



آزمون غیر حضوری

دوازدهم ریاضی

(۳۰ آذر ۱۳۹۷)

(مباحث ۲۱ دی ۹۷)

گزینشگران و ویراستاران

نام درس	حسابان ۲	هندسه ۳	ریاضیات گسسته	فیزیک ۳	شیمی ۳
گزینشگر	سید عادل حسینی	امیر حسین ابومحبوب	امیر حسین ابومحبوب	بابک اسلامی	سهند راحمی پور
گروه ویراستاری	علی ارجمند حمید زرین کفش	سید عادل حسینی	سید عادل حسینی	حمید زرین کفش	سهند راحمی پور
مسئول درس	سید عادل حسینی	امیر حسین ابومحبوب	امیر حسین ابومحبوب	بابک اسلامی	سهند راحمی پور

گروه فنی و تولید:

مسئول تولید آزمون غیر حضوری	محمد اکبری
مسئول دفترچه آزمون غیر حضوری	نرگس غنی زاده
گروه مستندسازی	مدیر گروه: مریم صالحی مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری
حروف نگار و صفحه آرا	حسن خرم جو
ناظر چاپ	سوران نعیمی

بنیاد علمی آموزشی قلم چی « وقف عام »

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ - تلفن: ۶۶۹۶۲۴۰۰

«تمام دارایی‌ها و درآمدهای بنیاد علمی آموزشی قلم چی وقف عام است بر گسترش دانش و آموزش»

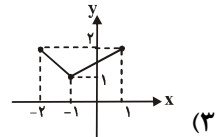
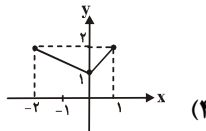
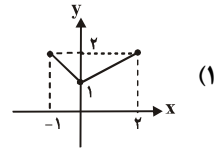
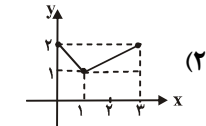
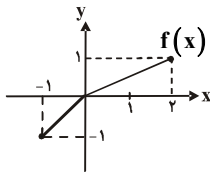


حسابان ۲

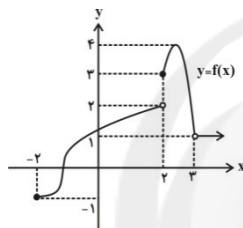
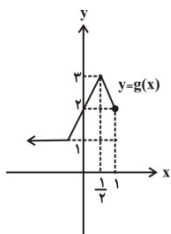
حسابان ۲

تابع، مثلثات، حدهای نامتناهی
حد در بینهایت
صفحه‌های ۱ تا ۶۹

۱- نمودار تابع f مطابق شکل مقابل است. نمودار تابع $g(x) = |f(x-1)| + 1$ کدام است؟



۲- نمودار توابع f و g ، به صورت زیر می‌باشد. دامنه تابع $fo g$ کدام است؟



(۱) $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$

(۲) $(-2, 3) \cup (3, +\infty)$

(۳) $(-2, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 3) \cup (3, +\infty)$

(۴) $(-\infty, 1]$

۳- اگر $f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x$ باشد، $f(\sqrt[3]{2})$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۱

(۳) $\sqrt[3]{4}$

(۴) $\sqrt[3]{2}$

۴- اگر f تابعی اکیداً یکنوا با دامنه \mathbb{R} باشد، کدام یک از ضوابط زیر، الزاماً تابعی اکیداً یکنوا است؟

(۱) $y = f(x) + f(-x)$

(۲) $y = f(|x|)$

(۳) $y = f(-x+2)$

(۴) $y = |f(x)|$

۵- اگر $f(x) = 1 - |1 - x^2|$ باشد، تابع با ضابطه $y = |f(x)|$ در کدام یک از بازه‌های زیر اکیداً نزولی است؟

(۱) $(-2, -\frac{1}{2})$

(۲) $(-1, \frac{1}{2})$

(۳) $(\frac{1}{2}, 2)$

(۴) $(-3, -\frac{3}{2})$

۶- اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد و نمودار تابع $y = x + f(x)$ محور x را در نقاط به طول $x=1$ و $x=2$ قطع کند، باقی‌مانده

تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ کدام است؟

(۱) x

(۲) $-x$

(۳) $x+1$

(۴) $1-x$



۷- دوره تناوب تابع $f(x) = \cos(\cos \pi x)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۲ (۴) تابع متناوب نیست.

۸- در معادله مثلثاتی $\sin 2x = 2 \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$ ، مجموع تمام جوابها در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{6}$

۹- دوره تناوب تابع $y = \left| \sin \frac{\pi x}{5} \right|$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{15}{4}$ (۴) ۵

۱۰- اگر $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{3}$ باشد، $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۱۱- تابع به معادله $y = \sin bx$ ، در $x = \frac{2\pi}{5}$ دارای ماکزیمم است. کمترین مقدار مثبت b کدام است؟ ($b \neq 0$)

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

۱۲- جوابهای کلی معادله $1 - \cos 2x = \sin 2x$ کدام گزینه است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x = k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

۱۳- جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ ، کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

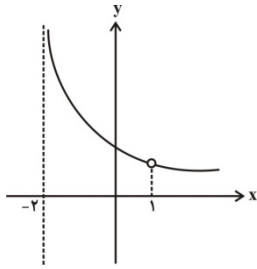
- (۱) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (۲) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

۱۴- حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \left[\frac{1}{[x] - x} \right]$ کدام است؟ ($[]$ ، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) $-\infty$



۱۵- قسمتی از نمودار تابع $y = \frac{2x+a}{x^2+bx+c}$ به صورت مقابل است. $a+c$ کدام است؟



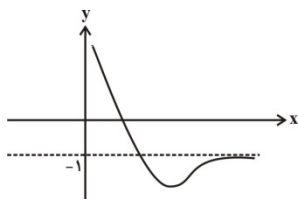
(۱) -۵

(۲) ۱

(۳) -۲

(۴) -۴

۱۶- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-\frac{1}{f(x)}]$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)



(۱) صفر

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) وجود ندارد.

۱۷- حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+4x+1}} + x)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۱) $\frac{5}{2}$

۱۸- اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+a-\sqrt{x^2+bx}) = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار مثبت $a+b$ کدام است؟

(۲) ۲

(۱) ۱

(۴) ۴

(۳) ۳

۱۹- اگر $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{|\tan \pi x|}{x^2-1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

(۲) $\frac{\pi}{2}$ (۱) $-\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{\pi}{2}$

(۳) صفر

۲۰- اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m + x^r}{px^n + mx^r} = 3$ و $n \geq 3$ ، آنگاه حاصل $m+p-n$ کدام نمی تواند باشد؟ ($m, n \in \mathbb{N}$)

(۲) $\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{8}{3}$ (۳) $-\frac{7}{3}$



هندسه ۳

هندسه ۳

ماتریس و کاربردها
آشنایی با مقاطع مخروطی
صفحه‌های ۹ تا ۵۰

۲۱- اگر $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ دو ماتریس 3×3 با شرط $a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i+j=2k \\ 0 & ; i+j=2k+1 \end{cases}$ و

$b_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i \leq j \\ 0 & ; i > j \end{cases}$ باشند، آن‌گاه سطر اول ماتریس $(A-B)^2$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- (۱) $[0 \ -1 \ 0]$ (۲) $[0 \ -1 \ 1]$ (۳) $[0 \ 0 \ 1]$ (۴) $[0 \ 0 \ -1]$

۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد و درایه‌های ماتریس A اعداد طبیعی باشند، کم‌ترین مقدار مجموع درایه‌های A کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۸

۲۳- اگر $|A+I|=a$ و $|A^{-1}+I|=b$ ، آن‌گاه $|A|$ برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟ ($a, b \neq 0$)

- (۱) $a+b$ (۲) ab (۳) $a-b$ (۴) $\frac{a}{b}$

۲۴- به ازای چند مقدار m ، معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} m+1 & 1 \\ 3 & m-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+1 \\ m+3 \end{bmatrix}$ جواب ندارد؟

- (۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

۲۵- مقدار x از معادله مقابل کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۶- B و C دو نقطه ثابت و A یک نقطه متحرک در یک صفحه هستند. مکان هندسی نقطه A به گونه‌ای که در مثلث ABC ، ارتفاع AH

برابر عدد ثابت h و میانه AM حداکثر برابر $2h$ باشد، کدام است؟

(۱) پاره خطی به طول $\sqrt{3}h$ (۲) پاره خطی به طول $2\sqrt{3}h$

(۳) دو پاره خط به طول $\sqrt{3}h$ (۴) دو پاره خط به طول $2\sqrt{3}h$

۲۷- اگر دایره‌های $C: x^2 + y^2 - 4x + 4y + m = 0$ و $C': x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0$ مماس درون باشند، آن‌گاه m کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۲۸- نقطه A به طول ۲ و با عرض مثبت روی دایره $C: x^2 + y^2 - 2x + 6y - 7 = 0$ قرار دارد. معادله خط D که از نقطه A بگذرد و

بر دایره C مماس باشد، کدام است؟

(۱) $4x - y + 7 = 0$ (۲) $x + 4y - 6 = 0$

(۳) $4x - y - 7 = 0$ (۴) $x + 4y + 6 = 0$



۲۹- مرکز دایره مماس بر خطوط $x = -3$ و $x = 7$ ، بر خط $2y + 3x + 1 = 0$ واقع است. به ازای کدام مقدار b ، خط $x + 2y + b = 0$ قائم بر دایره است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۵
(۴) -۵

۳۰- خروج از مرکز یک بیضی که نقاط $F = (5, 22)$ و $F' = (5, -3)$ کانون‌های آن بوده و از نقطه $M = (-7, 6)$ بگذرد، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$
(۲) $\frac{5}{7}$
(۳) $\frac{3}{7}$
(۴) $\frac{2}{5}$

ریاضیات گسسته

ریاضیات گسسته

آشنایی با نظریه اعداد

گراف و مدل‌سازی

صفحه‌های ۱ تا ۴۲

۳۱- اگر x عدد صحیح فرد و y عدد صحیح زوج باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین عدد طبیعی که $(x+y)^2 - 1$ همواره بر آن بخش پذیر باشد، کدام است؟

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) ۱۶

۳۲- اگر a ، b و c عددهای صحیح باشند و $a | b+c$ و $a | bc$ ، آن‌گاه چه تعداد از گزاره‌های $a | b^n + c^n$ ، $a | b^n - c^n$ و $a | b^n$ درست هستند؟ (n عدد طبیعی زوج است.)

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) ۳

۳۳- اگر $5a + 9b$ بر $3a + 4b$ بخش پذیر باشد، آن‌گاه کدام یک از اعداد زیر همواره مضرب $3a + 4b$ است؟ ($a, b \in \mathbb{N}$)

- (۱) $15b$
(۲) $18b$
(۳) $21b$
(۴) $24b$

۳۴- در تقسیم a بر b ، باقی‌مانده برابر r و در تقسیم $a + 30$ بر $b + 2$ ، باقی‌مانده برابر $r + 4$ است. اگر q خارج قسمت هر دو تقسیم باشد، آن‌گاه q کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱۰
(۲) ۱۱
(۳) ۱۲
(۴) ۱۳

۳۵- هرگاه سال نو با روز شنبه آغاز شود، در این سال ۲۰ مهر چه روزی است؟

- (۱) یکشنبه
(۲) دوشنبه
(۳) شنبه
(۴) سه‌شنبه



۳۶- به چند طریق می توان ۱۳۵ لیتر بنزین را در ظرف های ۷ لیتری و ۵ لیتری گنجاند؟

۲ (۱) ۳ (۲)

۴ (۳) ۵ (۴)

۳۷- رابطه هم نهشتی به پیمانه m ، مجموعه اعداد صحیح را به ۱۳ کلاس هم ارزی افراز کرده است و عدد چهاررقمی $1a5a$ در کلاس هم ارزی

[۷] قرار دارد. a چند مقدار مختلف می تواند داشته باشد؟

۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴) صفر

۳۸- در یک گراف ساده از مرتبه ۸، دو رأس از درجه $\delta = 3$ وجود دارد. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۲۱ (۱) ۲۸ (۲)

۲۵ (۳) ۱۸ (۴)

۳۹- در یک گراف ۳-منتظم، اندازه گراف از ۵ برابر مرتبه آن ۲۱ واحد کم تر است. مجموع مرتبه و اندازه گراف کدام است؟

۲۱ (۱) ۱۸ (۲)

۱۵ (۳) ۱۲ (۴)

۴۰- در گراف K_n با مجموعه رئوس $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ، چند دور به طول ۴ وجود دارد، که شامل رأس a باشد و شامل رأس g

نباشد؟

۲۰ (۱) ۱۰ (۲)

۵۰ (۳) ۶۰ (۴)



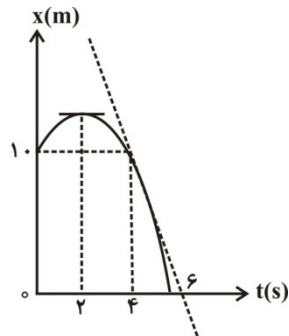
فیزیک

فیزیک

حرکت بر خط راست
دینامیک و حرکت دایره‌ای
نوسان و موج
صفحه‌های ۱ تا ۷۴

۴۱- نمودار مکان- زمان جسمی که روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق سهمی شکل زیر است. شتاب

متوسط جسم در دو ثانیه دوم حرکت، چند متر بر مجذور ثانیه است؟



(۱) $-2/5$

(۲) -2

(۳) -5

(۴) $-7/5$

۴۲- موتورسوار ساکنی توپی را با سرعت اولیه $15 \frac{m}{s}$ روی سطح زمین در مسیری مستقیم پرتاب می‌کند و هم‌زمان با آن، با موتور خود با

شتاب ثابت $2 \frac{m}{s^2}$ به دنبال توپ شروع به حرکت می‌کند. اگر سرعت توپ در هر ثانیه $1 \frac{m}{s}$ کم شود، موتورسوار پس از طی چند متر به

توپ می‌رسد؟

(۱) 100

(۲) 50

(۳) 25

(۴) 10

۴۳- در شرایط خلأ، جسمی از ارتفاع ۴۵ متری سطح زمین رها می‌شود. تندی برخورد جسم با زمین چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

(۱) 20

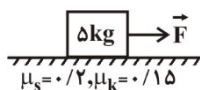
(۲) 15

(۳) 30

(۴) 25

۴۴- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $m = 5 \text{ kg}$ روی سطح افقی ساکن است و نیروی افقی و متغیر $F = 3t + 2$ نیوتون به آن وارد

می‌شود. اگر $\mu_s = 0/2$ و $\mu_k = 0/15$ باشد، در لحظه $t = 2 \text{ s}$ ، اندازه نیروی اصطکاک بین جسم و سطح افقی چند نیوتون است؟



Konkur.in

($g = 10 \frac{N}{kg}$)

(۱) 6

(۲) $7/5$

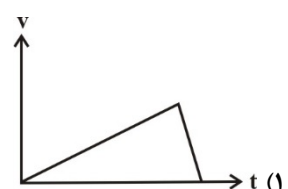
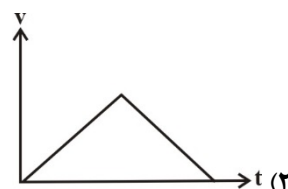
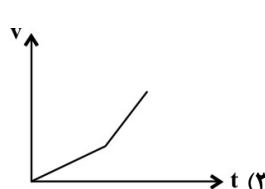
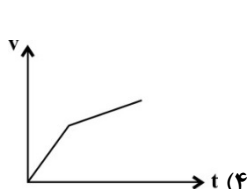
(۳) 8

(۴) 10

۴۵- جسمی به جرم m تحت تأثیر نیروی \vec{F} روی سطحی با ضریب اصطکاک μ_1 از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و پس از t' ثانیه

وارد سطح دیگری به ضریب اصطکاک μ_2 ($\mu_2 < \mu_1$) می‌شود. در صورتی که اندازه نیروی \vec{F} در دو حالت یکسان باشد، نمودار

سرعت- زمان حرکت جسم کدام گزینه است؟





۴۶- جسمی به جرم 1 kg با سرعت $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ در مسیری مستقیم حرکت می کند. اگر نیروی 4 N به مدت $2/5\text{ s}$ در خلاف جهت حرکت

جسم بر آن اثر کند، اندازه تکانه جسم در پایان این مدت به چند واحد SI می رسد؟

۱۰ (۱)

۲۰ (۲)

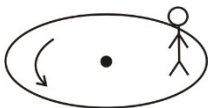
۳۰ (۳)

۴۰ (۴)

۴۷- مطابق شکل زیر، فردی به جرم m بر روی لبه صفحه افقی دواری ایستاده است، به طوری که فاصله اش تا مرکز صفحه برابر با 5 m

است. اگر ضریب اصطکاک ایستایی برابر با $0/5$ باشد، بیشینه تندی این صفحه چند متر بر ثانیه می تواند باشد تا شخص بر روی آن

نلغزد؟ $(g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}})$



۵ (۲)

$\frac{5\sqrt{2}}{2}$ (۱)

۱۰ (۴)

$5\sqrt{2}$ (۳)

۴۸- دامنه نوسان های یک نوسانگر هماهنگ ساده 3 cm و انرژی مکانیکی آن 9 J است. چند ژول انرژی باید به آن داده شود تا دامنه

نوسان های آن 1 cm افزایش یابد؟ (بسامد نوسان ها ثابت فرض شود.)

۹ (۴)

۷ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

۴۹- دو موج به ترتیب با بسامدهای 50 Hz و 75 Hz در یک محیط منتشر می شوند. طول موج برای موج دوم، چند برابر طول موج برای

موج اول است؟

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۵۰- سیمی همگن به طول یک متر و جرم 4 g بین دو نقطه ثابت بسته شده است. اگر نیروی کشش سیم برابر با 10 نیوتون باشد، سرعت

انتقال امواج عرضی در آن چند متر بر ثانیه است؟

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

۵۰ (۴)

۴۰ (۳)



۵۶- در کدام گزینه اطلاعات نادرستی در رابطه با نوعی فرآیند شیمیایی نوشته شده است؟

- (۱) اگر روی قوطی حلبی خراشی پدید آید، آهن است که خورده می‌شود.
- (۲) برای انجام فرآیندی که در سلول دانه رخ می‌دهد، ابتدا با مخلوط دو ماده، نقطه ذوب کلسیم کلرید را کاهش می‌دهیم.
- (۳) در آبکاری قاشق فولادی با نقره، قاشق را به قطب منفی باتری وصل می‌کنیم.
- (۴) طی فرآیند هال، جنس کاتد و آند هر دو از گرافیت است و در گرافیت آندی گاز CO_2 تولید می‌شود.

۵۷- کدام گزینه نادرست است؟

«در سلول برخلاف سلول»

- (۱) گالوانی - سوختی - قطب‌های مثبت و منفی به ترتیب آند و کاتد هستند.
- (۲) گالوانی - الکترولیتی - دو الکترولیت مختلف وجود دارد.
- (۳) دانه - سوختی هیدروژنی - ماده خروجی از بخش آندی یک گاز است.
- (۴) الکترولیتی - گالوانی - واکنش در خلاف جهت طبیعی رخ می‌دهد.

۵۸- کدام گزینه مطلب درستی را در رابطه با عدد اکسایش مطرح می‌کند؟

- (۱) کاهش عدد اکسایش ماده اکسنده در باتری دگمه‌ای روی - نقره برابر با افزایش عدد اکسایش کربن طی تولید Al خالص است.
- (۲) عدد اکسایش کربن‌های موجود در ساختار اتانویک اسید (CH_3COOH) برابر ۳- است.
- (۳) در هر واکنش اکسایش - کاهش، همواره تغییر عدد اکسایش مواد اکسنده و کاهشنده برابر است.
- (۴) عدد اکسایش گوگرد در ترکیبات گوناگون می‌تواند از ۲- تا ۶+ تغییر کند.

۵۹- فلز طلا نسبت به پلاتین به علت برای کار گذاشتن در بدن مناسب‌تر است.

- (۱) پتانسیل کاهش کمتر - است
- (۲) اکسندگی کمتر - نیست
- (۳) کاهشندگی کمتر - است
- (۴) تمایل کمتر برای از دست دادن الکترون - نیست

۶۰- علت برتری استفاده از برای تولید تانکر آب است.

- (۱) آهن سفید - کمتر بودن احتمال خراشیده شدن آن
- (۲) آهن سفید - پیروزی روی در رقابت کاتدی
- (۳) ورقه حلبی - کمتر بودن احتمال خراشیده شدن آن
- (۴) ورقه حلبی - پیروزی روی در رقابت کاتدی



دفترچه پاسخ

پاسخنامه دروس اختصاصی

آزمون غیر حضوری

دوازدهم ریاضی

(۳۰ آذر ۱۳۹۷)

(مباحث ۲۱ دی ۹۷)

سایت کنکور

گروه فنی و تولید:

محمد اکبری	مسئول تولید آزمون غیرحضوری
نرگس غنی‌زاده	مسئول دفترچه آزمون غیرحضوری
مدیر گروه: مریم صالحی مسئول دفترچه: آتیه اسفندیاری	گروه مستندسازی
حسن خرم‌جو	حروف‌نگار
سوران نعیمی	ناظر چاپ

گروه آزمون

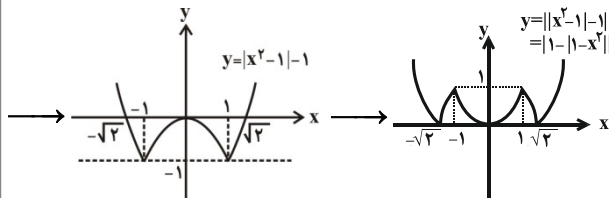
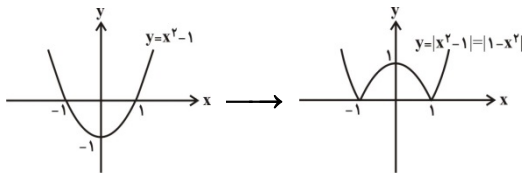
بنیاد علمی آموزشی قلم‌چی (وقف عام)

• دفتر مرکزی: خیابان انقلاب - بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۲۳ تلفن: ۶۴۶۳-۰۲۱



(گروهش شاه منصوریان)

۵- گزینه «۴»



با توجه به شکل‌های بالا، تابع در بازه $I = (-\infty, -\sqrt{2})$ اکیداً نزولی است، پس

در بازه $i = (-\sqrt{2}, -\frac{3}{4})$ که زیرمجموعه‌ای از بازه I می‌باشد نیز اکیداً نزولی

است.

(مدرسها شوکتی بیرق)

۶- گزینه «۲»

چون نمودار تابع $y = x + f(x)$ از نقاط $(1, 0)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{cases} y = x + f(x) \longrightarrow 1 + f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = -1 \\ y = x + f(x) \longrightarrow 2 + f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = -2 \end{cases} \quad (1)$$

فرض کنیم خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ به ترتیب

$Q(x)$ و $R(x) = ax + b$ باشد. لذا می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b$$

$$\xrightarrow{(1)} \begin{cases} f(1) = a + b = -1 \\ f(2) = 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow R(x) = -x$$

(گروهش شاه منصوریان)

۷- گزینه «۱»

اگر دوره تناوب تابع T باشد، داریم:

$$f(x + T) = \cos(\cos(\pi(x + T))) = \cos(\cos(\pi T + \pi x)) = \cos(\cos \pi x)$$

برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد لازم است که $\cos(\pi x + \pi T) = \pm \cos \pi x$

باشد. یعنی $\pi T = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) باشد که کوچک‌ترین مقدار مثبت T ، برابر ۱ است

یعنی $T = 1$.

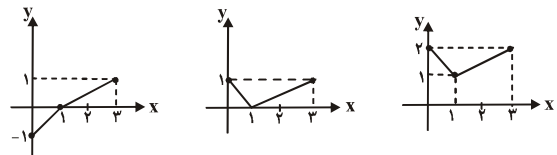
توجه: باید بررسی شود که $\frac{1}{4}$ ، دوره تناوب تابع نباشد؛ چون ۱ مضرب صحیح $\frac{1}{4}$ است.

$$f(x + \frac{1}{4}) = \cos(\cos(\frac{\pi}{4} + \pi x)) = \cos(-\sin \pi x) \neq f(x)$$

حسابان ۲

۱- گزینه «۲»

(سیر غلامرضا سعادتجو)



$$y = f(x-1)$$

$$y = |f(x-1)|$$

$$y = |f(x-1)| + 1$$

(مربع مالیر)

۲- گزینه «۱»

با توجه به شکل توابع f و g داریم:

$$\begin{cases} D_f = [-2, 3] \cup (3, +\infty) \\ R_f = [-1, 4] \end{cases}, \begin{cases} D_g = (-\infty, 1] \\ R_g = [1, 3] \end{cases}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = D_g - \{x \mid g(x) \notin D_f\}$$

با توجه به برد تابع g ، $g(x)$ عضو بازه $[1, 3]$ است. طبق دامنه f ، تنها

$g(x) = 3$ عضو دامنه f نیست و طبق شکل تابع g ، به ازای $x = \frac{1}{4}$

$g(x) = 3$ می‌باشد. پس:

$$D_{f \circ g} = D_g - \{\frac{1}{4}\} = (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, 1]$$

(آزار ریاضی - ۷۶)

۳- گزینه «۲»

سمت راست عبارت را بر حسب $x+1$ می‌نویسیم، بنابراین:

$$f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1 = (x+1)^3 - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 1$$

$$\Rightarrow f(\sqrt[3]{2}) = 2 - 1 = 1$$

(مدرس اشتواری)

۴- گزینه «۳»

گزینه‌های «۱» و «۲»: توابع داده‌شده نسبت به محور y متقارن است. پس

اکیداً یکنوا نیستند.

گزینه «۴»: اگر قسمتی از نمودار f زیر محور x ها باشد، توسط قدرمطلق به

بالا قرینه می‌شود و بنابراین تابع فوق نمی‌تواند لزوماً اکیداً یکنوا باشد.

گزینه «۳»: ترکیب دو تابع اکیداً یکنوا همواره اکیداً یکنوا است.



۸- گزینه «۲»

(ممبر مصطفی ابراهیمی)

$$\sin 2x = 2 \sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}))^2 = (\sin x - \cos x)^2$$

$$= 1 - \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 2x = 1 - \sin 2x \Rightarrow 2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$$

۱۲- گزینه «۴»

(غلامرضا علی)

$$\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۹- گزینه «۴»

(فریدون ساعتی)

فرض می‌کنیم $t = \frac{\pi x}{\delta}$ ، بنابراین $y = |\sin t|$ است. اگر نمودار این تابع را رسم

کنیم، مشخص است که رفتار تابع $y = |\sin t|$ در فواصلی به طول π تکرار

می‌شود. یعنی دوره تناوب $y = |\sin t|$ برابر با π است. بنابراین: $\frac{\pi T}{\delta} = \pi$ یعنی

$$T = \delta$$

پس دوره تناوب تابع برابر با δ است.

۱۳- گزینه «۳»

(غلامرضا علی)

$$\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1$$

$$= (-\sin x)(-\sin x) - 2 \sin x + 1 = \sin^2 x - 2 \sin x + 1$$

$$= (\sin x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \sin x = 1$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۱۰- گزینه «۲»

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۸۸)

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{-1}{5}$$

۱۴- گزینه «۱»

(عمیدرضا طالبیان)

در توابع جزء صحیح، رابطه $\lim_{t \rightarrow \infty} [t] = t$ برقرار است؛ بنابراین داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \left[\frac{1}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \times \frac{1}{1-x} = -1$$

۱۵- گزینه «۴»

(قاسم کتابچی)

تابع در $x=1$ تعریف نشده است. هم‌چنین تابع در نزدیکی این نقطه، مقداری محدود دارد. پس $x=1$ ریشه مشترک صورت و مخرج است.

$$\begin{cases} 2x + a = 0 \xrightarrow{x=1} 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2 \\ x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = -1 \end{cases}$$

چون $x = -2$ x مجانب قائم است، پس ریشه مخرج می‌باشد.

$$x^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{x=-2} 4 - 2b + c = 0 \Rightarrow 2b - c = 4$$

$$\begin{cases} b + c = -1 \\ 2b - c = 4 \end{cases} \Rightarrow c = -2, b = 1$$

$$\Rightarrow a + c = -2 - 2 = -4$$

۱۱- گزینه «۲»

(عباس امیروار)

مقدار ماکزیمم تابع به معادله $y = \sin bx$ (توجه کنید که $b \neq 0$) همواره

برابر یک است، پس با توجه به فرض مسئله، نقطه $(\frac{2\pi}{\delta}, 1)$ روی نمودار این تابع

قرار دارد.

$$y = \sin bx \Rightarrow 1 = \sin\left(\frac{2\pi}{\delta} b\right)$$

کوچک‌ترین زاویه مثبتی که سینوس آن برابر یک است، زاویه $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. در

نتیجه داریم:

$$\frac{2\pi}{\delta} b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\delta}{4}$$



(معرفی عالی نژادبان)

گزینه «۴» - ۱۹

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f\left(\frac{x}{x-1}\right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|\tan \pi x|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\tan \pi x}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\tan(\pi x - \pi)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\sin(\pi(x-1))}{(x-1)(x+1)\cos(\pi(x-1))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi \sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)\cos(\pi(x-1))} \\ &= \pi \times \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(هاری پلاور)

گزینه «۲» - ۲۰

اگر $n > 3$ باشد، الزاماً $m > 3$ و $m = n$ خواهد بود و داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{p x^n} &= 3 \xrightarrow{m=n} \frac{1}{p} = 3 \Rightarrow p = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow m + p - n &= (m - n) + p = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

اگر $n = 3$ باشد، باید دو حالت $m = 3$ و $m < 3$ را بررسی کنیم:

$$\begin{aligned} n = 3, m = 3 &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{(p+2)x^3} = 3 \Rightarrow \frac{2}{p+2} = 3 \\ \Rightarrow p + 2 &= \frac{2}{3} \Rightarrow p = -\frac{4}{3} \Rightarrow m + p - n = 3 - \frac{4}{3} - 3 = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$n = 3, m < 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(p+m)x^3} = 3 \Rightarrow \frac{1}{p+m} = 3$$

$$\Rightarrow p + m = \frac{1}{3} \Rightarrow m + p - n = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}$$

توجه کنید که حالت $n = 3$ و $m > 3$ امکان پذیر نیست.

(عنایت اله کشاورزی)

گزینه «۱» - ۱۶

وقتی $x \rightarrow +\infty$ می توان نوشت:

$$f(x) < -1 \Rightarrow -f(x) > 1 \Rightarrow 0 < -\frac{1}{f(x)} < 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{f(x)}\right] = 0$$

بنابراین حد تابع نیز در $+\infty$ برابر صفر است.

(ممدظاهر شعاعی)

گزینه «۱» - ۱۷

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+4x+1}} + x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2(x-1)^2}{|2x+1|} + x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2(x-1)^2}{-2x-1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4x + 2 - 2x^2 - x}{-2x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x + 2}{-2x-1} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

(ممدرضا شوکتی بیرق)

گزینه «۳» - ۱۸

با استفاده از اتحاد مزدوج می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+a-\sqrt{x^2+bx}) \times \frac{x+a+\sqrt{x^2+bx}}{x+a+\sqrt{x^2+bx}} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2+2ax+a^2-x^2-bx)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2a-b}{2}x + \frac{a^2}{2} \right) \end{aligned}$$

چون حاصل حد فوق برابر $\frac{1}{2}$ است، پس باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{2a-b}{2} = 0 \\ \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = \pm 3$$



هندسه ۳

۲۱- گزینه «۳»

(نوبت میبری)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - B)^2 = (A - B) \times (A - B) = \text{سطر اول } (A - B)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۲- گزینه «۱»

(ممدظاهر شعاعی)

$$\text{ماتریس } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ که درایه‌های آن اعداد طبیعی است، بنابه فرض در رابطه زیر}$$

صدق می‌کند:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+2b & a \\ c+2d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a & 2b \end{bmatrix}$$

اگر $c = 2b$ و $a = b + d$ باشد، تساوی اخیر همواره برقرار است پس

$$A = \begin{bmatrix} b+d & b \\ 2b & d \end{bmatrix} \text{ و جمع درایه‌های آن } 2b + 2d \text{ می‌شود که کم‌ترین}$$

مقدار آن به ازای $b = d = 1$ ، عدد ۶ می‌شود.

۲۳- گزینه «۴»

(علی اصغر فرضی)

$$B(A^{-1} + B^{-1})A = A + B$$

$$\Rightarrow |B(A^{-1} + B^{-1})A| = |B + A| = |A + B|$$

$$\Rightarrow |B| |A^{-1} + B^{-1}| |A| = |A + B|$$

$$\Rightarrow |AB| = \frac{|A + B|}{|A^{-1} + B^{-1}|}$$

حال اگر در رابطه فوق به جای ماتریس B ، ماتریس I را قرار دهیم، داریم:

$$|AI| = \frac{|A + I|}{|A^{-1} + I^{-1}|} \Rightarrow |A| = \frac{|A + I|}{|A^{-1} + I|} = \frac{a}{b}$$

۲۴- گزینه «۲»

(امیرمسین ابومحبوب)

شرط عدم وجود جواب برای معادله ماتریسی $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ آن

است که $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد. داریم:

$$\frac{m+1}{3} = \frac{1}{m-1} \Rightarrow m^2 - 1 = 3 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

اگر $m = 2$ باشد، آنگاه:

$$\frac{3}{3} = \frac{1}{1} = \frac{5}{5} \Rightarrow \text{معادله بی‌شمار جواب دارد.}$$

اگر $m = -2$ باشد، آنگاه:

$$\frac{-1}{3} = \frac{1}{-3} \neq \frac{-3}{1} \rightarrow \text{معادله جواب ندارد.}$$

یعنی معادله ماتریسی تنها به ازای $m = -2$ ، فاقد جواب است.

۲۵- گزینه «۳»

(علی ایمانی)

حاصل هر یک از دترمینان‌ها را از روش ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2x + 3 + 8) - (2 + 6x + 4) = -4x + 5$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (0 + 8 + 3) - (12 + 0 + 6) = -7$$

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x + 3 + 4) - (1 + 2x + 6) = -x$$

بنابراین داریم:

$$-4x + 5 + 7 - x = 2 \Rightarrow -5x = -10 \Rightarrow x = 2$$

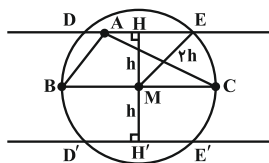
۲۶- گزینه «۴»

(ممدعلی نازپرور)

چون فاصله A تا ضلع BC ثابت و برابر h است، پس نقطه A روی دو خط موازی با BC و به فاصله h از BC است. از طرفی چون طول میانه AM از عدد $2h$ کوچک‌تر یا مساوی است، پس نقطه A باید داخل یا روی دایره‌ای به مرکز M (وسط BC) و به شعاع $2h$ باشد. با توجه به آن که شعاع دایره از فاصله دو خط موازی یعنی h بزرگتر است، پس مکان هندسی، دو پاره‌خط DE و $D'E'$ هستند. از طرفی مطابق شکل داریم:

$$\triangle MHE : EH^2 = 4h^2 - h^2 = 3h^2 \Rightarrow EH = h\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} DE = 2\sqrt{3}h \\ D'E' = 2\sqrt{3}h \end{cases}$$





(مسئله متمرکزگرمی)

۳۰- گزینه «۲»

$$c = \frac{12}{5} \Rightarrow |FF'| = 25 \Rightarrow c = 12/5$$

$$|MF| = \sqrt{(12)^2 + (16)^2} = 20$$

$$|MF'| = \sqrt{(12)^2 + (9)^2} = 15$$

$$|MF| + |MF'| = 2a \Rightarrow 2a = 20 + 15 = 35 \Rightarrow a = 17/5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12/5}{17/5} = \frac{12}{17}$$

ریاضیات گسسته

(میرغفور باقری)

۳۱- گزینه «۳»

با توجه به این که x عددی فرد و y عددی زوج است، آن‌ها را به ترتیببه صورت $2k+1$ و $2k'$ نشان می‌دهیم. $(k, k' \in \mathbb{Z})$

$$x + y = (2k+1) + (2k') = 2(k+k') + 1 = 2t + 1 \quad (t \in \mathbb{Z})$$

$$(x+y)^2 - 1 = (2t+1)^2 - 1$$

$$= 4t^2 + 4t = 4t(t+1) = 4q \quad (q \in \mathbb{Z})$$

توجه کنید که همواره حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است.

(علی ساوی)

۳۲- گزینه «۴»

$$a | b + c \xrightarrow{\times c} a | bc + c^2 \left. \begin{array}{l} \text{تفاضل} \\ a | bc \end{array} \right\} \rightarrow a | c^2$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $a | b^2$. چون n زوج است می‌توانیم آن را بهشکل $n = 2k$ فرض کنیم، اکنون نتیجه می‌گیریم:

$$a | c^2 \xrightarrow{\text{به توان } k} a | c^{2k} \Rightarrow a | c^n \Rightarrow \begin{cases} a | b^n + c^n \\ a | b^n - c^n \end{cases}$$

بنابراین هر سه گزاره $a | b^n$ ، $a | b^n + c^n$ و $a | b^n - c^n$ درست هستند.

(غرزاد بویاری)

۳۳- گزینه «۳»

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 4b | 5a + 9b \Rightarrow 3a + 4b | 15a + 27b \\ 3a + 4b | 3a + 4b \Rightarrow 3a + 4b | 15a + 20b \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + 4b | 7b$$

$$\Rightarrow 3a + 4b | 21b$$

(رضا عباسی اصل)

۲۷- گزینه «۱»

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 4y + m = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8 - m$$

$$\Rightarrow O(2, -2), R = \sqrt{8 - m}$$

$$C': x^2 + y^2 - 4x + 8y + 19 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = 1$$

$$\Rightarrow O'(2, -4), R' = 1$$

$$OO' = |R - R'| \Rightarrow \text{دو دایره مماس درون‌اند}$$

$$\sqrt{(2-2)^2 + (-2+4)^2} = |\sqrt{8-m} - 1| \Rightarrow |\sqrt{8-m} - 1| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{8-m} - 1 = 2 \Rightarrow 8-m = 9 \Rightarrow m = -1 \\ \sqrt{8-m} - 1 = -2 \Rightarrow \sqrt{8-m} = -1 \end{cases}$$

(مهمرابراهیم کیتی زاده)

۲۸- گزینه «۲»

$$C: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 17 \xrightarrow{x=2} (y+3)^2 = 16$$

$$\xrightarrow{y>0} y = 1 \Rightarrow A = (2, 1)$$

از طرفی مرکز دایره، نقطه $O = (1, -3)$ است.

$$OA \text{ شیب} = m = \frac{1+3}{2-1} = 4 \Rightarrow D \text{ شیب} = -\frac{1}{4}$$

$$D: (y-1) = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow D: x + 4y - 6 = 0$$

(رضا عباسی اصل)

۲۹- گزینه «۳»

چون دایره بر دو خط $x = 7$ و $x = -3$ مماس است، پس مرکز دایره دقیقاًدر وسط این دو خط، یعنی روی خط $x = 2$ قرار دارد.

$$2y + 3x + 1 = 0 \xrightarrow{x=2} 2y + 6 + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -7 \Rightarrow y = -\frac{7}{2}$$

می‌دانیم هر خط قائم بر دایره از مرکز دایره یعنی نقطه $O = (2, -\frac{7}{2})$

می‌گذرد، پس داریم:

$$2 + 2(-\frac{7}{2}) + b = 0 \Rightarrow b = 5$$



۳۴- گزینه «۴»

(علی ایمانی)

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$a = bq + r$$

$$a + 30 = (b + 2)q + r + 4$$

$$\Rightarrow bq + r + 30 = bq + 2q + r + 4 \Rightarrow 2q = 26 \Rightarrow q = 13$$

۳۵- گزینه «۲»

(همایون شریک)

ابتدا تعداد روزها از اول سال تا ۲۰ مهر را تعیین می‌کنیم:

$$(6 \times 31) + 20 = 206$$

حال کافی است باقی‌مانده تقسیم عدد ۲۰۶ را بر ۷ (تعداد روزهای هفته)

بیابیم:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 206 \div 7 = 29 \end{array}$$

بنابراین دوشنبه (سومین روز با آغاز از شنبه) خواهد بود.

۳۶- گزینه «۳»

(علی سعیدی زار)

باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله سیاله خطی $7x + 5y = 135$ رابه دست آوریم. با توجه به اینکه $(x, y) = (0, 27)$ یک جواب معادله است

نتیجه می‌گیریم که کلیه جواب‌ها به صورت زیر هستند.

$$\begin{cases} x = 0 + 5k \geq 0 \Rightarrow k \geq 0 \\ y = 27 - 7k \geq 0 \Rightarrow k < 4 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq k \leq 3 \Rightarrow \text{۴ جواب دارد.}$$

۳۷- گزینه «۱»

(کاظم باقرزاده)

$$\begin{array}{r} 13 \\ 1a5a \equiv 7 \Rightarrow 1000 + 100a + 50 + a \equiv 7 \end{array}$$

$$\Rightarrow 12 + 9a - 2 + a \equiv 7 \Rightarrow 10a \equiv -3 \equiv 10 \Rightarrow a \equiv 1$$

$$\Rightarrow a = 13k + 1$$

چون a یک رقم است، پس مقدار آن باید بین صفر و ۹ باشد، بنابراین تنهامقدار $a = 1$ قابل قبول است.

(علی ساویبی)

۳۸- گزینه «۱»

ابتدا با ۶ رأس، گراف کامل K_6 را می‌سازیم. سپس دو رأس دیگر را هر

کدام با ۳ یا ۶ به رأس قبلی وصل می‌کنیم. بنابراین حداکثر تعداد یال‌ها

برابر می‌شود با:

$$q(K_6) + 3 + 3 = \frac{6 \times 5}{2} + 6 = 21$$

(نوید میبیری)

۳۹- گزینه «۳»

طبق داده‌های سؤال می‌توانیم بنویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} 3p = 2q \Rightarrow q = \frac{3}{2}p \\ q = 5p - 21 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2}p = 5p - 21$$

$$\Rightarrow 3p = 10p - 42 \Rightarrow p = 6$$

$$q = 9 \Rightarrow p + q = 15$$

(سیدعادل رضا مرتضوی)

۴۰- گزینه «۴»

همان‌طور که می‌دانیم تعداد دورهای به طول m در گراف کامل K_p برابر

است با:

$$\binom{p}{m} \frac{(m-1)!}{2}$$

رأس a حتماً یکی از ۴ رأس موجود در دور به طول ۴ است و رأس g قطعاً

در میان این رأس‌ها نیست. پس باید از ۶ رأس دیگر، ۳ رأس را انتخاب

کنیم.

تعداد دورها با ویژگی مورد نظر برابر است با:

$$\binom{6}{3} \times \frac{(4-1)!}{2} = 20 \times 3 = 60$$



فیزیک

۴۱- گزینه «۱»

(نمراله افاضل)

چون نمودار مکان- زمان حرکت جسم روی خط راست به صورت سهمی است، بنابراین جسم با شتاب ثابت در حال حرکت است. پس شتاب لحظه‌ای با شتاب متوسط در هر بازه زمانی برابر است.

از طرفی می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در هر لحظه، سرعت جسم در آن لحظه را نشان می‌دهد، بنابراین شیب خط مماس بر نمودار در

لحظه $t = ۴s$ که برابر با سرعت در لحظه $t = ۴s$ است، با توجه به نمودار برابر

است با:

$$v_4 = \frac{0 - 10}{6 - 4} \Rightarrow v_4 = -5 \frac{m}{s}$$

هم چنین خط مماس بر نمودار در لحظه $t = ۲s$ افقی است، بنابراین سرعت در

این لحظه برابر با صفر است ($v_2 = 0$). در نتیجه شتاب متوسط جسم در دو

ثانیه دوم حرکت (بازه زمانی $t_1 = ۲s$ تا $t_2 = ۴s$) برابر است با:

$$a_{av} = a = \frac{v_4 - v_2}{t_4 - t_2} = \frac{-5 - 0}{4 - 2} \Rightarrow a_{av} = -2.5 \frac{m}{s^2}$$

۴۲- گزینه «۴»

(نمراله افاضل)

معادله حرکت توپ و موتورسوار را نسبت به محل پرتاب توپ نوشته و برابر با هم قرار می‌دهیم تا زمان رسیدن موتورسوار به توپ را به دست آوریم و در نهایت مسافت طی شده توسط موتورسوار را محاسبه می‌کنیم.

دقت کنید چون سرعت توپ در هر ثانیه $1 \frac{m}{s}$ کم می‌شود، بنابراین شتاب

حرکت آن برابر با $\frac{m}{s^2} (-1)$ است. داریم:

$$\text{توپ: } x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(-1)t^2 + 15t + 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}t^2 + 15t$$

$$\text{موتورسوار: } x' = \frac{1}{2}a't^2 + v_0't + x_0' \Rightarrow x' = \frac{1}{2}(2)t^2 + 0 + 0$$

$$\Rightarrow x' = t^2$$

$$x = x' \Rightarrow -\frac{1}{2}t^2 + 15t = t^2 \Rightarrow \frac{3}{2}t^2 = 15t \Rightarrow t = 0, t = 10s$$

$$x' = t^2 \xrightarrow{t=10s} x' = 100m$$

(عمیر زربین کفش)

۴۳- گزینه «۳»

جهت بالا را مثبت و محل پرتاب جسم را مبدأ مکان در نظر گرفته و از معادله سرعت - جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت استفاده می‌کنیم.

$$v^2 = -2g\Delta y \xrightarrow{\Delta y = -4\delta m} v^2 - 0 = -2 \times 10 \times (-4\delta)$$

$$\Rightarrow |v| = 30 \frac{m}{s}$$

(سیرعلی میرنوری)

۴۴- گزینه «۲»

چون جسم ابتدا ساکن است باید اندازه نیروی \vec{F} بیش‌تر از بیشینه اندازه نیروی اصطکاک ایستایی شود تا جسم حرکت کند و تا قبل از آن، چون جسم ساکن است، اصطکاک از نوع ایستایی است و اندازه آن برابر با اندازه نیروی \vec{F} وارد بر جسم است. بنابراین ابتدا باید بیشینه اندازه نیروی اصطکاک ایستایی و اندازه نیروی \vec{F} در لحظه $t = ۲s$ را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنیم. داریم:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s mg \Rightarrow f_{s,max} = 0.2 \times 5 \times 10 = 10N$$

$$F = 3t + 2 \xrightarrow{t=2s} F = 3 \times 2 + 2 \Rightarrow F = 8N$$

چون $F < f_{s,max}$ است، بنابراین جسم ساکن می‌ماند و اندازه نیروی اصطکاک

ایستایی وارد بر آن برابر است با:

$$f_s = F = 8N$$



$$\Rightarrow v = \sqrt{0.5 \times 5 \times 10} \Rightarrow v = 5 \frac{m}{s}$$

(فسر و ارغوانی فر)

۴۸- گزینه «۳»

انرژی مکانیکی یک نوسانگر هماهنگ ساده با مجذور دامنه آن متناسب است، بنابراین داریم:

$$E = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2$$

$$\frac{A_1 = 3 \text{ cm}, E_1 = 9 \text{ J}}{A_2 = A_1 + 1 = 4 \text{ cm}} \rightarrow \frac{E_2}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Rightarrow E_2 = 16 \text{ J}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 16 - 9 \Rightarrow \Delta E = 7 \text{ J}$$

(بابک اسلامی)

۴۹- گزینه «۴»

همان طور که می‌دانیم، سرعت انتشار موج در یک محیط فقط به ویژگی‌های فیزیکی محیط انتشار بستگی دارد و چون این دو موج در یک محیط منتشر می‌شوند، بنابراین سرعت انتشار موج برای آن‌ها یکسان است. با استفاده از رابطه بین سرعت انتشار موج با طول موج و بسامد موج، داریم:

$$\lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{50}{75} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{2}{3}$$

(سراسری خارج از کشور ریاضی - ۹۰)

۵۰- گزینه «۴»

با استفاده از رابطه سرعت انتشار امواج عرضی در سیم، داریم:

$$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} \quad \frac{F=10 \text{ N}, L=1 \text{ m}}{m=4 \times 10^{-3} \text{ kg}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{10 \times 1}{4 \times 10^{-3}}} \Rightarrow v = 50 \frac{m}{s}$$

(اصغر اسرالی)

۴۵- گزینه «۳»

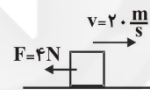
اگر جسم ابتدا در اثر نیروی \vec{F} در سطح (۱) با شتاب a حرکت کند، با کم شدن ضریب اصطکاک در سطح (۲)، اندازه نیروی اصطکاک کم و در نتیجه a زیاد می‌شود. یعنی شیب نمودار سرعت- زمان در مرحله دوم، بیش‌تر از حالت اول است. فقط دقت کنید چون شتاب مثبت است، پس سرعت مرتباً افزایش می‌یابد.

(معصومه علیزاده)

۴۶- گزینه «۱»

ابتدا شتاب حرکت جسم را حساب می‌کنیم.

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow -4 = 1 \times a \Rightarrow a = -4 \frac{m}{s^2}$$



اکنون سرعت جسم را حساب می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = -4 \times 2 / 5 + 20 \Rightarrow v = 10 \frac{m}{s}$$

و در نهایت اندازه تکانه جسم را پس از گذشت $2/5$ به دست می‌آوریم:

$$p = mv \Rightarrow p = 1 \times 10 \Rightarrow p = 10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

(نیما نوروزی)

۴۷- گزینه «۲»

برای این‌که شخص بر روی صفحه دوار نلغزد، باید همراه با آن دوران کند. نیروی مرکزگری لازم برای حرکت دورانی شخص توسط نیروی اصطکاک ایستایی تأمین می‌شود. بنابراین برای حداکثر تندی دوران صفحه، داریم:

$$f_{s, \text{max}} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \mu_s mg = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\mu_s rg}$$



اسید $10^{-6} \times 25 = 1/25$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: چون α بسیار کوچک است از آن صرف نظر می‌کنیم:

$$K = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{[H^+]^2}{[HA]} = \frac{(M\alpha)^2}{M(1-\alpha)}$$

$$K = M\alpha^2 \Rightarrow K = 2 \times 9 \times 10^{-8} = 18 \times 10^{-8}$$

گزینه «۲»:

$$K = \frac{([H^+]^2)}{M(1-\alpha)} = \frac{x^2}{9} = 10^{-6}$$

$$\Rightarrow x = 3 \times 10^{-3} \Rightarrow pH = -\log[H^+] \Rightarrow pH = 2/5$$

گزینه «۴»: بدون داشتن ثابت یونش یا غلظت اولیه اسید امکان پذیر نیست.

(شهرزاد مسین زاده)

گزینه «۴» - ۵۴

زخم معده در اثر ترشح یا جذب بیش از حد اسید معده ایجاد می‌شود. برای

بهبود آن باید از یک باز استفاده کرد. آسپرین برخلاف $Mg(OH)_2$ خاصیت

اسیدی دارد.

گل ادریسی در خاک اسیدی آبی و در خاک قلیایی سرخ می‌شود.

(شهرزاد مسین زاده)

گزینه «۴» - ۵۵

واکنش‌های نوشته شده در گزینه‌های «۱» و «۳» در حالت طبیعی در این جهت

انجام نمی‌شوند (با توجه به سری الکتروشیمیایی). و در ارتباط با مقایسه

واکنش‌های ۲ و ۴. با توجه به سری الکتروشیمیایی چون اختلاف E_{Mn}° با

E_H° از اختلاف E_{Fe}° با آن بیشتر است، از emf و انرژی آزاد شده بالاتر

خواهد بود.

شیمی

گزینه «۲» - ۵۱

(شهرزاد مسین زاده)

موارد دوم و سوم نادرست‌اند:

مورد اول: مایونز و کف هر دو کلوییدند.

مورد دوم: SO_3^{2-} در ساختار پاک‌کننده‌های غیرصابونی شرکت دارد نه

SO_4^{2-} .

مورد سوم: برای پاک کردن اسیدهای چرب لازم است که از باز استفاده کنیم.

مورد چهارم: با توجه به متن کتاب درسی درست است.

(شهرزاد مسین زاده)

گزینه «۱» - ۵۲

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow pH_{HX} = pH_{HY} \Rightarrow [H^+]_{\text{محلول HX}} = [H^+]_{\text{محلول HY}}$$

$$[H^+] = M\alpha \Rightarrow M_X\alpha_X = M_Y\alpha_Y$$

$$42g HX \times \frac{1 \text{ mol HX}}{28g HX} \times \frac{1}{250 \times 10^{-3} L} \times \alpha_X$$

$$= 28g HY \times \frac{1 \text{ mol HY}}{42g HY} \times \frac{1}{500 \times 10^{-3} L} \times \alpha_Y \Rightarrow \frac{\alpha_X}{\alpha_Y} = \frac{2}{9}$$

(شهرزاد مسین زاده)

گزینه «۳» - ۵۳

$$pH = 6 \Rightarrow [H^+] = 10^{-6} \frac{\text{mol}}{L}$$

$$0/2 = \frac{[H^+]}{\text{غلظت کل اسید وارد شده}} = \frac{10^{-6}}{x}$$

$$x = 5 \times 10^{-6} \frac{\text{mol}}{L}$$

$$\text{اسید } 5 \times 10^{-6} \text{ mol} \times \frac{1 \text{ L محلول}}{1000 \text{ ml محلول}} \times 250 \text{ ml محلول} = \text{اسید } ? \text{ mol}$$



۵۶- گزینه «۲»

(شهرزاد حسین زاده)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: واکنش در باتری دکمه‌ای واکنش

با اضافه کردن CaCl_2 به NaCl نقطه ذوب NaCl را کاهش می‌دهیم. $\text{Zn} + \text{Ag}_2\text{O} \rightarrow \text{ZnO} + 2\text{Ag}$ رخ می‌دهد و در تولید Al واکنش

۵۷- گزینه «۳»

(شهرزاد حسین زاده)

 $2\text{Al}_2\text{O}_3 + 3\text{C} \rightarrow 4\text{Al} + 3\text{CO}_2$ رخ می‌دهد. کربن از صفر به +۴ و

تمام مواد خروجی و ورودی در سلول سوختی هیدروژن گاز هستند. در سلول

 Ag از +۱ به صفر رسیده است.دانه از آند گاز Cl_2 خارج می‌شود.

گزینه «۲»: عدد اکسایش یک کربن -۳ و دیگری +۳ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۳»: به طور مثال در واکنش مذکور در باتری دکمه‌ای روی - نقره، عدد

گزینه «۱»: در سلول گالوانی قطب‌های مثبت و منفی به ترتیب کاتد و آند

اکسایش Ag یک واحد و Zn دو واحد تغییر می‌کند.

هستند.

در سلول گالوانی قطب‌های مثبت و منفی به ترتیب آند و کاتد هستند.

(شهرزاد حسین زاده)

۵۹- گزینه «۳»

طلا نسبت به پلاتین پتانسیل کاهشی بیشتر، اکسندگی بیشتر، کاهندگی کمتر و

گزینه «۲»: در سلول گالوانی توسط تیغه متخلخل دو الکترولیت جدامی شود اما

تمایل کمتری برای از دست دادن الکترون دارد. لذا برای قرار دادن درون بدن

در سلول الکترولیتی تنها یک الکترولیت وجود دارد.

از پلاتین بهتر است.

گزینه «۴»: در سلول الکترولیتی واکنش در خلاف جهت طبیعی رخ می‌دهد.

۵۸- گزینه «۴»

(شهرزاد حسین زاده)

(شهرزاد حسین زاده)

۶۰- گزینه «۲»

چون Zn در رقابت کاتی بر Fe پیروز می‌شود، از آن برای ساخت تانکرگوگرد در Na_2S عدد اکسایش -۲ دارد. در SO_3 عدد اکسایش +۶

آب استفاده می‌کنند.

دارد.