

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	نام و نام خانوادگی :	تعداد صفحه : ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
رشته: ریاضی فیزیک	دوره ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۰۳/۰۵	ساعت شروع: ۸ صبح
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

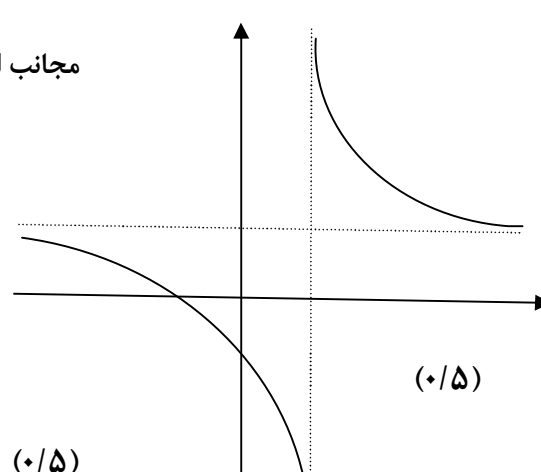
توجه: استفاده از ماشین حساب ساده ( دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد ) بلامانع است.

۱	اگر اجتماع دو بازه $(-۱, ۶)$ و $(-۲, ۲)$ یک همسایگی متقارن باشد، مرکز و شعاع همسایگی را بیابید.	۱
۲/۵	گزینه مناسب را انتخاب کنید و پاسخ خود را به پاسخنامه انتقال دهید: الف) اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله های واگرایی باشند، دنباله $\{a_n b_n\}$ واگراست. (درست - نادرست) ب) دنباله $\left\{\frac{\cos n}{n}\right\}$ یک دنباله ..... می باشد. (همگرا - واگرا) ج) حد دنباله $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ برابر است با ..... $(e^{\frac{1}{2}} - e^2)$ د) هر دنباله یکنوای کراندار، همگراست. (درست - نادرست) ه) نقطه به طول $x = 0$ یک نقطه ..... برای تابع $f(x) =  x $ است. (گوشه - بازگشتی)	۲
۱	به کمک دنباله ها نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 1 \\ x^2+2 & x \geq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ حد ندارد.	۳
۱/۲۵	پیوستگی تابع $f(x) = [x] + x$ را در $x = 0$ بررسی کنید.	۴
۰/۷۵	$a$ و $b$ را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3 + x^2 + 1}{6x^b - x} = -\frac{2}{3}$	۵
۱	فرض کنید درآمد حاصل از تولید $x$ واحد از محصولی به صورت $R(x) = 0.1x^2 - 3x$ باشد، درآمد نهایی را در سطح تولید ۱۰۰۰ واحد حساب کنید.	۶
۱/۵	مقدار $a$ را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x < 1 \\ a\sqrt{x} + bx^2 & x \geq 1 \end{cases}$ در $x = 1$ مشتق پذیر باشد.	۷
۱	اگر $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$ ، آنگاه $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ را بیابید.	۸
۱	فرض کنید $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 2$ ، مشتق تابع وارون در $x = 2$ یعنی $(f^{-1})'(2)$ را در صورت وجود بیابید.	۹
۱	مشتق تابع مقابل را بیابید: $y = \sqrt{x} \ln(x^2 + 1)$	۱۰
۱/۲۵	به کمک آزمون مشتق دوم، اکسترم های موضعی تابع $f(x) = x^4 - 2x^3$ را بیابید.	۱۱
۱/۲۵	نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^2 e^{-x}$ را بیابید.	۱۲
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{x+2}{x-1}$ را رسم کنید.	۱۳
۱/۵	مجموع بالا و پایین ریمان را برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بر بازه $[1, 2]$ با افراز منظم ۴ نقطه ای بیابید.	۱۴
۱	مشتق تابع $F(x) = x \cdot \int_1^x e^{-t} dt$ را بیابید.	۱۵
۱	انتگرال معین مقابل را محاسبه کنید: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$	۱۶
۲۰	جمع نمره	موفق باشید

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۰۳/۵
دوره ی پیش دانشگاهی	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	$(-1, 6) \cup (-2, 2) = (-2, 6)$ (۰/۵) $r = 4$ (۰/۲۵) $a = 2$ (۰/۲۵)	۱
۲/۵	الف) نادرست ب) همگرا ج) $e^{\frac{1}{2}}$ د) درست ه) گوشه (هر قسمت ۰/۵ نمره)	۲
۱	$a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad b_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + 2 \right) = 3 & (۰/۲۵) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1 \right) = 1 & (۰/۲۵) \end{cases}$ <p>پس در <math>x = 1</math> حد ندارد. (۰/۵)</p>	۳
۱/۲۵	<p>شرط پیوستگی : <math>\lim_{x \rightarrow \bullet^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bullet^+} f(x) = f(\bullet)</math></p> $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \bullet^+} ([x] + x) = [\bullet^+] + \bullet = \bullet & (۰/۲۵) \\ \lim_{x \rightarrow \bullet^-} ([x] + x) = [\bullet^-] + \bullet = -1 & (۰/۲۵) \rightarrow f(\bullet) = \lim_{x \rightarrow \bullet^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \bullet^-} f(x) & (۰/۲۵) \\ f(\bullet) = \bullet & (۰/۲۵) \end{cases}$ <p>در نتیجه تابع در <math>x = \bullet</math> پیوسته نیست و فقط پیوستگی راست دارد. (۰/۲۵)</p>	۴
۰/۷۵	<p>چون حاصل در بینهایت کسر یک عدد غیر صفر شده پس صورت و مخرج هم درجه اند، یعنی <math>b = 3</math> (۰/۲۵)</p> <p>در اینصورت حاصل حد برابر است با <math>\frac{a}{6}</math> در نتیجه: <math>\frac{a}{6} = -\frac{2}{3} \rightarrow a = -4</math> (۰/۵)</p>	۵
۱	$R'(x) = 0/2x - 3 \rightarrow R'(1000) = 0/2(1000) - 3 = 197$ (۰/۵)	۶
۱/۵	<p>بررسی پیوستگی:</p> $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (a\sqrt{x} + bx^2) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2) = -1 \rightarrow a + b = -1 & (۰/۵) \\ f(1) = a + b \end{cases}$ <p>بررسی مشتق پذیری:</p> $f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ \frac{a}{2\sqrt{x}} + 2bx & x \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'_-(1) = 2 \\ f'_+(1) = \frac{a}{2} + 2b \end{cases} \rightarrow \frac{a}{2} + 2b = 2 \rightarrow a + 4b = 4 \quad (۰/۵)$ $\begin{cases} a + b = -1 \\ a + 4b = 4 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{8}{3}, \quad b = \frac{5}{3} \quad (۰/۵)$	۷
۱	$f'(x) = \frac{\cos x (1 - \sin x) + \cos x (\sin x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{3} \quad (۰/۵)$	۸
ادامه در برگه دوم		

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۰۳/۵
دوره ی پیش دانشگاهی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸	مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۹	$2 = 2x^2 + 3x^2 + 6x + 2 \rightarrow x(2x^2 + 3x + 6) = 0 \rightarrow x = 0 \quad (0/25)$ $(2, 0) \in f^{-1} \rightarrow (0, 2) \in f \quad (0/25)$ $f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 \rightarrow f'(0) = 6 \quad (0/25)$ $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6} \quad (0/25)$													
۱۰	$y' = \frac{\overbrace{\ln(x^2+1)}^{(0/25)}}{\underbrace{2\sqrt{x}}_{(0/25)}} + \frac{\overbrace{2x\sqrt{x}}^{(0/25)}}{\underbrace{x^2+1}_{(0/25)}}$													
۱۱	<p>ابتدا نقاط بحرانی تابع را یافته سپس علامت مشتق دوم را در این نقاط بررسی می کنیم.</p> $f'(x) = 4x^2 - 6x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (0/25)$ $f''(x) = 12x^2 - 12x \rightarrow \begin{cases} f''(0) = 0 \\ f''(\frac{3}{2}) = 9 > 0 \end{cases} \quad (0/5)$ <p>در <math>x = \frac{3}{2}</math> علامت مشتق دوم مثبت است پس تابع در این نقطه دارای مینیمم نسبی است. <math>(0/25)</math></p> <p>در <math>x = 0</math> مشتق دوم صفر است لذا مشتق دوم نتیجه ای نمیدهد. <math>(0/25)</math></p>													
۱۲	$f'(x) = \frac{2xe^{-x}}{(0/25)} - \frac{x^2e^{-x}}{(0/25)} = x(2-x)e^{-x} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \quad (0/5)$													
۱۳	<p><math>D = \mathbb{R} - \{1\}</math></p> <p>مجانب افقی <math>y = 1</math> <math>(0/25)</math> <math>x = 1</math> <math>(0/25)</math> :مجانب قائم</p> $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \quad (0/5)$ <p>نقاط کمکی: <math>A(0, -2), B(2, 4)</math></p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>1</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>-</td> <td>  </td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>1</td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> </table>  <p style="text-align: right;"><math>(0/5)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>(0/5)</math></p>	x	$-\infty$	1	$+\infty$	y'	-		-	y	1	$-\infty$	$+\infty$	
x	$-\infty$	1	$+\infty$											
y'	-		-											
y	1	$-\infty$	$+\infty$											
ادامه در برگه سوم														

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۰۳/۵
دوره ی پیش دانشگاهی		مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خرداد ماه سال ۱۳۹۸		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱۴	نقاط افراز عبارتنداز: $\left\{1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right\}$ و تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه $[1, 2]$ نزولی اکید است (۰/۵)، بنابراین داریم: $L_3(f) = \frac{1}{3} \left( f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f(2) \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \right) = \frac{37}{60} = 0/62 \quad (0/5)$ $U_3(f) = \frac{1}{3} \left( f(1) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) \right) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \right) = \frac{47}{60} = 0/78 \quad (0/5)$
۱۵	$F'(x) = \underbrace{\int_2^x e^{-t} dt}_{(0/5)} + \underbrace{x e^{-x}}_{(0/5)}$
۱۶	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \underbrace{-\frac{1}{2} \cos 2x}_{(0/5)} \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{-\frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right)}_{(0/25)} = \underbrace{-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}}_{(0/25)}$
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر