بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه ی حد و مسائل مربوط به آن

مدرس: لیلا علیپور

حد ومفاهیم آن: برای بررسی هرمفهوم جدیدی به یک سری تعاریفی که پیش نیازمبحث می باشند نیازمندیم. در تعریف این مفهوم تعاریف مورد نیاز عبارتند از:

تعریف همسایگی: یک همسایگی باز x_0 (x_0هرعدد حقیقی می تواند باشد.)عبارت است ازبازه بازی مثل (a,b) بطوریکه $x_0 \in (a,b)$.(از دید هندسی همسایگی عبارت است از تمام اعداد و ارقام نزدیک به عدد موردنظر)

تعریف همسایگی متقارن: بازه بازی چون $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ در نظرمی گیریم وبه آن ε همسایگی برای x_0 می نامیم و با نماد $\mathrm{N}(x_0,\varepsilon)$ نشان می دهیم، لذا داریم:

$$\mathrm{N}(x_0,\varepsilon)=\{x| \quad |x-x_0|<\varepsilon\}$$

برای مثال فاصله $|x-2|<1$، یک همسایگی به مرکز 2 به شعاع 1 است.

تعریف همسایگی محذوف: همسایگی محذوف به مرکز x_0 به شعاع ε را با نماد$\mathrm{N}'(x_0,\varepsilon)$ نشان می دهیم وداریم:

$$\mathrm{N}'(x_0,\varepsilon)=\{x| \quad 0<|x-x_0|<\varepsilon\}$$

مثلا فاصله ی $0<|x-4|<1$همسایگی باز به مرکز 4 و شعاع 1، بدون داشتن خود 4 می باشد.

مفهوم نماد $x \to a$: نماد $x \to a$ ، یعنی مقادیر x هایمان دریک همسایگی متقارن محذوف به مرکز a و به شعاع ε واقع اند. پس زمانی که ازاین نماد استفاده می کنیم؛ منظورمان(مفهوم نماد$x \to a$)خود نقطه ی a نیست بلکه یک همسایگی متقارن محذوف a را در نظر داریم.

مفهوم هایی از رفتار حدی متغیر در همسایگی های مختلف:

1) $x \to x_0 \quad \equiv \quad 0<|x-x_0|<\varepsilon$

2) $x \to {x_0}^+ \quad \equiv \quad 0<x-x_0<\varepsilon$

3) $x \to {x_0}^- \quad \equiv \quad -\varepsilon<x-x_0<0$

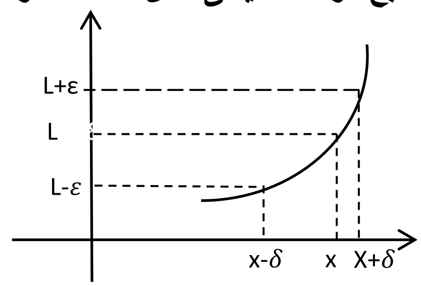
4) $x \to +\infty \quad \equiv \quad \exists \mu>0; \quad x>\mathrm{M}$

5) $x \to -\infty \quad \equiv \quad \exists \mu>0; \quad x<-\mathrm{M}$

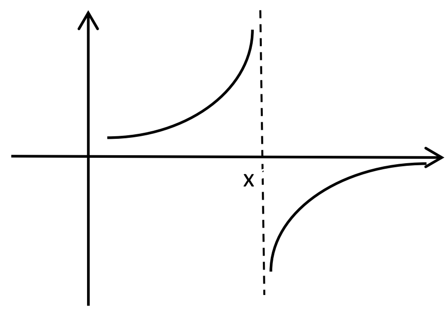
$6) x \to \infty \quad \equiv \quad \exists \mu > 0; \quad |x| < -M$

رفتار تابع در همسایگی های مختلف از لحاظ هندسی:

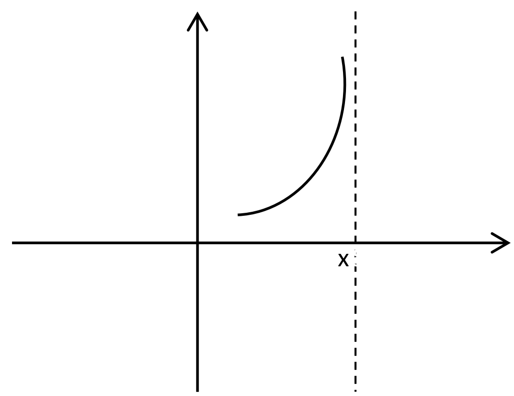
$1) f(x) \to L \;\equiv\; \forall \varepsilon > 0 \;\; |f(x) - L| < \varepsilon$



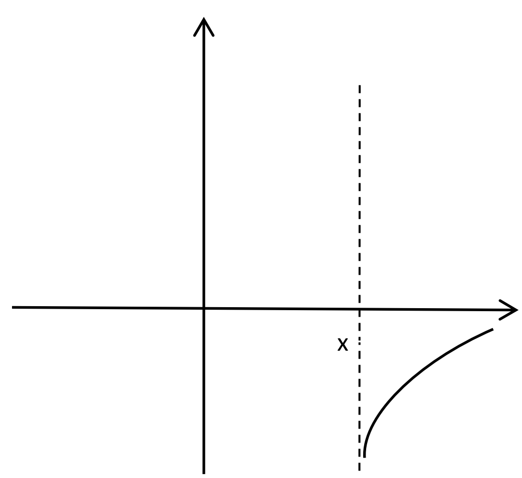
$2) f(x) \to \infty \;\equiv\; \forall N > 0 \;\; |f(x)| > N$



$3) f(x) \to +\infty \;\equiv\; \forall N > 0 \;\; f(x) > N$



$4) f(x) \to -\infty \;\equiv\; \forall N > 0 \;\; f(x) < -N$



مفهوم های حدی:

1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \equiv \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta; \quad \forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$

2) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \equiv \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\mu > 0; \quad \forall x > \mu \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

3) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L \equiv \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\mu > 0; \quad \forall x < -\mu \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

4) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \equiv \forall N > 0 \quad \exists\delta > 0; \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) > N$

5) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \equiv \forall N > 0 \quad \exists\delta > 0; \quad \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta \quad f(x) < -N$

6) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \equiv \forall N > 0 \quad \exists M > 0; \quad \forall x > M \quad f(x) > N$

7) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \equiv \forall N > 0 \quad \exists M > 0; \quad \forall x < -M \quad f(x) > N$

8) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \equiv \forall N > 0 \quad \exists M > 0; \quad \forall x > M \quad f(x) < -N$

9) $\lim_{x\to a^+} f(x) = L \equiv \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < x - a < \delta \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

10) $\lim_{x\to a^-} f(x) = L \equiv \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad -\delta < x - a < 0 \quad |f(x) - L| < \varepsilon$

مثال 1 : بیشترین مقدار δ که در $\lim_{x\to 1} 3x + 2 = 5$ صدق می کند؟

حل: با استفاده از تعریف حد در شماره ی 1داریم:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x \quad 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

با توجه به روی سوال (یعنی $\lim_{x\to 1} 3x + 2 = 5$) می بینیم که: $x_0 = 2$ و $L = 5$ می باشد. بعد از جایگذاری این مقادیر در رابطه بالا داریم:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0; \quad \forall x \quad 0 < |x - 2| < \delta \to |(3x + 2) - 5| < \varepsilon$$

ازساده کردن رابطه $|(3x + 2) - 5| < \varepsilon$، داریم: $|3x - 3| < \varepsilon$. اما در رابطه ای که برای تعریف حد نوشته بودیم؛ داشتیم: $0 < |x - 2| < \delta \quad \forall x \quad \exists\delta > 0$ ؛ لذا $\text{Max } \delta := \frac{\varepsilon}{2}$.(یعنی بیشترین مقدار را تعریف می کنیم.)■

مثال2 : کمترین مقدار μ که در $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-32}{x^2+1}=1$ صدق می کند؟

حل:بنابه تعریف حد توابع در شماره ی2، داریم:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\mu>0;\ \ \forall x>\mu\quad|f(x)-L|<\varepsilon$$

پس از جایگذاری مقادیر معادل خواهیم داشت:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\mu>0;\quad\forall x>\mu\qquad\left|\frac{x^2-32}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$$

$$\to\left|\frac{x^2-32}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon\ \to\left|\frac{x^2-32}{x^2+1}\right|<\varepsilon\ \to\left|\frac{-33}{x^2+1}\right|<\varepsilon$$

می دانیم که همواره عبارت x^2+1 عبارتی مثبت است و باضرب در عدد به عددی همواره منفی تبدیل می گردد؛ لذا حاصل قدرمطلق به صورت زیر خواهد بود و داریم:

$$\frac{33}{x^2+1}<\varepsilon\quad\to\quad\frac{1}{x^2+1}<\frac{\varepsilon}{33}\quad\to\quad x^2+1>\frac{33}{\varepsilon}\quad\to\quad x^2>\frac{33}{\varepsilon}-1$$

لذا μ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\mu=\max\left\{\frac{33}{\varepsilon}-1\ ,0\right\}=\frac{33}{\varepsilon}$$

(چون ε همواره عددی بسیارکوچک می باشد لذا حاصل $\frac{33}{\varepsilon}$ عددی بزرگتر از صفر خواهد بود. پس μ را $\frac{33}{\varepsilon}$ در نظر می گیریم.)■

مثال 3: کمترین مقدار M که در $\lim_{x\to+\infty}(6-x-x^2)=-\infty$ صدق می کند؟

حل: با کمک تعریف حد شماره 8 داریم:

$$\forall N>0\ \ \exists M>0;\ \ \forall x>M\quad f(x)<-N$$

پس از جایگذاری مقادیر معادل خواهیم داشت:

$$\forall N>0\ \ \exists M>0;\ \ \forall x>M\qquad 6-x-x^2<-N$$

لذا برای پیدا کردن M باید نامعادله ی زیر را حل کنیم. لذا داریم:

$$6-x-x^2<-N \to x^2+x-6<N \to (x+3)(x-2)>N$$

با فرض کردن $x>M\geq 1$ خواهیم داشت $x+3\geq 4$ لذا نامساوی آخر به صورت معادل برابر خواهد بود با:

$$4(x-2)>N \to x-2>\frac{N}{4} \to x>\frac{N}{4}+2$$

لذا :

$$M_{min}=\max\{\tfrac{N}{4}+2\ ,1\}\blacksquare$$

مثال4: تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{3x^2-3}{x-1} & x<1\\ 5x+1 & x>1\end{cases}$ را در نظربگیرید. اگربرای مقادیر $0<|x-1|<\delta$ داشته باشیم: $|f(x)-6|<\frac{1}{200}$ باشد، آنگاه حداکثر مقدار δ را بیابید.

حل: برای $x<1$ داریم:

$$\left|\frac{3x^2-3}{x-1}-6\right|<\frac{1}{200} \to |3x+3-6|<\frac{1}{200} \to |x-1|<\frac{1}{600}$$

پس $\delta_1\leq\frac{1}{600}$ می باشد و برای $x>1$ داریم:

$$|(5x+1)-6|<\frac{1}{200} \to |5x-5|<\frac{1}{200} \to |x-1|<\frac{1}{1000}$$

پس $\delta_2\leq\frac{1}{1000}$ لذا در کل خواهیم داشت:

$$\delta\leq\min\{\delta_1,\delta_2\}=\frac{1}{1000}\quad\blacksquare$$

مثال5: اگر $3-\frac{1}{3}<x<3+\frac{1}{3}$ باشد، آنگاه در نامساوی $\left|\frac{x^2-3x}{2x-6}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$ کمترین مقدار ε را بیابید؟

الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{6}$ ج) $\frac{1}{9}$ د) $\frac{3}{2}$

حل: از ساده کردن نامساوی $\left|\frac{x^2-3x}{2x-6}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$ به دست می آوریم:

$$\left|\frac{x^2-3x-3x+9}{2x-6}\right|<\varepsilon \quad \to \left|\frac{x^2-6x+9}{2x-6}\right|<\varepsilon \quad \to \left|\frac{(x-3)^2}{2(x-3)}\right|<\varepsilon$$

$$\to \left|\frac{x-3}{2}\right|<\varepsilon\ (\mathrm{x})$$

از نامساوی $3+\frac{1}{3}>x>3-\frac{1}{3}$ نتیجه می گیریم که:

$$-\frac{1}{3}<x-3<\frac{1}{3} \quad \to |x-3|<\frac{1}{3} \qquad (\mathrm{xx})$$

از دو نامساوی (x) و (xx) نتیجه می گیریم که:

$$\varepsilon \geq \frac{1}{6}\blacksquare$$

مثال 6: در $\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{1-x}=-\infty$ ؛ اگر $0<x-1<\delta$ و f(x)<-51 باشد، آنگاه max δ کدام است؟

الف) 0/01 ب) 0/005 ج) 0/02 د) 0/05

حل: بنابه تعریف حد در شماره 5 داریم:

$$-1+\frac{1}{1-x}<-51 \to \frac{1}{1-x}<-50 \to 0<x-1<\frac{1}{50} \to 0<x-1<0/02$$

لذا گزینه ی (ج) درست می باشد. ■

قضایای حد:

1) شرط لازم برای وجود حد آن است که تابع در همسایگی عدد داده شده تعریف شده باشد.

2) حد تابع در صورت وجود منحصربفرد است.

3) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ باشد، آنگاه $\lim_{x\to a}\gamma\, f(x)=\gamma L_1$ می باشد.

4) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ باشد، آنگاه:

- $\lim_{x\to a}(\mathrm{f}(x)\pm \mathrm{g}(x))=\mathrm{L}_1\pm \mathrm{L}_2$
- $\lim_{x\to a}\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)=\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2$
- $\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{g}(x)}=\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{L}_2}\ ;\quad \mathrm{L}_2\neq 0$

قضیه ی عدم وجود حد: برای آنکه ثابت کنیم یک تابع مانند f(x) در x=a فاقد حد می باشد، دو دنباله مانند $\{\mathrm{a}_n\}$ و $\{\mathrm{b}_n\}$ چنان می یابیم که $\lim_{n\to\infty}\mathrm{b}_n=a$ و $\lim_{n\to\infty}\mathrm{a}_n=a$ باشند و در ضمن $\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(a_n)=\mathrm{L}_1$ و $\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(\mathrm{b}_n)=\mathrm{L}_2$ که در آن $\mathrm{L}_1\neq\mathrm{L}_2$.

مثال: ثابت کنید که $\lim_{x\to 3}\sin\frac{1}{x-3}$ وجود ندارد.

حل: دنباله های $\{\mathrm{a}_n\}$ و $\{\mathrm{b}_n\}$ را به صورت زیر می سازیم:

$$\mathrm{a_n}=3+\frac{1}{\mathrm{n}\pi+\frac{\pi}{2}}\ ,\qquad \mathrm{b_n}=3+\frac{1}{\mathrm{n}\pi-\frac{\pi}{2}}\ \to\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{a}_n=3\ \text{و}\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{b}_n=3$$

ولی:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(\mathrm{a}_n)=-1\ \text{و}\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(\mathrm{b}_n)=1\ \to\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(\mathrm{a}_n)\neq\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(\mathrm{a}_n)$$

لذا $\lim_{x\to 3}\sin\frac{1}{x-3}$ وجود ندارد.■

مثال: ثابت کنید که $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\left[\frac{1}{x-1}\right]$ وجود ندارد.

حل: دنباله های $\{\mathrm{a}_n\}$ و $\{\mathrm{b}_n\}$ را به صورت زیر می سازیم:

$$\mathrm{a_n}=1+\frac{1}{\mathrm{n}+1/1}\ \text{و}\ \mathrm{b_n}=1+\frac{1}{\mathrm{n}+1}\ \to\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{a}_n=1\ \text{و}\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{b}_n=1$$

ولی:

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(\mathrm{a}_n)=0/1\ \text{و}\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(\mathrm{b}_n)=0\ \to\ \lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(\mathrm{a}_n)\neq\lim_{n\to\infty}\mathrm{f}(\mathrm{a}_n)$$

لذا $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\left[\frac{1}{x-1}\right]$ وجود ندارد.■

قضیه: هرگاه $\lim_{x\to x_0} \mathrm{f}(x) = 0$ و تابع g در همسایگی محذوف x_0کراندار باشد آنگاه:
$\lim_{x\to x_0} (\mathrm{f}.\mathrm{g})(x) = 0$

مثال: تابع $\mathrm{f}(x)$ را به صورت $\mathrm{f}(x) = (x^3 - 4x)\mathrm{D}(x)$ در نظر بگیرید که درآن تابع $\mathrm{D}(x)$ به صورت $\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \in Q^c \end{cases}$ می باشد. این تابع درچند نقطه حد دارد؟

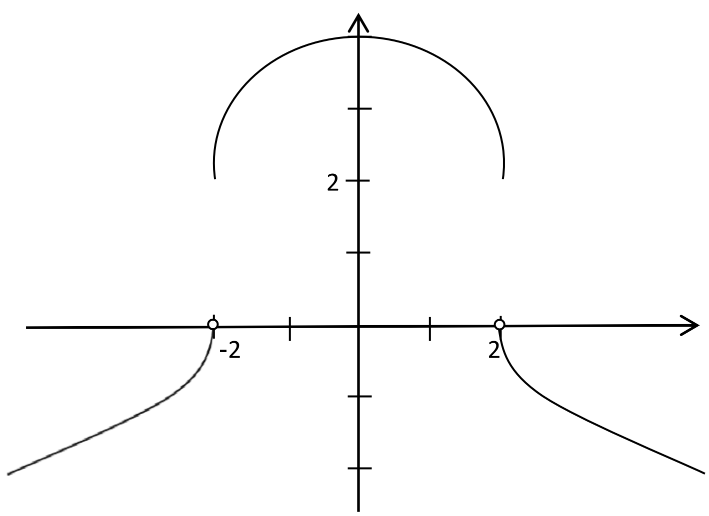
حل:چون $\mathrm{D}(x)$ کراندار است (برای مثال یک نمونه از کران هایی که می توان برای این تابع نوشت عبارت است از: $-1 < \mathrm{D}(x) < 2$) اما حد این تابع به عدد مشخصی نمی رسد(درواقع در یک نقطه به خصوص حد ندارد.) چند جمله ای $x^3 - 4x = 0$ درسه نقطه برابر صفراست(ریشه های چندجمله ای) پس درسه نقطه دارای حد است. در واقع دراین نقاط داریم:

عدد $\times\ 0 =$ حد تابع

لذا تابع مورد بررسی تنها در این سه نقطه حد دارد و مقدار این حد صفر می باشد.

محاسبه ی حد توابع از روی نمودار رسم شده: برای محاسبه ی مقدار حد از روی نمودار؛ باید تصور کنیم که نمودار مثل جاده ای است که روی آن رانندگی می کنیم. نقاط انفصال توابع را نقاط بن بست جاده تصور خواهیم کرد.

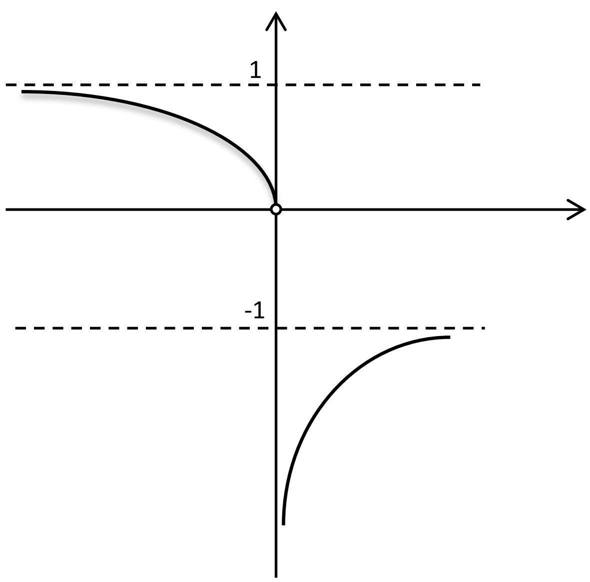
مثال: از روی نمودار زیر مقدار $\mathrm{f}_-(-2) + \mathrm{f}(0) + \mathrm{f}_-(2) + \mathrm{f}_+(2)$ را به دست آورید.



حل: برای پیدا کردن $f_+(2)$ از سمت راست محور x ها روی نمودار به سمت نقطه $x = 2$حرکت می کنیم و به مقدار 0 می رسیم. برای پیدا کردن $f_-(2)$ از سمت چپ محور x ها روی نمودار به سمت نقطه $x = 2$ حرکت می کنیم و به مقدار 2 می رسیم. برای پیدا کردن $f(0)$ (چه از سمت راست محور x ها و چه از سمت چپ این محور) روی نمودار رسم شده به سمت نقطه $x = 2$ می رویم و به مقدار 4 می رسیم. حال برای یافتن آخرین مقدار یعنی $f_-(-2)$ ؛ از سمت چپ محورx ها روی نمودار حرکت می کنیم و به عدد 0 می رسیم. حال تمام مقادیریافته شده را جایگذاری کرده و حاصل را می یابیم:

$$f_+(2) + f_-(2) + f(0) + f_-(-2) = 0 + 2 + 4 + 0 = 6 \blacksquare$$

مثال: از روی نمودار زیر مقدار $\lim_{x\to-\infty}[f(x)] + \lim_{x\to+\infty}[f(x)] + \lim_{x\to0^-}[f(x)]$ را بیابید؟



حل: مراحل حل این مثال عین مراحل حل مثال قبلی می باشد. لذا داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] + \lim_{x\to+\infty}[f(x)] + \lim_{x\to0^-}[f(x)] = [1^-] + [(-1)^-] + [0^+]$$

$$= 0 + (-2) + 0 = -2 \blacksquare$$

روش های حد گیری برای برخی توابع کمی زمان برتر بوده و نیاز به محاسبات زیادی دارد. لذا از برخی تعاریف و شرایط خاص استفاده می کنیم تا حد این توابع را راحت تر محاسبه کنیم. یکی از این روش ها و تعاریف هم ارزی توابع خواهد بود.

تعریف هم ارزی حد دو تابع: گوییم تابع f(x) با تابع g(x) درنقطه $x = x_0$ هم ارزاست هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

$$1)\lim_{x \to x_0} \mathrm{f}(x) = \lim_{x \to x_0} \mathrm{g}(x) = 0$$

$$2)\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{f}(x)}{\mathrm{g}(x)} = 1$$

نماد هم ارزی عبارت است از: $\mathrm{g}(x) \sim \mathrm{f}(x)$

مثال: آیا می توان گفت که دو تابع $\mathrm{f}(x) = x$ و $\mathrm{g}(x) = \sin x$ در نقطه ی x=0 هم ارزند؛ یعنی نوشت که درنقطه ی x=0 داریم: $\sin x \sim x$ ؟

حل: نماد~ ،نماد ارزی توابع می باشد؛ لذا برای بررسی خواص هم ارزی توابع باید دو شرط نوشته شده در هم ارزی توابع را مورد بررسی قرار دهیم؛ داریم:

$$1)\lim_{x \to 0} x = 0 \, , \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

$$2)\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

لذا داریم: $\sin x \sim x$ ■

فهرست هم ارزی های مهم: وقتی $x \to 0$ می باشد، در این صورت تک تک عبارات زیر با $(ax)^m$ هم ارز می باشند:

$$tan^m(x) \quad , tan(ax)^m \quad , Arctan(ax)^m \quad , Arctan^m(ax) \quad , Arcsin^m(ax)$$
$$, Arcsin(ax)^m \quad , sin(ax)^m \quad , sin^m(x)$$

مثال: مقدار $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \sin 5x}{x^2}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \sin 5x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 1 \times \left(5 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}\right) = 1 \times 5$$ ■

مثال: مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x-\tan 2x-\tan x}{x^3}$ را محاسبه کنید.

حل: در روابط مثلثاتی داریم:

$$a+b+c=0 \quad or \;\; k\pi \quad \rightarrow \quad \tan a+\tan b+\tan c=\tan a\,.\tan b\,.\tan c$$

لذا با کمک روابط نوشته شده حد مذکور به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x-\tan 2x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x\tan 2x\tan x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

$$=(3\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x})(2\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x})(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x})$$

$=3\times 2\times 1=6$■

هم ارزی های زیر را در نقطه $x\to 0$ به خاطر بسپارید:

1) $Arc\sin x-x\sim x-sinx\sim\frac{1}{6}x^3$

2) $x-Arc\tan x\sim\ tanx-x\sim\frac{1}{3}x^3$

3) $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x\sim a_1x$

4) $1-cosx\sim\frac{1}{2}x^2$

5) $Arc\ sinx-Arc\ tanx\sim\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$

هم ارزی های زیر را در نقطه ی $f(x)\to 0$ به خاطر بسپارید:

1) $1-cos^m f(x)\sim\frac{m}{2}f^2(x)$

2) $\sqrt[n]{1+f(x)}\sim 1+\frac{f(x)}{n}$

3) $\log(1+f(x))\sim f(x)$

4) $a^{f(x)}-1\sim f(x)lna$

مثال: حدود زیر را به دست آورید؟

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-cosx)}{x^4}$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{2x-2sinx}{x^3}$$

$$3)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-tan^2x}{x^4}$$

حل: بنابه روابط مثلثاتی داریم:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-cosx)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-1+2sin^2x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2sin^2x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+2\,sin^2\left(\frac{2sin^2x}{2}\right)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\,sin^2(sin^2x)}{x^4}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(sin^2x)^2}{x^4}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{sin^4x}{x^4}$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x}\right)^4=2\blacksquare$$

$$2)\lim_{x\to 0}\frac{2x-2sinx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2(x-sinx)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{1}{6}x^3\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^3}=\frac{1}{3}\blacksquare$$

$$3)\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\tan^2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)(x+\tan x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\tan x)}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{(x+\tan x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\right)=\frac{1}{3}(1+1)=\frac{2}{3}\blacksquare$$

هم ارزی های رادیکالی در نقاط بی نهایت: برای مواقعی که فرجه ی رادیکال (یعنی n) عددی زوج باشد؛ هم ارزی زیر را خواهیم داشت:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}\sim\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|=\pm\sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)$$

و برای مواقعی که فرجه ی رادیکال (یعنی n) عددی فرد باشد؛ داریم:

$$\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}\sim\sqrt[n]{a}(x+\frac{b}{na})$$

هم ارزی مهم و کاربردی دیگری که همواره به کار می بریم عبارت است از:

$$1^k+2^k+\cdots+x^k\sim\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

مثال: مقدار حدود زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}\quad,\lim_{x\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+x^5}{x^5-2x^6+1}$$

حل:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+x}{2x-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+x}{2x-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x}{x}=5\blacksquare$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1^5+2^5+\cdots+x^5}{x^5-2x^6+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^{5+1}}{5+1}}{-2x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^6}{6}}{-2x^6}=\frac{-1}{12}\blacksquare$$

نکته ای کلیدی برای محاسبه برخی حالتهای حاصل از حد گیری برخی توابع:

1) در برخی اوقات برای محاسبه حدود به مواردی چون $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ می رسیم. در این مواقع از قاعده ی هوپیتال یا از هر روش دیگر؛ سعی خواهیم کرد که عامل صفر یا بی نهایت کننده را از بین ببریم.

2) درمواقعی که حاصل حد به صورت $0\times\infty$ می باشد سعی می کنیم که آن را به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ درآوریم و به حالت (1) تبدیل کنیم.

3) در مواقعی که حاصل حد به صورت $\infty - \infty$ باشد؛ سعی می کنیم از مخرج مشترک گیری یا در صورت وجود رادیکال با کمک اتحاد مزدوج رفع ابهام کنیم.

حال برای هر مورد مثال هایی حل می کنیم؛

مثال: مقادیر حدود زیر را محاسبه کنید:

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{sin^2x}-\frac{1}{x^2}$ ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-cosx}}$

$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}$ ، $\lim_{x\to\pi}(1+cosx)tan\frac{x}{2}$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-cosx}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{1-(1-2sin^2x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{2sin^2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{2}sinx}=\frac{1}{\sqrt{2}}\blacksquare$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{sin^2x}-\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-sinx)(x+sinx)}{x^2sin^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{6}x^3\right)(x+sinx)}{x^2sin^2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{xsin^2x}\lim_{x\to 0}\frac{x+sinx}{x}=\frac{1}{6}(1+1)=\frac{1}{3}\blacksquare$$

$$\lim_{x\to\pi}(1+cosx)tan\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi}\frac{1+cosx}{cot\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\frac{2cos^2\frac{x}{2}}{\frac{cos\frac{x}{2}}{sin\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to\pi}2cos\frac{x}{2}sin\frac{x}{2}=0\blacksquare$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}\right)\times\frac{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{x\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{x\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)-x}{\sqrt[3]{\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{x\left(x+\sqrt[3]{x^2}\right)}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2+2x\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x^4}}+\sqrt[3]{x^2+x\sqrt[3]{x^2}}+\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}+1\right)}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}\blacksquare$$

نکته: برای محاسبه ی برخی حدود می توان از فرمول زیر استفاده نمود:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{\mathrm{b}x+c})^{kx+d}=e^{\frac{ak}{b}}$$

مثال: مقدار $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-1})^{x}$ را بیابید.

حل: برای استفاده ازنکته مذکور ابتدا قدری تابع را ساده می کنیم:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}((1+\frac{3}{x-1})^{(\frac{x-1}{3})})^{\frac{3x}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}((1+\frac{3}{x-1})^{(\frac{x-1}{3})})^{\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x-1}}=e\times 3=3e\blacksquare$$

نکته: (صورت کلی تر نکته بالا)هرگاه $\lim_{x\to a}\mathrm{f}(x)=1$ و $\lim_{x\to a}\mathrm{g}(x)=\infty$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\mathrm{f}(x)^{\mathrm{g}(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(\mathrm{f}(x)-1)\mathrm{g}(x)}$$

مثال: مقدار $\lim_{x\to-\infty}\frac{5^{x+1}+3^{x-1}}{5^{x-3}+3^{x+1}}$ را بیابید.

حل: (برای حل این مسئله ابتدا باید به این نکته توجه کنیم که؛ درجمع توابع نمایی وقتی $x\to+\infty$ می کند آنگاه ازمجموع جملات، پایه ای را انتخاب می کنیم که بزرگتر است و وقتی $x\to-\infty$ جمله ای را انتخاب می کنیم که پایه ی آن از همه کوچکتر است.)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5^{x+1}+3^{x-1}}{5^{x-3}+3^{x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{x-1}}{3^{x+1}}=\frac{1}{9}\blacksquare$$

مثال: مقدار $\lim_{x\to0}\frac{\left[\left[\frac{1}{x^2}\right]-\left[\frac{2}{x^2}\right]\right]}{\frac{3}{x^2}}$ را بیابید.

حل: جهت حل این مسئله دانستن این نکته الزامی است که؛ **هرگاه داخل براکت (جزء صحیح) به بی نهایت میل کند؛ آنگاه از داخل براکت (بدون هیچ کم و کاستی)می تواند بیرون بیاید.** لذا داریم:

$$\lim_{x\to0}\frac{\left[\left[\frac{1}{x^2}\right]-\left[\frac{2}{x^2}\right]\right]}{\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\left[\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right]}{\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\left[-\frac{1}{x^2}\right]}{\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2}}=\frac{-1}{3}\blacksquare$$

مثالها و تستهای بیشتر در جزوه حل تمرینات آورده شده است.