

$y = x^{۲} + ۴ : y = ۵ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = ۱ , x = -۱$　　$y = |x| : y = ۱ \Rightarrow x = ۱ , x = -۱$

$y = x^{۲} - ۴ : y = ۵ \Rightarrow x^{۲} = ۹ \Rightarrow x = ۳ , x = -۳$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

۲۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. a حداکثر می‌تواند برابر طول رأس سهمی باشد.

$$y' = ۴x - ۳ \Rightarrow x_{\text{راس}} = \frac{۳}{۴}$$

۲۳۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. تابعی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

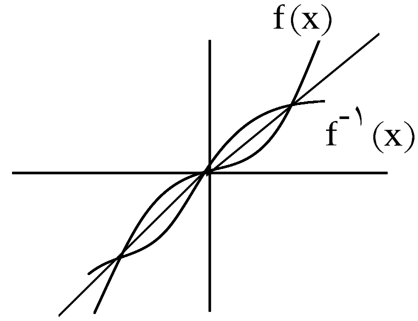
۲۳۸- طبق تعریف، تابعی معکوس‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد اما در گزینه‌ها، گزینه ۱ یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند. پس گزینه ۱ جواب است.

۲۳۹- * تابع پیوستهٔ $y = f(x)$ روی R معکوس‌پذیر است اگر اکیداً یکنوا باشد، یعنی مشتق آن روی R فقط یک علامت داشته باشد.

گزینهٔ ۱ : $f(x) = x^{۳} + x + ۱ \quad f'(x) = ۳x^{۲} + ۱ > ۰ \Rightarrow$ معکوس پذیر است

با بررسی گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ مشاهده می‌شود که هیچ کدام معکوس‌پذیر نمی‌باشند. بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

۲۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^{۲} & x \geq ۰ \\ x(-x) = -x^{۲} & x < ۰ \end{cases}$$

۲۴۱- این تابع یک به یک و است پس دارای وارون است و برای یافتن وارون آن باید جای x و y را عوض کنیم و سپس y را برحسب x بیابیم: ($y = ۲x + ۳ \Rightarrow x = ۲y + ۳ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲}$) که $y = \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲}$ ضابطه تابع وارون است. و گزینه ۴ جواب صحیح است.

۲۴۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. چون $\sqrt{x - ۱}$ مثبت است، پس $-\sqrt{x - ۱}$ منفی بوده و $y = ۲ - \sqrt{x - ۱}$ همواره کوچک‌تر مساوی ۲ می‌شود و بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس $x \leqslant ۲$ است.

$$y = ۲ - \sqrt{x - ۱} \rightarrow \left(\sqrt{x - ۱}\right)^{۲} = (۲ - y)^{۲} \rightarrow x - ۱ = ۴ - ۴y + y^{۲}$$

$$\rightarrow x = y^{۲} - ۴y + ۵ \xrightarrow{x \rightleftarrows y} y = x^{۲} - ۴x + ۵$$

۲۴۳- $y = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x + ۲ \Rightarrow y = \left(x^{۳} + ۳x^{۲} + ۳x + ۱\right) + ۱ \Rightarrow y = (x + ۱)^{۳} + ۱ \Rightarrow$

$$(x + ۱)^{۳} = y - ۱ \Rightarrow x + ۱ = \sqrt[۳]{y - ۱} \Rightarrow x = -۱ + \sqrt[۳]{y - ۱} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -۱ + \sqrt[۳]{x - ۱}$$

بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

۲۴۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x \geqslant ۰ \Rightarrow y = \frac{x}{۱+x} \Rightarrow y + yx = x \Rightarrow y = x(۱-y) \Rightarrow x = \frac{y}{۱-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{۱-x}$$

$$x < ۰ \Rightarrow y = \frac{x}{۱-x} \Rightarrow y - yx = x \Rightarrow y = x(۱+y) \Rightarrow x = \frac{y}{۱+y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{۱+x} \Rightarrow$$

$$f^{-۱}(x) = \begin{cases} \frac{x}{۱-x} & ۰ \leqslant x < ۱ \\ \frac{x}{۱+x} & -۱ < x < ۰ \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{۱-|x|} \quad |x| < ۱$$

البته می‌توان این سؤال را با عدد گذاری نیز حل کرد چون $f(۱) = \frac{۱}{۲}$ است. پس $f^{-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱$ تنها گزینه‌ی (۱) صحیح می‌شود.

۲۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: $\sqrt{x^{۲}} = |x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$

ابتدا ضابطه‌ی تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = ۳x + \sqrt{x^{۲}} = ۳x + |x| = \begin{cases} ۴x & x \geq ۰ \\ ۲x & x < ۰ \end{cases}$$

$$y_{۱} = ۴x \ ; \ x \geq ۰ \xrightarrow{y_{۱} \geq ۰} x = \frac{y_{۱}}{۴} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{۴} \ ; \ x \geq ۰$$

$$y_{۲} = ۲x \ ; \ x < ۰ \xrightarrow{y_{۱} < ۰} x = \frac{y_{۲}}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x}{۲} \ ; \ x < ۰$$

بنابراین ضابطه‌ی وارون این تابع عبارتست از:

$$f^{-۱}(x) = \begin{cases} \frac{x}{۴} & x \geq ۰ \\ \frac{x}{۲} & x < ۰ \end{cases}$$

۲۴۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از قدر مطلق، داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \geq ۰ \\ -x^{۲} & x < ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \xrightarrow{x > ۰} x = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x} \\ y = -x^{۲} \Rightarrow x^{۲} = -y \Rightarrow x = \pm\sqrt{-y} \xrightarrow{x < ۰} x = -\sqrt{-y} \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\sqrt{-x} \end{cases}$$

بنابراین:

$$f^{-۱}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq ۰ \\ -\sqrt{-x} & x < ۰ \end{cases}$$

۲۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A\Big|_{۰}^{۳} \quad B\Big|_{۵}^{-۲} \Rightarrow m = \frac{۵}{-۵} = -۱$$

$$y - ۰ = -۱(x - ۳)$$

$$y = -x + ۳ \Rightarrow f(x) = -x + ۳ \Rightarrow f^{-۱}(x) = ۳ - x \Rightarrow f(x) + f^{-۱}(x) = -۲x + ۶$$

۲۴۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = ax + b$$

$$\left.\begin{array}{l} f(۲) = ۰ \\ f(-۱) = ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ -a + b = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a - b = ۰ \\ -a + b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{۴}{۳}, \ b = \frac{۸}{۳}$$

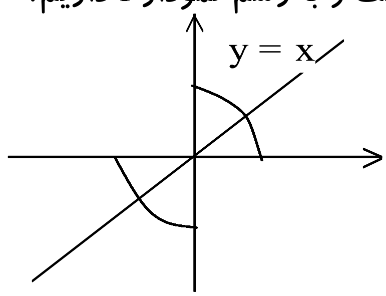
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{۴}{۳}x + \frac{۸}{۳} \Rightarrow y = -\frac{۴}{۳}x + \frac{۸}{۳} \Rightarrow x = -\frac{۳}{۴}\left(y - \frac{۸}{۳}\right)$$

$$\Rightarrow x = -\frac{۳}{۴}y + ۲ \Rightarrow f^{-۱}(x) = -\frac{۳}{۴}x + ۲$$

۲۴۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. واضح است تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{۱ - x^۲} & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & x = ۰ \\ -\sqrt{۱ - x^۲} & -۱ < x < ۰ \end{cases}$$

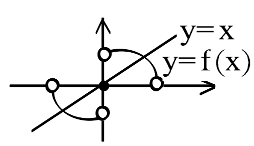
در نتیجه دامنه تابع برابر با $(-۱ , ۱)$ است و با رسم نمودار f داریم.



که نمودار وارون آن بر خود نمودار منطبق است و خط $y = x$ را در سه نقطه قطع می‌کند.

۲۵۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{۱ - x^۲} & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & x = ۰ \\ -\sqrt{۱ - x^۲} & -۱ < x < ۰ \end{cases} \Rightarrow$$



$\Rightarrow f^{-۱}(x) = f(x) \Rightarrow$ f نسبت به $y = x$ متقارن است. $\Rightarrow$

۲۵۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول: با فرض $y = f(x)$ داریم:

$$y = \frac{x^{۳} + b}{a} \Rightarrow ay - b = x^{۳}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{ay - b} \xrightarrow[x = f^{-۱}(y)]{y = f(x)} f^{-۱}(y) = \sqrt[۳]{ay - b}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{ax - b} \equiv \sqrt[۳]{۲x - ۳} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۵$$

راه حل دوم: به ازای هر x عضو دامنه‌ی $f^{-۱}$ داریم:

$$fof^{-۱}(x) = x \Rightarrow \frac{\left(\sqrt[۳]{۲x - ۳}\right)^{۳} + b}{a} = x$$

$$\Rightarrow \frac{۲x + b - ۳}{a} = x \Rightarrow ۲x + b - ۳ = ax$$

$$\Rightarrow (۲ - a)\,x + b - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲ - a = ۰ \\ b - ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۵$$

۲۵۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{۱}{۲}\left(x + \sqrt{x^{۲} + ۴}\right) \Rightarrow ۲y - x = \sqrt{x^{۲} + ۴} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{طرفین به توان ۲}} ۴y^{۲} - ۴yx + \cancel{x^{۲}} = \cancel{x^{۲}} + ۴$$

$$\xrightarrow{\div ۴} y^{۲} - yx = ۱ \Rightarrow yx = y^{۲} - ۱ \Rightarrow x = y - \frac{۱}{y} \xrightarrow[\text{را عوض می کنیم}]{\text{جای x و y}} f^{-۱}(x) = x - \frac{۱}{x}$$

$$f^{-۱}(x) + f^{-۱}\left(\frac{۱}{x}\right) = x - \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x} - x = ۰$$

۲۵۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قرینه‌ی نمودار تابع f نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم (خط $y = x$)، نمودار تابع $f^{-۱}$ است، پس زوج مرتب $(m,۲)$ عضو تابع $f^{-۱}$ است. بنابراین زوج مرتب $(۲,m)$ متعلق به تابع f می‌باشد. لذا زوج مرتب $(۲,m)$ در تابع خطی $f(x) = ۲x + ۱$ صدق می‌کند:

$$f(x) = ۲x + ۱ \Rightarrow m = ۲ \times ۲ + ۱ \Rightarrow m = ۵$$

۲۵۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای به‌دست آوردن قرینه‌ی هر نقطه یا منحنی نسبت به نیم‌ساز ربع اول، کافی است جای x و y را باهم عوض کنیم.

$$ax + by = ۸ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } y=x} bx + ay = ۸$$

این خط باید بر خط $۲x - ۳y = b$ منطبق باشد، پس:

$$\frac{b}{۲} = \frac{a}{-۳} = \frac{۸}{b} \Rightarrow b^{۲} = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} b = ۴ \Rightarrow a = -۶ \Rightarrow a + b = -۲ \\ b = -۴ \Rightarrow a = ۶ \Rightarrow a + b = ۲ \end{cases}$$

۲۵۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر تابع معکوس‌پذیر نمودارهای f و f^{-1} روی نیم‌ساز ربع اول و سوم متقاطع هستند کافی است که نقطه تلاقی نمودار تابع مفروض با خط $y = x$ تعیین شود.

$x^۲ - ۴x + ۶ = x \,,\, x > ۲ \Rightarrow x = ۳$

فاصله نقطه $A(۳\,,\,۳)$ از خط به معادله $x + y = ۰$ برابر است با $\dfrac{۳+۳}{\sqrt{۱+۱}} = ۳\sqrt{۲}$

۲۵۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع را به‌صورت سه‌ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$x < -\frac{۳}{۲} \Rightarrow f(x) = -x + ۲ - ۲x - ۳ = -۳x - ۱$

$-\frac{۳}{۲} \leqslant x \leqslant ۲ \Rightarrow f(x) = -x + ۲ + ۲x + ۳ = +۵$

$x > ۲ \Rightarrow f(x) = x - ۲ + ۲x + ۳ = ۳x + ۱$

پیدا است که ضابطه معکوس تابع $f(x) = x + ۵$ در بازه $\left[-\frac{۳}{۲}, ۲\right]$ خواسته شده است، پس $f^{-۱}(x) = x - ۵$ در بازه $\left[f\left(-\frac{۳}{۲}\right), f(۲)\right]$ یا بازه $[۳/۵, ۷]$ می‌باشد.

۲۵۷- ابتدا fog را حساب کرده و سپس معکوس آن را می‌یابیم :

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(۲ + x) = ۳(۲ + x) - ۲ = ۳x + ۴$

برای محاسبه معکوس باید x را برحسب y پیدا کنیم و جای x و y را عوض کنیم.

$y = ۳x + ۴ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}y - \frac{۴}{۳} \Rightarrow y = \frac{۱}{۳}x - \frac{۴}{۳}$

ظابطه تابع معکوس خواهد بود و گزینه ۱ جواب صحیح است.

۲۵۸- می‌دانیم: $(\alpha\,,\,\beta) \in f \Leftrightarrow (\beta\,,\,\alpha) \in f^{-۱}$

$f(-۲) = (-۲)^۳ + (-۲) + ۱ = -۱۰ + ۱ = -۹ \Rightarrow (-۲\,,\,-۹) \in f \Rightarrow (-۹\,,\,-۲) \in f^{-۱}$

لذا گزینهٔ ۱ جواب درست است.

۲۵۹- اگر زوج مرتب $(a\,,\,b)$ متعلق به f باشد حتماً زوج مرتب $(b\,,\,a)$ متعلق به معکوس f است یعنی:

$(a\,,\,b) \in f \Leftrightarrow (b\,,\,a) \in f^{-۱}$

با توجه به گزینه‌های داده شده و ضابطه تابع f داریم $f(۰) = ۱$ ، چون $(۰\,,\,۱) \in f$ است پس $(۱\,,\,۰) \in f^{-۱}$ می‌باشد با توجه به مطالب فوق گزینه ۳ صحیح است.

۲۶۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$x=۱ \Rightarrow x^۳+x-۲ = ۰ \Rightarrow x^۳+۲x-۲ = x \Rightarrow$ روی نیمساز ناحیه اول متقاطع اند $\Rightarrow f$ اکیدا صعودی است

۲۶۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(x)=\frac{-3x-1}{x-2}\Rightarrow\frac{-3x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x+3}\Rightarrow x^2+x+1=0\xrightarrow{\Delta<0}$$ غیر متقاطع f^{-1}, f

۲۶۲- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. هر تابع اکیداً صعودی با معکوسش در $y=x$ متقاطع هستند بنابراین داریم:

$$y=x\to x^2+2x+1=x\to x^2+x+1=0\ ,\ \ \Delta=1-4=-3<0\Rightarrow$$ غیر متقاطع

۲۶۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=ax^3+b$$

$$(1,0)\in f, f^{-1}\Rightarrow\begin{cases}(1,0)\in f\Rightarrow a+b=0\\(1,0)\in f^{-1}\Rightarrow(0,1)\in f\Rightarrow b=1\Rightarrow a=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=-x^3+1\Rightarrow a-b=-1-1=-2$$

نکته‌ی درسی: اگر f تابعی معکوس پذیر و f^{-1} تابع معکوس آن باشد، آن‌گاه داریم:

$$(a,b)\in f\Leftrightarrow(b,a)\in f^{-1}$$

$$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

نکته: این تست نشان دهنده‌ی آن است که توابعی پیوسته مانند f هستند، که محل تلاقی آن‌ها با تابع معکوس‌شان، الزاماً بر خط $y=x$ نمی‌باشد.

۲۶۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$A\left|{}^{a}_{۴}\right. \in f \Rightarrow ۴ = -x + \sqrt{-۲x} \Rightarrow \sqrt{-۲x} = x + ۴ \xrightarrow{\text{توان ۲}} -۲x = x^۲ + ۸x + ۱۶$$

$$x^۲ + ۱۰x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۲ & \text{قابل قبول} \\ x = -۸ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

نکته، این تست به کمک گزینه‌ها به سادگی حل می‌شود.

۲۶۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x = ۱ \Rightarrow f(۱) = ۳ \Rightarrow f^{-۱}(۳) = ۱ \Rightarrow f^{-۱}\left(۳f^{-۱}(۳)\right) = f^{-۱}(۳ \times ۱) = ۱$$

۲۶۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f^{-۱}(۳) = a \Rightarrow f(a) = ۳ \Rightarrow \sqrt{۲x + ۵} = ۳ \Rightarrow ۲x + ۵ = ۹ \Rightarrow x = ۲$$

$$f\left(\frac{۲x + ۱}{x - ۱}\right) = \sqrt{۲x + ۵} \xrightarrow{x = ۲} f(۵) = ۳ \Rightarrow a = ۵$$

۲۶۷- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = f(۳x - ۴) \Rightarrow y = f(۳x - ۴) \Rightarrow ۳x - ۴ = f^{-۱}(y) \Rightarrow x = \frac{۴ + f^{-۱}(y)}{۳}$$

$$\Rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{۴ + f^{-۱}(x)}{۳} \Rightarrow g^{-۱}(۱۶) = \frac{۴ + ۱۶ + ۴}{۳} = ۸$$

۲۶۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x = ۰ \rightarrow g(۰) = f(۵f(۰)) \Rightarrow g(۰) = f(۵) \Rightarrow g(۰) = ۷ \Rightarrow g^{-۱}(۷) = ۰$$

۲۶۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$(fog)^{-۱}(x) = f(x) \Rightarrow g^{-۱}of^{-۱}(x)$$

$$f^{-۱}og^{-۱}(x) = (gof)^{-۱}(x) = \left(f^{-۱}(x)\right)^{-۱} = f(x)$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g\left(g^{-۱}\left(f^{-۱}(x)\right)\right) = f^{-۱}(x)$$

۲۷۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f^{-۱}(g(a)) = ۶ \Rightarrow g(a) = f(۶) \Rightarrow a = g^{-۱}(f(۶)) = g^{-۱}(۷) = ۴$$

۲۷۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از رابطه $g^{-۱}(f(a)) = ۴$ خواهیم داشت $f(a) = g(۴)$ یا $f(a) = ۶$ با توجه به دوتایی‌ها در تابع f خواهیم داشت. $a = ۳$

۲۷۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$g^{-1}(f(a))=3 \Rightarrow f(a)=g(3)=-2 \Rightarrow -\sqrt{a}=-2 \Rightarrow \sqrt{-a}=2 \Rightarrow -a=4 \Rightarrow a=-4$$

۲۷۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f=\{(1,2)(0,-1)(3,1)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(2,1)(-1,0)(1,3)\}$$

$$g=\{(0,1)(3,2)\} \Rightarrow g^{-1}=\{(1,0)\ (2,3)\} \Rightarrow \begin{cases} fog^{-1}=\{(1,-1)(2,1)\} \\ g^{-1}of\ (1,3)(3,0)=\{\ \} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ fog^{-1}+g^{-1}\ of=\{(1,2)\}$$

۲۷۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنید $f^{-1}(2)=\alpha$، **در این صورت:** $f(\alpha)=2$

$$f(x)=1-3g\left(\frac{6}{x}\right) \xrightarrow{x=\alpha} f(\alpha)=1-3g\left(\frac{6}{\alpha}\right) \xrightarrow{f(\alpha)=2} 1-3g\left(\frac{6}{\alpha}\right)=2$$

$$\Rightarrow -3g\left(\frac{6}{\alpha}\right)=1 \Rightarrow g\left(\frac{6}{\alpha}\right)=-\frac{1}{3} \Rightarrow g^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{6}{\alpha}\ (*)$$

با توجه به رابطه‌ی $g^{-1}(x)=\frac{1}{x+1}$، داریم:

$$g^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}=\frac{3}{2}$$

با جای‌گذاری این مقدار در (*) داریم:

$$\frac{6}{\alpha}=\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha=4$$

۲۷۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(10)=a \Rightarrow f(a)=10 \Rightarrow g(a)+3\sqrt{g(a)}=10$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{g(a)}+5\right)}_{\text{مثبت}}\left(\sqrt{g(a)}-2\right)=0 \Rightarrow g(a)=4 \Rightarrow g^{-1}(4)=a \Rightarrow 3\sqrt{7-3}=a \Rightarrow a=6$$

۲۷۶- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، در $x=۱$ مماس افقی داریم، پس $y'(۱)=۰$. همچنین جهت تقعر منحنی در این نقطه عوض شده است، پس $x=۱$ طول نقطه‌ی عطف تابع است. بنابراین $y''(۱)=۰$

$$y=ax^۳+bx^۲+۳x \Rightarrow y'=۳ax^۲+۲bx+۳ \Rightarrow y''=۶ax+۲b$$

$$\begin{cases} y'(۱)=۰ \\ y''(۱)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳a+۲b+۳=۰ & (۱) \\ ۶a+۲b=۰ & (۲) \end{cases} \xrightarrow{(۲)-(۱)} ۳a-۳=۰ \Rightarrow a=۱$$

$$\xrightarrow{(۲)} ۶+۲b=۰ \Rightarrow b=-۳$$

بنابراین $b-a=-۴$

۲۷۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y'=۳x^۲+۲ax+b$$

$$y''=۶x+۲a=۰ \Rightarrow x=-\frac{a}{۳}$$

با توجه به شکل، شیب مماس در نقطه‌ی عطف، صفر است:

$$\Rightarrow y'\left(-\frac{a}{۳}\right)=۰ \Rightarrow \frac{a^۲}{۳}-\frac{۲a^۲}{۳}+b=۰ \Rightarrow a^۲=۳b$$

فقط گزینه‌ی (۳) این ویژگی را دارد.

۲۷۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'(۰)>۰ \Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۴ax-b \Rightarrow f'(۰)=-b>۰ \Rightarrow b<۰$$
$$f''(۰)=۰ \Rightarrow f''(x)=۶x+۴a \Rightarrow f''(۰)=۴a=۰ \Rightarrow a=۰$$

۲۷۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. طبق نمودار نقطه‌ی عطف تابع در ناحیه‌ی دوم قرار دارد پس:

$$x_I=-\frac{B}{۳A}=-\frac{a}{۳(-۱)}=\frac{a}{۳}<۰ \Rightarrow a<۰ \Rightarrow \text{گزینه ی ۲ یا ۴}$$

ضمناً شیب مماس بر منحنی در نقطه‌ی عطف منفی است پس:

$$y'=-۳x^۲+۲ax-b \Rightarrow f'\left(\frac{a}{۳}\right)<۰ \Rightarrow -۳\left(\frac{a^۲}{۹}\right)+۲a\left(\frac{a}{۳}\right)-b<۰$$

$$\Rightarrow \frac{a^۲}{۳}-b<۰ \Rightarrow b>\frac{a^۲}{۳} \xrightarrow{\text{اگر } a=-۲} b>\frac{۴}{۳}$$

۲۸۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = -x^{۳} + ax^{۲} + bx \Rightarrow f'(x) = -۳x^{۲} + ۲ax + b$$

با توجه به نمودار می‌دانیم شیب خط مماس برمنحنی تابع f در نقطه به‌طول صفر، عددی منفی است. بنابراین:

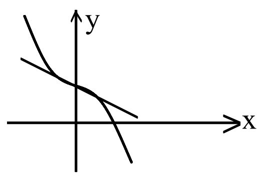
$$f'(۰) = -۳(۰)^{۲} + ۲a(۰) + b = b \xrightarrow{m = f(۰) < ۰} b < ۰$$

همین‌جا معلوم می‌شود که گزینه‌ی (۲) پاسخ تست است. اما برای این که راه‌حل را کامل کنیم، a را نیز می‌یابیم. از روی نمودار مشخص است که نقطه به طول صفر، نقطه‌ی عطف منحنی تابع درجه سوم f است. بنابراین:

$$f''(x) = -۶x + ۲a \Rightarrow f''(۰) = ۲a \xrightarrow{f''(۰) = ۰} ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

۲۸۱- با توجه به شکل $x = ۰$ نقطه عطف تابع است پس:

$y''(۰) = ۰$



$$y' = -x^{۲} + ۲ax + b \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y'' = -۲x + ۲a \\ y''(۰) = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow -۲ \times ۰ + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

همچنین شیب مماس بر منحنی در نقطهٔ $x = ۰$ منفی است پس مقدار مشتق در $x = ۰$ منفی است.

$$y'(۰) < ۰ \Rightarrow b < ۰$$

با توجه به نتایج فوق گزینه صحیح گزینه ۴ می‌باشد.

۲۸۲- وقتی $x \longrightarrow +\infty$ ، با توجه به شکل $x \longrightarrow -\infty$ می‌رود پس ضریب $x^{۳}$ منفی است، بنابراین یکی از گزینه‌های ۱ یا ۲ جواب است. با توجه به شکل مشتق تابع دو ریشه (یکی صفر و دیگری ریشه‌ای منفی) دارد پس:

$$y = -x^{۳} - ۳x^{۲} + ۴ \Rightarrow y' = -۳x^{۲} - ۶x = ۰ \Rightarrow x(-۳x - ۶) = ۰ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = ۰ \\ x = -۲ \end{array}\right.$$

$$y = -x^{۳} + ۳x^{۲} + ۴ \Rightarrow y' = -۳x^{۲} + ۶x = ۰ \Rightarrow x(-۳x + ۶) = ۰ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = ۰ \\ x = ۲ \end{array}\right.$$

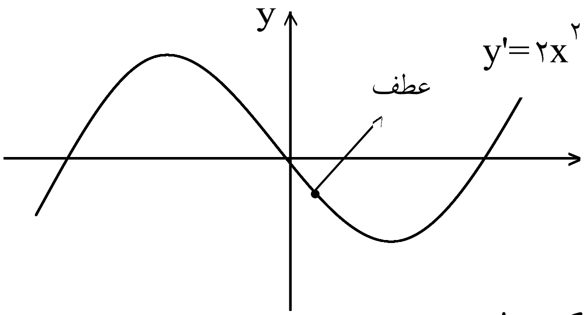
بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است و در شرایط مسئله صدق می‌کند.

۲۸۳- $$\left.\begin{array}{l} y = x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۴ \Rightarrow y' = ۳x^{۲} + ۲ax + b \\ \text{با توجه به شکل}: y'(۰) = ۰ \Rightarrow b = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow y' = ۳x^{۲} + ۲ax = ۰ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = ۰ \\ x = -\frac{۲a}{۳} \end{array}\right.$$

با توجه به اینکه در شکل ریشه دوم مشتق مثبت است پس: $-\frac{۲a}{۳} > ۰ \Rightarrow a < ۰$

بنابراین با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲۸۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. از شکل مقابل به راحتی نتیجه می‌گیریم که در تابع درجه‌ی سوم $y=\frac{۲}{۳}x^{۳}+ax^{۲}+bx$ ، طول عطف عددی مثبت است. لذا مقدار طول عطف را مشخص کرده و بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم. داریم:



$$y'=۲x^{۲}+۲ax+b \Rightarrow y''=۴x+۲a=۰ \Rightarrow x_{\text{عطف}}=-\frac{۲a}{۴}=-\frac{a}{۲}>۰ \Rightarrow a<۰$$

$$\xrightarrow{\text{طبق گزینه ها}} a=-۱$$

با توجه به شکل به راحتی نتیجه می‌گیریم که طول ماکزیمم و طول می‌نیمم مختلف‌العلامه‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها که همان حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم y' است، باید منفی باشد، داریم:

$$\xrightarrow{a=-۱} y'=۲x^{۲}-۲x+b=۰ \Rightarrow x_{Max}.x_{Min}=P=\frac{b}{۲}<۰ \Rightarrow b<۰ \xrightarrow{\text{طبق گزینه ها}} b=-۴$$

۲۸۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا چون $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ می‌شود پس می‌توان نتیجه گرفت که ضریب $x^{۳}$ مثبت می‌باشد. پس داریم:

$$۳ - ۲a > ۰ \Rightarrow a < \frac{۳}{۲} \xrightarrow{a \in N} a = ۱$$

اکنون با جای‌گذاری مقدار $a = ۱$ داریم: $f(x) = x^{۳} + bx^{۲}$. از طرفی $f'(۳) = ۰$ پس:

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۲bx \Rightarrow f'(۳) = ۰ \Rightarrow ۲۷ + ۶b = ۰ \Rightarrow b = -\frac{۹}{۲}$$

بنابراین:

$$b - a = -\frac{۹}{۲} - ۱ = -\frac{۱۱}{۲}$$

۲۸۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. طبق نمودار $x = ۰$ طول نقطه‌ی عطف است.

$$\frac{-b}{۳a} = ۰ \Rightarrow \frac{a}{۳} = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

$$y' = -۳x^۲ + b = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{۳}}$$

طول نقطه‌ی $\min$ برابر $-\sqrt{\frac{b}{۳}}$ و عرض آن صفر است.

$$y = -x^۳ + bx + ۲ = ۰ \xrightarrow{\left(-\sqrt{\frac{b}{۳}} \text{ و } ۰\right)}$$

$$\longrightarrow \frac{b}{۳}\sqrt{\frac{b}{۳}} - b\sqrt{\frac{b}{۳}} = -۲ \Rightarrow \frac{۲b}{۳}\sqrt{\frac{b}{۳}} = ۲ \Rightarrow b = ۳$$

۲۸۷- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{۱}{۳}x^۳ - x^۲ + x + ۱ \Rightarrow y' = x^۲ - ۲x + ۱ = (x - ۱)^۲ \geq ۰$$

چون مشتق این تابع نامنفی است، پس این تابع صعودی می‌باشد.

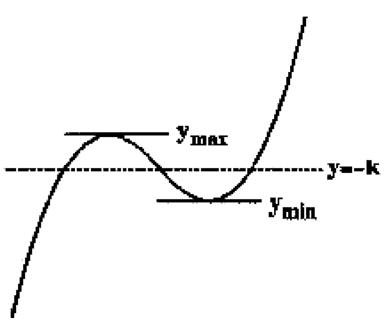
۲۸۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. برای این‌که یک تابع درجه‌ی سوم سه ریشه‌ی متمایز داشته باشد اولاً باید دارای ماکزیمم و می‌نیمم نسبی باشد و ثانیاً حاصل‌ضرب مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آن منفی باشد.

فرض کنیم: $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ + m$ در این‌صورت خواهیم داشت:

$$f'(x) = ۶x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow f(۰) = m & \text{ماکزیمم} \\ x = ۱ \Rightarrow f(۱) = m - ۱ & \text{می نیمم} \end{cases} \Rightarrow m(m - ۱) < ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۱$$

۲۸۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^۳ - ۳x^۲ + k = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳x^۲ = -k$$



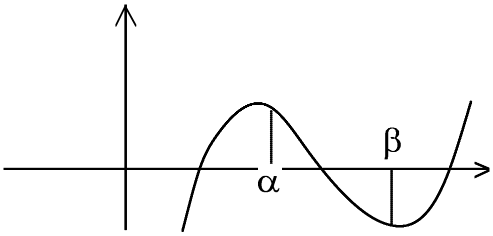
به‌عبارت دیگر باید نمودارهای دو تابع با معادله‌های $y = x^۳ - ۳x^۲$ و $y = -k$ در سه نقطه متقاطع باشند، برای این منظور باید $(-k)$ بین مقادیر اکسترمم نسبی تابع $y = x^۳ - ۳x^۲$ قرار داشته باشد.

$$y=x^۳ - ۳x^۲ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۶x$$

$$\Rightarrow y' = ۳x\ (x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{max} = ۰ \Rightarrow y_{max} = ۰ \\ x_{min} = ۲ \Rightarrow y_{min} = -۴ \end{cases}$$

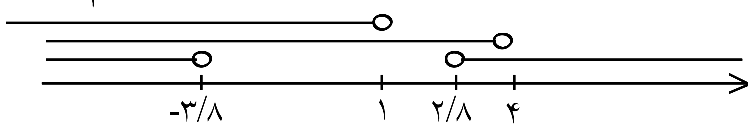
$$\Rightarrow -۴ < -k < ۰ \Rightarrow ۰ < k < ۴ \Rightarrow \max\ (b-a)=۴$$

۲۹۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.



تابع $f(x)=x^{۳}+(a-۱)x^{۲}+(۴-a)x-۴$ باید سه ریشه‌ی حقیقی داشته باشد یعنی نمودار آن باید به‌صورت زیر باشد.
بنابراین مشتق که ریشه‌هایش α و β است باید دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت متمایز باشد بنابراین باید $\Delta > ۰$ و جمع ریشه و ضرب ریشه‌ها نیز مثبت باشد. $y'=۳x^{۲}+۲(a-۱)x+(۴-a)$

$$\begin{cases} \Delta > ۰ \Rightarrow ۴(a-۱)^{۲}-۴\times ۳(۴-a) > ۰ \Rightarrow a^{۲}+a-۱۱ > ۰ \Rightarrow a < -۳/۸ \text{ یا } a > ۲/۸ \quad (I) \\ S > ۰ \Rightarrow \frac{-b}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{-۲(a-۱)}{۳} > \Rightarrow a-۱ < ۰ \Rightarrow a < ۱ \quad (II) \\ P > ۰ \Rightarrow \frac{C}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{۴-a}{۳} > ۰ \Rightarrow a < ۴ \quad (III) \end{cases}$$

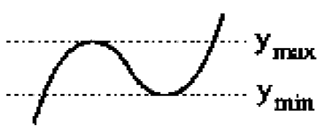


$$\xrightarrow{(I)\cap(II)\cap(III)} a < -۳/۸$$

و تنها گزینه‌ای که در این محدوده است گزینه‌ی یک $(a<-۴)$ است.
تذکر: این سؤال غلط است زیرا به‌ازای $a=-۵$ که در محدوده‌ی جواب صحیح است، معادله فقط دو ریشه‌ی متمایز مثبت دارد.

$$a=-۵ \Rightarrow x^{۳}-۶x^{۲}+۹x-۴=۰ \Rightarrow (x-۱)^{۲}(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=۴ \end{cases}$$

حل بالا مطابق با روش موردنظر طراح سؤال است.

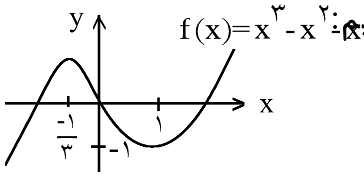
۲۹۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع f به‌صورت  است.

اگر $y_{min} < m < y_{max}$ ، آن‌گاه خط $y=m$ نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند. عرض نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y'=۳x^{۲}-۱۲x \Rightarrow y'=۰ \Rightarrow ۳x(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \Rightarrow y_{max}=۰ \\ x=۴ \Rightarrow y_{min}=-۳۲ \end{cases}$$

بنابراین اگر $-۳۲ < m < ۰$ باشد، آن‌گاه خط $y=m$ نمودار را در سه نقطه قطع می‌کند.

۲۹۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با مشتق‌گیری از تابع $f(x) = x^{۳} - x^{۲} - x$ داریم:



$$f'(x) = ۳x^{۲} - ۲x - ۱ = ۰ \longrightarrow \begin{cases} x = ۱ & \text{طول می نیمم نسبی} \\ x = -\frac{۱}{۳} & \text{طول ماکزیمم نسبی} \end{cases}$$

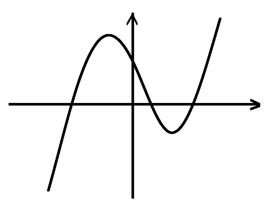
همان‌طور که دیده می‌شود $f(x) = x^{۳} - x^{۲} - x$ دارای ۳ ریشه است. نمودار $y = f(x) + a = x^{۳} - x^{۲} - x + a$ مشابه نمودار فوق است که به اندازه‌ی $|a|$ واحد به بالا یا پایین منتقل شده است. با انتقال به پایین مسلما یک ریشه‌ی مثبت وجود خواهد داشت، پس باید انتقال با بالا انجام شود $(a > ۰)$ که این انتقال هم باید به اندازه‌ای باشد که می‌نیمم تابع، بالاتر از محور xها قرار بگیرد یعنی باید $a > ۱$ زیرا $f(۱) = -۱$ است و در نتیجه می‌نیمم تابع $f(x) = x^{۳} - x^{۲} - x$ به اندازه‌ی ۱ واحد زیر محور xها است پس باید بیش از ۱ واحد به بالا برود یعنی $a > ۱$.

-۲۹۳

$$f(x) = x^{۳} - ۳x + \frac{۱}{۳} \Rightarrow f'(x) = ۳x^{۲} - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$$

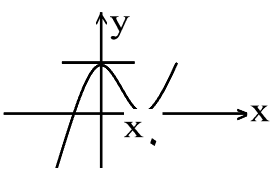
x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
f'(x)		+		−		−		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$۲\frac{۱}{۳}$	↘	$\frac{۱}{۳}$	↘	$-۲\frac{۱}{۳}$	↗	

یک ریشه   یک ریشه یک ریشه



معادله دو ریشه مثبت و یک ریشه منفی دارد، بنابراین گزینه ۲ پاسخ صحیح سوال است.

۲۹۴- با توجه به اینکه ضریب $x^{۳}$ مثبت است پس شکل تقریبی تابع به صورت زیر است:



$$\left. \begin{array}{r} y = x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۴ \Rightarrow y' = ۳x^{۲} + ۲ax + b \\ y'(۰) = ۰ \Rightarrow b = ۰ \end{array} \right\}$$

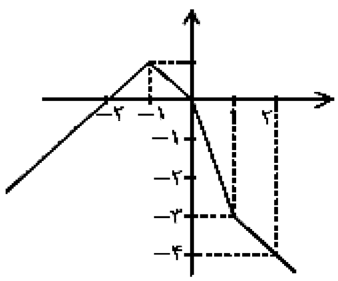
$$\Rightarrow y' = ۳x^{۲} + ۲ax = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = -\frac{۲a}{۳} \end{cases}$$

با توجه به شکل، ریشه دیگر مشتق باید مثبت باشد پس:

$$-\frac{۲a}{۳} > ۰ \Rightarrow a < ۰$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲۹۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = \begin{cases} x + ۲ & x \leqslant -۱ \\ -x & -۱ < x \leqslant ۰ \\ -۳x & ۰ < x \leqslant ۱ \\ -x - ۲ & x > ۱ \end{cases}$$

$f(x)$ **روی بازه‌ی** $(-\infty , -۱)$ **صعودی اکید است.**

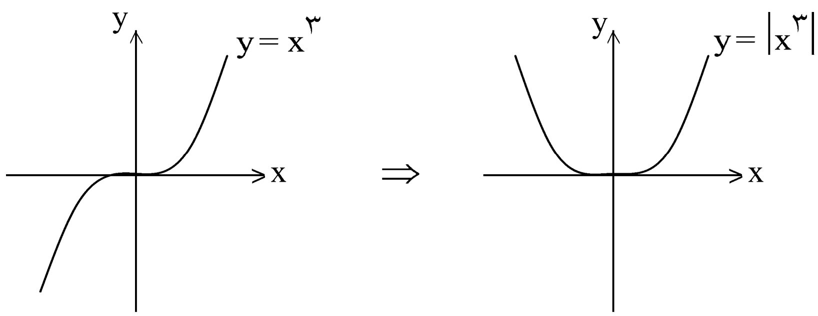
۲۹۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نزولی $x \leqslant -۱ \Rightarrow f(x) = -x - ۱ - x = -۲x - ۱ \Rightarrow f'(x) = -۲ < ۰$: **حالت ۱**

حالت ۲ : $-۱ < x < ۰ \Rightarrow f(x) = x + ۱ - x = ۱ \Rightarrow f'(x) = ۰$ ثابت

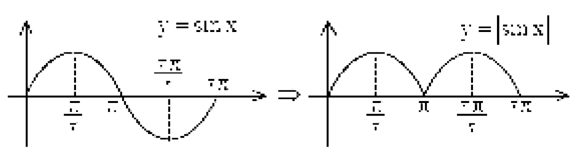
حالت ۳ : $x \geqslant ۰ \Rightarrow f(x) = x + ۱ + x = ۲x + ۱ \Rightarrow f'(x) = +۲ > ۰$ صعودی

پس $f(x)$ **در فاصله‌ی** $(-\infty , ۰]$ **نزولی است.** $(f'(x) \leqslant ۰)$

۲۹۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۲۹۸- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار تابع در بازه‌ی $\left(\frac{۳\pi}{۲} , ۲\pi\right)$ **اکیداً نزولی است.**



۲۹۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f از مبدأ مختصات عبور می‌کند لذا $f(۰)=۰$، و تابع اکیداً صعودی است. پس معادله $f(x)=۰$ تنها یک ریشه دارد. بنابراین تابع $f(x-۲)$ تنها در نقطه $x=۲$ محورهای مختصات را قطع می‌کند برای محاسبه دامنه بایستی نامعادله $\frac{-x}{f(x-۲)} \ge ۰$ را حل نماییم در نتیجه دو حالت زیر رخ می‌دهد.

$$\text{الف}: f(x-۲)>۰\,,\ x\ge ۰ \Leftrightarrow f(x-۲)>۰\,,\ x\le ۰ \Leftrightarrow x-۲>۰\,,\ x\le ۰ \Leftrightarrow \begin{cases} x>۲ \\ x\le ۰ \end{cases}$$

که اشتراک این دو تهی است.

$$\text{ب}: f(x-۲)<۰\,,\ -x\le ۰ \Leftrightarrow f(x-۲)<۰\,,\ x\ge ۰ \Leftrightarrow x-۲<۰\,,\ x\ge ۰ \Leftrightarrow x<۲\,,\ x\ge ۰$$

که اشتراک این دو دامنه تابع است یعنی $[۰\,,\,۲)$

۳۰۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$x>۲ \xrightarrow{\text{f نزولی اکید}} f(x)<f(۲) \Rightarrow f(x)<۱ \Rightarrow f(x)-۱<۰$$

$$x<۲ \xrightarrow{\text{f نزولی اکید}} f(x)>f(۲) \Rightarrow f(x)>۱ \Rightarrow f(x)-۱>۰$$

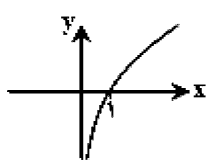
$$x=۲ \Rightarrow f(x)=f(۲)=۱ \Rightarrow y=۰$$

x		۲	
x − ۲	−	۰	+
f(x) − ۱	+	۰	−
(f(x) − ۱)(x − ۲)	−	۰	−

$$\Rightarrow D_y=\{۲\}$$

دامنه‌ی تابع y، فقط شامل عدد صحیح ۲ است. پس فقط یک عضو صحیح دارد.

۳۰۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون f صعودی اکید و $f(۱)=۰$ است، پس نمودار تقریبی آن به‌صورت زیر است:



بنابراین به‌ازای هر $t>۱$ داریم: $f(t)>۰$ و به‌ازای هر $t<۱$ داریم: $f(t)<۰$ در نتیجه:

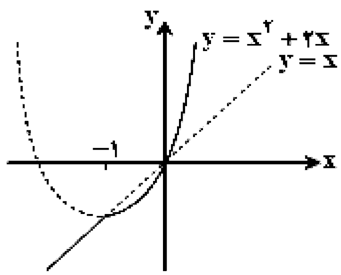
$$\begin{cases} f(۳-x)>۰ \Leftrightarrow ۳-x>۱ \Leftrightarrow x<۲ \\ f(۳-x)<۰ \Leftrightarrow ۳-x<۱ \Leftrightarrow x>۲ \end{cases}$$

باید مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x+۴)f(۳-x)\ge ۰$ را به‌دست بیاوریم:

x		−۴		۲	
f(۳ − x)	+		+	۰	−
x + ۴	−	۰	+		+
(x + ۴)f(۳ − x)	−	۰	+	۰	−

بنابراین:

$$D_y=[-۴,۲]$$



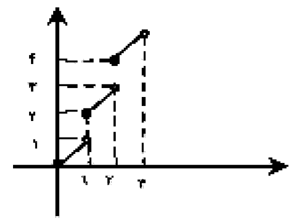
۳۰۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
نکته: تابع $f(x)$ را صعودی اکید می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر $x_1 > x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$

برای صعودی اکید بودن، باید رأس سهمی $x^2 + 2x$ یعنی $x = -1$ ، قبل از $x = a$ باشد. بنابراین: $a \geq -1$
با توجه به شکل، به‌ازای $a = -1$ حکم برقرار است، بنابراین حداقل مقدار a برابر ۱- است.

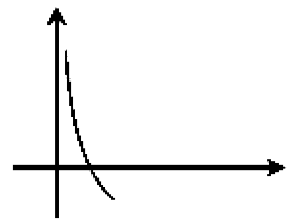
۳۰۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.با توجه به آن‌که $D_f=R$ تنها گزینه‌ی قابل قبول گزینه‌ی ۳ است زیرا وقتی f صعودی اکید باشد f^{-1} هم صعودی اکید است لذا $f^{-1}(-x)$ نزولی اکید و $-f^{-1}(-x)$ مجدد صعودی اکید است، پس $x-f^{-1}(-x)$ صعودی اکید است. (جمع دو تابع صعودی، صعودی است.)
برای مثال نقض سایر گزینه‌ها $y=x$ مناسب است.
نکته: تابع زوج و تابعی که مجانب قائم دو طرفه (یعنی تابع در دو طرف مجانب قائم تعریف شده‌باشد.) داشته باشد، نمی‌تواند یکنوای اکید باشد.

۳۰۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

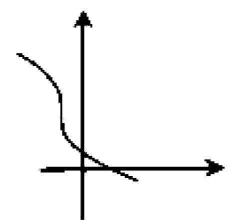
گزینه‌ی ۱: اکیداً صعودی



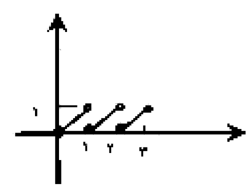
گزینه‌ی ۲: اکیداً نزولی



گزینه‌ی ۳: اکیداً نزولی

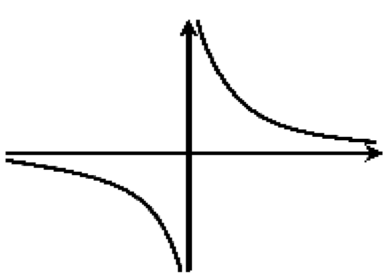


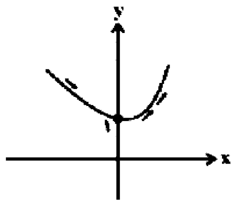
گزینه‌ی ۴: غیر یکنوا



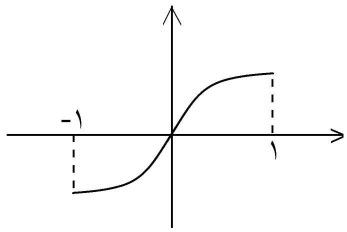
۳۰۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. گزینه‌ی (۲) تابعی صعودی و گزینه‌های (۳) و (۴) توابعی اکیداً صعودی هستند، نمودار گزینه‌ی (۱) به صورت زیر است:

طبق نمودار زیر، تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ تابعی غیر یکنوا است.





۳۰۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.
به کمک نمودار تابع کاملاً مشخص است که f در فاصله‌ی $(-\infty,۰]$ نزولی اکید است.



۳۰۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. دامنه تابع $[-۱,۱]$ داده شده است پس $x^۲ \leqslant ۱ \Rightarrow x^۲-۳<۰$ است پس خواهیم داشت:

در نتیجه تابع در بازه $[-۱,۱]$ صعودی ـ یک به یک ـ قرینه نسبت به مبدأ است. در نتیجه عبارت نادرست معکوس ناپذیر بودن است.

۳۰۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. تعریف: اگر D بازه‌ای در دامنه‌ی تابع f باشد، گوئیم f در بازه‌ی D صعودی است، هرگاه برای هر $x_۱$، و $x_۲ \in D$ داشته باشیم:

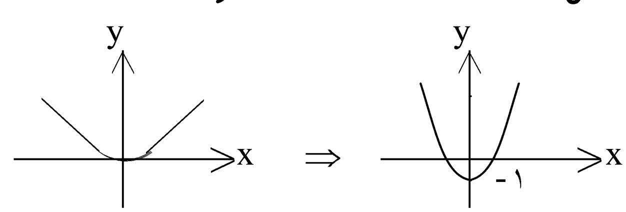
$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \leq f(x_۲)$$

با توجه به شکل رسم شده در صورت سؤال و تعریف بالا، $[-۳ , ۲]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع f روی آن صعودی است.
نکته: توجه کنید در بازه‌ی $[-۲ , ۲]$ تابع صعودی اکید است و در بازه‌ی $[-۳ , ۲]$، صعودی، چون صورت سؤال بزرگ‌ترین بازه‌ای را خواسته که تابع صعودی است، پس گزینه‌ی «۲» صحیح است.

۳۰۹- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

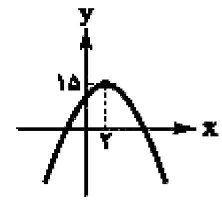
$$g(x) = \frac{۳x^۳ - x^۲ + ۱۲}{x^۲} = \frac{(۳x^۳ + ۱۲) - x^۲}{x^۲} \xrightarrow{\text{تفکیک}} = ۳\left(\frac{x^۳ + ۴}{x^۲}\right) - ۱ = ۳f(x) - ۱$$

بنابراین تابع g نیز صعودی خواهد بود؛ زیرا فقط عرض نقاط تابع f سه برابر شده، سپس در امتداد محور y ها یک واحد به پایین انتقال یافته است. پس در بازه‌ی مذکور وضعیت یکنوایی تغییر نمی‌کند. مثلاً تابع $f(x) = x^۲$ و تابع $g(x) = ۳x^۲ - ۱$ در $[۰ , +\infty)$ صعودی هستند. شکل‌ها را ببینید:



$f(x) = x^۲$ $g(x) = ۳x^۲ - ۱$

۳۱۰- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. تابع $y = -۲x^۲ + ۸x + ۷$ یک سهمی است که دهانه‌ی آن رو به پایین باز می‌شود (چرا؟)، ضمناً رأس این سهمی نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۲\\۱۵\end{matrix}\right.$ است، یعنی نموداری شبیه به نمودار روبه‌رو دارد:



مشخص است که این تابع در فاصله‌ی $(-\infty , ۲]$ صعودی و یک‌به‌یک است.

۳۱۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. تعریف: اگر D بازه‌ای در دامنه‌ی تابع f باشد، گوئیم f در بازه‌ی D صعودی است، هرگاه برای $x_۲ \in D$ و $x_۱$، داشته باشیم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \leqslant f(x_۲)$$

با توجه به شکل رسم شده در صورت سؤال و تعریف بالا، $[-۲ , ۳]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع f روی آن صعودی است.

۳۱۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(x) & \text{اکیدا نزولی} \\ g(x) = -x^۳ + ۱ & \text{اکیدا نزولی} \end{cases} \Rightarrow y = f(g(x)) = f\left(-x^۳ + ۱\right) \quad \text{اکیدا صعودی}$$

نکته‌ی درسی: ترکیب دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است. ترکیب دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً صعودی است. ترکیب دوتابع یکی اکیداً صعودی و دیگری اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است.

۳۱۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{x^۲ + ۱} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^۲ + ۱ - ۲x^۲}{\left(x^۲ + ۱\right)^۲} = \frac{۱ - x^۲}{\left(x^۲ + ۱\right)^۲}$$

$$\text{اکیداً صعودی} : f'(x) > ۰ \Rightarrow ۱ - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱$$

۳۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: تابع $f(x)$ در بازه‌ای که $f(x) \leq ۰$ باشد، نزولی و در بازه‌ای که $f'(x) \geq ۰$ باشد، صعودی است.

ابتدا مشتق تابع f را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = x^۲ - ۲x - ۳ = (x - ۳)(x + ۱)$$

x		-۱		۳	
f'	+	۰	-	۰	+
	صعودی		نزولی		صعودی

با توجه به جدول بالا، تابع f در $[-۱ , ۳]$ نزولی است، بنابراین حداکثر مقدار $b - a$ برابر است با: $۳ - (-۱) = ۴$

۳۱۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y' = ۴\frac{x^۳}{۴} - ۴x = x^۳ - ۴x = x\left(x^۲ - ۴\right) = x(x - ۲)(x + ۲)$$

حال با استفاده از جدول تعیین علامت، بازه‌هایی را که تابع نزولی است $(y' < ۰)$ مشخص می‌کنیم:

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
y'			۰	+	۰		۰	+	

بنابراین گزینه‌ی ۳ پاسخ است.

۳۱۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y' = x^۲ - ۲x - ۳$$

برای این‌که تابع نزولی باشد، باید $y' \leq ۰$ باشد. بنابراین:

$$y' \leq ۰ \Rightarrow (x - ۳)(x + ۱) \leq ۰ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۳$$

پس بیش‌ترین مقدار $b - a$ به‌راحتی قابل محاسبه است.

۳۱۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = (x - ۱)|x| = \begin{cases} x(x - ۱) & x \geq ۰ \\ -x(x - ۱) & x < ۰ \end{cases} = \begin{cases} x^۲ - x & x \geq ۰ \\ x - x^۲ & x < ۰ \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} ۲x - ۱ & x > ۰ \\ ۱ - ۲x & x < ۰ \end{cases}$$

حال با استفاده از جدول تعیین علامت، داریم:

x		۰		$\frac{۱}{۲}$	
y'	+				+

بنابراین تابع در بازه‌ی $\left(۰ , \frac{۱}{۲}\right)$ نزولی است.

۳۱۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تابع مشتق ریشه $x = ۰$ دارد $y' = ۳(m + ۱)x^۲ + ۲(۲m - ۱)x$ این تابع وقتی یکنواخت است که دارای ریشه‌ی مضاعف $x = ۰$ باشد یعنی $۲m - ۱ = ۰$ ولی در حالت $m = \frac{۱}{۲}$ علامت مشتق همواره مثبت است و تابع صعودی است. پس به‌ازای هیچ مقدار m

۳۱۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر تابع f روی بازه‌ی (a , b) مشتق‌پذیر و $f'(x) \geq ۰$ ، آن‌گاه f در بازه‌ی (a , b) صعودی است و چنان‌چه $f'(x) \leq ۰$ باشد، آن‌گاه f در بازه‌ی (a , b) نزولی است. بنابراین تشخیص صعودی و نزولی بودن تابع f ، f' را به‌دست می‌آوریم و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

x		۰		۱		۲	
f'	−	۰	+	۰	−	۰	+
f	↘	۰	↗	۱	↘	۰	↗

$$f(x) = x^۲(۲ - x)^۲$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x(۲ - x)^۲ - ۲(۲ - x)x^۲ = ۲x(۲ - x)(۲ - x - x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = ۲x(۲ - x)(۲ - ۲x) , f'(x) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ , x = ۱ , x = ۲$$

بنابراین تابع f روی بازه‌های $(۰ , ۱)$ و $(۲ , +\infty)$ صعودی است.

۳۲۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. تابع وقتی نزول می‌کند که مشتق آن منفی باشد:

$$y' = ۳x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \quad , \quad -\frac{۱}{۳} \Rightarrow$$

		$-\frac{۱}{۳}$		۱	
y'	+	۰	-	۰	+

پس در فاصله‌ی $(-\frac{۱}{۳}, ۱)$ نزولی است و حداکثر مقدار $(b - a)$ برابر $\frac{۴}{۳}$ است.

۳۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجایی که مشتق در ریشه‌هایش تغییر علامت می‌دهد پس ۱- و ۲ ریشه‌های مشتق هستند.

$$y' = -۳x^۲ + ۲ax + b$$

$$\begin{cases} f'(-۱) = -۲a + b - ۳ = ۰ \\ f'(۲) = ۴a + b - ۱۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

۳۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. زیرا علامت مشتق تابع در این بازه مثبت است $\left(y' = \frac{۲۲}{(۴x + ۲)^۲}\right)$ و با توجه به اینکه مجانب قائم تابع $x = -\frac{۱}{۲}$ است لذا در این بازه تابع همواره مشتق پذیر نیز می‌باشد. در واقع این تابع در بازه‌های $\left(-\infty , -\frac{۱}{۲}\right)$ و $\left(-\frac{۱}{۲}, +\infty\right)$ صعودی اکید است. (البته f در بازه‌ی $R - \left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$ نه صعودی است و نه نزولی)

۳۲۳- باید شرایط زیر برقرار باشد:

$$y' > ۰ \Rightarrow \frac{۲mx + ۶ - ۲mx - m(m - ۱)}{(mx + ۳)^۲} \geqslant ۰ \Rightarrow m^۲ - m - ۶ < ۰ \Rightarrow -۲ < m < ۳$$

$$\text{مجانب قائم} = \frac{-۳}{m} > ۰ \Rightarrow m < ۰$$

پس $-۲ < m < ۰$ یعنی گزینه ۳ صحیح است.

۳۲۴- بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

$$y' = \frac{۱ - a^۲}{(ax + ۱)^۲} < ۰ \Rightarrow ۱ - a^۲ < ۰ \Rightarrow -۱ < a < ۱$$

۳۲۵- یادآوری: اگر مشتق یک تابع هموگرافیک مثبت باشد، آنگاه این تابع روی فواصل پیوسته اکیداً صعودی است. ولی اگر فاصله‌ای از x ها در نظر گرفته شود که نقطه انفصال تابع یعنی ریشه مخرج در آن فاصله باشد آنگاه تابع هموگرافیک در آن فاصله، حتی اگر مشتق آن مثبت باشد یک تابع غیر یکنوا خواهد بود.

پس اگر تابع $y = \frac{ax - ۲}{x + a - ۳}$ بخواهد در فاصله $x > ۱$ اکیداً صعودی باشد، نقطه انفصال این تابع یعنی $x = ۳ - a$ نباید در فاصله $(۱ , +\infty)$ باشد. بنابراین:

$$۳ - a \leqslant ۱ \Rightarrow a \geqslant ۲ \quad (I)$$

از طرفی مشتق تابع نیز باید مثبت باشد. یعنی:

$$ad - bc > ۰ \Rightarrow a(a - ۳) + ۲ > ۰ \Rightarrow a^۲ - ۳a + ۲ > ۰ \Rightarrow (a - ۱)(a - ۲) > ۰ \Rightarrow \begin{cases} a < ۱ \\ \text{یا} \\ a > ۲ \end{cases} \quad (II)$$

$$(I) , (II) \Rightarrow a > ۲ \Rightarrow a \in (۲ , +\infty)$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ صحیح سوال است.

۳۲۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا با حذف قدر مطلق با کمک تعیین علامت، تابع را بازنویسی می‌کنیم:

$$y=\begin{cases}x^{۲}-۲x & ، \quad x\geqslant ۲\\ -x^{۲}+۲x & ، \quad x<۲\end{cases}$$

حالا برای تعیین فاصله‌ی نزولی بودن تابع، مشتق می‌گیریم و کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$y'=\begin{cases}۲x-۲<۰ & ، \quad x\geqslant ۲\\ -۲x+۲< & ، \quad x<۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<۱ \;،\; x\geqslant ۲ & \text{اشتراک ندارند :}\\ x>۱ \;،\; x<۲\Rightarrow ۱<x<۲\end{cases}$$

بنابراین تابع در فاصله‌ی $(۱,۲)$ نزولی است. در این فاصله:

$$y=x(-(x-۲))=-\left(x^{۲}-۲x\right)=-\left(x^{۲}-۲x\right)=-\left((x-۱)^{۲}-۱\right)=-(x-۱)^{۲}+۱$$

حالا برای یافتن ضابطه‌ی معکوس، x را بر حسب y می‌یابیم:

$$y=-(x-۱)^{۲}+۱\Rightarrow (x-۱)^{۲}=۱۴-y\Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{۱-y}$$

چون $۱<x<۲$ ، پس طرف چپ مقداری مثبت است، پس باید طرف راست هم مثبت باشد:

$$x-۱=\sqrt{۱-y}\Rightarrow x=۱+\sqrt{۱-y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۱+\sqrt{۱-x}$$

تا همین‌جا به جواب رسیدیم. اما دامنه‌ی $f^{-۱}$ که همان برد f است را محاسبه می‌کنیم. چون تابع در این فاصله، نزولی است. بنابراین برد تابع از قرار دادن مقادیر ابتدا و انتهای بازه‌ی دامنه در تابع حاصل می‌شود:

$$f(x)=-\left(x^{۲}-۲\right),\ ۱<x<۲\Rightarrow \begin{cases}f(۱)=۱\\ f(۲)=۰\end{cases}\Rightarrow f_{\text{برد}}=(۰,\ ۱)=D_{f^{-۱}}$$

می‌توانیم بعد از یافتن ضابطه‌ی f، از عددگذاری استفاده کنیم:

$$y=-\left(x^{۲}-۲\right),\ ۱<x<۲$$

نقطه‌ی $x=\frac{۳}{۲}$ در دامنه قرار دارد. بنابراین $\left(\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۴}\right)\in f$ پس باید $\left(\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۲}\right)\in f^{-۱}$ باشد که تنها در گزینه‌ی «۳» این اتفاق رخ می‌دهد.

تذکر: وقتی وارون تابع f را در فاصله‌ی $۱<x<۲$ می‌خواهیم، پس برد تابع وارون $۱<f^{-۱}(x)<۲$ خواهد بود. هر سه گزینه‌ی ۱ و ۲ و ۴ از یک کوچک‌ترند پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۳۲۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=|۲x-۶|-|x+۱|=\begin{cases}(۲x-۶)-(x+۱) & x\geqslant ۳\\ -۲x+۶-(x+۱) & -۱\leqslant x\leqslant ۳\\ -۲x+۶-(-x-۱) & x<-۱\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x-۷ & x\geqslant ۳\\ -۳x+۵ & -۱\leqslant x<۳\\ -x+۷ & x<-۱\end{cases}$$

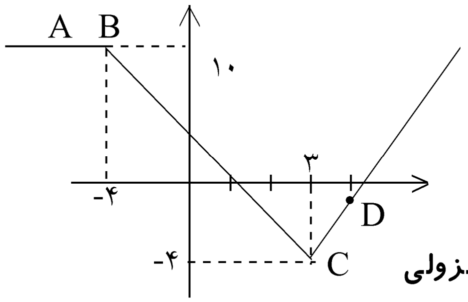
با توجه به ضابطه‌ها مشخص است که ضابطه‌ی $y=x-۷$ برای $x\geqslant ۳$ صعودی است.

$$x\geqslant ۳\xrightarrow{-۷} x-۷\geqslant -۴\Rightarrow y\geqslant -۴$$

$$y=x-۷\Rightarrow y+۷=x\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=x+۷$$

نکته: در تابع معکوس جای دامنه و برد عوض می‌شود. بنابراین $y\geqslant -۴$ برای تابع معکوس محدوده‌ی دامنه می‌شود.

۳۲۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$f(x) = |2x-6| - |x+4| + x$$

x	-۵	-۴	۳	۴
y	۱۰ (A)	۱۰ (B)	-۴ (C)	-۲ (D)

فاصله‌ی اکیداً نزولی : $x \in [-4, 3]$, $y \in [-4, 10] R_f \Rightarrow D_{f^{-1}} = [-4, 10]$

برای رسیدن به ضابطه معادله‌ی خطی که از B' و C' نقطه‌ی متناظر B و C می‌گذرد را می‌نویسیم:

$$\begin{matrix} B'(10, -4) \\ C'(-4, 3) \end{matrix} \Rightarrow m = \frac{7}{-14} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = \frac{-1}{2}(x+4)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 = f^{-1}(x)$$

تذکر: با گزینه‌ها هم این تست به‌راحتی حل می‌شود.

۳۲۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 2x - |4 - 2x| = \begin{cases} 2x + 4 - 2x & x > 2 \\ 2x - 4 + 2x & x \leqslant 2 \end{cases}$$

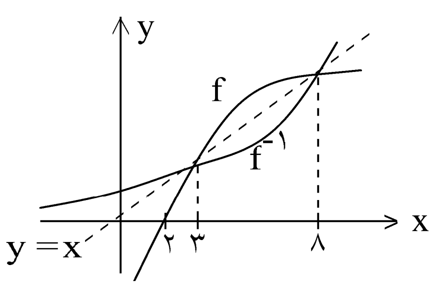
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ 4x - 4 & x \leqslant 2 \end{cases}$$

به ازای $x \leqslant 2$ تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$x \leqslant 2 \Rightarrow 4x - 4 \leqslant 4 \Rightarrow y \leqslant 4$$

$$y = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 1 \quad (x \leqslant 4)$$

۳۳۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$x - f^{-1}(x) \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant f^{-1}(x)$$

$$\xrightarrow{f \text{ اکیدا صعودی}} f(x) \geqslant f\left(f^{-1}(x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \geqslant x \Rightarrow x \in [3, 8]$$

۳۳۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تقسیم مورد نظر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x^2 & x - 1 \\ \hline -(x^3 - x^2) & x^2 + 2x + 2 \\ \quad 2x^2 & \\ -(2x^2 - 2x) & \\ \quad 2x & \\ -(2x - 2) & \\ \quad 2 & \end{array}$$

۳۳۲- تقسیم مورد نظر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{array}{l|l} x^{۴}-۳x^{۲}+۲x-۱۰ & x^{۲}+۲ \\ \underline{x^{۴}+۲x^{۲}} & x^{۲}-۵ \\ -۵x^{۲}+۲x-۱۰ & \\ \underline{-۵x^{۲}-۱۰} & \\ R=۲x & \end{array}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

روش دوم بر حسب توانهای $x^{۲}$ مرتب کرده که بجای $x^{۲}$ عدد ۲- را قرار می‌دهیم:

$$\left(x^{۲}\right)^{۲}-۳x^{۲}+۲x-۱۰ \Rightarrow p\left(x^{۲}=-۲\right)=۴+۶+۲x-۱۰=۲x$$

۳۳۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$۲(a-۱)x^{۳}-۲a^{۲}x^{۲}-۳x-۷ \quad \big| \; x+۲$$

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$$

$$p(-۲)=۲(a-۱)(-۲)^{۳}-۲a^{۲}(-۲)^{۲}-۳(۲)-۷=۲۳$$

$$p(-۲)=-۱۶(a-۱)-۸a^{۲}+۶-۷=۲۳$$

$$-۸a^{۲}-۱۶a+۱۵=۲۳ \Rightarrow -۸\left(a^{۲}+۲a+۱\right)=۰$$

بنابراین: روش هورنر : $-۴x^{۳}-۲x^{۲}-۳x-۷$ چند جمله‌ای

$$(a+۱)^{۲}=۰ \Rightarrow a=-۱ \Rightarrow$$

	-۴	-۲	-۳	-۷
-۲	-۴	۶	-۱۵	باقی مانده ۲۳

$\Rightarrow -۴+۶-۱۵=-۱۳$

ضرایب خارج قسمت

۳۳۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$$

باید : $P(-۲)=Q(-۲) \Rightarrow -(-۲)^{۲}+(-۲)+۳a=(-۲)^{۳}-(-۲)a+۱ \Rightarrow -۴-۲+۳a=-۸+۲a+۱$

$$\Rightarrow ۳a-۲a=-۷+۶ \Rightarrow a=-۱$$

۳۳۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)g(x)$ بر $p(x)$ کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $p(x)$ را در هم ضرب و حاصل‌ضرب را بر $p(x)$ تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌ی حاصل جواب مسئله است. پس ابتدا باقی‌مانده‌ها را هم ضرب می‌کنیم:

$$(۲x-۱)(۳x+۲)=۶x^۲+x-۲$$

حال باقی‌مانده‌ی تقسیم این چند جمله‌ای را بر $x^۲+۱$ حساب می‌کنیم. برای این کار به‌جای $x^۲$ ، ۱- را قرار می‌دهیم:

$$R=۶(-۱)+x-۲=x-۸$$

۳۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: اگر نمودار تابع f نسبت به مبدأ مختصات قرینه باشد، آن‌گاه $f(x)=-f(-x)$

نکته: اگر نمودار تابع f نسبت به محور y ها قرینه باشد، آن‌گاه $f(x)=f(-x)$

طبق فرض داریم: $P(x)=\left(x^۲+۲x\right)Q(x)+۱-۳x$

چون نمودار $P(x)$ نسبت به مبدأ مختصات قرینه است، پس $P(x)=-P(-x)$ ؛ بنابراین داریم:

$$P(x)=-P(-x)=-\left(x^۲-۲x\right)Q(-x)-(۱+۳x)$$

پس باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x^۲-۲x$ برابر $R(x)=-۱-۳x$ می‌باشد.

۳۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: چندجمله‌ای $P(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است، اگر و تنها اگر $P\left(-\frac{b}{a}\right)=۰$.

طبق فرض $f(x-۲)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است، پس $f(۱-۲)=f(-۱)=۰$ حال باید x ای را بیابیم که به‌ازای آن داشته باشیم:

$$۲x+۳=-۱$$
$$۲x+۳=-۱\Rightarrow x=-۲$$

$f(۲x+۳)$ به‌ازای $x=-۲$ صفر می‌شود، پس بر $x+۲$ بخش‌پذیر است.

۳۳۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{\frac{۱}{۲}x^{۳}} - \frac{۱}{۲}x^{۲} - ۱ & x^{۲} - ۳ \\ \hline \cancel{\pm\frac{۱}{۲}x^{۲} \mp \frac{۳}{۲}x} & \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲} \\ \cancel{\frac{-۱}{۲}x^{۲}} + \frac{۳}{۲}x - ۱ & \\ \cancel{\mp\frac{۱}{۲}x^{۲}} \pm \frac{۳}{۲} & \\ \hline \frac{۳}{۲}x - \frac{۳}{۲} - ۱ & \end{array}$$

در نتیجه:

$$\frac{۳}{۲}x - \frac{۳}{۲} - ۱ = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۲$$

$$۳ax^{۲} - ۸ = ۳a(۲)^{۲} - ۸ = ۱۲a - ۸ = ۰ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

۳۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیه تقسیم داریم:

$$f(x) = x(x-۲)(x+۲)Q(x) + ۶x^{۲} - ۲x + ۳$$
$$\Rightarrow f(x) = \left(x^{۲} + ۲x\right)(x-۲)Q(x) + ۶x^{۲} - ۲x + ۳$$

اگر $q(x) = (x-۲)Q(x)$ در نظر بگیریم در نتیجه:

$$f(x) = \left(x^{۲} + ۲x\right)q(x) + ۶x^{۲} - ۲x + ۳$$

برای یافتن باقی‌مانده f بر $x^{۲} + ۲x$ کافی است باقی‌مانده $۶x^{۲} - ۲x + ۳$ بر $x^{۲} + ۲x$ را بیابیم که برابر است با:

$$۶(-۲x) - ۲x + ۳ = -۱۴x + ۳ \Rightarrow m + n = -۱۱$$

۳۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنا به فرض $f(-۱) = ۰$، پس: $a - b + ۳ = ۰$ یا $b = a + ۳$، پس معادله درجه سوم $x^{۳} + ax^{۲} + (a+۳)x + ۴ = ۰$ با تجزیه $(x+۱)\left[x^{۲} + (a-۱)x + ۴\right]$ چون $f(x)$ ریشه مضاعف دارد، ممکن است معادله درجه دوم $x^{۲} + (a-۱)x + ۴ = ۰$ ریشه مضاعف داشته باشد: $(a-۱)^{۲} - ۱۶ = ۰$، پس $a - ۱ = \pm۴$، در نتیجه $a = -۳, ۵$ یا ممکن است معادله درجه دوم ریشه ۱- داشته باشد: $۱ - a + ۱ + ۴ = ۰$، پس: $a = ۶$، لذا $a = -۳, ۵, ۶$.

۳۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{ax^{۳}} + bx^{۲} + cx + d & x^{۲} - x \\ \cline{2-2} \underline{\pm\cancel{ax^{۳}} \pm ax^{۲}} & ax + a + b \\ \cancel{(a+b)x^{۲}} + cx + d & \\ \underline{\pm\cancel{(a+b)x^{۲}} \pm (a+b)x} & \\ (a+b+c)x + d & \end{array}$$

$$a + b + c = ۰ \ , \ d = ۰ \Rightarrow a + b + c + d = ۰$$

۳۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$ax^{۳} + bx^{۲} + ۱۷x + ۱ = (۲x - ۳)\left((۲x - ۱)^{۲} - x\right) + ۴ = (۲x - ۳)\left(۴x^{۲} - ۵x + ۱\right) + ۴$$
$$= ۸x^{۳} - ۱۰x^{۲} + ۲x - ۱۲x^{۲} + ۱۵x - ۳ + ۴ = ۸x^{۳} - ۲۲x^{۲} + ۱۷x + ۱$$

با مقایسه ضرایب نتیجه می‌شود:

$$a = ۸ \ , \ b = -۲۲$$

در نتیجه:

مجموع ضرایب چند جمله ای مقسوم $= ۸ - ۲۲ + ۱۷ + ۱ = ۴$

۳۴۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(-۱) = ۰ \Rightarrow -۱ - a + ۳ + ۲ = ۰ \Rightarrow a = ۴$$
$$R = P(-۲) = -۳۲ - ۸a + ۶ + ۲ = -۵۶$$

۳۴۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر $Q(x)$ خارج قسمت باشد آن‌گاه $Q(۱) = ۴$ است.

$$P(x) = (x + ۱)Q(x) + r$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{x = ۱} P(۱) = ۲Q(۱) + r \Rightarrow a + ۲ = ۸ + r \\ \xrightarrow{x = -۱} P(-۱) = ۰ + r \Rightarrow -a - ۴ = r \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۱$$

۳۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه تقسیم داریم:

در تقسیم بر $x^۳ - x^۲ - ۶x$:

$$f(x) = \left(x^۳ - x^۲ - ۶x\right)q(x) + \left(۳x^۲ + ۳x - ۱\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = x(x+۲)(x-۳)q(x) + \left(۳x^۲ + ۳x - ۱\right) \Rightarrow f(x) = \left(x^۲ + ۲x\right)(x-۳)q(x)$$
$$+ \left(۳x^۲ + ۳x - ۱\right) \Rightarrow f(x) = \left(x^۲ + ۲x\right)q'(x) + \left(۳x^۲ + ۳x - ۱\right)$$

واضح است که برای یافتن باقیمانده $f(x)$ بر $x^۲ + ۲x$ کافی است باقی‌مانده تقسیم $۳x^۲ + ۳x - ۱$ را بر $x^۲ + ۲x$ به دست می‌آوریم در نتیجه:

$$x^۲ = -۲x \Rightarrow ۳x^۲ + ۳x - ۱ = ۳(-۲x) + ۳x - ۱ = -۳x - ۱ \Rightarrow ax + b = -۳x - ۱$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۳ \\ b = -۱ \end{cases} \Rightarrow -۲a - b = ۷$$

۳۴۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید $q(x) = p(x) - ۱$ لذا $q(۱) = q(۲) = q(۳) = ۰$ یعنی $q(x)$ بر $(x-۱)$، $(x-۲)$, $(x-۳)$ بخش‌پذیر است در نتیجه به حاصل‌ضرب آن‌ها نیز بخش‌پذیر است پس داریم:

$$q(x) = k(x-۱)(x-۲)(x-۳) \Rightarrow p(x) = k(x-۱)(x-۲)(x-۳) + ۱$$

از آن‌جا که $p(۵) = ۰$ در نتیجه $k = -\frac{۱}{۲۴}$ و

$$p(x) = ۱ - \frac{۱}{۲۴}(x-۱)(x-۲)(x-۳) \Rightarrow p(۴) = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

۳۴۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به تقسیم چند جمله‌ای‌ها داریم:

$$\begin{cases} f(x+۲) = (x-۱)^۲ q(x) & (۱) \\ f(x-۱) = (x+۲)^۲ q'(x) & (۲) \end{cases}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{cases} f(x+۲) = (x-۲-۱)^۲ q(x-۲) = (x-۳)^۲ q(x-۲) \\ f(x) = (x+۱+۲)^۲ q'(x+۱) = (x+۳)^۲ q'(x+۱) \end{cases}$$

پس $f(x)$ بر $(x-۳)^۲$ و $(x+۳)^۲$ بخش‌پذیر است، بنابراین بر حاصل‌ضرب آن‌ها نیز بخش‌پذیر است و چون $f(x)$ از درجه چهار است، در نتیجه:

$$\begin{cases} f(x) = k(x+۳)^۲(x-۳)^۲ = k\left(x^۲ - ۹\right)^۲ \\ f(۲) = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow k = ۱$$

بنابراین $f(x) = \left(x^۲ - ۹\right)^۲$ و $f(۱) = (۱-۹)^۲ = ۶۴$

۳۴۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $p(x)$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است لذا $p(-۱)=۰$ و چون در تقسیم $p(x)$ بر $x^۴-x$ باقی‌مانده برابر ۸ است داریم $p(x)=k\left(x^۴-x\right)+۸$ که k یک عدد است در نتیجه

$$\left.\begin{array}{l} p(-۱)=۰ \\ p(x)=k\left(x^۴-x\right)+۸ \end{array}\right\} \Rightarrow k\left((-۱)^۴-(-۱)\right)+۸=۰ \Rightarrow k=-۴$$

بنابراین $p(x)=-۴\left(x^۴-x\right)+۸$ و در نتیجه

$$p(۲)=-۴\left(۲^۴-۲\right)+۸=-۴(۱۴)+۸=-۴۸$$

۳۴۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عبارت $f(x)=۲x^۴+ax^۳+bx^۲-۳$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیر است پس ریشه مضاعف ۱ دارد. الزاماً $f(۱)=۰$ و $f'(۱)=۰$ است.

$$f'(x)=۸x^۳+۳ax^۲+۲bx$$

$$\begin{cases} ۲+a+b-۳=۰ \\ ۸+۳a+۲b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۱ \\ ۳a+۲b=-۸ \end{cases} \Rightarrow a=-۱۰\ ,\ b=۱۱$$

۳۵۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مقسوم‌علیه مربع کامل است $(x-۱)^۲$ بنابراین $x=۱$ عامل صفر مشتق مقسوم نیز می‌باشد.

$$\xrightarrow{\text{مشتق مقسوم}} ۳ax^۲+۸x-۱۴ \xrightarrow{x=۱} ۳a+۸-۱۴=۰ \Rightarrow ۳a=۶ \Rightarrow a=۲$$

۳۵۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر خارج قسمت را $Q(x)$ در نظر بگیریم، آن‌گاه مجموع ضرایب آن $Q(۱)$ می‌باشد.

باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر $x+۲$ مساوی ۱۲ است. $\Rightarrow f(-۲)=۱۲ \xrightarrow{f\ \text{فرد است}} f(۲)=-۱۲$

فرض کنیم: $f(x+۱)=(x+۳)\ Q(x)+R \xrightarrow{x=-۳} f(-۲)=۰+R \Rightarrow R=۱۲$

$$\Rightarrow f(x+۱)=(x+۳)Q(x)+۱۲ \xrightarrow{x=۱} f(۲)=۴Q(۱)+۱۲ \Rightarrow -۱۲=۴Q(۱)+۱۲ \Rightarrow Q(۱)=-۶$$

۳۵۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $P_۱(x)$ بر چند جمله‌ای $f(x)$ برابر $R_۱(x)$ و باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $R_۲(x)$ بر چند جمله‌ی $f(x)$ برابر $R_۲(x)$ باشد، در آن صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم $P_۱(x)P_۲(x)$ بر $f(x)$ برابر است با حاصل تقسیم $R_۱(x)R_۲(x)$ بر $f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} R_۱(x)=-۲x-۳ \\ R_۲(x)=۲x-۴ \end{array}\right\} \Rightarrow \left(R_۱R_۲\right)(x)=(-۲x-۳)(۲x-۴)=-۴x^۲+۲x+۱۲$$

$$\begin{array}{r|l} -۴x^۲+۲x+۱۲ & x^۲-۳x+۵ \\ \cline{2-2} \underset{+}{-۴x^۲}\ \underset{-}{+۱۲x}\ \underset{+}{-۲۰} & -۴ \\ \hline -۱۰x+۳۲ & \end{array}$$

$$\Rightarrow R(x)=-۱۰x+۳۲ \Rightarrow R(۳)=۲$$

۳۵۳- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow f(۲\times۱)=f(۲)=۰$

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow g(۲)=۳$

$y=f^۲(x+۱)-۲g(۲x)$

۳۵۴- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. راه حل اول:

$f(x)=\left(x^۲-۴\right)Q(x) \Rightarrow f(۲x-۱)=\left((۲x-۱)^۲-۴\right)Q(۲x-۱)=(۲x-۱-۲)(۲x-۱+۲)$
$Q_۱(x)=(۲x-۳)(۲x+۱)Q_۱(x)$

$\Rightarrow$ $f(۲x-۱)$ بر $۲x+۱$ بخش پذیر است

راه حل دوم: $f(x)$ بر $x^۲-۴$ بخش‌پذیر است. بنابراین: $f(۲)=f(-۲)=۰$

حال باقی‌مانده تقسیم $f(۲x-۱)$ بر $۲x+۱$ را می‌خواهیم، پس باید x را برابر $-\frac{۱}{۲}$ (ریشه‌ی مقسوم‌علیه) قرار دهیم:

$$f(۲x-۱)\xrightarrow{x=-\frac{۱}{۲}}f(-۱-۱)=f(-۲)=۰$$

بنابراین باقی‌مانده برابر صفر خواهد بود.

۳۵۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$f(x)=(x-۱)(x-۲)Q(x)+۳x-۱$
$f(۱-x)=(۱-x-۱)(۱-x-۲)Q(۱-x)+۳(۱-x)-۱=x(x+۱)Q(۱-x)-۳x+۲$
$\underbrace{۴x+۲f(۱-x)}_{g(x)}=۲x(x+۱)Q(۱-x)-۶x+۴+۴x \Rightarrow g(x)=۲x(x+۱)Q(۱-x)+۴-۲x$

اگر قرار دهیم $x=-۱$:

$g(-۱)=R=۶ \Rightarrow R=۶$

۳۵۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$\begin{array}{c|l} f(x) & x-۲ \\ \hline ۲ & \end{array} \Rightarrow f(۲)=۲$ $\qquad$ $\begin{array}{c|l} g(x) & x-۲ \\ \hline ۳ & \end{array} \Rightarrow g(۲)=۳$

$\begin{array}{c|l} f(x)g(x) & x-۲ \\ \hline ؟ & \end{array} \Rightarrow$ باقی مانده $=f(۲)g(۲)=۲\times۳=۶$

۳۵۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مخرج کسر تجزیه شود متوالیاً از صورت و مخرج کسر حذف می‌شوند.

$$\frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}{1-x^8}=\frac{(1+x)(1+x^2)}{1-x^4}=\frac{(1+x)}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}$$

به‌ازای $x=1-\sqrt{2}$ حاصل برابر $\frac{1}{1-1+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۵۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. سه جمله‌ای x^3-7x-6 بر $x+1$ بخش‌پذیر است.
در نتیجه حاصل به صورت $(x+1)\ (x+2)\ (x-3)$ است.
در نتیجه عامل $x-2$ ندارد.

$$\begin{array}{r|l} x^3-7x-6 & x+1 \\ \hline -x^2-7x & x^2-x-6 \\ \hline -6x-6 & \end{array}$$

۳۵۹- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=(x^2-x)Q(x)+x+3\Rightarrow(x+1)f(x)=\underbrace{(x+1)(x-1)xQ(x)}_{I}+\underbrace{\overbrace{(x+1)(x+3)}^{x^2+4x+3}}_{II}$$

عبارت (I) بر x^2-1 بخش‌پذیر است، پس باقی‌مانده‌اش برای صفر است، اگر عبارت (II) را بر x^2-1 تقسیم کنیم، باقی‌مانده‌اش برابر $4x+4$ می‌شود، پس در کل باقی‌مانده $4x+4$ است.

۳۶۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است بنابراین مشتق آن نیز بر $x-1$ بخش‌پذیر است. یعنی $P(1)=0$ و $P'(1)=0$:

$$P(x)=x^4+ax^2-bx+4\Rightarrow P(1)=1+a-b+4=0\Rightarrow a-b=-5$$

$$P'(x)=4x^3+2ax-b\Rightarrow P'(1)=4+2a-b=0\Rightarrow 2a-b=-4$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2a+2b=10\\ 2a-b=-4\end{cases}\Rightarrow b=6$$

۳۶۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. رابطه‌ی تقسیم را می‌نویسیم:

$$p(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+2x-4$$

با جای‌گذاری $x=3$ و $x=1$ داریم:

$$p(1)=(1-4+3)Q(1)+2-4\Rightarrow p(1)=-2$$
$$p(3)=(9-12+3)Q(3)+6-4\Rightarrow p(3)=2$$

از طرفی باقیمانده ی تقسیم چند جمله‌ای $f(x)=p(x+1)-p(x-1)$ بر $x-2$ برابر $f(2)$ است و داریم:

$$f(2)=p(3)-p(1)=2-(-2)=4$$

۳۶۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\left(x^{2}-2x-3\right)Q(x)+(x+1)\Rightarrow\begin{cases}f(3)=4\\ f(-1)=0\end{cases}$$

$$(x+2)f(2x+1)=\left(x^{2}-1\right)Q'(x)+(ax+b)$$

$$\begin{matrix}x=1\Rightarrow 3f(3)=a+b\Rightarrow a+b=12\\ x=-1\Rightarrow f(-1)=-a+b\Rightarrow -a+b=0\end{matrix}\Rightarrow a=b=6$$

۳۶۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$R=f(1)=g(1)\Rightarrow 1-3+7+1=1+a+2\Rightarrow 6=a+3$$

۳۶۴- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=\left(x^{2}-3x+2\right)Q(x)+3x-1\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow f(1)=3\\ x=2\Rightarrow f(2)=5\end{cases}$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم $\underline{f(x)+f(3-x)}$ بر $x-2$ برابر است با:

$$R=f(2)+f(3-2)=f(2)+f(1)=5+2=7$$

۳۶۵- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^{2}+3x+2=0\Rightarrow x'=-1\ ,\ x''=-2$$

$$\begin{cases}f(-1)=0\Rightarrow a+b=-16\\ f(-2)=0\Rightarrow 8a+b=-23\end{cases}\xrightarrow{+}9a+2b=-39$$

۳۶۶- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $ax^{6}+bx^{3}+1$ برابر ۱ است. بنابراین با توجه به رابطه‌ی تقسیم داریم:

$$ax^{6}+bx^{3}+1=\left(x^{3}+1\right)Q(x)+1$$

$$a\left(x^{3}\right)^{2}+bx^{3}+1=\left(x^{3}+1\right)Q(x)+1$$

$$\xrightarrow{x^{3}=-1}a(-1)^{2}+b(-1)+1=0+1\Rightarrow a-b=0\Rightarrow a=b$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x):x^{2}+ax+2b$ بر $x+2$ برابر $P(-2)$ است.

$$R=P(-2)=(-2)^{2}+a(-2)+2b=4-2a+b=4-2a+2a=4\Rightarrow R=4$$

۳۶۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(-2)=0\Rightarrow \cancel{(-2)^{2n+1}}+\cancel{2(-2)^{2n}}+(-2)^{5}-5(-2)^{3}+k=0\Rightarrow -32+40+k=0\Rightarrow k=-8$$

$$f(x)=\left(x^{2}-1\right)Q(x)+ax+b$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow f(1)=a+b\Rightarrow a+b=1+2+1-5-8=-9\\ x=-1\Rightarrow f(-1)=-a+b\Rightarrow -a+b=-1+2-1+5-8=-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}b=-6\\ a=-3\end{cases}\Rightarrow\Leftrightarrow R(x)=-3x-6$$

۳۶۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(-۲)=۰ \Rightarrow ۱۹-۸a+۱۶=۰ \Rightarrow a=۴$$

$$f(x)=x\left(x^{۳}+۴x^{۲}-۸\right)$$

$$\begin{array}{l|l} x^{۳}+۴x^{۲}-۸ & x+۲ \\ \hline -x^{۳}-۲x^{۲} & x^{۲}+۲x-۴=۰ \Rightarrow (x+۱)^{۲}=۵ \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{۵}-۱ \\ x=-\sqrt{۵}-۱ \end{cases} \\ \cancel{۲x^{۲}}-۸ & \\ -\cancel{۲x^{۲}}-۴x & \\ \hline -۴x-۸ & \\ +۴x+۸ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

کوچک ترین ریشه

۳۶۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض نمودار تابع $f(x)=۲x^{۳}-۵x^{۲}-x+m$ ، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. پس:

$$f(۲)=۰ \Rightarrow ۱۶-۲۰-۲+m=۰ \Rightarrow m=۶$$

$$f(x)=۲x^{۳}-۵x^{۲}-x+۶$$

بنابراین با توجه به این‌که یکی از ریشه‌های این تابع $x=۲$ است، بنابراین $f(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است. با تقسیم

$f(x)$ بر $x-۲$ ، خارج قسمت تقسیم $۲x^{۲}-x-۳$ می‌شود. بنابراین:

$$f(x)=(x-۲)\left(۲x^{۲}-x-۳\right)$$

به این ترتیب ریشه‌های دیگر f (غیر از $x=۲$) از معادله‌ی $۲x^{۲}-x-۳=۰$ به دست می‌آید:

$$۲x^{۲}-x-۳=۰ \Rightarrow (x+۱)(۲x-۳)=۰ \Rightarrow x=-۱ , \frac{۳}{۲}$$

۳۷۰- راه حل اول:

$x^6+ax^3+bx^4+1$ بر x^2-1 بخش پذیر است $\Rightarrow x^6+ax^3+bx^4+1=(x^2-1)Q(x)$

$$x^2-1=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\Rightarrow 1+a+b+1=0\Rightarrow a+b=-2\\ x=-1\Rightarrow 1-a+b+1=0\Rightarrow -a+b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2b=-4\Rightarrow b=-2\\ a=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow a-2b=0-2(-2)=+4$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

راه حل دوم:

این روش شبیه حل مسایل به روش همنهشتی است.

$$x^2-1\equiv 0\ (\text{به پیمانه } x^2-1)\Rightarrow x^2\equiv 1\ (\text{به پیمانه } x^2-1)$$

یعنی x^2 همنهشت با ۱ به پیمانهٔ x^2-1 است.

$$R=(x^2)^3+a(x^2)x+b(x^2)^2+1=(1)^3+a(1)x+b(1)^2+1=ax+b+2$$

$$R=0\Rightarrow ax+b+2=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b+2=0\Rightarrow b=-2\end{cases}\Rightarrow a-2b=+4$$

۳۷۱- با توجه به فرض بخش‌پذیری داریم $p(x)=(x+1)Q(x)$ و با جایگزینی $x=-1$:

$$p(-1)=(-1+1)Q(-1)=0\Rightarrow p(-1)=0\Rightarrow a(-1)^{2n+1}+(-1)^{2n}+2=0\Rightarrow$$

$$-a+1+2=0\Rightarrow a=3$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۳۷۲- چون x^3+ax^2+bx+c بر $(x-2)^4$ بخش‌پذیر است، پس x^3+ax^2+bx+c فقط عامل $(x-2)$ دارد. پس:

$$x^3+ax^2+bx+c=k(x-2)^3=k(x^3-6x^2+12x-8)\Rightarrow k=1,a=-6,b=12,\ c=-8$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ صحیح است.

۳۷۳- عبارت ax^3+bx^2+cx+1 عامل x ندارد و چون ax^3+bx^2+cx+1 بر $x(x+1)^3$ بخش‌پذیر است، پس ax^3+bx^2+cx+1 فقط عامل $x+1$ دارد، یعنی:

$$ax^3+bx^2+cx+1=(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1\Rightarrow a=1,\ b=3,\ c=3\Rightarrow a+b+c=7$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ درست است.

۳۷۴-

$$(x^3+8)+(x^2+3x+1)=(x+2)(x^2-2x+4)+(x^2-2x+4)+(5x-3)=$$

$$(x^2-2x+4)(x+2+1)+5x-3=(x^2-2x+4)(x+3)+(5x-3)$$

بنابراین $x+3$ خارج قسمت و $5x-3$ باقی‌مانده است. پس گزینهٔ ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^{۲}} - x + a & x - a \\ \hline -\cancel{x^{۲}} + ax & x + a - ۱ \\ \cline{1-1} ax - x + a = \cancel{(a-۱)}x + a & \\ \quad -\cancel{(a-۱)x} + a(a-۱) & \\ \cline{1-1} \quad a + a(a-۱) & \end{array}$$

۳۷۵- $\left.\begin{array}{l} \text{خارج قسمت} = x + a - ۱ \\ \text{خارج قسمت} = x + ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow a-۱=۲ \Rightarrow a=۳$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

۳۷۶- **یک راه‌حل همان تقسیم مستقیم است که کمی طولانی است. راه‌حل دیگر استفاده از خواص همنهشتی‌ها در تعمیم چند جمله‌ای‌ها می‌باشد. به ترتیب زیر:**

$$x^{۳} + ۲ \overset{x^{۳}+۲}{\equiv} ۰ \Rightarrow x^{۳} \overset{x^{۳}+۲}{\equiv} -۲$$

$$R = ۳\left(x^{۳}\right)^{۵} - ۷\left(x^{۳}\right)^{۳} + ۵\left(x^{۳}\right)^{۲} - ۱۲x^{۳} = ۳(-۲)^{۵} - ۷(-۲)^{۳} + ۵(-۲)^{۲} - ۱۲(-۲)$$
$$= -۹۶ + ۵۶ + ۲۰ + ۲۴ = ۴$$

بنابراین گزینه ۳ پاسخ صحیح سوال است.

۳۷۷- **گزینه ۴ پاسخ صحیح است.**

$f(۱) = ۱ \ , \ f(-۱) = -۳$

اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ **بر** $x^{۲} - ۱$ **برابر** $ax + b$ **باشد داریم:**

$$f(x) = \left(x^{۲} - ۱\right)Q(x) + (ax + b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(۱) = (۱-۱)Q(۱) + (a+b) \\ f(-۱) = (۱-۱)Q(-۱) + (-a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = ۱ \\ -a + b = -۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \ , \ b = -۱ \Rightarrow R = ۲x - ۱$$

۳۷۸- **گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.**

$$(x-۲)(x+۱) \begin{array}{l} f(۲) = ۸ + ۴a + ۲b + ۶ = ۰ \\ f(-۱) = -۱ + a - b + ۶ = ۰ \end{array} \quad \begin{cases} ۲a + b = -۷ \\ a - b = -۵ \end{cases} \begin{array}{l} a = -۴ \\ b = ۱ \end{array} \quad a + b = -۳$$

۳۷۹- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که $x(x+1)(x+2)(x+3)$ بر $(x+1)(x+2)$ بخش‌پذیر می‌باشد، بنابراین باقی‌مانده‌ی $f(x)$ بر $(x+1)(x+2)$ برابر است با باقی‌مانده‌ی $3x^3+5x+1$ بر $(x+1)(x+2)$:

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+5x+1 & x^2+3x+2 \\ \cline{2-2} -(3x^3+9x^2+6x) & 3x-9 \\ \hline -9x^2-x+1 & \\ -(-9x^2-27x-18) & \\ \hline 26x+19 & \end{array} \longrightarrow a=26,\ b=19 \longrightarrow a-b=7$$

راه دوم:

$$f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)Q(x)+3x^3+5x+1 \Rightarrow \begin{cases} f(0)=1 \\ f(-1)=-7 \\ f(-2)=-33 \\ f(-3)=-95 \end{cases}$$

$$f(x)=(x+1)(x+2)Q'(x)+(ax+b) \Rightarrow \begin{cases} -a+b=f(-1)=-7 \\ -2a+b=f(-2)=-33 \end{cases}$$

$$a=26,\ b=19 \Rightarrow a-b=7$$

۳۸۰- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(2)=A,\quad f(-2)=B$$

$$f(x)=(x-2)(x+2)q(x)+2x-1$$

$$f(2)=3=A,\quad f(-2)=-5=B \Rightarrow A-B=8$$