



نظریه‌ی معادلات

مقدمه

بخشی از این فصل را در سال گذشته فرا گرفته‌اید و در ادامه‌ی روش‌های جبری و هندسی برای حل معادلات و نامعادلات در کتاب جدید التالیف حسابان آورده شده است که مزیت کتاب حسابان در این مبحث نسبت به کتاب‌های ریاضی در سال‌های گذشته است. ما هم سعی کرده‌ایم تمام مطالبی که در مورد نظریه‌ی معادلات در سال‌های گذشته خوانده‌اید را به مطالب امسال اضافه نماییم تا پیوستگی مطالب حفظ شود. مطمئن باشید هر چه برای این فصل وقت گذاشته شود بازهم کم است، زیرا اساس و پایه‌ی ریاضیات بر محاسبات جبری بنا می‌شود. سعی کنید هنگام مطالعه‌ی این فصل با حوصله و سرحال باشید و به خوبی مسائل مطرح شده در این فصل را تجزیه و تحلیل کنید و سعی کنید تمام مسائل آن را حل نمایید تا مشکلی در امسال و سال آینده نداشته باشید.

ابوسهل بیژن بن رستم کوهی

ریاضی‌دان و ستاره‌شناس ایرانی که حدود ۴۰۵ هجری قمری می‌زیسته و اهل مازندران بوده است. وی علاوه بر این که منجمی قوی و زبردست بود در هندسه و جبر نیز مقامی شامخ داشت. کوهی کتابی درباره‌ی نواقص مسائل ارشمیدس نوشت که در آن دوران، تحقیقات ایشان منجر به حل معادلات بالاتر از درجه دوم شد که بعضی از آن‌ها را حل کرد و در مورد برخی دیگر شرایط قابل حل بودن آن‌ها را مورد بحث قرار داد. از ایشان کتاب‌های متعددی وجود دارد که زیربنای حل بسیاری از مسائل پیچیده ریاضی در دوران طلایی تمدن اسلامی بوده است.



ابوسهل بیژن بن رستم کوهی

۱. بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک
- ۱. تجزیه‌ی اعداد
 - ۲. ب.م.م.
 - ۳. ک.م.م.
 - ۴. ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها

۲. تعیین علامت عبارتهای جبری
- ۱. دوجمله‌ای درجه اول
 - ۲. عبارت $|ax+b|$
 - ۳. عبارتهای شامل عامل‌های درجه اول
 - ۴. سه‌جمله‌ای درجه دوم
 - ۵. عبارتهای شامل رادیکال
 - ۶. عبارت $|ax^2+bx+c|$
 - ۷. تعیین علامت در حالت کلی

۳. نامعادلات
- ۱. مقدمه
 - ۲. خواص نامساوی‌ها
 - ۳. نامعادلات هم‌ارز
 - ۴. یک مجهولی درجه اول
 - ۵. دستگاه نامعادله‌ی یک مجهولی درجه اول
 - ۶. یک مجهولی درجه دوم
 - ۷. دستگاه نامعادله‌ی یک مجهولی درجه دوم
 - ۸. نامعادلات گویا
 - ۹. نامعادلات گنگ
 - ۱۰. نامعادلات شامل قدر مطلق
 - ۱۱. حل هندسی نامعادلات

۴. معادلات
- ۱. عبارتهای گویا
 - ۲. عبارتهای گنگ
 - ۳. معادلات شامل قدر مطلق
 - ۴. حل معادلات به روش هندسی

۵. توابع چندجمله‌ای
- ۱. مقدمه
 - ۲. محاسبه‌ی بیشترین و کمترین مقدار تابع درجه دوم
 - ۳. صفرهای تابع درجه دوم
 - ۴. روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم
 - ۵. علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم
 - ۶. تشکیل معادله‌ی درجه دوم
 - ۷. چندجمله‌ای وارون
 - ۸. نکاتی در مورد حل معادله‌ی درجه دوم

۶. معادلات دو مجذوری

۷. تمرین‌ها
- ۱. کتاب درسی
 - ۲. مهارت در ریاضی با تمرین زیاد
 - ۳. مسائل امتحانات نهایی
 - ۴. تمرین‌های سطح بالاتر
- سوال ۱۰۷ صفحه ۱۱۸ پاسخ
سوال ۱۰۹ صفحه ۱۳۳ پاسخ
سوال ۱۱۲ صفحه ۱۳۴ پاسخ
سوال ۱۱۲ صفحه ۱۳۵ پاسخ

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک

۱ تجزیه‌ی اعداد: هر عدد طبیعی مخالف یک که اول نباشد یک عدد مرکب است. هر عدد مرکب را می‌توان به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه نمود. در حالتی که در تجزیه‌ی اعداد، عامل‌های اول تکراری را به صورت توانی بنویسیم به آن تجزیه‌ی استاندارد می‌گوییم. برای تجزیه‌ی یک عدد به عامل‌های اول، مرتباً عدد را به عامل‌های اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم، سپس آن را به صورت تجزیه‌ی استاندارد می‌نویسیم. به عنوان مثال در زیر، تجزیه‌ی استاندارد اعداد ۳۶۰، ۲۵۵ و ۴۸۰ را می‌بینیم:

۳۶۰	۲	۲۵۵	۳	۴۸۰	۲
۱۸۰	۲	۸۵	۵	۲۴۰	۲
۹۰	۲	۱۷	۱۷	۱۲۰	۲
۴۵	۳	۱		۶۰	۲
۱۵	۳			۳۰	۲
۵	۵			۱۵	۳
۱				۵	۵
				۱	

$$۳۶۰ = ۲^2 \times 3^2 \times 5$$

$$۴۸۰ = ۲^5 \times 3 \times 5$$

همان‌طور که متوجه شدید، برای تجزیه‌ی دو عدد به عامل‌های اول، خطی عمودی می‌کشیم و در سمت راست، مقسوم‌علیه‌های اول عدد را می‌نویسیم و در سمت چپ، خارج قسمت هر تقسیم را می‌نویسیم و این عمل را تا آنجا ادامه می‌دهیم که به خارج قسمت ۱ برسیم. **تمرین:** عددهای ۵۲۵، ۴۷۰، ۱۵۰ و ۱۲ را به صورت تجزیه‌ی استاندارد بنویسید.

۲ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد [ب.م.م]

اگر مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های مثبت دو عدد را جداگانه بنویسیم، بزرگ‌ترین عدد مشترک در بین این دو مجموعه، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد نامیده می‌شود. به عبارت دیگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه دو عدد، بزرگ‌ترین عدد مثبتی است که آن دو عدد بر آن بخش‌پذیرند. بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b را به صورت (a, b) نمایش می‌دهیم و به اختصار ب.م.م a و b می‌نامیم و معمولاً با حرف d نمایش می‌دهیم، یعنی: $(a, b) = d$

۳ تعیین بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک چند عدد

اگر هر یک از اعداد را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، حاصل ضرب عامل‌های مشترک با کمترین توان، ب.م.م این اعداد خواهند بود.

Konkur.in

مثال آموزشی

• ب.م.م اعداد ۳۶۰، ۲۲۵، ۴۰۵ و ۷۲ را تعیین کنید.

حل: ابتدا هر یک از اعداد را به صورت استاندارد تجزیه می‌کنیم.

۳۶۰	۲	۲۲۵	۳	۴۰۵	۳	۷۲	۲
۱۸۰	۲	۷۵	۳	۱۳۵	۳	۳۶	۲
۹۰	۲	۲۵	۵	۴۵	۳	۱۸	۲
۴۵	۳	۵	۵	۱۵	۳	۹	۳
۱۵	۳	۱		۵	۵	۳	۳
۵	۵			۱		۱	
۱							

$$\begin{cases} ۳۶۰ = ۲^2 \times 3^2 \times 5 \\ ۲۲۵ = 3^2 \times 5^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۴۰۵ = 3^4 \times 5 \\ ۷۲ = 2^3 \times 3^2 \end{cases} \Rightarrow (۳۶۰, ۲۲۵, ۴۰۵, ۷۲) = 3^2 = ۹$$

روشن است که همه‌ی این اعداد بر ب.م.م خود یعنی ۹ بخش‌پذیرند.

۴ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد [ک.م.م]

اگر مجموعه‌ی همه‌ی مضرب‌های مثبت دو عدد را جداگانه بنویسیم، کوچک‌ترین عضو مشترک این دو مجموعه را کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد می‌گوییم. در حقیقت کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، کوچک‌ترین عدد مثبتی است که بر هر دو عدد مفروض بخش‌پذیر است.

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b را به صورت $[a, b]$ نمایش می‌دهیم و به اختصار ک.م.م a و b می‌نامیم و معمولاً با حرف c نمایش می‌دهند، یعنی: $[a, b] = c$

به عنوان مثال برای دو عدد ۱۲ و ۱۵ داریم:

$$۱۲ = \{۱۲, ۲۴, ۳۶, ۴۸, ۶۰, ۷۲, \dots\} = \text{مجموعه‌ی مضرب‌های مثبت } ۱۲$$

$$\Rightarrow [۱۲, ۱۵] = ۶۰$$

$$۱۵ = \{۱۵, ۳۰, ۴۵, ۶۰, ۷۵, \dots\} = \text{مجموعه‌ی مضرب‌های مثبت } ۱۵$$

۵ تعیین کوچک‌ترین مضرب مشترک چند عدد:

اگر هر یک از اعداد را به صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، حاصل ضرب عامل‌های غیرمشترک و مشترک با بیش‌ترین توان، ک.م.م این اعداد خواهد بود.

مثال آموزشی

• ک.م.م اعداد ۲۰۰، ۳۵۰ و ۵۲۰ را تعیین کنید.

حل: ابتدا سه عدد داده شده را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم.

۲۰۰	۲	۳۵۰	۲	۵۲۰	۲
۱۰۰	۲	۱۷۵۰	۲	۲۶۰	۲
۵۰	۲	۸۷۵	۵	۱۳۰	۲
۲۵	۵	۱۷۵	۵	۶۵	۵
۵	۵	۳۵	۵	۱۳	۱۳
۱		۷	۷	۱	
		۱			

$$\begin{cases} ۲۰۰ = ۲^3 \times ۵^2 \\ ۳۵۰ = ۲^2 \times ۵^2 \times ۷ \rightarrow [۲۰۰, ۳۵۰, ۵۲۰] = ۲^3 \times ۵^2 \times ۷ \times ۱۳ \\ ۵۲۰ = ۲^3 \times ۵ \times ۱۳ \end{cases}$$

سایت کنکور

یادداشت

یادش به خیر، اون روزهایی که، خودمان دانش‌آموز بودیم و معلم‌مان داشت این مبحث را بهمون درس می‌داد. وقتی درس تموم شد یکی از بچه‌ها پرسید: آقا ببخشید حالا این پ.م.م و ک.م.م به چه دردی می‌خوره؟

معلم، گفت: ببینید بچه‌ها، وقتی از پ.م.م دو عدد استفاده می‌کنیم که بخواهیم یک ویژگی مشترک از آن دو عدد را انتخاب کنیم. من از معلم‌مان پرسیدم: ببخشید آقا میشه با یک مثال این موضوع را به ما نشان دهید؟ معلم‌مان هم که بسیار مهربان بودند گفتند: البته و این مثال را روی تابلو برای ما نوشتند:

مثال: می‌خواهیم سالنی به (ابعاد ۳۶ و ۴۵ متر را با فرش‌های مربع شکل که اندازه‌های ضلع آن‌ها عدد طبیعی باشد بپوشانیم. اندازه‌ی ضلع فرش‌ها چه عددی می‌تواند باشد؟ ضلع فرش‌ها چقدر باشد تا کمترین تعداد فرش برای پوشاندن سالن مورد نیاز باشد؟

بعد از طرح این سؤال، معلم‌مان رو به بچه‌ها کردند و پرسیدند: به نظر شما می‌توان این سالن را با فرش‌های مربع ۴×۴ فرش کرد؟ بچه‌ها هم بعد از کمی فکر کردن گفتند: نه آقا چون ۴۵ بر ۴ بخش پذیر نیست. دوباره معلم‌مان که می‌خواست خود بچه‌ها مسأله را تحلیل کنند، گفتند: خوب به نظر شما چه باید کرد؟ من هم دستم را بلند کردم و گفتم آقا من بگم؟ و معلم‌مان به من اجازه دادند که روش حل مسأله را بیان کنم.

من گفتم باید ضلع هر یک از فرش‌های مربع شکل را عددی انتخاب کنیم که هر دو عدد ۴۵ و ۳۶ بر آن بخش پذیر باشند. بنابراین باید ۴۵ و ۳۶ را به عامل‌های اول تجزیه کنیم و عامل‌های مشترک را بین آن دو انتخاب نماییم:

$$\begin{cases} ۴۵ = ۳^2 \times ۵ \\ ۳۶ = ۲^2 \times ۳^2 \end{cases}$$

بنابراین جواب سؤال اول شما این است که ضلع فرش‌های مربع شکل باید ۳ یا ۹ متر باشند و برای آنکه با تعداد کمتری این سالن را فرش کنیم باید فرش‌های مربع شکل ۹×۹ باشند. معلم‌مان همین طوری که به من خیره شده بودند، سرشان را به عنوان تشکر و تشویق من تکان دادند و همه خوشحال بودیم که یکی از کاربردهای پ.م.م را فرا گرفته‌ایم.



مثال آموزشی

• طول قطر چرخ‌های کوچک و بزرگ یک تراکتور به ترتیب ۹۰ و ۱۵۰ سانتی‌متر است. اگر در ابتدای حرکت، نقاط روی زمین این چرخ‌ها را علامت‌گذاری کنیم، این تراکتور حداقل چه مسافتی را باید طی کند تا این نقاط روی چرخ‌ها مجدداً با هم به زمین برسند؟
 حل: برای آن که عددی را انتخاب نماییم که همگی خصوصیات دو عدد a و b در آن وجود داشته باشد، باید ک.م.م دو عدد a و b انتخاب نماییم.

در این مسأله مشخص است که جابجایی تراکتور برابر محیط پیموده شده توسط چرخ‌های آن می‌باشند و برای آنکه نقاط علامت‌گذاری شده دوباره با هم به زمین برسند باید ک.م.م دو عدد ۹۰ و ۱۵۰ را محاسبه نماییم و کاملاً واضح است که دو نقطه‌ی علامت‌گذاری شده روی چرخ‌ها در مضارب مشترک ۹۰ و ۱۵۰ به هم می‌رسند و چون در این سؤال حداقل مسافت طی شده را می‌خواهد، ک.م.م دو عدد را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 150 = 2 \times 3 \times 5^2 \\ 90 = 2 \times 3^2 \times 5 \end{cases} \rightarrow [90, 150] = 2 \times 3^2 \times 5^2 = 450$$

$$450 \times \pi = 450 \times 3.14 \approx 1413 \text{ cm}$$

۶. ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها

• **مقدمه:** در چندجمله‌ای‌ها نیز، همانند اعداد، اعمال جمع و ضرب و مفهوم بخش‌پذیری برقرار است، پس می‌توانیم ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها را نیز همانند اعداد تعریف کنیم.

• **تعریف ۱:** بنا به تعریف بزرگ‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ بر آن بخش‌پذیر است را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (به اختصار ب.م.م) $p(x)$ و $q(x)$ می‌نامند.

• **تعریف ۲:** کوچک‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که بر چندجمله‌ای‌های $p(x)$ و $q(x)$ بخش‌پذیر است را کوچک‌ترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م) $p(x)$ و $q(x)$ می‌نامند.

• **تذکره:** برای محاسبه‌ی ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها، ابتدا هر یک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم و سپس مشابه آن چه در مورد ب.م.م و ک.م.م اعداد گفته شد را انجام می‌دهیم.

مثال آموزشی

• ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌های $p(x) = x^3 + 8$ و $q(x) = x^6 - 64$ و $r(x) = 5x^5 - 20$ را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) \\ x^6 - 64 = (x^3 + 8)(x^3 - 8) = [(x+2)(x^2 - 2x + 4)][(x-2)(x^2 + 2x + 4)] \\ 5x^5 - 20 = 5(x^5 - 4) = 5(x-2)(x+2) \end{cases}$$

با توجه به تجزیه‌ی نمایش داده شده برای $p(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ داریم:

$$(p, q, r) = (x+2)$$

$$[p, q, r] = (x+2)(x^2 - 2x + 4)(x-2)(x^2 + 2x + 4) \times 5 = 5(x^6 - 64)$$

فراموش نکنید که عدد ۵ هم یک عامل است و باید در ک.م.م وارد شود.

• **تذکره:** ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها کمک زیادی برای کوتاه‌تر شدن و ساده کردن محاسبات در کسرها و جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌کند.

مثال آموزشی

• حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\frac{x+5}{x-1} - \frac{6}{x^2+x+1} - \frac{6(x^2+2)}{x^3-1}$$

حل: از سال‌های قبل می‌دانیم که مخرج مشترک چند کسر، همان ک.م.م مخرج کسرها می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$[(x-1), (x^2 + x + 1), (x^3 - 1)] = x^3 - 1$$

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x-1} - \frac{6}{x^2+x+1} - \frac{6(x^2+2)}{x^3-1} &= \frac{(x+5)(x^2+x+1) - 6(x-1) - 6(x^2+2)}{x^3-1} = \frac{x^3 + x^2 + x + 5x^2 + 5x + 5 - 6x + 6 - 6x^2 - 12}{x^3-1} \\ &= \frac{x^3 - 1}{x^3 - 1} = 1 \end{aligned}$$

تعیین علامت عبارت‌های جبری

۱ تعیین علامت دوجمله‌ای درجه‌ی اول

دوجمله‌ای درجه‌ی اول را به حالت عمومی $ax + b$ نمایش می‌دهیم و هدف از تعیین علامت دوجمله‌ای این است که مقادیری حقیقی برای x بیابیم که به ازای آن‌ها دوجمله‌ای مثبت یا منفی و همچنین به ازای یک مقدار برابر با صفر گردد. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال: برای دوجمله‌ای $y = 3x + 6$ عددهای دلخواه و مختلفی را جایگزین x می‌کنیم و مقدار دوجمله‌ای را به ازای آن‌ها می‌یابیم.

x	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$y = 3x + 6$	-۹	-۶	-۳	۰	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱

از این جدول متوجه می‌شویم که دوجمله‌ای به ازای $x = -2$ برابر با صفر و به ازای مقادیر کمتر از -۲ منفی و به ازای مقادیر بیشتر از -۲ مثبت است:

اگر $x > -2$ آن‌گاه $3x + 6 > 0$

اگر $x = -2$ آن‌گاه $3x + 6 = 0$

اگر $x < -2$ آن‌گاه $3x + 6 < 0$

برای سهولت می‌توان شرایط بالا را به صورت جدول زیر نشان داد.

x	$-\infty$	مقادیر کمتر از -۲	-۲	مقادیر بیشتر از -۲	$+\infty$
$3x + 6$		-	۰	+	

رسم نمودار $y = 3x + 6$ این حدس را تأیید می‌کند (شکل زیر را ببینید)



با توجه به جدول بالا و نمودار بالا نتیجه می‌گیریم که عبارت $3x + 6$ به ازای $x = -2$ (ریشه‌ی معادله‌ی $3x + 6 = 0$) برابر صفر است و به ازای مقادیر کمتر از -۲ علامت دوجمله‌ای مخالف علامت ضریب x (شیب خط) و به ازای مقادیر بیشتر از -۲ علامت دوجمله‌ای موافق علامت ضریب x است. در حالت کلی برای تعیین علامت عبارت $ax + b$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

الف) ابتدا معادله‌ی $ax + b = 0$ را حل می‌کنیم و ریشه‌ی آن $x = -\frac{b}{a}$ که در واقع مرز مقادیر منفی و مثبت دوجمله‌ای مورد نظر است، مشخص می‌شود.

ب) به کمک جدول زیر دوجمله‌ای درجه‌ی اول را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مثال آموزشی

• عبارت $(\frac{2}{3}x - 1)$ را تعیین علامت کنید.

$$\frac{2}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\frac{2}{3}x - 1$	-	۰	+

حل:

۲ تعیین علامت عبارت $|ax + b|$

برای تعیین علامت عبارت $|ax + b|$ به مثال زیر توجه کنید:

مثال: می‌خواهیم عبارت $|2x - 4|$ را تعیین علامت می‌کنیم، برای این منظور مقادیر مختلفی را جایگزین x می‌کنیم و مقدار $|2x - 4|$ را به ازای آن‌ها می‌یابیم:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$ 2x - 4 $	۸	۶	۴	۲	۰	۲	۴	۶	۸



با مشاهده‌ی جدول صفحه‌ی قبل درمی‌یابیم که $|2x - 4|$ به ازای $x = 2$ برابر صفر و به ازای بقیه‌ی مقادیر مثبت است.

عبارت $|ax + b|$ به ازای $x = -\frac{b}{a}$ (ریشه‌ی معادله‌ی $ax + b = 0$) برابر صفر و به ازای بقیه‌ی مقادیر، مثبت می‌باشد:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ ax+b $	+	0	+

نتیجه: عبارت‌هایی به صورت $|ax + b|$ به ازای مقادیر حقیقی که جایگزین x می‌شوند، همواره مثبت یا صفر هستند.

مثال آموزشی

• عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $|9x - 4|$

۲) $|-4x + 3|$

۳) $|-2(x - 3)|$

حل:

۱) $9x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$

x	$-\infty$	$\frac{4}{9}$	$+\infty$
$ 9x-4 $	+	0	+

۲) $-4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$ -4x+3 $	+	0	+

۳) $-2(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
$ -2(x-3) $	+	0	+

۳ تعیین علامت عبارت‌های شامل عامل‌های درجه اول

برای تعیین علامت چنین عباراتی ابتدا هر یک از عامل‌های درجه اول را برابر با صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌ی هر یک از عامل‌ها را به دست می‌آوریم. سپس جدولی رسم می‌کنیم و در سطر اول آن ریشه‌های به دست آمده را به ترتیب صعودی از چپ به راست می‌نویسیم و در هر یک از سطرها یکی از عامل‌های درجه اول را تعیین علامت می‌کنیم. در آخر علامت عبارت متشکل از عامل‌های درجه اول برای هر فاصله، از ضرب علامت‌های واقع در ستون نظیر آن به دست می‌آید.

مثال آموزشی

• عبارت $P = x(x+1)(x-1)$ را تعیین علامت کنید.

$x = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
P	-	0	+	0	+

سپس جدولی مانند جدول روبه‌رو تشکیل می‌دهیم که در سطر اول آن به ترتیب صعودی ریشه‌ها را از چپ به راست می‌نویسیم و در هر یک از سطرها یکی از عامل‌های درجه اول را تعیین علامت می‌کنیم:

در مرحله‌ی آخر برای تعیین علامت P در هر فاصله کافی است، علامت‌های واقع در هر ستون را در یکدیگر ضرب کنیم. از آن جا که عبارت P به ازای ریشه‌های هر یک از عامل‌های درجه اول برابر با صفر می‌گردد، بنابراین مقدار P روی هر یک از خط‌ها برابر با صفر است.

• عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید:

۱) $\frac{-5}{(x+2)(x-3)}$

۲) $\frac{x^2 + 3x + 2}{-x(3-x)}$

۳) $\frac{2x}{2x-1} - \frac{x-1}{x+1}$

۴) $|3x + 5| (x+3)(3x-4)(7x-4)$

۵) $\frac{-x(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$

۶) $\frac{-2|-3x+6|}{x^2 - 2x^2 - x + 2}$

۱) $P = \frac{-5}{(x+2)(x-3)}$

حل:

چون -5 منفی است، بنابراین در سطر متناظر با آن در جدول سراسر علامت منفی قرار می‌دهیم:

$$f(x) \geq ax+b$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$-\Delta$	-	-	-	-
$x+2$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
P	-	+	-	+

تعریف نشده تعریف نشده

توجه: از آن جا که عبارت P به ازای ریشه‌های مخرج بی‌معنی است، بنابراین لازم است که در جدول، ریشه‌های مخرج را تعریف نشده تلقی کنیم.

۲- ابتدا صورت کسر عبارت P را با استفاده از تجزیه به صورت حاصل ضرب دو عامل درجه اول می‌نویسیم، سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$P = \frac{(x+1)(x+2)}{-x(3-x)}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$-x=0 \Rightarrow x=0$$

$$3-x=0 \Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	3	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+
$-x$	+	+	+	0	-	-
$3-x$	+	+	+	+	0	-
P	+	+	-	+	-	+

تعریف نشده تعریف نشده

توجه: عبارت P به ازای ریشه‌های صورت برابر با صفر و به ازای ریشه‌های مخرج تعریف نشده است.

$$۳) P = \frac{2x}{2x-1} - \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x(x+1) - (2x-1)(x-1)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{2x^2 + 2x - 2x^2 + 3x - 1}{(2x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{5x-1}{(2x-1)(x+1)}$$

$$5x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{5}$$

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$5x-1$	-	-	0	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+
$x+1$	-	+	+	+	+
P	-	+	-	+	+

تعریف نشده تعریف نشده

$$۴) P = |2x+5| \cdot (x+2)(3x-4)(7x-4)$$

$$|2x+5|=0 \Rightarrow 2x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$$3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

$$7x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{7}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$ 2x+5 $	+	+	0	+	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+	+
$3x-4$	-	-	-	0	+	+
$7x-4$	-	-	-	0	+	+
P	-	+	+	+	-	+

$$۵) P = \frac{-x(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$$

$$-x=0 \Rightarrow x=0$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

x	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$
$-x$	+	0	-	-	-	-	-
$x-1$	-	-	0	+	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	0	+	+
$x-4$	-	-	-	-	-	0	+
P	+	+	-	+	-	+	-

تعریف نشده تعریف نشده

$$۶) P = \frac{-2|-3x+6|}{x^2-2x^2-x+2}$$

ابتدا مخرج کسر عبارت P را با استفاده از تجزیه به صورت حاصل ضرب عوامل اول می‌نویسیم، سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2-2x^2-x+2 = (x^2-x) + (-2x^2+2) = x(x^2-1) - 2(x^2-1) = (x^2-1)(x-2) = (x-1)(x+1)(x-2)$$

$$P = \frac{-2|-3x+6|}{(x-1)(x+1)(x-2)} \Rightarrow |-3x+6|=0 \Rightarrow -3x+6=0 \Rightarrow x=2$$

$$(x-1)=0 \Rightarrow x=1$$

$$(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$$

$$(x-2)=0 \Rightarrow x=2$$



x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
-2	-	-	-	-	-
$-3x+6$	+	+	+	+	+
$x-1$	-	-	0	+	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
P	+	-	-	-	-

تعریف نشده تعریف نشده تعریف نشده

با وجود این که ریشه‌ی $x=2$ دو بار به دست آمده است اما در سطر اول جدول فقط یک بار آن را می‌نویسیم:

۴ تعیین علامت سه جمله‌ای درجه‌ی دوم



در سال‌های نه چندان دور یک روز معلم‌مان درحالی که پا پچه‌ها (احوال‌پرسی می‌کردند، فرمودند امروز می‌خواهیم تعیین علامت عبارت‌های درجه‌ی دو را با هم کار کنیم و سپس پای تابلو رفتند و $y = x^2 + 6x$ را روی تابلو نوشتند و اشاره کردند کی می‌تونه نمودار این تابع را رسم کند؟ البته قابل ذکره که یکم، تعیین علامت را در سال دوم خونديم و يادمه که در سال دوم يکي از دوستانمان به نام مجتبی علاقه‌ی زیادی به ترسیمات هندسی و رشته‌ی معماری داشت و بلافاصله گفت: آقا این همون سهمیه که توی ریاضی (۱) خونديم.

معلم: بله

مجتبی: آقا من پیام رسم کنم.

معلم: بیا ببینم می‌تونی رسمش کنی؟

مجتبی: پای تخته اومد و گفت: آقا از روش مربع کامل می‌ریم و رسم می‌کنیم یعنی ۹ واحد به عبارت $y = x^2 + 6x$ اضافه و کم می‌کنیم.

معلم: این ۹ واحد از کجا اومد؟

مجتبی: آقا ضریب x رو نصف می‌کنیم می‌شه $(6 \div 2 = 3)$ و بعد ۳ را به توان ۲ می‌رسونیم می‌شه ۹، بعد این ۹ را اضافه و کم می‌کنیم.

معلم: آفرین، درست.

سپس مجتبی شروع به نوشتن کرد:

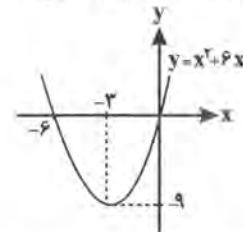
$$y = x^2 + 6x + 9 - 9 = (x + 3)^2 - 9 \Rightarrow S(-3, -9)$$

مجتبی: اول محل تلاقی تابع را با محورهای x و y پیدا می‌کنیم و بعد نمودار اون را می‌کشیم:

$$\text{تلاقی با محور } x \rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x + 6) = 0 \Rightarrow x = -6, x = 0$$

$$\text{نمودار تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد} \rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 + 0 = 0$$

x	-6	-3	0
y	0	-9	0

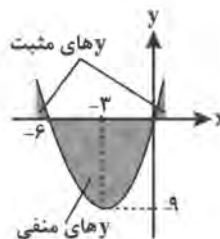


معلم: درست، پرو بنشین، حالا کی می‌تونه علامت y را روی شکل مشخص کنه؟

داود پرسید: آقا یعنی چی؟

معلم: یعنی اینکه عرض نقاط سهمی کجا مثبت و کجا منفی است، درواقع در کدام قسمت سهمی بالای محور x ها در کدام قسمت سهمی پایین محور x ها است؟

داود رفت پای تابلو و شروع به نوشتن کرد:



علامت این سهمی را می‌تونیم به صورت زیر بنویسیم:

x	$-\infty$	-6	0	$+\infty$
$x^2 + 6x$	+	0	-	+

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -6$$

ریشه‌های معادله

به طور کلی سه جمله‌ای درجه دوم را به حالت عمومی $P = ax^2 + bx + c$ نمایش می‌دهیم. ابتدا عبارت P را به صورت زیر مربع کامل می‌کنیم:

$$P = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$P = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$P = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

(۱)

برای تعیین علامت P بر حسب این که $\Delta = b^2 - 4ac$ مثبت، منفی یا صفر باشد، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

● حالت اول:

اگر داشته باشیم $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ در این صورت عبارت $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ همواره مثبت است و علامت P به ازای جمیع مقادیر حقیقی x موافق علامت a است. در حالتی که $\Delta < 0$ اگر $a > 0$ آن‌گاه سه جمله‌ای به ازای تمامی مقادیر حقیقی مثبت است (یعنی $P > 0$) و اگر $\Delta < 0$ و $a < 0$ آن‌گاه سه جمله‌ای به ازای تمامی مقادیر حقیقی منفی است (یعنی $P < 0$).

مثال آموزشی

● عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $2x^2 + 3x + 9$

۲) $-3x^2 + x - 9$

حل:

۱) $2x^2 + 3x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 72 = -63 < 0$

چون $\Delta = -63 < 0$ و $a = 2 > 0$ بنابراین علامت سه جمله‌ای همواره مثبت است:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P = 2x^2 + 3x + 9$	+	+	+

۲) $-3x^2 + x - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 108 = -107 < 0$

چون $\Delta = -107 < 0$ و $a = -3 < 0$ بنابراین علامت سه جمله‌ای همواره منفی است:

x	$-\infty$		$+\infty$
$P = -3x^2 + x - 9$	-	-	-

● حالت دوم: اگر در عبارت $P = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ داشته باشیم: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ در این صورت:

که در آن $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ برابر با صفر و به ازای بقیه‌ی مقادیر حقیقی x مثبت باشد، در نتیجه علامت P همواره موافق علامت a است.

در حالتی که $\Delta = 0$ و $a > 0$ سه جمله‌ای به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ برابر با صفر و به ازای بقیه‌ی مقادیر حقیقی x مثبت (یعنی $P \geq 0$) و اگر $\Delta = 0$ و $a < 0$ آن‌گاه سه جمله‌ای به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ برابر با صفر و به ازای بقیه‌ی مقادیر حقیقی x منفی (یعنی $P \leq 0$) است.

مثال آموزشی

● عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $-3x^2 + 6x - 3$

۲) $4x^2 + 20x + 25$

حل:

۱) $P = -3x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 36 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = 1$

چون $\Delta = 0$ و $a = -3 < 0$ بنابراین علامت سه جمله‌ای همواره منفی است

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
$P = -3x^2 + 6x - 3$	-	۰	-

و به ازای $x = 1$ برابر صفر است:

۲) $P = 4x^2 + 20x + 25 = 0 \Rightarrow \Delta = 400 - 400 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$

چون $\Delta = 0$ و $a = 4 > 0$ بنابراین علامت سه جمله‌ای همواره مثبت است و به ازای $x = -\frac{5}{4}$ برابر صفر است:

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$
$P = 4x^2 + 20x + 25$	+	0	+

● حالت سوم:

اگر در عبارت $P = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ داشته باشیم: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ در این حالت P را بنا بر اتحاد مزدوج به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$P = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

که عبارت P به ازای $x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ برابر با صفر و علامت a به ازای بقیه‌ی مقادیر حقیقی x در جدول‌های زیر تعیین می‌گردد:

x	$-\infty$	(مقادیر حقیقی کوچتر از x')	(مقادیر حقیقی بین x' و x'')	(مقادیر حقیقی بزرگتر از x'')	$+\infty$
a	+	+	+	+	+
$x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	-	0	+	+	+
$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	-	-	0	+	+
P	+	0	-	0	+

۱ در حالتی که $\Delta > 0$ و $a > 0$ (با فرض $x' < x''$):

نتیجه‌ی ۱: در حالتی که $\Delta > 0$ و $a > 0$ برای تعیین علامت P طبق جدول زیر عمل می‌کنیم:

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$
$P = ax^2 + bx + c$	+	0	-	+

۲ اگر $\Delta > 0$ و $a < 0$ (با فرض $x' < x''$):

x	$-\infty$	(مقادیر حقیقی کوچتر از x')	(مقادیر حقیقی بین x' و x'')	(مقادیر حقیقی بزرگتر از x'')	$+\infty$
a	-	-	-	-	-
$x + \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	-	0	+	+	+
$x + \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	-	-	0	+	+
P	-	0	+	0	-

نتیجه‌ی ۲: در حالتی که $\Delta > 0$ و $a < 0$ برای تعیین علامت P طبق جدول زیر عمل می‌کنیم:

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$
$P = ax^2 + bx + c$	-	0	+	-

با توجه به نتیجه‌های (۱) و (۲) ملاحظه می‌کنیم، در حالتی که $\Delta > 0$ ، سه جمله‌ای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد و علامت P همواره بین دو ریشه، مخالف علامت a و به ازای مقادیر حقیقی x خارج دو ریشه، موافق علامت a است.

در حالت کلی می‌توان گفت:

$\Delta > 0$	→	<table> <tr> <th>x</th> <th>ریشه‌ی کوچک‌تر</th> <th>ریشه‌ی بزرگ‌تر</th> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td>موافق علامت a</td> <td>مخالف علامت a</td> </tr> </table>	x	ریشه‌ی کوچک‌تر	ریشه‌ی بزرگ‌تر	$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	مخالف علامت a
x	ریشه‌ی کوچک‌تر	ریشه‌ی بزرگ‌تر						
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	مخالف علامت a						
$\Delta = 0$	→	<table> <tr> <th>x</th> <th>$-\frac{b}{2a}$</th> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td>موافق علامت a</td> </tr> </table>	x	$-\frac{b}{2a}$	$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a		
x	$-\frac{b}{2a}$							
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a							
$\Delta < 0$	→	<table> <tr> <th>x</th> <th>همواره موافق علامت a</th> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td></td> </tr> </table>	x	همواره موافق علامت a	$ax^2 + bx + c$			
x	همواره موافق علامت a							
$ax^2 + bx + c$								

نکته: با توجه به تعیین علامت عبارت‌های درجه‌ی دو می‌توان گفت، عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ به ازای تمام مقادیر x مثبت است

هرگاه $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ و منفی است هرگاه $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ باشد یعنی:

$$\begin{array}{ll} \text{الف) } ax^2 + bx + c > 0 \xrightarrow{\text{شرط عبارت همواره مثبت}} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} & \text{ب) } ax^2 + bx + c \geq 0 \xrightarrow{\text{شرط عبارت غیرمنفی}} \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \\ \text{ج) } ax^2 + bx + c < 0 \xrightarrow{\text{شرط عبارت همواره منفی}} \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} & \text{د) } ax^2 + bx + c \leq 0 \xrightarrow{\text{شرط عبارت غیرمثبت}} \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

تذکره: از نکات فوق برای حل نامعادلات درجه‌ی دو در حالت پارامتری استفاده می‌شود.

تست نمونه

• به ازای کدام مقدار m سه جمله‌ای $mx^2 + x + m$ همواره مثبت است؟

$$|m| < \frac{1}{4} \quad (۴) \qquad m < -\frac{1}{4} \quad (۳) \qquad m > \frac{1}{4} \quad (۲) \qquad |m| > \frac{1}{4} \quad (۱)$$

حل: علامت سه جمله‌ای فوق به پارامتر m بستگی دارد. با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

$$mx^2 + x + m > 0 \rightarrow \begin{cases} m > 0 \quad (۱) \\ \Delta < 0 \rightarrow 1 - 4m^2 < 0 \rightarrow m^2 > \frac{1}{4} \rightarrow m > \frac{1}{4} \text{ یا } m < -\frac{1}{4} \quad (۲) \end{cases} \rightarrow (۱) \cap (۲) m > \frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه‌ی «۲» پاسخ صحیح است.

• اگر $mx^2 + 2x - 1 \leq 0$ باشد حدود m کدام است؟

$$-1 \leq m < 0 \quad (۴) \qquad m \leq -1 \quad (۳) \qquad m \geq -1 \quad (۲) \qquad m < 0 \quad (۱)$$

حل:

$$\begin{cases} a < 0 \rightarrow m < 0 \\ \Delta \leq 0 \rightarrow 4 + 4m \leq 0 \rightarrow m \leq -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} m \leq -1$$

بنابراین گزینه‌ی «۳» پاسخ صحیح است.

۵ تعیین علامت عبارت‌های جبری شامل رادیکال

۱-۵ عبارت‌های شامل رادیکال با فرجه‌ی زوج: ابتدا دامنه‌ی تعریف عبارت شامل رادیکال را تعیین می‌کنیم، سپس به ازای مقادیری که متعلق به دامنه‌ی تعریف هستند، عبارت رادیکالی را تعیین علامت می‌کنیم. برای روشن‌تر شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید:

مثال: برای تعیین علامت $P = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 2x - 3}$ ، ابتدا دامنه‌ی تعریف عبارت شامل رادیکال را به دست می‌آوریم:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_p = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

چون صورت کسر به ازای $x \geq 1$ همواره مثبت است، بنابراین علامت عبارت P بستگی به علامت مخرج کسر دارد، لذا ابتدا مخرج کسر را تعیین علامت می‌کنیم، سپس قسمت‌هایی از جدول قابل قبول است، که متعلق به D_p باشند:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x' = -1, x'' = 3$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	۰	-	۰	+
P			-	+	

تعریف نشده

۲-۵ عبارت‌های شامل رادیکال با فرجه‌ی فرد: می‌دانیم اعداد مثبت و منفی می‌توانند در زیر رادیکال‌هایی با فرجه‌ی فرد قرار گیرند، بنابراین برای تعیین علامت چنین عبارت‌هایی کافی است زیر رادیکال را تعیین علامت کنیم.

مثال آموزشی

• عبارت $P = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{x^2 + 4x + 4}$ را تعیین علامت کنید.

حل:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x' = -1; x'' = +1$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \begin{cases} \Delta = 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	۰	+	-	۰
$x^2 + 4x + 4$	+	۰	+	+	+
P	+	۰	+	-	۰

تعریف نشده



• عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) ۲x^2 - ۱۶x - ۴۰$$

$$۲) -m^2 + ۴m - ۳$$

$$۳) (x+1)(2x^2 - ۴x + 1)$$

$$۴) (x^2 - ۴x^2)(x^2 - ۲x - ۳)$$

$$۵) x^3 - ۲x^2 + ۲x - ۱$$

$$۶) \frac{-x^2(x^2-1)}{x^2+x+1}$$

$$۷) \frac{x^2+x}{-2x^2+2x-3}$$

$$۸) \frac{۳x^2+1۶}{x+\frac{1}{x}}$$

$$۹) \frac{(3x+8)(x^2-4x+4)(x^2-1)}{-3x^2+4x-1}$$

$$۱۰) \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x-4}$$

$$۱۱) \frac{x^2-6x-7}{\sqrt[3]{x^2-2x-15}}$$

$$۱۲) \frac{x^2\sqrt{x-3}}{(x-5)\sqrt{1-x}}$$

$$۱) P = 2x^2 - 16x - 40$$

$$P = 0 \Rightarrow \Delta = (-16)^2 - 4(2)(-40) = 256 + 320 = 576$$

$$\Rightarrow x' = \frac{16+24}{4} = 10, x'' = \frac{16-24}{4} = -2$$

x	$-\infty$	-2	10	$+\infty$
P	+	-	+	+

حل:

$$۲) P = -m^2 + 4m - 3$$

$$P = 0 \Rightarrow \Delta = (4)^2 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Rightarrow m' = \frac{-4+2}{-2} = 1, m'' = \frac{-4-2}{-2} = 3$$

m	$-\infty$	1	3	$+\infty$
P	-	+	-	-

$$۳) P = (x+1)(2x^2 - 4x + 1)$$

$$P = 0 \Rightarrow (x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$۲) 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8$$

$$x' = \frac{4+2\sqrt{2}}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, x'' = \frac{4-2\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
x+1	-	0	+	+	+
$2x^2-4x+1$	+	+	0	-	+
P	-	0	+	0	+

$$۴) P = (x^2 - 4x^2)(x^2 - 2x - 3) = x^2(x-4)(x^2 - 2x - 3)$$

$$P = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$۲) x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$۲) x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\Rightarrow x' = \frac{2-4}{2} = -1, x'' = \frac{2+4}{2} = 3$$

x	$-\infty$	-1	0	3	4	$+\infty$
x^2	+	+	0	+	+	+
$x-4$	-	-	-	-	0	+
x^2-2x-3	+	0	-	0	+	+
P	-	0	+	0	-	+

$$۵) P = x^2 - 2x^2 + 2x - 1$$

$$P = (x^2 - 1) - 2x(x - 1)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1) - 2x(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1 - 2x)$$

$$= (x-1)(x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow P = (x-1)(x^2 - x + 1)$$

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \times (1) \times (1) = -3 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{سه جمله‌ای همواره مثبت است.}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
x-1	-	0	+
x^2-x+1	+	+	+
P	-	0	+

$$۶) P = \frac{-x^2(x^2-1)}{x^2+x+1}$$

$$-x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x' = +1, x'' = -1$$

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta = -3 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \text{ سه جمله‌ای همواره مثبت است.}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-x^2$	-	-	0	-	-
x^2-1	+	0	-	-	+
x^2+x+1	+	+	+	+	+
P	-	+	+	+	-

$$۷) P = \frac{x^2+x}{-2x^2+2x-3}$$

$$x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow x' = 0 \text{ و } x'' = -1$$

$$-2x^2+2x-3=0 \Rightarrow \Delta = -20 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a = -2 < 0 \end{cases} \text{ سه جمله‌ای همواره منفی است.}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x^2+x	+	0	-	+
$-2x^2+2x-3$	-	-	-	-
P	-	+	+	-

$$۸) P = \frac{4x^2+16}{x+\frac{1}{x}}$$

$$4x^2+16=0 \Rightarrow \Delta = (0)^2 - 4(4)(16) = -256$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a = 4 > 0 \end{cases} \text{ سه جمله‌ای درجه‌ی ۲ همواره مثبت است.}$$

$$x+\frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} \Rightarrow \begin{cases} x^2+1=0 \Rightarrow \Delta = -4 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ x=0 \end{cases} \text{ سه جمله‌ای درجه‌ی ۲ همواره مثبت است.}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$4x^2+16$	+	+	+
$x+\frac{1}{x}$	+	+	+
P	-	+	+

تعریف نشده

$$۹) P = \frac{(3x+8)(x^2-4x+4)(x^2-1)}{-3x^2+4x-1} = \frac{(3x+8)(x^2-4x+4)(x-1)(x^2+x+1)}{-3x^2+4x-1}$$

$$3x+8=0 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$$

$$x^2-4x+4=0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ سه جمله‌ای همواره مثبت است.}$$

$$x-1=0 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta = -3 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \text{ سه جمله‌ای همواره مثبت است.}$$

$$-3x^2+4x-1=0 \Rightarrow \Delta = 4 \Rightarrow x' = 1, x'' = -\frac{1}{3}$$

چون دو عبارت x^2+x+1 و x^2-4x+4 همواره مثبت هستند بنابراین علامت P بستگی به عبارت‌های دیگر دارد، لذا کافی است عبارت‌های دیگر را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$3x+8$	-	0	+	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+	+
$-3x^2+4x-1$	-	-	0	+	0	-
P	-	+	-	-	-	-

تعریف نشده تعریف نشده

$$۱۰) P = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-3x-4}$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow \text{دامنه‌ی تعریف رادیکال} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

ابتدا دامنه‌ی تعریف عبارت P را تعیین می‌کنیم:

می‌دانیم که $\sqrt{x-2}$ به ازای $x \geq 2$ همواره مثبت است در نتیجه علامت P بستگی به علامت مخرج دارد یعنی در این حالت کافی است به ازای $x \geq 2$ مخرج کسر را تعیین علامت کنیم:

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \notin D_P \\ x'' = 4 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول قابل قبول}$$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
	-	0	+	+
P	-	-	+	+

تعریف نشده



$$۱۱) P = \frac{x^2 - 6x - 7}{\sqrt{x^2 - 2x - 15}}$$

چون فرجه‌ی رادیکال عددی فرد است در نتیجه زیر رادیکال می‌تواند منفی یا مثبت باشد، بنابراین عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 \Rightarrow x' = -3, x'' = 5$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 \Rightarrow x' = -1, x'' = 7$$

x	$-\infty$	-3	-1	5	7	$+\infty$
$x^2 - 6x - 7$	+	+	-	-	+	+
$x^2 - 2x - 15$	+	-	-	+	+	+
P	+	تعریف نشده	-	+	تعریف نشده	+

$$۱۲) P = \frac{x^2 \sqrt{x-3}}{(x-5)\sqrt{10-x}}$$

برای تعیین علامت P ابتدا دامنه‌ی تعریف عبارت P را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ 10-x > 0 \Rightarrow x < 10 \end{cases}$$

$$D_p = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 10\}$$



چون $\sqrt{x-3}$ و $\sqrt{10-x}$ و x^2 به ازای $3 \leq x < 10$ همواره مثبت هستند، در نتیجه P بستگی به علامت (x-5) دارد، بنابراین کافی است آن را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$	3	5	10	$+\infty$
x-5	-	-	-	+	+
		تعریف نشده	+	تعریف نشده	

در این حالت قسمت‌هایی از جدول قابل قبول است که در آن‌ها $x \in D_p$ ($3 \leq x < 10$) باشند و باید توجه داشت که عبارت P به ازای ریشه‌های صورت کسر برابر با صفر و به ازای ریشه‌های مخرج تعریف نشده است.

۶ تعیین علامت عبارت $|ax^2 + bx + c|$

عبارت $|ax^2 + bx + c|$ به ازای ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ (در صورت وجود) برابر با صفر و به ازای بقیه‌ی مقادیر حقیقی، مثبت است.

مثال آموزشی

• عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) \frac{3x^2 - 26x - 9}{|x^2 - 5x + 4|}$$

$$۲) \frac{|6x^2 - 5x - 6|}{(x^2 + x)\sqrt{x+1}}$$

$$۳) \frac{-3|-x^2 + x - 8|}{(x-2)|9x^2 + 6x + 1|}$$

$$۴) \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{2x^2 + 8x - 10}$$

$$۵) \frac{1 + \sin^2 x}{x^2 - 1}$$

$$۶) \frac{\sin^2 x + \sin x \cos^2 x}{1 + x^2} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$۱) P = \frac{3x^2 - 26x - 9}{|x^2 - 5x + 4|}$$

$$3x^2 - 26x - 9 = 0 \Rightarrow x' = 9, x'' = -\frac{1}{3}$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x' = 1, x'' = 4$$

چون $|x^2 - 5x + 4|$ به ازای $x=1$ و $x=4$ برابر با صفر و به ازای تمام مقادیر حقیقی دیگر، همواره مثبت است بنابراین علامت P بستگی به علامت صورت کسر دارد. لذا کافی است صورت کسر را تعیین علامت کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	4	9	$+\infty$
$3x^2 - 26x - 9$	+	-	-	-	+	+
P	+	-	تعریف نشده	تعریف نشده	+	+

$$۲) P = \frac{|6x^2 - 5x - 6|}{(x^2 + x)\sqrt{x+1}}$$

$$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow D_p = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$$

ابتدا دامنه‌ی تعریف عبارت P را به دست می‌آوریم:

چون $\sqrt{x+1}$ و $|6x^2 - 5x - 6|$ به ازای $x > -1$ مثبت هستند، پس علامت P بستگی به علامت $x^2 + x$ دارد. بنابراین آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$6x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x' = \frac{3}{2}, x'' = -\frac{2}{3}$$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x' = -1, x'' = 0$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
x^2+x	+	0	-	-	+	+
P		-	-	+	+	+

تعریف نشده تعریف نشده

$$3) P = \frac{-3|-x^2+x-8|}{(x-2)|9x^2+6x+1|}$$

معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد. $-x^2+x-8=0 \Rightarrow \Delta = -31 < 0$

$$9x^2+6x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}, x-2=0 \Rightarrow x=2$$

چون $|-x^2+x-8|$ و $|9x^2+6x+1|$ به ازای تمام مقادیر حقیقی همواره نامنفی هستند، بنابراین علامت P بستگی به علامت $\frac{-3}{x-2}$ دارد، لذا آن را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$\frac{-3}{x-2}$	-	-	+	-
P	+	+	-	-

تعریف نشده تعریف نشده

$$4) P = \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{2x^2+8x-10} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{2x^2+8x-10} = \frac{|x-1|}{2x^2+8x-10}$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1, 2x^2+8x-10=0 \Rightarrow x' = -1, x'' = -5$$

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$
$2x^2+8x-10$	+	0	-	+
P	+	-	+	+

تعریف نشده تعریف نشده

چون $|x-1|$ همواره نامنفی است، لذا علامت P بستگی به علامت مخرج دارد:

$$5) P = \frac{1+\sin^2 x}{x^2-1}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1+\sin^2 x \leq 2$$

پس علامت P بستگی به علامت مخرج کسر دارد، بنابراین کافی است مخرج آن را تعیین علامت کنیم:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	+	0	-	+
P	+	-	+	+

$$6) P = \frac{\sin^2 x + \sin x \cos^2 x}{1+x^2} \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

مخرج کسر عبارت P همواره بزرگتر از صفر است، در نتیجه علامت P بستگی به علامت صورت کسر دارد، بنابراین کافی است، صورت آن را تعیین علامت کنیم:

$$\sin^2 x + \sin x \cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0 \Rightarrow \sin x \times 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

چون $\sin x$ در ربع اول و دوم ($0 \leq x \leq \pi$) مثبت و در ربع سوم و چهارم ($\pi \leq x \leq 2\pi$) منفی است، پس:

x	$-\infty$	0	π	2π	$+\infty$
$\sin^2 x + \sin x \cos^2 x$		+	-	+	
P		+	-	+	

• عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید:

۱) $|(x^2 - 4)(x^2 + 9x + 8)|$

۲) $\frac{|x^2 - 10x^2 + 9|}{-3x^2 + x - 1}$

حل:

۱) $P = |(x^2 - 4)(x^2 + 9x + 8)|$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x' = +2, x'' = -2$

$x^2 + 9x + 8 = 0 \Rightarrow x' = -1, x'' = -8$

x	$-\infty$	-8	-2	-1	+2	$+\infty$
$(x^2 - 4)(x^2 + 9x + 8)$	+	+	+	+	+	+

۲) $P = \frac{|x^2 - 10x^2 + 9|}{-3x^2 + x - 1}$

$x^2 - 10x^2 + 9 = 0$

$y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow y = 1, y = 9$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1, x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$-3x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -11 < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ سه جمله‌ای همواره منفی است.

چون علامت صورت کسر همواره نامنفی و علامت مخرج آن منفی است پس علامت P به ازای $x = \pm 1$ و $x = \pm 3$ برابر با صفر است و به ازای سایر مقادیر x همواره منفی است.

۷ تعیین علامت عبارت‌های جبری در حالت کلی

ابتدا تمام عبارت‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه‌ها را به دست می‌آوریم، سپس ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ در جدول وارد می‌کنیم، در این روش علامت اولین خانه‌ی سمت راست جدول را مشخص نموده و سپس از راست به چپ علامت خانه‌ها را یک در میان تغییر می‌دهیم و هر جا که از ریشه‌ی مضاعف عبور کردیم، علامت را تغییر نمی‌دهیم.

تذکره: علامت اولین خانه‌ی سمت راست جدول از ضرب علامت ضریب جملات پرتوان عبارت‌ها به دست می‌آید.**تذکره:** «ریشه‌ی مضاعف» در یک معادله ریشه‌ای است که به تعداد دفعات زوج تکرار شود، بنابراین هر معادله به فرم $(x-a)^{2n} = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف $x = a$ می‌باشد و «ریشه‌ی ساده» در یک معادله ریشه‌ای است که به تعداد دفعات فرد تکرار شود، بنابراین هر معادله به فرم $(x-b)^{2n+1} = 0$ دارای ریشه‌ی ساده‌ی $x = b$ می‌باشد.

مثال آموزشی

عبارت $P(x) = \frac{(1-x^2)(x^2-x-2)}{(x^2-4)(3+x)}$ را تعیین علامت کنید.

حل:

$1-x^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ و $x^2-x-2 = (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$

$x^2-4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ و $3+x = 0 \Rightarrow x = -3$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	1	2	$+\infty$
P(x)	-	-	+	-	+	-	-

تعریف نشده

تعریف نشده

تعریف نشده

 $x = 2$ دو دفعه تکرار شده، بنابراین مضاعف است.علامت اولین خانه: $\leftarrow \begin{matrix} (-)(+) \\ (+)(+) \end{matrix}$ **تذکره:** در تعیین علامت عبارت‌های جبری می‌توان از عبارت‌های مثبت صرف‌نظر نمود.

تست نمونه

• کسر $\frac{(x-1)(x-2)}{(x^2+1)(x^2-7x+12)}$ در کدام فاصله‌ی زیر همواره منفی است؟

(۴, $+\infty$)

(۳, ۴)

(۲, ۳)

(- ∞ , ۱)

حل: عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است، بنابراین در تعیین علامت صرف‌نظر می‌شود.

$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3, 4$

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
کسر	+	-	+	-	+	+

تعریف نشده

منفی $\rightarrow 3 < x < 4$ منفی $\rightarrow 1 < x < 2$

بنابراین گزینه‌ی «۳» پاسخ صحیح است.

نامعادلات

۱ مقدمه: در صورتی که یک نابرابری شامل یک یا چند متغیر باشد و به ازای بعضی از مقادیر عددی که جایگزین متغیرها می‌شوند، درست؛ و به ازای بعضی از مقادیر عددی دیگر نادرست باشد، آن نابرابری را یک نامعادله گویند.

هر نابرابری بین دو عبارت جبری شامل یک متغیر را نامعادله‌ی یک مجهولی می‌گوییم. مجموعه جواب نامعادله‌ی یک مجهولی، مجموعه‌ی همه‌ی عددهایی است که به ازای آن‌ها نامعادله به یک نابرابری درست تبدیل شود. در این کتاب همه‌ی عددهایی را که جایگزین متغیر در یک نامعادله می‌کنیم از مجموعه‌ی عددهای حقیقی « $\mathbb{R}$ » انتخاب می‌کنیم. به عنوان مثال نامعادله‌ی $x > 5$ که در آن $x \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید؛ اگر به جای x در این نامعادله عدد ۷ را قرار دهیم، ملاحظه می‌کنیم که نابرابری $7 > 5$ درست است، بنابراین ۷ داخل مجموعه جواب نامعادله است، ولی ۲ متعلق به مجموعه جواب نامعادله‌ی بالا نیست. با کمی دقت درمی‌یابیم که اگر به جای x هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۵ را قرار دهیم، نامعادله به یک نابرابری درست تبدیل می‌شود، در نتیجه همه‌ی عددهای حقیقی بزرگ‌تر از ۵، مجموعه جواب این نامعادله می‌باشد. نمایش مجموعه جواب نامعادله‌ی فوق روی محور اعداد به صورت زیر است:



در سال قبل و بخش‌های قبلی با تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها و استفاده از آن آشنا شدید. ابتدا مروری بر آموخته‌های سال قبل خواهیم داشت.

۲ خواص نامساوی‌ها

قرارداد:

الف) مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت را با $\mathbb{R}^+$ و مجموعه‌ی اعداد حقیقی منفی را با $\mathbb{R}^-$ نمایش می‌دهیم، پس:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

$$\begin{cases} a < b \Leftrightarrow (a-b) \in \mathbb{R}^- \\ a < b \Leftrightarrow (b-a) \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

ب)

$\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ یا $a = b$ یا $a > b$ (قاعده‌ی تثلیث)

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

۲-۱ ویژگی ۱ :

تذکره: علامت ∇ را بخوانید: برای هر مقدار یا هر چه باشد.

۲-۲ ویژگی ۲ : (تعدی)

$$a < b \Rightarrow a \pm c < b \pm c$$

۲-۳ ویژگی ۳ :

یعنی می‌توان به دو طرف نامساوی هر عدد دلخواه را اضافه یا کم نمود.

$$a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc \quad \text{و} \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

۲-۴ ویژگی ۴ :

یعنی دو طرف یک نامساوی را می‌توان همواره در یک عدد مثبت ضرب یا تقسیم نمود.

$$a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc \quad \text{و} \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

۲-۵ ویژگی ۵ :

یعنی اگر دو طرف یک نامساوی را در یک عدد منفی ضرب یا تقسیم نماییم، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d$$

۲-۶ ویژگی ۶ :

یعنی می‌توان طرفین دو نامساوی را در هر حالتی، نظیر به نظیر جمع کرد (فقط جمع).

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow 0 < ac < bd \quad \text{و} \quad \begin{cases} a < b < 0 \\ c < d < 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd > 0$$

۲-۷ ویژگی ۷ :

یعنی طرفین دو نامساوی هم علامت را، نظیر به نظیر می‌توان در هم ضرب نمود ولی باید به این نکته دقت نماییم که وقتی نامساوی‌ها کوچک‌تر از صفر می‌باشند، جهت عوض می‌شود.

تست نمونه

• اگر $a < b$ و $c < d$ باشد کدام رابطه همواره درست است؟

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \quad (۴)$$

$$ac < bd \quad (۳)$$

$$a - d < b - c \quad (۲)$$

$$a - c < b - d \quad (۱)$$

$$c < d \Rightarrow -d < -c$$

$$\begin{cases} a < b \\ -d < -c \end{cases} \xrightarrow{\text{دو طرف را جمع می‌کنیم}} a + (-d) < b + (-c) \Rightarrow a - d < b - c$$

بنابراین گزینه‌ی «۲» پاسخ صحیح است. (برای سایر گزینه‌ها مثال نقض بیاورید)

مثال آموزشی

• اگر $x - y \geq 2$ و $y - z \geq 3$ و $x + z \leq 5$ باشد، نشان دهید: $z \leq 0$

حل:

$$\begin{cases} x - y \geq 2 \\ y - z \geq 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو نامساوی را جمع می‌کنیم}} x - z \geq 5$$

$$\begin{cases} x - z \geq 5 \\ x + z \leq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z \geq 5 \\ -x - z \geq -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z \geq 5 \\ -x - z \geq -5 \end{cases} \xrightarrow{\div (-2)} z \leq 0$$

۱۸-۲ ویژگی ۸ :

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ a < b < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

(الف)

یعنی وقتی دو طرف نامساوی که هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند را معکوس می‌کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود.

$$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

(ب)

یعنی وقتی طرفین نامساوی که یکی مثبت و دیگری منفی است معکوس می‌شود، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

۱۹-۲ ویژگی ۹ :

$$\text{الف) } 0 < a < b \Rightarrow 0 < a^{rn} < b^{rn}$$

$$\text{ب) } a < b < 0 \Rightarrow a^{rn} > b^{rn} > 0$$

$$\text{ج) } a < b \Rightarrow a^{rn+1} < b^{rn+1}$$

این ویژگی بیان می‌دارد که طرفین یک نامساوی را در هر حالتی می‌توان به توان یک عدد فرد رساند. ولی حق نداریم هر نامساوی را به توان زوج برسانیم مگر آن که دو طرف آن را بشناسیم، اگر هر دو طرف مثبت باشند، مانعی ندارد ولی اگر هر دو طرف منفی بودند و به توان زوج رساندید فراموش نکنید که جهت نامساوی را عوض کنید.

۱۰-۲ ویژگی ۱۰ :

$$\text{الف) } 0 < a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

$$\text{ب) } a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

۱۱-۲ ویژگی ۱۱ :

$$\text{الف) } a^{rn} < b^{rn} \Leftrightarrow |a| < |b|$$

$$\text{ب) } a^{rn+1} < b^{rn+1} \Leftrightarrow a < b$$

تست نمونه

• اگر $a^{\frac{1}{2}} < b^{\frac{1}{2}}$ باشد کدام گزینه‌ی زیر صحیح است؟

$$ab > 1 \quad (۴)$$

$$ab < 1 \quad (۳)$$

$$a < b \quad (۲)$$

$$a > b \quad (۱)$$

$$a^{\frac{1}{2}} < b^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{b} < \sqrt{b} \times \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{ab} < \sqrt{b^2} \Rightarrow \sqrt{ab} < b \Rightarrow ab < 1$$

حل:

بنابراین گزینه‌ی «۳» پاسخ صحیح است.

۱۲-۲ ویژگی ۱۲ :

$$\text{الف) } a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a < a^2 < a^3 < \dots \\ a > \sqrt{a} > \sqrt[3]{a} > \dots \end{cases}$$

$$\text{ب) } 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a > a^2 > a^3 > \dots \\ a < \sqrt{a} < \sqrt[3]{a} < \dots \end{cases}$$

یعنی اعدادی که بین صفر و یک قرار دارند، هر چه به توان برسند کوچکتر می‌شوند و هر چه از آن‌ها جذر بگیریم بزرگتر می‌شوند.

۱۳-۲ ویژگی ۱۳ : [بسیار مهم]

$$\text{الف) } x^r \leq a^r \xrightarrow{a>0} |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$\text{ب) } x^r \geq a^r \xrightarrow{a>0} |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ یا } x \geq a$$

مثال آموزشی

• مجموعه جواب نامعادله $(x^2 - 3)^2 \leq 1$ را به دست آورید.

حل: با استفاده از ویژگی ۱۳:

$$(x^2 - 3)^2 \leq 1^2 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 3 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 2^2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 & (1) \\ x^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq (\sqrt{2})^2 \Rightarrow x \leq -\sqrt{2} \text{ یا } x \geq \sqrt{2} & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2)} x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 4$$

• اگر a و b هم علامت باشند، ثابت کنید:

حل: می‌دانیم که هر عبارت به شکل u^2 همواره نامنفی است، یعنی $u^2 \geq 0$ ، لذا:

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2 \times \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2 \geq 0 \xrightarrow{+2} \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 \geq 4 \Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 4 \Rightarrow \left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2$$

هرگاه a و b هر دو هم علامت باشند، $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{a}$ هر دو مثبت بوده و در نتیجه $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ مقداری مثبت است و $\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ و عبارت داده شده در صورت مسأله ثابت می‌شود.

۱۴-۲ ویژگی ۱۴ :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ یا } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \notin (-2, 2)$$

یعنی مجموع دو عدد معکوس، همواره بزرگتر یا مساوی ۲ و یا کوچکتر یا مساوی (-۲) است، پس:

مثال آموزشی

• اگر $A = \frac{x^2 + 1}{2x}$ باشد، ثابت کنید $A \geq 1$ یا $A \leq -1$

حل:

$$A = \frac{x^2 + 1}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$$

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \geq \frac{1}{2} \times 2 \Rightarrow A \geq 1 \\ x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \leq \frac{1}{2} \times (-2) \Rightarrow A \leq -1 \end{cases}$$

• ثابت کنید $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$(b - c)^2 \geq 0 \Rightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \Rightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ac) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(c - a)^2 \geq 0$$

$$2[(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc)] \geq 0 \xrightarrow{+2} (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc) \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

نتیجه: تساوی رابطه‌ی فوق موقعی برقرار است که: $a = b = c$

• اگر $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \frac{3a^3 + 4b^3 + 5c^3}{b^2a + a^2c + c^2b}$$

حل: از فرض مسأله درمی‌یابیم که: $a = b = c$ و داریم:

$$A = \frac{3a^3 + 4a^3 + 5a^3}{a^2a + a^2a + a^2a} = \frac{12a^3}{3a^3} = 4$$

۳ دو نامعادله‌ی هم‌ارز

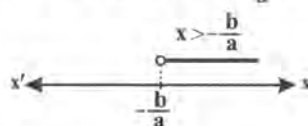
دو نامعادله را هم‌ارز گویند، هرگاه دارای مجموعه جواب‌های یکسان باشند، به عنوان مثال دو نامعادله‌ی $x - 1 > 2$ و $2x + 1 > 7$ هم‌ارز هستند، زیرا مجموعه جواب هر یک از آن‌ها بازه‌ی $(3, \infty)$ است.

۴ نامعادله‌ی یک مجهولی درجه‌ی اول

صورت کلی هر نامعادله‌ی یک مجهولی درجه اول به یکی از شکل‌های $ax + b \geq 0$ ، $ax + b < 0$ ، $ax + b \leq 0$ و $ax + b > 0$ است. که در آن‌ها $a \neq 0$ و b عددهای حقیقی هستند. هدف از حل نامعادله‌های بالا به دست آوردن مجموعه جواب آن نامعادله است. به عنوان مثال برای حل نامعادله‌ی $ax + b > 0$ با فرض این که $a \neq 0$ ابتدا دو طرف نامعادله را با $-b$ جمع می‌کنیم (یا b را به سمت راست نامعادله می‌بریم)، تا این که نامعادله‌ی هم‌ارز آن به دست آید:

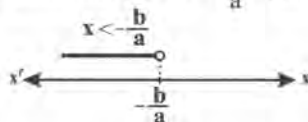
اکنون برای به دست آوردن مجموعه جواب نامعادله، باید دو طرف نامعادله را بر a تقسیم کنیم، بنابراین دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

● **حالت اول:** اگر $a > 0$ بنابراین $\frac{ax}{a} > -\frac{b}{a}$ پس $x > -\frac{b}{a}$ ؛ در نتیجه مجموعه جواب نامعادله، بازه‌ی $(-\frac{b}{a}, \infty)$ و نمایش مجموعه جواب



روی محور اعداد به صورت زیر است:

● **حالت دوم:** اگر $a < 0$ بنابراین $\frac{ax}{a} < -\frac{b}{a}$ پس $x < -\frac{b}{a}$ ؛ در نتیجه مجموعه جواب نامعادله، بازه‌ی $(-\infty, -\frac{b}{a})$ و نمایش مجموعه جواب



روی محور اعداد به صورت زیر است:

اگر در نامعادله‌ی $ax + b > 0$ داشته باشیم $a = 0$ و $b > 0$ در این صورت نامعادله برای هر x حقیقی درست است و مجموعه جواب آن، مجموعه اعداد حقیقی است. اما اگر $a = 0$ و $b \leq 0$ نامعادله‌ی بالا جواب ندارد و مجموعه جواب آن مجموعه‌ی تهی است.

نکته‌هایی برای حل نامعادله‌ی یک مجهولی درجه اول

برای حل نامعادله‌های یک مجهولی درجه اول می‌توان از خاصیت‌های نابرابری که در زیر آمده است، استفاده کرد:

(الف) اگر به دو طرف یک نامعادله عدد دلخواهی را اضافه کنیم یا از دو طرف آن عدد دلخواهی را کم کنیم، در مجموعه جواب نامعادله تغییری حاصل نمی‌شود.

(ب) اگر دو طرف یک نامعادله را در عدد مثبت دلخواهی ضرب یا بر عدد مثبت دلخواهی تقسیم کنیم، در مجموعه جواب نامعادله تغییری حاصل نمی‌شود.

(ج) اگر دو طرف یک نامعادله را در عدد منفی دلخواهی ضرب یا بر عدد منفی دلخواهی تقسیم کنیم، باید جهت نامعادله را عوض کنیم.

مثال آموزشی

● مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد مشخص کنید.

$$1) 2x + 7 \geq 15$$

$$2) -4x > 5$$

$$3) 3(x-1) < 3x+1$$

$$4) 2x + 4 > 2(x+2)$$

$$5) -2(2x+3) \leq 6(x-2)+1$$

$$6) \frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6}$$

$$7) \frac{x}{2} + 1 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$$

$$8) \frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} > \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$$

$$9) x \times 2^x + 2^{x+1} > 0$$

$$10) x \times 3^x + 3^{x+2} > 3^{x+3}$$

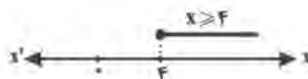
حل:

۱) ابتدا به طرفین نامعادله -7 را می‌افزاییم (یا 7 را به سمت راست نامعادله می‌بریم):

$$2x \geq 15 - 7 \Rightarrow 2x \geq 8$$

اکنون دو طرف نامعادله را بر ضریب x تقسیم می‌کنیم:

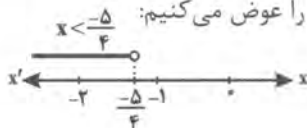
$$\frac{2x}{2} \geq \frac{8}{2} \Rightarrow x \geq 4$$



۲

دو طرف نامعادله را بر ۴- تقسیم و جهت نامعادله را عوض می‌کنیم:

$$\frac{-4}{-4}x < \frac{5}{-4} \Rightarrow x < -\frac{5}{4}$$



۳

$$2(x-1) < 3x+1 \Rightarrow 2x-2 < 3x+1$$

$$\Rightarrow 3x-3x < 1+2 \Rightarrow 0 < 3$$

چون نابرابری آخر همواره درست است، بنابراین نامعادله‌ی بالا به ازای تمام مقادیر حقیقی x برقرار است؛ یعنی مجموعه جواب این نامعادله اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است.

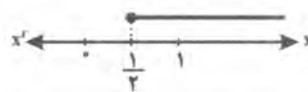
$$2x+4 > 2(x+2) \Rightarrow 2x+4 > 2x+4 \Rightarrow 2x-2x > 4-4 \Rightarrow 0 > 0$$

چون نابرابری آخر همواره نادرست است، بنابراین نامعادله‌ی بالا جواب ندارد و مجموعه جواب آن تهی است.

$$-2(2x+3) \leq 6(x-2)+1 \Rightarrow -4x-6 \leq 6x-12+1$$

$$\Rightarrow -4x-6x \leq -11+6$$

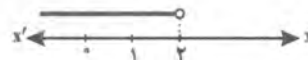
$$\Rightarrow -10x \leq -5 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$



۵

۶ دو طرف نامعادله را در مخارج مشترک کسرهای ۶ ضرب می‌کنیم:

$$6\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right) < 6\left(\frac{x-1}{6}\right) \Rightarrow 2x-3 < x-1 \Rightarrow x < 2$$



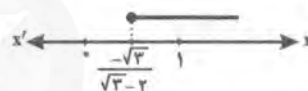
۶

۷ دو طرف نامعادله را در مخارج مشترک کسرهای ۲√۳ ضرب می‌کنیم:

$$2\sqrt{3}\left(\frac{x}{2}+1\right) \leq 2\sqrt{3}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{3}x+2\sqrt{3} \leq 2x+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x-2x \leq \sqrt{3}-2\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3}-2)x \leq -\sqrt{3}$$

$$x \geq \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$$



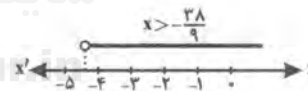
چون $\sqrt{3}-2 < 0$ ، بنابراین جهت نامساوی برعکس می‌شود:

۸ دو طرف نامعادله را در مخارج مشترک کسرهای ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$12\left[\frac{2}{3}(x+7)-\frac{x}{4}\right] > 12\left[\frac{1}{2}(3-x)+\frac{x}{6}\right]$$

$$\Rightarrow 8(x+7)-3x > 6(3-x)+2x \Rightarrow 8x+56-3x > 18-6x+2x$$

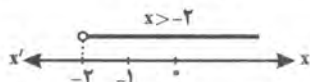
$$\Rightarrow 9x > -38 \Rightarrow x > -\frac{38}{9}$$



۹

$$x \times 3^x + 3^x \times 2 > 0 \Rightarrow 3^x(x+2) > 0$$

چون برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $3^x > 0$ ؛ پس نامعادله‌ی بالا وقتی جواب دارد که $x+2 > 0$ ، یعنی $x > -2$:

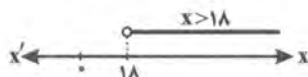


۱۰

$$x \times 3^x + 3^x \times 3^2 > 3^x \times 3^3 \Rightarrow 3^x(x+9) > 3^x \times 27$$

دو طرف نابرابری آخر را بر $3^x > 0$ تقسیم می‌کنیم:

$$x+9 > 27 \Rightarrow x > 18$$



۵ دستگاه نامعادله‌ی یک مجهولی درجه اول

دستگاه نامعادله‌ی یک مجهولی درجه اول عبارت است از دو یا چند نامعادله‌ی یک مجهولی که پس از ساده کردن، هر کدام از درجه‌ی اول باشند. هدف از حل این نوع دستگاه‌ها پیدا کردن مقادیر مشترکی از متغیر (مجموعه جواب) است که به ازای هر یک از آن‌ها نامعادله‌ها تبدیل به نابرابری‌های درست شوند.

برای حل این نوع دستگاه‌ها، ابتدا هر یک از نامعادله‌ها را جداگانه حل کرده و مجموعه جواب هر یک را به دست می‌آوریم، سپس برای پیدا کردن مجموعه جواب دستگاه، از همگی مجموعه جواب‌ها اشتراک می‌گیریم. هرگاه دستگاه شامل دو نامعادله باشد، آن را دستگاه نامعادله‌ی مضاعف یا توأم گویند.



• دستگاه‌های نامعادله‌های زیر را حل کنید:

$$۱) \begin{cases} 3x > 1 \\ -x < 3 \end{cases}$$

$$۲) \begin{cases} 2x < \sqrt{5} \\ -x > 1/6 \end{cases}$$

$$۳) \begin{cases} 3x + \frac{5}{21} < 2x + \frac{1}{3} - \frac{2x}{7} \\ 4x + \frac{3}{2} > 2x - \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$۴) 1 \leq 3x - 2 < 7$$

$$۵) 2x - 3 \geq 3(x - 3) + 4 \geq x - 1$$

$$۶) \begin{cases} \frac{x}{6} - \frac{x+9}{4} > \frac{2x}{3} \\ \frac{x+5}{4} - \frac{x-3}{6} > \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$۷) \begin{cases} 5x + 8 < 3x + 14 \\ -1 \leq 2x - 5 \leq 9 \\ x - 1 < \frac{x+4}{2} \end{cases}$$

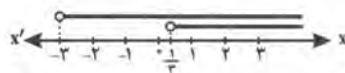
$$۸) \begin{cases} x^2 + x \geq x(x+2) - 1 \\ x \times 5^x - 5^x \geq 0 \\ x^3 + x < x(x^2 + 1) + 2 \end{cases}$$

حل:

۱

$$3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3} \Rightarrow D_1 = (\frac{1}{3}, \infty)$$

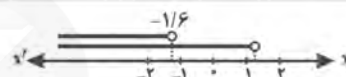
$$-x < 3 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow D_2 = (-3, \infty)$$



یا توجه به نمودار بالا، مجموعه جواب دستگاه برابر است با: $D_1 \cap D_2 = (\frac{1}{3}, \infty)$

$$2x < \sqrt{5} \Rightarrow x < \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow D_1 = (-\infty, \frac{\sqrt{5}}{2})$$

$$-x > 1/6 \Rightarrow x < -1/6 \Rightarrow D_2 = (-\infty, -1/6)$$



۲

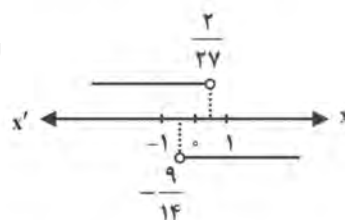
مجموعه جواب دستگاه برابر است با: $D_1 \cap D_2 = (-\infty, -1/6)$

$$21 \times (3x + \frac{5}{21}) < (2x + \frac{1}{3} - \frac{2x}{7}) \times 21 \Rightarrow 63x + 5 < 42x + 7 - 6x$$

$$\Rightarrow 63x - 42x + 6x < 7 - 5 \Rightarrow 27x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{27} \Rightarrow D_1 = (-\infty, \frac{2}{27})$$

$$6 \times (4x + \frac{3}{2}) > (2x - \frac{x}{3}) \times 6 \Rightarrow 24x + 9 > 12x - 2x$$

$$\Rightarrow 14x > -9 \Rightarrow x > -\frac{9}{14} \Rightarrow D_2 = (-\frac{9}{14}, \infty)$$



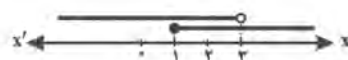
۳

مجموعه جواب دستگاه برابر است با: $D_1 \cap D_2 = (-\frac{9}{14}, \frac{2}{27})$

$$1 \leq 3x - 2 < 7 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 \geq 1 \Rightarrow 3x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_1 = [1, \infty) \\ 3x - 2 < 7 \Rightarrow 3x < 9 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow D_2 = (-\infty, 3) \end{cases}$$

$$D_1 \cap D_2 = [1, 3)$$

۴ راه حل اول:



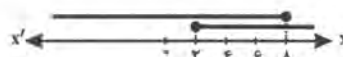
راه حل دوم: با انجام عملیات جبری سعی بر آن داریم که حدود متغیر x را با توجه به نامعادله‌ی مضاعف پیدا کنیم:

$$1 \leq 3x - 2 < 7 \Rightarrow 1 + 2 \leq 3x - 2 + 2 < 7 + 2 \Rightarrow 3 \leq 3x < 9$$

$$\Rightarrow \frac{3}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{9}{3} \Rightarrow 1 \leq x < 3 \Rightarrow x \in [1, 3)$$

$$2x + 3 \geq 3(x - 3) + 4 \geq x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 3(x - 3) + 4 \Rightarrow -x \geq -8 \Rightarrow x \leq 8 \\ 3(x - 3) + 4 \geq x - 1 \Rightarrow 2x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_1 = (-\infty, 8] \\ D_2 = [2, \infty) \end{cases} \Rightarrow D_1 \cap D_2 = [2, 8]$$

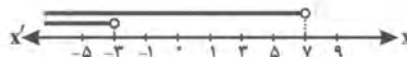


۵

$$f(x) \geq ax+b$$

$$\begin{cases} 12 \times \left(\frac{x}{6} - \frac{x+9}{4} \right) > 12 \times \frac{2x}{3} \\ 24 \times \left(\frac{x+5}{4} - \frac{x-3}{6} \right) > 24 \times \frac{x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3x - 27 > 8x \\ 6x + 30 - 4x + 12 > 8x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9x > 27 \\ -6x > -42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x < 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = (-\infty, -3) \\ D_2 = (-\infty, 7) \end{cases} \Rightarrow D_1 \cap D_2 = (-\infty, -3)$$



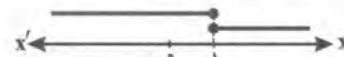
$$\begin{cases} 5x - 3x < 14 - 8 \\ 2x - 5 \geq -1 \\ 2x - 5 \leq 9 \\ 2(x-1) < 2 \times \frac{x+4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 6 \\ 2x \geq 4 \\ 2x \leq 14 \\ x < 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 2 \\ x \leq 7 \\ x < 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_1 = (-\infty, 3) \\ D_2 = [2, \infty) \\ D_3 = (-\infty, 7] \\ D_4 = (-\infty, 6) \end{cases} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = [2, 3)$$



$$\begin{cases} x^2 + x \geq x^2 + 2x - 1 \\ 5^x(x-1) \geq 0 \\ x^2 + x < x^2 + x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \geq -1 \\ x-1 \geq 0 \\ 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = (-\infty, 1] \\ D_2 = [1, \infty) \\ D_3 = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{1\}$$



در واقع جواب دستگاه فقط یک نقطه است.

۶ نامعادله‌ی یک مجهولی درجه دوم

صورت کلی هر نامعادله‌ی درجه دوم پس از این که همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف نابرابری انتقال دادیم به یکی از شکل‌های $ax^2 + bx + c \leq 0$ ، $ax^2 + bx + c \geq 0$ ، $ax^2 + bx + c < 0$ ، $ax^2 + bx + c > 0$ از حل هر یک از نامعادله‌های بالا به دست آوردن مجموعه‌ی همه‌ی عددهای حقیقی است که به ازای آن‌ها نامعادله به یک نابرابری درست (مجموعه جواب) تبدیل شود. به عنوان مثال برای حل نامعادله‌ی $ax^2 + bx + c \leq 0$ ابتدا عبارت $P = ax^2 + bx + c$ را تعیین علامت کرده و سپس قسمت‌هایی از جدول تعیین علامت که P منفی یا برابر صفر باشد، مجموعه جواب نامعادله است.

Konkur.in

مثال آموزشی

• نامعادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $x^2 - x - 12 \geq 0$

۲) $x^2 \leq 8x$

۳) $x^2 + 21 > 10x$

۴) $x^2 \geq 36$

۵) $y^2 < 25$

۶) $(m-1)^2 \leq 2m(m-1)$

۷) $-6x^2 - x + 1 \geq 0$

۸) $-x^2 + x - 2 < 0$

حل:

۱ ابتدا عبارت $P = x^2 - x - 12$ را تعیین علامت می‌کنیم سپس قسمت‌هایی از جدول تعیین علامت که P مثبت یا صفر باشد، مجموعه جواب نامعادله است:

$$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 4$$

$$\text{مجموعه جواب } D = (-\infty, -3] \cup [4, \infty)$$

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$x^2 - x - 12$	+	0	-	+

$$x^2 \leq 8x \Rightarrow x^2 - 8x \leq 0$$

$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 8$$

$$\text{مجموعه جواب } D = [0, 8]$$

x	$-\infty$	0	8	$+\infty$
$x^2 - 8x$	+	0	-	+

$$x^2 + 21 > 10x \Rightarrow x^2 - 10x + 21 > 0$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-7) = 0 \Rightarrow x = 3, x = 7$$

$$\text{مجموعه جواب } D = (-\infty, 3) \cup (7, \infty)$$

x	$-\infty$	3	7	$+\infty$
$x^2 - 10x + 21$	+	0	-	+



$$x^2 \geq 36 \Rightarrow x^2 - 36 \geq 0$$

$$x^2 - 36 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+6) = 0 \Rightarrow x = -6, x = 6$$

$$\text{مجموعه جواب } D = (-\infty, -6] \cup [6, \infty)$$

x	$-\infty$	-6	6	$+\infty$
$x^2 - 36$	+	-	-	+

۴ راه حل اول:

راه حل دوم: بنابر خاصیت نابرابری $a^2 \geq b^2 \Leftrightarrow a \geq b$ یا $a \leq -b$ داریم:

$$x^2 \geq 36 \Rightarrow x \geq 6 \text{ یا } x \leq -6 \Rightarrow D = (-\infty, -6] \cup [6, \infty)$$

۵ بنابر خاصیت نابرابری $a^2 < b^2 \Leftrightarrow -b < a < b$ داریم:

$$y^2 < 25 \Rightarrow -5 < y < 5 \Rightarrow D = (-5, 5) \text{ مجموعه جواب}$$

$$(m-1)^2 \leq 2m(m-1) \Rightarrow m^2 - 2m + 1 \leq 2m^2 - 2m$$

$$\Rightarrow -m^2 + 1 \leq 0 \Rightarrow m^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow m^2 \geq 1 \Rightarrow m \geq 1 \text{ یا } m \leq -1$$

$$\text{مجموعه جواب } D = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$-6x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$6x^2 - x + 1$	-	-	+	-

$$\text{مجموعه جواب } D = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$$

$$-x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = -7 < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases}$$

$$\text{مجموعه جواب } D = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

در نتیجه سه جمله‌ای $-x^2 + x - 2$ برای هر $x \in \mathbb{R}$ همواره منفی است، پس:

• ثابت کنید که معادله‌ی $(m-1)x^2 - 3mx + 1 - m = 0$ به ازای هر مقدار حقیقی m دارای دو ریشه‌ی متمایز است.

حل: می‌دانیم که معادله‌ی درجه دوم یک مجهولی وقتی دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است که $\Delta > 0$ ؛ بنابراین نشان می‌دهیم که دلتای معادله برای هر $m \in \mathbb{R}$ مثبت است:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3m)^2 - 4(m-1)(1-m)$$

$$= 9m^2 + 4(m-1)^2$$

چون عبارت $9m^2 + 4(m-1)^2$ برای هر $m \in \mathbb{R}$ مثبت است، در نتیجه $\Delta > 0$ ؛ پس معادله‌ی بالا همواره دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است.

• به ازای کدام مقادیر حقیقی k ، معادله‌ی $x^2 + (k+2)x + k + 2 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

حل: می‌دانیم معادله وقتی دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است که $\Delta > 0$ ، پس کافی است نامعادله‌ی زیر را حل کنیم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (k+2)^2 - 4(k+2) > 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 4 - 4k - 8 > 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 4 > 0 \Rightarrow k^2 > 4 \Rightarrow k > 2 \text{ یا } k < -2$$

$$k \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$$

• نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$1) x^2 - 3x^2 + 3 > x$$

$$2) x^5 + 2 \leq 2x^2 + x^2$$

$$3) \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x-2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-2}$$

$$4) x^4 - 11x^2 + 18 < 0$$

حل:

$$x^2 - 3x^2 + 3 > x \Rightarrow x^2 - 3x^2 - x + 3 > 0 \Rightarrow x^2(x-3) - (x-3) > 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x^2-1) > 0$$

برای بدست آوردن مجموعه جواب، ابتدا عبارت $P = (x-3)(x^2-1)$ را تعیین علامت می‌کنیم و سپس قسمت‌هایی از جدول تعیین علامت که P مثبت است، مجموعه جواب نامعادله می‌باشد:

$$x-3 = 0 \Rightarrow x=3$$

$$x^2-1 = 0 \Rightarrow x=-1, x=1$$

$$\text{مجموعه جواب } D = (-1, 1) \cup (3, \infty)$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	+	+
x^2-1	+	-	+	+	+
P	-	+	-	+	+

$$x^5 + 2 \leq 2x^2 + x^2 \Rightarrow x^5 + 2 - 2x^2 - x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2(x^3 - 2) - (x^2 - 2) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2)(x^3 - 1) \leq 0 \Rightarrow (x^2 - 2)(x-1)(x^2 + x + 1) \leq 0$$

$$(x^2 - 2)(x-1) \leq 0$$

$$x-1 = 0 \Rightarrow x=1$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$$

$$\text{مجموعه جواب } D = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [1, \sqrt{2}]$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	+	+
x^2-2	+	-	-	+	+
$(x^2-2)(x-1)$	-	+	-	+	+

چون سه جمله‌ای $x^2 + x + 1$ همواره مثبت است، داریم:

$$x^2 + 4x - 2 \geq 2x - 3 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 \geq 0$$

۳ چون $1 < \frac{2}{3} < 0$ بنابراین نامعادله‌ی بالا وقتی برقرار است که:

چون نامعادله‌ی آخر برای هر $x \in \mathbb{R}$ درست می‌باشد، بنابراین مجموعه جواب نامعادله، $\mathbb{R}$ است؛ یعنی $D = (-\infty, \infty)$.

$$x^4 - 11x^2 + 18 < 0 \Rightarrow (x^2 - 2)(x^2 - 9) < 0$$

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3$$

$$D = (-3, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3)$$

x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$
$x^2 - 2$	+	+	0	-	0	+
$x^2 - 9$	+	0	-	-	0	+
$(x^2 - 2)(x^2 - 9)$	+	0	-	0	-	0

۷ دستگاه نامعادله‌های یک مجهولی درجه‌ی دو

دو یا چند نامعادله که از درجه‌های اول، دوم یا بیشتر باشند و هدف از حل آن‌ها به دست آوردن مجموعه جوابی باشد که برای هر عضو آن، نامعادله‌ها به ناهمبازی‌های درست تبدیل شوند، دستگاه نامعادلات یک مجهولی خطی نامیده می‌شود. برای حل چنین دستگاهی ابتدا هر نامعادله را جداگانه حل کرده و مجموعه جواب را به دست می‌آوریم؛ سپس اشتراک بین جواب‌های به دست آمده، مجموعه جواب دستگاه نامعادلات است.

مثال آموزشی

• دستگاه‌های نامعادلات زیر را حل کنید.

$$1) \begin{cases} \Delta x^2 - 7x > 0 \\ x^2 - 11x + 30 < 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^3 - 11x^2 + 10x > 0 \\ x^3 - 12x^2 + 32x > 0 \end{cases}$$

حل:

$$\Delta x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{7}{\Delta}; x^2 - 11x + 30 = 0 \Rightarrow x = 5, x = 6$$

$$D_1 = (-\infty, 0) \cup (\frac{7}{\Delta}, \infty)$$

$$D_2 = (5, 6)$$

$$D = D_1 \cap D_2 = (5, 6)$$

x	$-\infty$	0	$\frac{7}{\Delta}$	$+\infty$
$\Delta x^2 - 7x$	+	0	-	0

x	$-\infty$	5	6	$+\infty$
$x^2 - 11x + 30$	+	0	-	0

۲ تمرین ۲ را خودتان حل کنید.

• حدود a را چنان تعیین کنید که به ازای تمام مقادیر x داشته باشیم:

$$\frac{ax^2 + 2x + a - 2}{2x^2 + 3x + 2} > 0$$

حل: چون مخرج کسر همواره مثبت است، بنابراین برای این که کسر مثبت باشد، باید صورت کسر همواره مثبت باشد، یعنی:

$$ax^2 + 2x + a - 2 > 0 \text{ برای این منظور باید دستگاه نامعادلات } \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \text{ را حل کنیم.}$$

$$\begin{cases} \Delta = (2)^2 - 4(a)(a-2) < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a^2 + 8a + 4 < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 1 - \sqrt{2}, a > 1 + \sqrt{2} \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in (1 + \sqrt{2}, \infty)$$

• m را چنان تعیین کنید که ناهمبازی زیر به ازای تمام مقادیر حقیقی x برقرار باشد:

$$(m-3)x^2 - (2m+1)x + m-1 < 0$$

حل: برای این که عبارت درجه دوم بالا منفی باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} 1) \Delta < 0 \\ 2) a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 4(m-3)(m-1) < 0 \\ m-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20m-11 < 0 \\ m < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m < \frac{11}{20} \\ m < 3 \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty, \frac{11}{20})$$

۸ نامعادلات کسری [گویا]

هر نامعادله که عبارات تشکیل دهنده‌ی آن از عبارات کسری گویا تشکیل شده باشد، یک نامعادله‌ی گویا نامیده می‌شود. برای حل آن با بردن همه‌ی عبارات به یک طرف نامعادله و استفاده از جدول تعیین علامت و خواص نامساوی‌ها مجموعه‌ی جواب نامعادله را می‌یابیم.

مثال آموزشی

• نامعادله‌ی $\frac{3+2x}{4-2x} < 1$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{3+2x}{4-2x} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{3+2x-4+2x}{4-2x} < 0 \Rightarrow \frac{4x-1}{4-2x} < 0$$

$$4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$4-2x=0 \Rightarrow x=2$$

$$\text{مجموعه جواب} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < \frac{1}{4} \text{ یا } x > 2\}$$

x	$\frac{1}{4}$	2
$4x-1$	-	+
$4-2x$	+	-
$P = \frac{4x-1}{4-2x}$	-	+
	جواب	جواب

تعریف نشده

• نامعادلات زیر را حل کنید:

۱) $1 - \frac{1}{x} < x+1$

۲) $\frac{1}{x^2+x+1} < 1$

حل ۱:

$$1 - \frac{1}{x} < x+1 \Rightarrow 0 < x+1-1+\frac{1}{x} \Rightarrow x + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} > 0 \xrightarrow{x^2+1>0} x > 0$$

حل ۲:

$$\frac{1}{x^2+x+1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1-x^2-x-1}{x^2+x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x^2-x-2}{x^2+x+1} < 0$$

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta = 1-4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

چون Δ مخرج منفی است، مخرج فاقد ریشه بوده و علامت آن همواره موافق علامت ضریب x^2 است. یعنی مخرج کسر همواره مثبت بوده و در نتیجه علامت کسر به صورت آن بستگی دارد، پس:

$$-x^2-x < 0 \Rightarrow x^2+x > 0 \Rightarrow x(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0$$

۹ نامعادلات گنگ

نامعادلاتی را که در آن‌ها عبارت‌های رادیکالی حضور دارد نامعادلات گنگ می‌نامند. روش حل این گونه نامعادلات شبیه روش حل معادلات گنگ است و سعی می‌شود با به توان رساندن‌های مناسب، رادیکال‌ها حذف شوند. اما در نامعادلات باید دقت بیشتری داشته باشیم، زیرا باید پرسید: آیا حق داریم طرفین یک نامساوی را به توان ۲ برسانیم، به عبارت دیگر آیا نامساوی $a < b$ با نامساوی $a^2 < b^2$ معادل است؟ به طور کلی دو طرف یک نامساوی را می‌توان به توان هر عدد فرد رساند ولی اگر دو طرف نامساوی هم علامت باشند می‌توانیم به توان زوج برسانیم ولی باید دقت نماییم در حالتی که هر دو طرف نامساوی منفی است، بعد از آن که به توان زوج رساندیم باید جهت نامساوی را عوض کنیم، یعنی:

$$a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$$

$$a < b < 0 \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$$

برای حل نامعادلات شامل عبارات رادیکالی ابتدا دامنه‌ی تعریف نامعادله را مشخص می‌کنیم. سپس با توجه به علامت عبارت‌های طرفین با به توان رساندن طرفین نامعادله و حذف عبارت رادیکالی، نامعادله را با توجه به شرایط حاکم بر آن (دامنه‌ی متغیر) حل می‌کنیم.

مثال آموزشی

• نامعادله‌ی $\sqrt{2x+7} < x+2$ را حل کنید.

حل: روشن است که یکی از شرایط حل این نامعادله نامنفی بودن $2x+7$ است پس باید $\frac{-7}{2} \leq x$. همچنین طرف دوم نامعادله باید

مقداری مثبت باشد، پس باید $x > -2$. با این شرایط طرفین نامعادله مثبت هستند و می‌توانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم. داریم:

$$2x+7 < x^2+4x+4$$

$$0 < x^2+2x-3$$

$$P = x^2+2x-3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases}$$

x	-3	1
x^2+2x-3	+	-
	جواب	جواب

البته این جواب‌ها وقتی قابل قبول هستند که شرط $x > -2$ نیز برآورده شود. بنابراین مجموعه جواب بازه‌ی $(-2, +\infty)$ خواهد بود.



۱۰ نامعادلات شامل قدرمطلق

نامعادلاتی را که دارای عبارت‌های قدرمطلق هستند، نامعادلات قدرمطلق می‌نامند. برای حل این گونه نامعادلات ابتدا باید به کمک خواص قدرمطلق، علامت قدرمطلق را حذف نموده و سپس با حل نامعادله‌ی به دست آمده به کمک تعیین علامت، مجموعه جواب نامعادله را بیابیم. در حل نامعادلات قدرمطلق می‌توانیم از نکات زیر استفاده نماییم:

- ۱ $u \geq 0 \Leftrightarrow |u| = u$ ۲ $u < 0 \Leftrightarrow |u| = -u$ ۳ $|u| \leq a \xrightarrow{a \geq 0} -a \leq u \leq a$
 ۴ $|u| \geq a \xrightarrow{a > 0} u \leq -a$ یا $u \geq a$ ۵ $|u| \geq |v| \Leftrightarrow u^2 \geq v^2$

تذکره: در حل نامعادلات قدر مطلق، موقعی می‌توانیم دو طرف نامعادله را به توان زوج برسانیم که هر دو طرف هم‌علامت باشند.



مثال آموزشی

• حدود x را از نامعادلات زیر به دست آورید.

$$|2x - 5| \geq x + 2 \quad \text{ب)}$$

$$|2x - 5| < 3 \quad \text{الف)}$$

حل: الف) با توجه به نکته‌ی ۳ بالا داریم:

$$|2x - 5| < 3 \Rightarrow -3 < 2x - 5 < 3 \rightarrow -3 + 5 < 2x < 3 + 5 \Rightarrow 2 < 2x < 8 \rightarrow 1 < x < 4$$

ب) ابتدا به کمک نکات ۱ و ۲ علامت قدرمطلق را حذف می‌کنیم:

$$\text{اگر } 2x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2} \Rightarrow |2x - 5| = 2x - 5 \quad \text{اگر } 2x - 5 < 0 \Rightarrow x < \frac{5}{2} \Rightarrow |2x - 5| = -(2x - 5)$$

حال با جایگذاری در نامعادله داریم:

$$\begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \quad (1) \Rightarrow 2x - 5 \geq x + 2 \Rightarrow x \geq 7 \quad (2) \xrightarrow{(1) \cap (2)} x \geq 7 \quad (5) \\ x < \frac{5}{2} \quad (3) \Rightarrow -(2x - 5) \geq x + 2 \Rightarrow x \leq 1 \quad (4) \xrightarrow{(3) \cap (4)} x \leq 1 \quad (6) \end{cases} \Rightarrow \text{جواب نامعادله} = (5) \cup (6) = (-\infty, 1] \cup [7, +\infty)$$

• نامعادله‌ی $|6 - 3x| \geq 5$ را حل کنید.

حل: مجموعه جواب این نامعادله، اجتماع مجموعه جواب‌های دو نامعادله‌ی $6 - 3x \geq 5$ و $6 - 3x \leq -5$ است. مجموعه جواب اولی بازه‌ی $(-\infty, \frac{1}{3}]$ و مجموعه جواب دومی $[\frac{11}{3}, \infty)$ است و اجتماع این دو بازه مجموعه جواب نامعادله‌ی اصلی است.

• نامعادله‌ی $|2x + 1| \geq 3$ را حل کنید.

حل: این نامعادله را می‌توان مانند مثال قبل حل کرد. اما از روش دیگری هم می‌توانیم استفاده کنیم. با توجه به مثبت بودن طرفین نامساوی، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

$$(2x + 1)^2 \geq 9$$

$$4x^2 + 4x + 1 \geq 9$$

$$4x^2 + 4x - 8 \geq 0$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$(x + 2)(x - 1) \geq 0$$

برای حل نامعادله‌ی اخیر از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

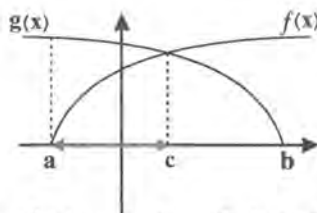
x	-2	1
$P = (x+2)(x-1)$	$+$	$-$
	جواب	جواب

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$$

۱۱ حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

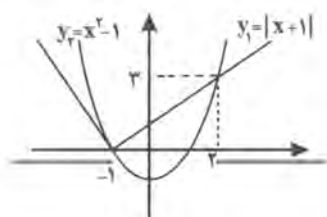
یک نامعادله‌ی دلخواه را می‌توان به شکل $f(x) \leq g(x)$ نوشت که f و g دو تابع می‌باشند. در حالت کلی، حل جبری یک نامعادله ممکن است بسیار پیچیده و حتی ناممکن باشد.

اما اگر بتوانیم نمودارهای این توابع را رسم کنیم، مجموعه جواب این نامعادله دقیقاً برابر مجموعه نقاطی مانند x است که در این نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می‌گیرد.



برای مشخص کردن مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x) < g(x)$ پس از رسم توابع f و g مقادیری از دامنه‌ی مشترک دو تابع را مشخص می‌کنیم که عرض نقاط تابع f از عرض نقاط تابع g کمتر باشد. در شکل بالا دامنه‌ی مشترک دو تابع، بازه‌ی $[a, b]$ می‌باشد. فقط در بازه‌ی (a, c) عرض نقاط منحنی f از عرض نقاط منحنی g کمتر است، پس جواب نامعادله بازه‌ی (a, c) می‌باشد.

مثال آموزشی



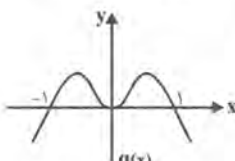
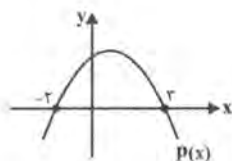
• نامعادله‌ی $x^2 - 1 < |x+1|$ را با استفاده از روش نموداری (هندسی) حل کنید.

حل: نمودار توابع $y_1 = |x+1|$ و $y_2 = x^2 - 1$ را رسم می‌کنیم.

باید مجموعه نقاطی را تعیین کنیم که در آن نقاط نمودار y_1 زیر نمودار y_2 واقع شده باشد. اجتماع دو بازه‌ی $(-\infty, -1)$ و $(2, \infty)$ مجموعه جواب نامعادله است.

تست نمونه

• نمودار توابع p و q داده شده؛ در این صورت اشتراک جواب‌های نامعادلات $p(x) \geq 0$ و $q(x) < 0$ کدام است؟



(۲) $(-1, 1)$

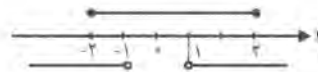
(۴) $[-1, 1]$

(۱) $[-2, -1) \cup (1, 3]$

(۳) $[-2, -1] \cup [1, 3]$

حل:

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \Rightarrow \text{یعنی قسمت‌هایی از نمودار که بالای محور } x \text{ هاست} \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \\ q(x) < 0 \Rightarrow \text{یعنی قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور } x \text{ هاست} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \text{یا} \\ x < -1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$



جواب‌ها: $[-2, -1) \cup (1, 2]$ اشتراک جواب‌ها

بنابراین گزینه‌ی «۱» پاسخ صحیح است.

• در قسمت مثبت محور x ‌ها اگر $x \in [a, b]$ باشد، آنگاه نامعادله‌ی $x^2 \geq 2^x$ همواره برقرار خواهد بود. در این صورت بیش‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

(۴) ۸

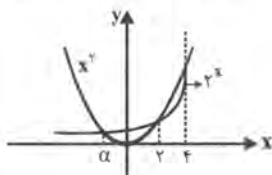
(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۲

حل: با توجه به نمودار، می‌بینیم که در بازه‌ی $[2, 4]$ نمودار $y = x^2$ بالاتر یا روی $y = 2^x$ قرار می‌گیرد؛ پس در هر زیربازه از این بازه نیز نامعادله برقرار است که بزرگ‌ترین بازه، همان بازه‌ی اصلی است (البته در قسمت منفی محور x ‌ها نیز در بازه‌ی $(-\infty, \alpha)$ نامعادله برقرار است که البته یافتن α دشوار است). بنابراین بیش‌ترین مقدار $b - a$ برابر $4 - 2$ یا ۲ است.

بنابراین گزینه‌ی «۱» پاسخ صحیح است.



حل معادله‌ی شامل عبارت‌های گویا و کنگ و قدر مطلق

۱ عبارت‌های گویا

کسرهایی را که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامیم، برای مثال عبارت‌های $3x - \frac{1}{x+3}, \frac{x+2}{x-1}, \frac{3x}{x+5}$ و $\frac{2x^2+x-1}{x+2}$ عبارت‌های گویا هستند.

۱-۱ دامنه‌ی عبارت‌های جبری گویا

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی عبارت‌های جبری گویا، ابتدا مخرج را برابر با صفر قرار می‌دهیم تا با حل یک معادله، ریشه‌های مخرج به دست آید، سپس اگر از مجموعه‌ی اعداد حقیقی، ریشه‌های مخرج را حذف کنیم، دامنه‌ی عبارت‌های جبری گویا به دست می‌آید، یعنی:

$$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

مثال آموزشی

• دامنه عبارت‌های گویای زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-1} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{x^2+2x}{x(x+1)} + \frac{3x^2}{x^2-4} \quad (\text{د})$$

$$\frac{2x^2+1}{x^2-3x+2} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{2x+1}{x^3+4x^2+3x} \quad (\text{ج})$$

حل: الف)

$$\text{ریشه‌های مخرج} \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$\text{ریشه‌های مخرج} \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

تذکره: مقدار عبارت گویا به ازای ریشه‌ی مخرج تعریف نشده است، یعنی اگر در عبارت گویا به جای متغیر، ریشه‌ی مخرج را قرار دهیم، آن‌گاه مخرج کسر برابر با صفر می‌شود، در این صورت کسر تعریف نشده است. در مثال «ب» اگر به جای x ریشه‌ی مخرج مثلاً $x=1$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x=1 \Rightarrow \frac{1}{1+2} - \frac{3}{1-1} = \frac{1}{3} - \frac{3}{0} \quad \text{تعریف نشده}$$

$$x^2 + 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases}$$

(ج)

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{0, -1, -3\}$$

$$\begin{cases} x(x+1) = 0 \Rightarrow x=0, x=-1 \\ x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

(د)

$$D = \mathbb{R} - \{0, -1, 2, -2\}$$

۱۲-۱ حل معادله‌ی شامل عبارت گویا



زمانی که من سال دوم دبیرستان بودم، یه روز معلم درس ریاضی‌مان اومدند سر کلاس و بعد از سلام و احوال‌پرسی رو در روی بچه‌ها ایستادند و خیلی جدی گفتند: بچه‌ها من برای حل مسأله‌ای دچار مشکل شدم، می‌خواستم به من کمک کنید تا این مسأله را حل کنم. بچه‌ها که کلی کنجکاو شده بودند، گفتند آقا بفرمائید. یکی از بچه‌ها هم که موضوع را خیلی جدی گرفته بود گفت: آقا اصلاً ناراحت نباشید فقط کافیست مشکل تون رو به ما بگید سه سوت اونو براتون حل می‌کنیم.

معلم‌مان آقای سعادت پشروه رفتند پای تابلو و این مسأله را نوشتند:

مغزن با دو شیر آپ، آپ کیری می شود. اگر هر دو شیر آپ باز باشد این مغزن بعد از ۱۸ دقیقه پر می شود. اما اگر هر یک از شیرهای آپ را به تنهایی باز کنیم موقعی که شیر اولی باز است مغزن ۱۵ دقیقه زودتر از لحظه ای که شیر دوم باز است پر می شود. این دو شیر هر کدام به تنهایی بعد از چند دقیقه مغزن آپ را پر می کنند؟

معلم مان به دانش آموزان فرصت داد تا روی مسأله کار کنند و بعد از مدتی از بچه ها خواست راه حل خود را ارائه کنند. علی: فکر کنم مسأله با تشکیل یک معادله حل می شود. فرض کنیم شیر اولی در ۱ دقیقه مغزن را پر کند، پس شیر دوم در $1+15=16$ دقیقه مغزن را لپریز آپ می کند اما نمی توانم فرض اول مسأله را بیان کنم.

آقای سعادت پترو: این دو شیر با هم در یک دقیقه چه کسری از مغزن را پر می کنند؟

دانش آموزان: معلوم است $\frac{1}{18}$ مغزن را.

سپس آقای سعادت پترو بچه ها را راهنمایی کردند و گفتند: حال شما مشخص کنید در یک دقیقه هر شیر چه میزان از مغزن را پر می کند و ببینید چگونه بین این نسبت ها می توانید ارتباط برقرار کنید.

رضا: فکر کنم بتوانم ارتباط بین این نسبت ها را بنویسم و سپس از معلم مان اجازه خواست و پای تابلو نوشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+15} = \frac{1}{18}$$

و توضیح داد میزان حجم آبی که در یک دقیقه هر یک از شیرها وارد مغزن می کنند مشخص است، پس اگر هر دو شیر باز باشد مجموعاً $\frac{1}{18}$ مغزن پر می شود. حال یا حل این معادله می توان t را به دست آورد.

آقای سعادت پترو از رضا تشکر کرد و گفت: برای حل این معادله باید عبارت متناظر آن را ساده کنیم. سپس از بچه ها خواستند روش خود را برای حل این معادله بیان کنند.

فرهاد: ما قبلاً برای جمع کسرها از روش مخرج مشترک استفاده می کردیم این چا هم می توانیم با استفاده از قوانین ک.م.م در چند جمله ای ها مخرج کسرها را یکی کنیم که در این چا ک.م.م همان حاصل ضرب مخرج ها می شود.

آقای سعادت پترو ضمن تشکر از فرهاد خواست تا راه حل خود را روی تابلو بنویسد و فرهاد راه حل خود را به صورت زیر روی تابلو نوشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+15} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{t+15+t}{t(t+15)} = \frac{1}{18} \Rightarrow \frac{2t+15}{t^2+15t} = \frac{1}{18} \Rightarrow 18(2t+15) = t^2+15t \Rightarrow 36t+270 = t^2+15t$$

$$\Rightarrow t^2 - 21t - 270 = 0 \Rightarrow (t-30)(t+9) = 0 \Rightarrow t = 30, t = -9$$

جواب $-9 = t$ غیر قابل قبول و جواب مسأله 30 دقیقه است.

چرا $-9 = t$ با وجودی که در معادله صدق می کند، نمی تواند جواب مورد قبول باشد؟

● حل یک مسئله

در یک مغازه ی ماهی های آکواریوم ماهی های تزئینی در محلول آب نمک نگهداری می شوند. به علت تازه کار بودن کارگرا، ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است در حالی که محلول آب نمک ۷ درصدی مورد نیاز است. برای رفع این مشکل چه پیشنهادی دارید؟

● **حالت اول:** فرض می کنیم نمک به اندازه ی کافی موجود باشد و بتوانیم یا اضافه کردن نمک کافی، محلول با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می کنیم که در محلول فعلی چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$\frac{4}{100} \times 200 = 8 \text{ کیلوگرم}$$

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب $8+x$ کیلوگرم می شود و جرم کل محلول $200+x$ کیلوگرم می شود، پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم:

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

با حل این معادله نتیجه می شود $x = \frac{600}{93}$. یعنی تقریباً ۶ کیلو و ۳۸۷ گرم نمک باید به محلول اضافه شود.

● **حالت دوم:** اگر نمک به اندازه ی کافی موجود نباشد و بخواهیم با تبخیر y کیلوگرم از آب، محلول ۷ درصد نمک بسازیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100}$$

با حل این معادله داریم $y = \frac{600}{7}$. یعنی تقریباً ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم آب را باید تبخیر کنیم.

۱-۳ حل معادلات گویا

معادله هایی را که در آن ها عبارت های گویا وجود داشته باشند، معادله ی گویا می نامیم. برای حل این معادله ها مراحل زیر را انجام می دهیم:



مرحله اول: دامنه‌ی جواب (دامنه‌ی متغیر) معادله را که همان دامنه‌ی عبارت‌های گویای معادله است، به دست می‌آوریم.

مرحله دوم: همه‌ی عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله انتقال می‌دهیم.

مرحله سوم: با مخرج مشترک‌گیری معادله را ساده می‌کنیم و آن را به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ تبدیل می‌کنیم. در این حالت کسر برابر با صفر است هرگاه صورت آن برابر با صفر باشد.

مرحله چهارم: با حل معادله‌ی $P(x) = 0$ ریشه‌های معادله را می‌یابیم. در این حالت ریشه‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی جواب معادله صدق کنند، یعنی مخرج کسرها را صفر نکنند.

مثال آموزشی

• ابتدا دامنه‌ی متغیر هر یک از معادله‌های زیر را تعیین کنید. سپس آن‌ها را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \quad \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3} & \text{ب)} \quad \frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5 \\ \text{ج)} \quad \frac{3}{3x^2-3x-28} = \frac{5}{5x^2-x-2} & \text{د)} \quad \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2} \\ \text{ه)} \quad \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2} - \frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} = \frac{3x}{x^2-4} & \text{و)} \quad \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x(1 - \frac{x-1}{x+1}) \end{array}$$

حل:

یادآوری: قبل از حل این مثال، مخرج مشترک‌گیری بین عبارت‌های جبری گویا را یادآوری می‌کنیم.

مخرج مشترک بین دو یا چند کسر همان کوچکترین مضرب مشترک بین مخرج‌های آن‌ها است. اما برای محاسبه‌ی [ک.م.م] بین مخرج کسرها، ابتدا مخرج هر کسر را در صورت امکان تجزیه می‌کنیم، سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با نمای بزرگتر در عوامل غیر مشترک را به دست می‌آوریم.

(الف)

$$\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$\begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-3, 4\}$$

مرحله اول: دامنه‌ی متغیر یا دامنه‌ی جواب معادله را به دست می‌آوریم:

$$\frac{x-2}{x-4} - \frac{x+1}{x+3} = 0$$

مرحله دوم: همه‌ی عبارت‌های جبری را به یک طرف معادله می‌بریم:

مرحله سوم: مخرج مشترک می‌گیریم و معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x-2)(x+3) - (x+1)(x-4)}{(x-4)(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-6-x^2+3x+4}{(x-4)(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x-2}{(x-4)(x+3)} = 0$$

$$4x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

مرحله چهارم: کسر وقتی برابر با صفر است که صورت آن صفر باشد، بنابراین داریم:

چون $x = \frac{1}{2} \in D$ بنابراین قابل قبول است.

(ب)

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0, -3\}$$

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(3x-2) + x(2x+5) - 5x(x+3)}{x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+7x-6+2x^2+5x-5x^2-15x}{x(x+3)} = 0 \Rightarrow \frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0$$

$$\Rightarrow -3x-6=0 \Rightarrow x=-2 \in D \quad \text{قابل قبول}$$

(ج)

$$\frac{3}{3x^2-3x-28} = \frac{5}{5x^2-x-2}$$



$$\begin{cases} 3x^2 - 3x - 28 = 0; \Delta = 345; x = \frac{3 \pm \sqrt{345}}{6} \\ 5x^2 - x - 20 = 0; \Delta = 401; x = \frac{1 \pm \sqrt{401}}{10} \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{345}}{6}, \frac{1 \pm \sqrt{401}}{10} \right\}$$

$$\frac{3}{3x^2 - 3x - 28} - \frac{5}{5x^2 - x - 20} = 0 \Rightarrow \frac{3(5x^2 - x - 20) - 5(3x^2 - 3x - 28)}{(3x^2 - 3x - 28)(5x^2 - x - 20)} = 0$$

$$\Rightarrow 15x^2 - 3x - 60 - 15x^2 + 15x + 140 = 0 \Rightarrow 12x + 80 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{20}{3} \in D \quad \text{قابل قبول}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \\ x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x(x-2)} - \frac{1+x}{x} - \frac{x-1}{x-2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2 - (x-2)(1+x) - x(x-1)}{x(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 2 - x^2 + x + 2 - x^2 + x = 0 \Rightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \notin D & \text{غیر قابل قبول} \\ x = -2 \in D & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2} - \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{3x}{x^2 - 4}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 2 \\ x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -2 \\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = -2 \end{cases}$$

$$D = \mathbb{R} - \{-2, 2, -1, 1\}$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{(x-2)(x+1)} - \frac{x^2 - x - 2}{(x+2)(x-1)} - \frac{3x}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(x-1)(x^2 + x - 2) - (x-2)(x+1)(x^2 - x - 2) - 3x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)} = 0$$

$$x^4 + x^3 + 4 + 2x^2 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - x^4 - x^3 - 4 + 2x^2 + 4x^2 - 4x - 3x^2 + 3x = 0$$

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{قابل قبول} \\ \\ \text{قابل قبول} \end{matrix}$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\begin{cases} x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - 3x + \frac{3x(x-1)}{x+1} = 0$$

$$\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 - 3x(x-1)(x+1) + 3x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 - 3x^2 + 3x + 3x^2 - 6x^2 + 3x = 0$$

$$\Rightarrow 10x - 6x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{قابل قبول} \\ \text{قابل قبول} \end{matrix}$$

(۵)

(۵)

(۹)

• مخرج مشترک حاصل جمع‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{4}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \quad \text{الف)}$$

$$\text{مخرج کسر اول} = x^2 + x = x(x+1)$$

$$\text{مخرج کسر دوم} = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

$$\text{مخرج مشترک} = x(x+1)(x+2) = [\text{ک.م.م.}]$$

$$\frac{2x+3}{x^2-1} + \frac{3}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-1} \quad \text{ب)}$$

$$\text{مخرج کسر اول} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$\text{مخرج کسر دوم} = x^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$$

$$\text{مخرج کسر سوم} = x^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$\text{مخرج مشترک} = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = [\text{ک.م.م.}]$$

• به ازای چه مقدار a معادله‌ی $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

حل: چون $x=2$ جواب معادله است، پس کافی است به جای x در معادله عدد ۲ را قرار دهیم، سپس مقدار a را محاسبه کنیم.

$$x=2 \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{2}{a-2} + \frac{a-2}{2} - \frac{a}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4 + a^2 - 4a + 4 - a^2 + 2a}{2(a-2)} = 0 \Rightarrow 8 - 2a = 0 \Rightarrow a = 4$$

• به ازای چه مقدار k معادله‌ی $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-6}$ دارای مجموعه‌ی جواب $\{-3\}$ است؟

حل: این معادله دارای دو مجهول k و t است، چون مقدار k را می‌خواهیم، پس k مجهول است و کافی است در معادله به جای t عدد -3 را قرار دهیم.

$$t=-3 \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27+k}{22} \Rightarrow \frac{22-27-k}{22} = 0 \Rightarrow k=1$$

• مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} = \frac{2x-3}{2x+2}$ را به دست آورید.

حل: ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها را به دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2x-2 = 2(x-1) \\ x^2-1 = (x-1)(x+1) \\ 2x+2 = 2(x+1) \end{cases}$$

$$\text{مخرج‌ها} = 2(x-1)(x+1)$$

طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم.

$$(x+1)(2x+3) - 5 \times 2 = (x-1)(2x-3)$$

$$2x^2 + 3x + 2x + 3 - 10 = 2x^2 - 3x - 2x + 3$$

$$10x - 10 = 0$$

$$x=1$$

اما $x=1$ مخرج کسر معادله را صفر می‌کند. پس معادله جواب ندارد.

۲ عبارت گنگ

عبارت جبری که گویا نباشد، عبارت جبری گنگ نامیده می‌شود. در عبارت‌های جبری گنگ رادیکال‌های مجهول‌دار وجود دارد، مانند:

$$2\sqrt{x+2}-1; x^2-3x\sqrt{x^2-4}, \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}+2; 2\sqrt{x+1}-3\sqrt{x^2-2x}$$

تذکره: عبارت جبری $(2+\sqrt{3})x^2 - \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{5}}{2}$ گنگ نیست. این عبارت جبری، چند جمله‌ای درجه دوم است به طوری که ضرایب آن اعداد گنگ می‌باشند.



۲-۱ دامنه‌ی عبارت‌های جبری گنگ

هرگاه در یک عبارت جبری، رادیکالی با فرجه‌ی زوج موجود باشد، این رادیکال وقتی تعریف شده است که عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد. یعنی $\sqrt[n]{f(x)}$ وقتی تعریف شده که $f(x) \geq 0$. هرگاه در یک عبارت جبری، رادیکالی با فرجه‌ی فرد موجود باشد، چون زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد هر عددی می‌تواند قرار گیرد، پس در این حالت دامنه‌ی $\sqrt[n]{f(x)}$ برابر همان D_f می‌باشد.

مثال آموزشی

• دامنه‌ی عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $3x + \sqrt{x-2}$

ب) $2\sqrt{3x+1} + \sqrt{4-2x}$

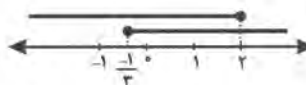
ج) $\sqrt{3-x} - \sqrt{7+x} + \sqrt{16+2x}$

د) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+3}$

حل: الف) $x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D = [2, +\infty)$

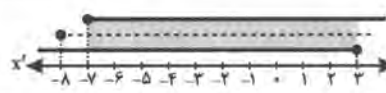
حل: الف)

ب) $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow D = [-\frac{1}{3}, 2] \\ 4-2x \geq 0 \Rightarrow 4 \geq 2x \Rightarrow x \leq 2 \end{cases}$



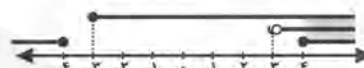
ب)

ج) $\begin{cases} 3-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -3 \Rightarrow x \leq 3 \\ 7+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -7 \\ 16+2x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -16 \Rightarrow x \geq -8 \end{cases} \Rightarrow D = [-7, 3]$



ج)

د) $\begin{cases} x^2-16 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 16 \Rightarrow x \geq 4 \text{ یا } x \leq -4 \\ x-3 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow D = [4, +\infty)$



د)

۲-۲ معادلات شامل عبارت گنگ

حل یک مسئله

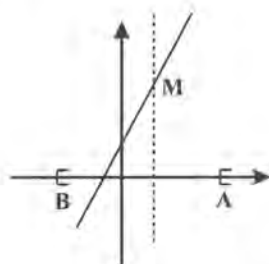
نقطه‌ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $A(3, 0)$ برابر با فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $B(-1, 0)$ باشد. اگر این نقطه را M بنامیم چون روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد مختصات آن باید به شکل $M(a, 2a+1)$ باشد. هم‌چنین باید داشته باشیم $MA = MB$ ، یعنی:

$$MA = \sqrt{(a-3)^2 + (2a+1-0)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (2a+1-0)^2} = MB$$

با به توان دو رساندن طرفین این رابطه خواهیم داشت:

$$(a-3)^2 + (2a+1)^2 = (a+1)^2 + (2a+1)^2 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = a^2 + 2a + 1 \Rightarrow a = 1$$

پس جواب مسئله نقطه‌ی $M(1, 3)$ است.



توجه: این مسئله را می‌توانیم به صورت هندسی نیز حل کنیم. نقاطی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند روی عمودمنصف پاره خط واصل آن دو نقطه قرار دارند. پس نقطه‌ی M روی عمودمنصف AB است؛ از طرف دیگر M روی خط $y = 2x + 1$ است، پس M محل برخورد این دو خط است.

۲-۳ حل معادله‌ی شامل عبارت گنگ

معادله‌هایی را که در آن‌ها عبارت‌های گنگ وجود داشته باشند، معادله‌های گنگ می‌نامیم. برای حل این معادله‌ها مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب (دامنه متغیر) معادله را که همان دامنه‌ی عبارت‌های گنگ معادله است، به دست می‌آوریم و آن را D می‌نامیم. در صورتی که $D \neq \emptyset$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم، در غیر این صورت معادله‌ی گنگ جواب ندارد.

مرحله‌ی دوم: اگر معادله شامل یک رادیکال باشد، آن رادیکال را در یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها را به طرف دیگر معادله می‌بریم، سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم. اگر معادله شامل بیش از یک رادیکال باشد، آن‌گاه یک رادیکال را در یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها و رادیکال‌ها را به طرف دیگر معادله می‌بریم، سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی آن رادیکال می‌رسانیم و پس از ساده کردن این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که در معادله، رادیکالی نباشد.

مرحله سوم: از مرحله‌ی دوم به یک معادله می‌رسیم که پس از حل آن ریشه‌هایی به دست می‌آیند. این ریشه‌ها در صورتی قابل قبول هستند که هم در دامنه‌ی جواب معادله‌ی گنگ و هم در معادله‌ی گنگ صدق کنند.

مثال آموزشی

• نشان دهید معادله‌ی $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} + 3 = x$ ریشه ندارد.

حل: مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب معادله را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow D = \emptyset$$



چون $D = \emptyset$ ، پس معادله ریشه ندارد.

• ابتدا دامنه‌ی متغیر هر یک از معادله‌های زیر را تعیین کنید و سپس آن‌ها را حل کنید.

(ب) $\sqrt{x-x} = -20$

(الف) $3 + \sqrt{x-7} = 8$

(د) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-3} = 0$

(ج) $5 - 2\sqrt{2x-1} = 1$

(و) $\sqrt{x+5} = -\sqrt{7x+1}$

(ه) $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$

(ح) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} = 2$

(ز) $3 = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$

(ی) $\frac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2$

(ط) $\sqrt{x^2x} = \sqrt[3]{4}$

حل: الف)

$3 + \sqrt{x-7} = 8$

$x-7 \geq 0 \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow D = [7, +\infty)$

مرحله‌ی اول: دامنه‌ی جواب معادله را می‌یابیم:

مرحله‌ی دوم: رادیکال را در یک طرف معادله قرار می‌دهیم و بقیه‌ی مقادیر را به طرف دیگر معادله می‌بریم:

$3 + \sqrt{x-7} = 8 \Rightarrow \sqrt{x-7} = 5$

$(\sqrt{x-7})^2 = 5^2 \Rightarrow x-7 = 25 \Rightarrow x = 32 \in D$

اکنون دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال یعنی عدد ۲ می‌رسانیم:

مرحله‌ی سوم: $x = 32$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$x = 32 \Rightarrow 3 + \sqrt{32-7} = 8 \Rightarrow 3 + \sqrt{25} = 8 \Rightarrow 3 + 5 = 8$ درست است.

چون ریشه‌ی به دست آمده یعنی $x = 32$ هم در دامنه‌ی معادله و هم در معادله صدق می‌کند، پس قابل قبول است.

(ب) $\sqrt{x-x} = -20$

$x \geq 0 \Rightarrow D = [0, +\infty)$

مرحله‌ی اول:

$\sqrt{x-x} = -20 \Rightarrow \sqrt{x} = x-20 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (x-20)^2 \Rightarrow x = x^2 - 40x + 400 \Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$

مرحله‌ی دوم:

$\Rightarrow x = \frac{41 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \in D \\ x = 16 \in D \end{cases}$

مرحله‌ی سوم:

$x = 25 \Rightarrow \sqrt{25-25} = -20 \Rightarrow 0 = -20 \Rightarrow -20 = -20$ درست است.

$x = 16 \Rightarrow \sqrt{16-16} = -20 \Rightarrow 0 = -20 \Rightarrow -12 = -20$ نادرست است.

چون $x = 25$ هم در دامنه‌ی معادله و هم در معادله صدق کرد، پس $x = 25$ ریشه‌ی معادله است و $x = 16$ در معادله صدق نکرد، پس این ریشه غیرقابل قبول است.

(ج) $5 - 2\sqrt{2x-1} = 1$

مرحله‌ی اول:

$2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow D = [\frac{1}{2}, +\infty)$

مرحله‌ی دوم:

$5 - 2\sqrt{2x-1} = 1 \Rightarrow -2\sqrt{2x-1} = -4$

$\Rightarrow (-2\sqrt{2x-1})^2 = (-4)^2$

$\Rightarrow 4(2x-1) = 16 \Rightarrow 8x = 20 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \in D$

مرحله‌ی سوم:

$x = \frac{5}{2} \Rightarrow 5 - 2\sqrt{2(\frac{5}{2})-1} = 1 \Rightarrow 5 - 2\sqrt{5-1} = 1 \Rightarrow 5 - 4 = 1 \Rightarrow 1 = 1$ درست است.

پس $x = \frac{5}{2}$ جواب معادله است.

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-3}=0$$

(د)

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow D = [3, +\infty)$$

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-3}=0 \Rightarrow \sqrt{2x+3}=\sqrt{x-3} \Rightarrow (\sqrt{2x+3})^2=(\sqrt{x-3})^2 \Rightarrow 2x+3=x-3 \Rightarrow x=-6 \notin D$$

غیرقابل قبول چون ریشه‌ی به دست آمده در دامنه‌ی معادله صدق نمی‌کند، پس این ریشه غیرقابل قبول است.

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$$

(ه)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \Rightarrow x \geq -5 \end{cases} \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5 &\Rightarrow \sqrt{x+5}=5-\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x+5})^2=(5-\sqrt{x})^2 \Rightarrow x+5=25-10\sqrt{x}+x \\ \Rightarrow 10\sqrt{x}=20 &\Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \in D \text{ و } x=4 \text{ در معادله } \Rightarrow \sqrt{4}+\sqrt{4+5}=5 \Rightarrow 2+3=5 \end{aligned}$$

$x=4$ جواب معادله است، چون هم در دامنه‌ی معادله و هم در معادله صدق می‌کند.

$$\sqrt{x+5}=-\sqrt{7x+1}$$

(و) راه اول:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 7x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{7} \end{cases} \Rightarrow D = [0, +\infty)$$

$$(\sqrt{x+5})^2=(-\sqrt{7x+1})^2 \Rightarrow x+5=7x+1$$

$$\Rightarrow 10\sqrt{x}=6x-24 \Rightarrow 5\sqrt{x}=3x-12 \Rightarrow (5\sqrt{x})^2=(3x-12)^2 \Rightarrow 25x=9x^2-72x+144 \Rightarrow 9x^2-97x+144=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{97 \pm 65}{18} \Rightarrow \begin{cases} x=9 \in D \\ x=\frac{16}{9} \in D \end{cases}$$

$$x=9 \Rightarrow \sqrt{9+5}=-\sqrt{7 \times 9+1} \Rightarrow 4=-8 \text{ نادرست است.}$$

$$x=\frac{16}{9} \Rightarrow \sqrt{\frac{16}{9}+5}=-\sqrt{7 \times \frac{16}{9}+1} \Rightarrow \frac{19}{3}=-\frac{11}{3} \text{ نادرست است.}$$

این معادله جواب ندارد، زیرا ریشه‌های به دست آمده در معادله صدق نمی‌کند.

راه دوم: با توجه به صورت معادله یعنی $\sqrt{x+5}=-\sqrt{7x+1}$ ملاحظه می‌کنیم که سمت چپ معادله یعنی $\sqrt{x+5}$ همواره عددی بزرگ‌تر از صفر است و طرف راست معادله یعنی $-\sqrt{7x+1}$ همواره عددی منفی است و هیچ‌گاه عددی منفی با عددی بزرگ‌تر از صفر برابر نیست، لذا معادله فاقد جواب است.

$$3=\frac{1}{\sqrt{x-5}}$$

(ز)

چون $x-5$ در مخرج کسر قرار دارد و مخرج کسر نباید برابر با صفر باشد، پس برای یافتن دامنه‌ی جواب معادله، کافی است زیر رادیکال را بزرگ‌تر از صفر قرار دهیم.

$$3=\frac{1}{\sqrt{x-5}} \Rightarrow 3^2=\left(\frac{1}{\sqrt{x-5}}\right)^2 \Rightarrow 9=\frac{1}{x-5} \Rightarrow x-5=\frac{1}{9} \Rightarrow x=5+\frac{1}{9}=\frac{46}{9} \Rightarrow \frac{46}{9} \in D$$

$$x=\frac{46}{9} \Rightarrow 3=\frac{1}{\sqrt{\frac{46}{9}-5}} \Rightarrow 3=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}} \Rightarrow 3=\frac{1}{\frac{1}{3}} \Rightarrow 3=3 \text{ درست است.}$$

پس $x=\frac{46}{9}$ جواب معادله است چون هم در معادله و هم در دامنه‌ی جواب معادله صدق می‌کند.

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}=2$$

(ح)

$$x > 0 \Rightarrow D = (0, +\infty)$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{2-\sqrt{x}}-2=0 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{x}+\sqrt{x}+2-2(\sqrt{x+2})(2-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2})(2-\sqrt{x})}=0$$

$$\Rightarrow 4-2(4-x)=0 \Rightarrow 4-8+2x=0 \Rightarrow x=2 \in D$$

$$x=2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2+2}}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}=2 \Rightarrow \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}+2}{(\sqrt{2+2})(2-\sqrt{2})}=2 \Rightarrow \frac{4}{4-2}=2 \Rightarrow 2=2 \text{ درست است.}$$

پس $x = 2$ جواب معادله است، چون در دامنه‌ی جواب معادله و در معادله صدق می‌کند.

$$\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{4} \Rightarrow D: x\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^3} \geq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} \quad (\text{ط})$$

$$\sqrt{\sqrt{x^3} \times x} = \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{x^4} = \sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \in D$$

$$x = 2 \Rightarrow \sqrt{2^2} = \sqrt{4} \quad \text{درست است.}$$

$$x = -2 \Rightarrow \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} \quad \text{درست است.}$$

پس $x = \pm 2$ جواب معادله است.

$$\frac{\lambda}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2 \quad (\text{ی})$$

$$\begin{cases} 10-2x > 0 \Rightarrow x < 5 \\ 10-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, 5)$$

$$\frac{\lambda}{t} - t = 2 \Rightarrow \frac{\lambda - t^2 - 2t}{t} = 0 \Rightarrow -t^2 - 2t + \lambda = 0 \Rightarrow t^2 + 2t - \lambda = 0 \quad \text{با فرض } t = \sqrt{10-2x} \text{ داریم:}$$

$$\Rightarrow (t+4)(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$t = 2 \Rightarrow 2 = \sqrt{10-2x} \Rightarrow 4 = 10-2x \Rightarrow x = 3 \in D$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{10-6}} - \sqrt{10-6} = 2 \Rightarrow 4-2=2 \quad \text{درست است.}$$

پس $x = 3$ جواب معادله است.

$$t = -4 \Rightarrow -4 = \sqrt{10-2x}$$

چون طرف چپ معادله همواره منفی و طرف راست آن همواره نامنفی است و این امکان‌پذیر نیست، پس در این حالت معادله جواب ندارد.

• معادله‌ی $\sqrt{15} + \sqrt{2x+80} = 5$ را حل کنید.

حل: با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت:

$$15 + \sqrt{2x+80} = 25$$

$$\sqrt{2x+80} = 10$$

$$2x+80=100 \Rightarrow x=10$$

$$\sqrt{15} + \sqrt{20+80} = \sqrt{15} + 10 = \sqrt{25} = 5$$

دوباره طرفین معادله‌ی اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم. خواهیم داشت:

جواب به دست آمده را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم:

تساوی برقرار است و $x=5$ جواب معادله می‌باشد.

• آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد؟

حل: اگر عدد مورد نظر را x بنامیم باید تساوی $x + \sqrt{x} = 6$ برقرار شود. یعنی:

$$\sqrt{x} = 6 - x$$

$$x = 36 + x^2 - 12x$$

$$x = 9, x = 4$$

با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت:

با حل این معادله خواهیم داشت:

با آزمایش جواب‌ها در معادله‌ی اصلی دیده می‌شود، $x=9$ نمی‌تواند مورد قبول واقع باشد و تنها جواب معادله $x=4$ می‌باشد.

$$\begin{array}{lcl} x=9: & 9+\sqrt{9}=6 & ? \\ & 9+3=6 & ? \\ & 12 \neq 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x=4: & 4+\sqrt{4}=6 & ? \\ & 4+2=6 & ? \\ & 6=6 & \end{array}$$

بحث در کلاس

چرا یکی از جواب‌های معادله‌ی اخیر در معادله‌ی اولیه صدق نمی‌کند؟ این جواب اضافه به چه دلیل ایجاد شده است؟

۳ معادلات شامل قدرمطلق

حل یک مسئله

نقاطی روی نمودارهای دو تابع $y = x^2 - x - 1$ و $y = x^2 - 2x + 1$ بیابید که طول آن‌ها مساوی باشد و فاصله‌ی عرض‌هایشان ۵ باشد.

برای حل این مسئله فرض کنید طول نقطه‌ی مورد نظر x باشد. باید داشته باشیم:

$$|x^2 - 2x + 1 - (x^2 - x - 1)| = 5$$



پس از ساده سازی، این معادله به صورت $|x-2|=5$ در می آید که معادله ای بر حسب مجهول x است. شرط $|x-2|=5$ به معنای آن است که $x-2=5$ یا $x-2=-5$. جواب های هر کدام از این دو، جواب معادله ی $|x-2|=5$ می باشند. در نتیجه $x=7$ و $x=-3$ دو جواب این معادله هستند. به طور کلی می توان گفت:

جواب های یک معادله به صورت $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب های دو معادله ی $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ روی هم هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارات قدرمطلق هستند معادلات قدرمطلق می گویند.

برای حل معادلات قدرمطلق ابتدا علامت قدرمطلق را به کمک تعریف قدرمطلق حذف نموده و سپس معادله ی به دست آمده را حل می کنیم. در حل معادلات شامل قدرمطلق می توانیم از نکات زیر کمک بگیریم:

۱ $|u|^2 = u^2$

یعنی اگر عبارت شامل قدرمطلق به توان ۲ رسانده شود، علامت قدرمطلق حذف می شود.

۲ $|u|=a \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \Rightarrow \text{غیر ممکن} \\ a \geq 0 \Rightarrow u = \pm a \end{cases}$

۳ $|u|=|v| \Rightarrow u = \pm v$

مثال آموزشی

• معادله ی $|x-2|+1=3$ چند ریشه دارد؟

حل: با توجه به نکته ی ۲ داریم:

$$|x-2|+1=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} |x-2|+1=-3 \\ |x-2|+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-2|=-4 \\ |x-2|=2 \end{cases} \Rightarrow |x-2|=2 \Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \Rightarrow x=4 \\ x-2=-2 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

بنابراین معادله دارای ۲ ریشه است.

• معادله ی $|x+1|=4+2x$ را حل کنید.

حل: توجه داریم که سمت چپ عبارت متناظر معادله، نامنفی است پس باید داشته باشیم: $0 \leq 4+2x$. در نتیجه $x \geq -2$. حال دو معادله ی $x+1=\pm(4+2x)$ حل می کنیم.

$$x+1=4+2x \Rightarrow x=-3$$

این جواب قابل قبول نیست، زیرا باید $x \geq -2$.

$$x+1=-(4+2x) \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$$

این جواب قابل قبول است.

۴ حل معادلات به روش هندسی

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند؛ طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار، جواب های معادله ی $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است.

این شیوه ی حل معادلات را که از طریق آن تعداد جواب ها و مقدار تقریبی جواب ها قابل تشخیص است، روش هندسی یا نموداری حل معادلات می نامند.

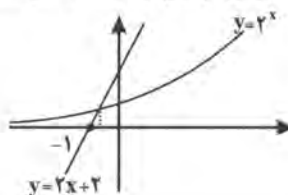
مثال آموزشی

• معادله ی $2x+2=2^x$ را به روش هندسی حل کنید.

حل: کافی است نمودار توابع $y=2x+2$ و $y=2^x$ را رسم کنیم و محل تلاقی نمودارها را به دست آوریم.

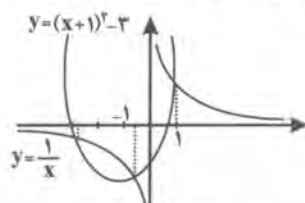
از روی نمودار واضح است که معادله دارای جوابی بین ۱- و صفر خواهد بود و معادله فقط همین یک جواب را دارد.

جواب این معادله را به طور دقیق نمی توانیم به دست آوریم اما با روش آزمون و خطا که در سال های قبل آموخته اید می توانید تقریبات اعشار جواب را با دقت مورد نظر به دست آورید.



• تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x}$ را از طریق هندسی بیابید، سپس با استفاده از روش جبری جواب‌های معادله را به طور دقیق تعیین کنید.

حل: نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را به روش نقطه‌یابی رسم می‌کنیم. توجه داریم که این تابع در $x = 0$ تعریف نمی‌شود و شامل دو شاخه در ربع اول و سوم خواهد شد. سپس با استفاده از رسم تابع $y = x^2$ و انتقال، نمودار تابع $y = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$ پس یکی از جواب‌های معادله‌ی بالا یک خواهد شد و دو جواب دیگر آن منفی خواهند بود.

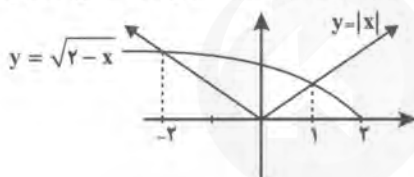


اگر مقدار دقیق جواب‌ها را بخواهیم ابتدا با ضرب طرفین معادله در x آن را به صورت $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$ می‌نویسیم و توجه می‌کنیم که چند جمله‌ای $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 1) = 0$ بر $x-1$ بخش‌پذیر خواهد است و داریم:

$$\text{در نتیجه } x = 1, x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

• به روش جبری و نموداری (هندسی) معادله‌ی $|x| = \sqrt{2-x}$ را حل کنید.

حل: در روش جبری با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت: $x^2 = 2-x$ در نتیجه $x^2 + x - 2 = 0$ که جواب‌های آن $x = -2$ و $x = 1$ هستند که هر دو در معادله‌ی اصلی صدق می‌کنند پس معادله دو جواب دارد. (دامنه‌ی معادله، $[-2, \infty)$ است.) در روش هندسی نمودارهای توابع $y = |x|$ و $y = \sqrt{2-x}$ را رسم می‌کنیم. طول‌های محل تلاقی دو نمودار جواب‌های معادله‌اند.



توابع چندجمله‌ای

۱ **مقدمه:** هر عبارت به صورت $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ که در آن a_i ها اعداد حقیقی باشند یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n برحسب متغیر x است که اگر آن را با $f(x)$ نشان دهیم و f تابع باشد، در این صورت f را یک تابع چندجمله‌ای می‌نامند. برای مثال $f_1(x) = ax + b$ ضابطه‌ی یک تابع دوجمله‌ای و $f_2(x) = ax^2 + bx + c$ ضابطه‌ی یک تابع سه‌جمله‌ای درجه‌ی دوم است. می‌دانیم که نمودار تابع f_1 یک خط راست و نمودار تابع f_2 یک سهمی است.

$$y = ax^2 + bx + c$$

۲ محاسبه‌ی بیش‌ترین و کمترین مقدار تابع درجه‌ی دو:

یکی از روش‌های حل معادله‌ی درجه دو در سال گذشته روش مربع کامل بود. با توجه به این روش برای تابع $y = ax^2 + bx + c$ داریم:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$\Rightarrow y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

می‌دانیم که هر عبارت به توان زوج همواره یک مقدار نامنفی است، یعنی:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y \geq -\frac{\Delta}{4a} \rightarrow \min(y) = -\frac{\Delta}{4a} \\ a < 0 \rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \leq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y \leq -\frac{\Delta}{4a} \rightarrow \max(y) = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

در تابع درجه‌ی دو $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ داریم:



$$y = a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a \times 0 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

با توجه به مطالب فوق می‌توان گفت که در تابع درجه‌ی دو اگر $a > 0$ باشد تابع دارای مینیمم و اگر $a < 0$ باشد تابع دارای ماکزیمم است و توجه داشته باشید که مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع درجه‌ی دو به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید. بنابراین $x = -\frac{b}{2a}$ طول نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$ است و برای محاسبه‌ی عرض این نقطه کافی است در ضابطه‌ی تابع به جای x مقدار $-\frac{b}{2a}$ را قرار دهیم تا عرض نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم که اصطلاحاً به آن مقدار ماکزیمم یا مینیمم تابع گفته می‌شود به دست آید.

تذکره: همان‌طور که گفته شد نمودار تابع درجه‌ی دو، یک سهمی است که به نقطه‌ی ماکزیمم یا مینیمم آن رأس سهمی می‌گوییم و با حرف S نمایش می‌دهیم.

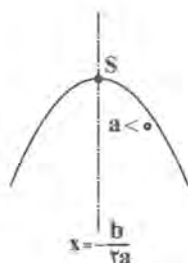
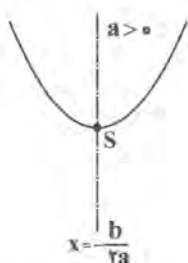
جمع‌بندی: نکات مهم در تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$:

(الف) هرگاه $a > 0$ باشد تابع دارای مینیمم بوده و دهانه‌ی سهمی به سمت بالاست.

(ب) هرگاه $a < 0$ باشد تابع دارای ماکزیمم بوده و دهانه‌ی سهمی به سمت پایین است.

(ج) ماکزیمم یا مینیمم تابع درجه‌ی دو در رأس سهمی اتفاق می‌افتد که مختصات رأس سهمی به صورت زیر می‌باشد:

$$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad \text{و} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$



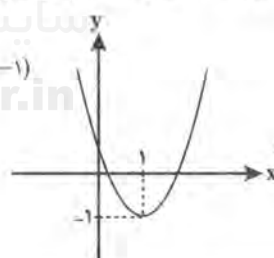
(د) خط $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن این تابع می‌باشد، که از رأس سهمی می‌گذرد.

مثال آموزشی

• تابع درجه‌ی دوم f ، با ضابطه‌ی $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ مفروض است. مختصات رأس سهمی و مقدار مینیمم تابع f را بیابید.

حل: در این تابع درجه‌ی دو داریم: $a = 2$ ، $b = -4$ و $c = 1$ پس داریم:

$$\begin{aligned} \text{طول نقطه‌ی مینیمم} \quad x &= -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1 \rightarrow \\ \text{مقدار مینیمم تابع} \quad f(1) &= 2 \times (1)^2 - 4 \times (1) + 1 = -1 \end{aligned} \Rightarrow S = (1, -1)$$



نمودار سهمی فوق، شکل مقابل است:

۳ صفرهای تابع درجه‌ی دو - معادله‌ی درجه‌ی دو

تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید. اگر در این تابع قرار دهیم $f(x) = 0$ معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ حاصل می‌شود. ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ (در صورت وجود) همان طول‌های نقاط برخورد منحنی نمایش تابع f با محور x ها هستند که به آن صفرهای تابع f گفته می‌شود. بنابراین صفرهای تابع f مقادیری برای x در دامنه‌ی تابع f هستند که به ازای آن‌ها $f(x) = 0$ می‌شود. حال با توجه به روش مربع کامل برای محاسبه‌ی صفرهای تابع درجه‌ی دو داریم:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

$$\Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \begin{cases} x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

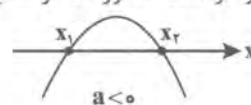
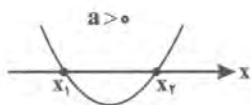
نتیجه: در حل معادله‌ی درجه‌ی دو $ax^2 + bx + c = 0$ به سه حالت زیر برخورد می‌کنیم:



$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

● **حالت اول:** اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است:

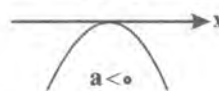
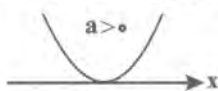
در این حالت نمودار تابع در دو نقطه محور x ها را قطع می‌کند.



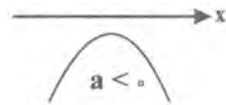
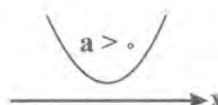
$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

● **حالت دوم:** اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک ریشه‌ی مضاعف است:

در این حالت نمودار تابع، محور x ها را در یک نقطه قطع می‌کند. درواقع در این حالت نمودار تابع بر محور x ها مماس است.



● **حالت سوم:** اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد و در این حالت نمودار تابع، محور x ها را قطع نمی‌کند، یعنی در این حالت



تابع هیچ صفری ندارد.

مثال آموزشی

● تعداد صفرهای تابع درجه‌ی دوم $y = x^2 + 4x + 4$ را به دست آورید.

حل: منظور از صفرهای تابع همان تعداد ریشه‌های یک معادله است.

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \times 4 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times 1} = -2$$

● حدود m را چنان بیابید تا سهمی $y = (m+2)x^2 + 4x + m - 1$ محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کند.

حل: برای آنکه این سهمی محور طول‌ها را در دو نقطه قطع کند باید معادله‌ی $(m+2)x^2 + 4x + m - 1 = 0$ دو ریشه داشته باشد، یعنی Δ بزرگتر از صفر باشد. حالا Δ را به دست می‌آوریم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(m+2)(m-1) = 16 - 4(m^2 + m - 2) = 16 - 4m^2 - 4m + 8 = -4m^2 - 4m + 24$$

$$\Delta > 0 \rightarrow -4m^2 - 4m + 24 > 0 \xrightarrow{+(-4)} m^2 + m - 6 < 0 \Rightarrow (m+3)(m-2) < 0 \Rightarrow -3 < m < 2$$

بنابراین اگر $-3 < m < 2$ باشد سهمی بالا، محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

Konkur.in

تست نمونه

● به ازای کدام مقدار m تابع $y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و بر آن مماس است؟

$$\begin{array}{llll} 3 \quad (4) & \frac{5}{2} \quad (3) & -\frac{5}{2} \quad (2) & -3 \quad (1) \end{array}$$

حل: اگر نمودار بالای محور x ها بر آن مماس باشد باید نمودار تابع به صورت باشد. یعنی در تابع درجه‌ی دو باید $a > 0$ و $\Delta = 0$ باشد:

$$\begin{cases} a = m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4(m-2)(m+2) = 0 \Rightarrow 9 - 4m^2 + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4m^2 = 25 \Rightarrow m^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2} \quad (2) \xrightarrow{(1) \cap (2)} m = +\frac{5}{2}$$

بنابراین گزینه «۳» پاسخ صحیح است.

● به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ ، همواره در زیر محور x هاست؟

$$\begin{array}{llll} m > \frac{3}{2} \quad (4) & 1 < m < \frac{3}{2} \quad (3) & -\frac{1}{2} < m < 1 \quad (2) & m < -\frac{1}{2} \quad (1) \end{array}$$

حل: زمانی نمودار تابع درجه‌ی دو زیر محور x ها قرار دارد که به صورت باشد پس باید $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد (چون تابع محور x ها را قطع نمی‌کند).



$$\begin{cases} a = m - 1 < 0 \rightarrow m < 1 & (1) \\ \Delta = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4(m-1) \times m < 0 \rightarrow -4m^2 + 4m + 3 < 0 \xrightarrow{\text{طبق جدول تعیین علامت}} m > \frac{3}{4} \text{ یا } m < -\frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} m < -\frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه «۱» پاسخ صحیح است.

• بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر است. مقدار k کدام است؟

۴ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

حل: تابع درجه‌ی دو موقعی بیشترین مقدار خود را داراست که $a < 0$ باشد و در این حالت بیشترین مقدار تابع برابر $-\frac{\Delta}{4a}$ می‌باشد:

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow k+3 < 0 \Rightarrow k < -3 & (1) \\ \max = -\frac{\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(k+3) \times k = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 16 - 4k(k+3) = 0 \Rightarrow 4 = k(k+3) \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow (k-1)(k+4) = 0 \Rightarrow k = +1, -4 \xrightarrow{(1) \cap (2)} k = -4$$

بنابراین گزینه «۱» پاسخ صحیح است.

۴ روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو

فرض کنیم معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه‌ی α و β باشد ($\Delta > 0$). می‌خواهیم ببینیم چه روابطی بین این دو ریشه و ضرایب معادله‌ی درجه‌ی دوم بالا وجود دارد و همان‌طور که قبلاً به دست آوردیم در صورتی که $\Delta = 0$ باشد، ریشه‌های معادله برابرند.

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

• طرح یک سوال

روزی معلمی از دانش‌آموزانش پرسید: با توجه به شرط $\Delta > 0$ و وجود ریشه‌های α و β برای معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ هر یک از مقادیر زیر را بر حسب ضرایب معادله به دست آورید.

(ج) $|\alpha - \beta|$

(ب) $\alpha\beta$

(الف) $\alpha + \beta$

حل:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \alpha + \beta &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \\ \text{ب) } \alpha\beta &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{2a \times 2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \\ \text{ج) } |\alpha - \beta| &= \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \left| \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \end{aligned}$$

نتیجه: در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورتی که $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشه دارد. اگر مجموع ریشه‌ها را با S و حاصل ضرب ریشه‌ها را با P نمایش دهیم داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مثال آموزشی

• اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، حاصل عبارت‌های $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ، $\alpha^2 + \beta^2$ و $\alpha^3 + \beta^3$ را بر حسب S و P بیابید.

حل:

$$1) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

$$2) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$3) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

• جمع‌بندی: روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله‌ی درجه دو:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند آن‌گاه داریم:

$$1) \alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}$$

$$2) \alpha\beta = P = \frac{c}{a}$$

$$3) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$4) \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$5) \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

$$6) \alpha^4 + \beta^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

نکته: هرگاه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ یکی از ریشه‌ها k برابر ریشه‌ی دیگر باشد بین ضرایب، رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

نکته: هرگاه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، یکی از ریشه‌ها k واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر یا کمتر باشد، داریم: $\Delta = k^2 a^2$

تحقیق: درستی روابط فوق را بررسی کنید.

یک‌خطه

روزی که در سر یکی از کلاس‌هایم این مبحث را تدریس می‌کردم، یکی از دانش‌آموزانم گفت: آقا این S و P به چه دردی می‌خورند؟ چه موقع از آن‌ها استفاده کنیم؟ من هم گفتم سؤال بسیار خوبی کردی و رو به بچه‌ها کردم و گفتم: مثلاً فرض کنید در یک معادله درجه‌ی دو، ریشه‌ها به صورت

$$\frac{2-\sqrt{7}}{9} \text{ و } \frac{2+\sqrt{7}}{9}$$

باشند و اگر گفته شود مجموع مکعب ریشه‌ها را به دست آورید ملاحظه می‌کنید که محاسبه‌ی عبارت زیر کمی سخت است:

$$\alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{2-\sqrt{7}}{9}\right)^3 + \left(\frac{2+\sqrt{7}}{9}\right)^3$$

ولی اگر از روابط پیرین ریشه‌ها استفاده کنیم داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{2-\sqrt{7}}{9} + \frac{2+\sqrt{7}}{9} = \frac{4}{9} \\ P = \alpha\beta = \frac{2-\sqrt{7}}{9} \times \frac{2+\sqrt{7}}{9} = \frac{4-7}{81} = -\frac{3}{81} = -\frac{1}{27} \end{cases}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = \left(\frac{4}{9}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{27}\right) \times \left(\frac{4}{9}\right) = \frac{104}{27}$$

ملاحظه می‌کنید که با روش S و P محصور نیستیم حاصل جمع دو عبارت $\left(\frac{2-\sqrt{7}}{9}\right)^3$ و $\left(\frac{2+\sqrt{7}}{9}\right)^3$ را محاسبه کنیم.

خوب بچه‌ها فکر کنم متوجه شدید که هرگاه ریشه‌های معادله رادیکالی باشند، یعنی Δ جذر کامل نداشته باشد رابطه‌ی پیرین ریشه‌ها مسأله را سریع‌تر و ساده‌تر حل می‌کند.

مورد دوم مواقعی است که معادله درجه‌ی دوم داده شده پارامتری است و محاسبه‌ی ریشه غیرممکن است مانند معادله‌ی $3x^2 - (m+1)x + 4 = 0$. حال با حل مثال‌های پیشتر از S و P با کاربردهای آن پیشتر آشنا خواهید شد.

مثال آموزشی

• اگر در معادله درجه‌ی دوم $x^2 - mx + 10 = 0$ یکی از ریشه‌ها یک واحد از دو برابر ریشه‌ی دیگر بیشتر باشد m را بیابید و هر دو ریشه را تعیین کنید.

حل: در این معادله چون ریشه به پارامتر m بستگی دارد بهتر است از رابطه‌ی بین ریشه‌ها کمک بگیریم و چون در این معادله

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} = 10 \rightarrow \beta = \frac{10}{\alpha}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = m$$

از طرفی از صورت مسأله داریم:

$$\alpha = 2\beta + 1 \rightarrow \alpha = 2 \times \frac{10}{\alpha} + 1 \xrightarrow{\times \alpha} \alpha^2 = 20 + \alpha \rightarrow \alpha^2 - \alpha - 20 = 0 \rightarrow (\alpha - 5)(\alpha + 4) = 0 \rightarrow \alpha = 5, \alpha = -4$$

$$\begin{cases} \alpha = 5 \rightarrow \beta = \frac{10}{5} = 2 \\ \alpha = -4 \rightarrow \beta = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

چون α ریشه‌ی معادله می‌باشد، بنابراین در معادله صدق می‌کند، در نتیجه داریم:

$$\alpha = 5 \xrightarrow{\text{در معادله}} 5^2 - 5m + 10 = 0 \rightarrow 5m = 35 \rightarrow m = 7$$

$$\alpha = -4 \rightarrow (-4)^2 - (-4)m + 10 = 0 \rightarrow 4m = -26 \rightarrow m = -\frac{13}{2}$$

• اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - 10x + 7 = 0$ باشند، مقدار عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \quad (\text{ج})$$

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \quad (\text{ب})$$

$$x_1^2 + x_2^2 \quad (\text{الف})$$

$$x_1^4 + x_2^4 \quad (\text{ه})$$

$$7x_1^2 + 3x_2^2 \quad (\text{د})$$

حل: با توجه به آن که x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌اند، داریم:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{-(-10)}{2} = 5 \quad \text{و} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{7}{2} \quad \text{و} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 2 \times 7 = 44$$

$$\text{الف)} \quad x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2PS = 5^2 - 2 \times \frac{7}{2} \times 5 = \frac{145}{2}$$

$$\text{ب)} \quad \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = A \Rightarrow A^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = S + 2\sqrt{P} = 5 + 2\sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow A^2 = 5 + 2\sqrt{\frac{7}{2}} = 5 + 2\sqrt{\frac{7 \times 2}{2 \times 2}} = 5 + 2\sqrt{\frac{14}{2}} = 5 + \sqrt{14} \\ \Rightarrow A = \sqrt{5 + \sqrt{14}}$$

$$\text{ج)} \quad \sqrt{\frac{x_1}{x_2}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} + \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{A}{\sqrt{P}} = \frac{5 + \sqrt{14}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{5 + \sqrt{14}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{5 + \sqrt{14}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{5 + \sqrt{14}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{5 + \sqrt{14}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{5 + \sqrt{14}}{\sqrt{\frac{7}{2}}}$$

$$\text{د)} \quad 7x_1^2 + 3x_2^2 = \Delta(x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \Delta(S^2 - 2P) + 2\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}\right)(S) = \Delta\left(25 - 2 \times \frac{7}{2}\right) + 2 \times \frac{\sqrt{44}}{2} \times 5 \\ = 5 \times 18 - 2\sqrt{11} \times 5 = 10(9 - \sqrt{11})$$

$$\text{ه)} \quad x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2 = \left(5^2 - 2 \times \frac{7}{2}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = (18)^2 - 2 \times \frac{49}{2} = \frac{599}{2}$$

• اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند و تعریف کنیم $S_n = \alpha^n + \beta^n$ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$$

حل: چون α و β ریشه‌های معادله‌اند، در معادله صدق می‌کنند، یعنی:

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \Rightarrow \alpha^n(a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0 \Rightarrow a\alpha^{n+2} + b\alpha^{n+1} + c\alpha^n = 0 \\ a\beta^2 + b\beta + c = 0 \Rightarrow \beta^n(a\beta^2 + b\beta + c) = 0 \Rightarrow a\beta^{n+2} + b\beta^{n+1} + c\beta^n = 0 \end{cases}$$

$$a(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}) + b(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) + c(\alpha^n + \beta^n) = 0 \Rightarrow aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0 \quad \text{با جمع دو رابطه‌ی بالا به دست می‌آوریم:}$$

• به کمک مثال قبل اگر $x + \frac{1}{x} = a$ باشد مقدار $x^5 + \frac{1}{x^5}$ را به دست آورید.

حل: با انتخاب $S_1 = x + \frac{1}{x} = a$ داریم:

$$S_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow S_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = S_1^2 - 2 = a^2 - 2$$

$$x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^2 + 1 = ax \Rightarrow x^2 - ax + 1 = 0 \Rightarrow S_{n+2} - aS_{n+1} + S_n = 0 \Rightarrow S_{n+2} = aS_{n+1} - S_n \quad \text{طبق مثال فوق داریم:}$$

$$S_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = aS_2 - S_1 = a(a^2 - 2) - a = a^3 - 3a \quad \text{بنابراین می‌توانیم بگوییم:}$$

$$S_4 = x^4 + \frac{1}{x^4} = aS_3 - S_2 = a(a^3 - 3a) - (a^2 - 2) = a^4 - 4a^2 + 2$$

$$S_5 = x^5 + \frac{1}{x^5} = aS_4 - S_3 = a(a^4 - 4a^2 + 2) - (a^3 - 3a) = a^5 - 5a^3 + 5a$$

• هرگاه a ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشد مقدار عبارت $\frac{2 \cdot a - 4}{a^2 - 10a + 2}$ را به دست آورید.

حل: چون a ریشه‌ی معادله است در آن صدق می‌کند، پس:

$$a^2 - 5a + 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 5a - 1$$

$$\Rightarrow \frac{2a-4}{a^2-10a+2} = \frac{4(\Delta a-1)}{a^2-2(\Delta a-1)} = \frac{4(a^2)}{a^2-2a^2} = \frac{4a^2}{-a^2} = -4$$

• چه رابطه‌ای میان ضرایب معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ برقرار باشد تا یک ریشه‌ی معادله k برابر ریشه‌ی دیگر باشد.
 حل: اگر α و β ریشه‌های معادله باشند و فرض کنیم $\alpha = k\beta$ داریم:

$$-\frac{b}{a} = \alpha + \beta = k\beta + \beta = (k+1)\beta \Rightarrow -\frac{b}{a} = (k+1)\beta \Rightarrow \beta = \frac{-b}{a(k+1)} \quad (1)$$

$$\frac{c}{a} = \alpha\beta = (k\beta)\beta = k\beta^2 \Rightarrow \beta^2 = \frac{c}{ak} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \left(\frac{-b}{a(k+1)}\right)^2 = \frac{c}{ak} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2(k+1)^2} = \frac{c}{ak} \Rightarrow \frac{b^2}{a(k+1)^2} = \frac{c}{k} \Rightarrow \frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

• هرگاه یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + (1-m)x + m - 2 = 0$ ، سه برابر ریشه‌ی دیگر باشد مقدار m را به دست آورید.

$$a=1, b=1-m, c=m-2, k=3$$

حل: با توجه به مثال قبلی داریم: $x_2 = 3x_1$ بنابراین:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{(1-m)^2}{1 \times (m-2)} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{1-2m+m^2}{m-2} = \frac{16}{3}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow 3-6m+3m^2 = 16m-32 \Rightarrow 3m^2-22m+35=0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-22)^2 - 4 \times 3 \times 35 = 484 - 420 = 64$$

$$\Rightarrow m_1, m_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{22 \pm 8}{2 \times 3} \Rightarrow m = 5, m = \frac{7}{3}$$

• حاصل جمع دو عدد برابر ۱۶۰ است. این دو عدد را چنان بیابید که حاصل ضرب آن‌ها بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل: دو عدد را x و y می‌نامیم، طبق فرض می‌دانیم $x+y=160$ و اگر فرض کنیم $xy=P$ داریم:

$$x+y=160 \Rightarrow y=160-x$$

$$P=xy=x(160-x) \Rightarrow P=160x-x^2$$

در تابع درجه‌ی دو می‌دانیم مقدار $\max$ به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{160}{2(-1)} = 80 \Rightarrow \max(P) = 160 \times 80 - 80^2 = 6400$$

با توجه به آن که $x+y=160$ و $x=80$ می‌باشد، لذا $y=80$ است یعنی آن دو عدد ۸۰ و ۸۰ هستند.

تست نمونه

• اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ رابطه‌ی $16a+4b+c=0$ برقرار باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌های آن به کدام صورت است؟

$$\frac{2c}{4a} \quad (4)$$

$$-\frac{b+4a}{a} \quad (3)$$

$$-4 \quad (2)$$

$$\frac{4c}{a} \quad (1)$$

حل: به این دو عبارت توجه کنید: $\begin{cases} ax^2+bx+c=0 & (1) \\ 16a+4b+c=0 & (2) \end{cases}$ آفرین، درسته!!! اگر در عبارت اولی به جای x عدد ۴ را جایگزین کنیم

عبارت (۲) به دست می‌آید. یعنی $x'=4$ یکی از ریشه‌های معادله است، برای پیدا کردن ریشه‌ی دیگر از روابط جمع و ضرب ریشه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x'+x'' = -\frac{b}{a} \\ x'.x'' = \frac{c}{a} \end{cases} \xrightarrow{x'=4} \begin{cases} 4+x'' = -\frac{b}{a} \\ 4x'' = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -\frac{b}{a} - 4 = \frac{-b-4a}{a} \\ x'' = \frac{c}{4a} \end{cases}$$

بنابراین گزینه‌ی «۳» پاسخ صحیح است.

• اگر معادله‌ی درجه‌ی دوم $(m+1)x^2 + (m^2-9)x - 2 = 0$ دو ریشه‌ی قرینه‌ی حقیقی داشته باشد، m کدام است؟

$$9 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

حل: اگر معادله بخواند دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد باید $\Delta > 0$ و اگر این دو ریشه را x' و x'' فرض کنیم داریم:

$$x' = -x'' \Rightarrow x' + x'' = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$



$$\Rightarrow m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3 \quad (1)$$

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \xrightarrow{b=0} -4ac > 0$$

$$(-4)(m+1)(-2) > 0 \Rightarrow 8(m+1) > 0 \xrightarrow{+8} m+1 > 0 \rightarrow m > -1 \quad (2) \xrightarrow{(1) \cap (2)} m = 3$$

بنابراین گزینه‌ی «۳» پاسخ صحیح است.

۵ تعیین علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

یک‌خطو

در یک روز سرد پاییزی معلم دروس ریاضی سال دوم، بعد از ورود به کلاس گفتند: بچه‌ها می‌خواهیم امروز با علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دو آشنا شویم ولی قبل از آن باید به این مسأله جواب دهید. در هر یک از حالات زیر علامت α و β را مشخص کنید.

$$1) \alpha + \beta > 0, \alpha\beta < 0 \quad 2) \alpha + \beta < 0, \alpha\beta < 0 \quad 3) \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0 \quad 4) \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$$

رضا: (۱) چون $\alpha\beta < 0$ می‌شه نتیجه گرفت که یکی از اون‌ها منفیه و دیگری مثبت و چون $\alpha + \beta > 0$ پس اونی که مثبت هستش از لحاظ اندازه بزرگتره، به عنوان مثال:

$$\alpha = -2, \beta = 3 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 > 0, \alpha\beta = -6 < 0$$

مجتبی: (۲) از این که $\alpha\beta < 0$ می‌تونیم نتیجه بگیریم، از اون دو عدد یکی منفیه و دیگری مثبت و چون $\alpha + \beta < 0$ شده باید اونی که منفیه از لحاظ اندازه بزرگ تر باشد، به عنوان مثال:

$$\alpha = -4, \beta = 2 \rightarrow |-4| > 2 \text{ و } \alpha + \beta = -2 < 0 \text{ و } \alpha\beta = -8 < 0$$

فرهاد: (۳) از $\alpha\beta > 0$ می‌توان نتیجه گرفت که هر دو باید هم علامت باشند یعنی یا هر دو مثبت‌اند یا هر دو منفی‌اند و چون $\alpha + \beta > 0$ است، نتیجه می‌گیریم که هر دو مثبت بوده‌اند، مثلاً:

$$\alpha = 2, \beta = 3 \Rightarrow \alpha + \beta = 5 > 0 \text{ و } \alpha\beta = 6 > 0$$

کمال: خوب آقا با حالات قبلی که بچه‌ها گفتند برای اینکه $\alpha + \beta < 0$ و $\alpha\beta > 0$ باشد باید هر دو عدد منفی باشند، مثلاً:

$$\alpha = -3, \beta = -2 \rightarrow \alpha + \beta = -5 < 0 \text{ و } \alpha\beta = 6 > 0$$

بعد از این سؤال و بحث در مورد آن، معلم‌مان گفتند پس بچه‌ها حالا با خیالی راحت‌تر می‌توانیم علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دو را بررسی نماییم و ضمناً می‌دانیم در حالتی که در معادله‌ی درجه‌ی دو $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی است و هم‌چنین مجموع ریشه‌ها را با

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \text{ و ضرب ریشه‌ها را با } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ نمایش می‌دهیم.}$$

جمع‌بندی: بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه دو

$$\Delta > 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \text{دو ریشه‌ی هم علامت} \rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow \text{دو ریشه‌ی مثبت} \\ -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow \text{دو ریشه‌ی منفی} \end{cases} \\ \frac{c}{a} = 0 \rightarrow \text{یک ریشه‌ی صفر} \\ \frac{c}{a} < 0 \rightarrow \text{دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت} \rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow \text{ریشه‌ی مثبت از قدرمطلق ریشه‌ی منفی بزرگ‌تر است} \\ -\frac{b}{a} = 0 \rightarrow \text{دو ریشه‌ی قرینه} \\ -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow \text{ریشه‌ی مثبت از قدرمطلق ریشه‌ی منفی کوچک‌تر است} \end{cases} \end{cases}$$

مثال آموزشی

• به ازای چه مقادیری از m تابع $y = mx^2 - 4x + m - 3$ محور x را در دو نقطه با طول‌های مثبت قطع می‌کند.

حل: طبق صورت مسأله به بیان دیگر می‌توان گفت که به ازای چه مقادیری از m معادله‌ی $mx^2 - 4x + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز و مثبت می‌باشد. (طبق نتیجه‌ی (۱) که در بالا بیان شد)

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4m(m-3) > 0 \xrightarrow{+(-4)} m^2 - 3m - 4 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 4 \quad (1) \\ S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{4}{m} > 0 \Rightarrow m > 0 \quad (2) \\ P > 0 \Rightarrow \frac{m-3}{m} > 0 \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 3 \quad (3) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} 3 < m < 4$$

• معادله‌ی $m^2 - 2x + m^2 + m = 0$ به ازای چه مقادیری از m دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت می‌باشد؟

$$\frac{c}{a} < 0$$

حل: شرط آنکه معادله دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت باشد آن است که:

$$\frac{c}{a} = \frac{m^2 + m}{m - 1} < 0 \rightarrow \begin{cases} m^2 + m = 0 \rightarrow m(m + 1) = 0 \rightarrow m = 0, m = -1 \\ m - 1 = 0 \rightarrow m = 1 \end{cases}$$

m	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\frac{m^2 + m}{m - 1}$	+	+	-	+	+
$m - 1$	-	-	-	0	+
$\frac{m^2 + m}{m - 1}$	-	+	-	+	+

$$\Rightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

۶ تشکیل یک معادله‌ی درجه‌ی دو از روی ریشه‌ها



در یکی از روزهای تدریس در دبیرستان قدک از بچه‌ها پرسیدم: به نظر شما اگر ریشه‌های یک معادله‌ی درجه‌ی دو را داشته باشیم چگونه معادله‌ی آن را بیابیم؟

یکی از دانش‌آموزانم اومد پای تخته و این گونه مسئله را تحلیل نمود:

گفت: آقا فرض می‌کنیم ریشه‌های معادله‌ی ما x' و x'' باشند، بنابراین:

$$\begin{cases} x' + x'' = S = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -aS & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' \cdot x'' = P = \frac{c}{a} \Rightarrow c = aP & (2) \end{cases}$$

حال معادله‌ی مورد نظر را $ax^2 + bx + c = 0$ فرض می‌کنیم، با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$ax^2 - aSx + aP = 0 \Rightarrow a(x^2 - Sx + P) = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

بعد گفت: آقا هرگاه دو ریشه‌ی معادله داده شود آن دو را با هم جمع می‌کنیم و S می‌نامیم و یک بار دیگر آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و P می‌نامیم سپس S و P به دست آمده را در معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ قرار می‌دهیم. من هم در پایان فقط از بچه‌ها خواستم او را به شدت تشویق کنند.

مثال آموزشی

• معادله‌ی درجه‌ی دومی را تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{6}$ و $\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{6}$ باشد.

حل:

$$S = x' + x'' = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{6}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{6}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 12} 12x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$P = x'x'' = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{7}}{6}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{7}}{6}\right) = \frac{4}{9} - \frac{7}{36} = \frac{16-7}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

تست نمونه

• معادله‌ی درجه‌ی دومی که ریشه‌های آن $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ باشند کدام است؟

$$x^2 - ax + 4 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 + 4x - a = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + ax - 4 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 4x + a = 0 \quad (1)$$

حل: $x' = 2 + \sqrt{4-a}$ و $x'' = 2 - \sqrt{4-a}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} S = x' + x'' = 2 + \sqrt{4-a} + 2 - \sqrt{4-a} = 4 \\ P = x'x'' = (2 + \sqrt{4-a})(2 - \sqrt{4-a}) = 4 - (4-a) = a \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x + a = 0$$

بنابراین گزینه‌ی «۱» پاسخ صحیح است.

۷ تشکیل معادله‌ی درجه‌ی دومی که بین هر یک از ریشه‌های آن و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم مفروضی رابطه‌ی خاصی برقرار باشد

برای حل مسائلی از این قبیل دو روش وجود دارد:

روش اول: با استفاده از روابط بین ریشه‌ها می‌باشد، به این صورت که ریشه‌های معادله‌ی مفروض را x_1 و x_2 و ریشه‌های معادله‌ی مطلوب را x'_1 و x'_2 فرض می‌کنیم و با توجه به رابطه‌ی داده شده، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی مطلوب را حساب می‌کنیم، آن‌گاه از معادله‌ی $x^2 - Sx + P = 0$ معادله‌ی مطلوب مشخص می‌شود.

مثال آموزشی

• معادله‌ی درجه‌ی دومی را تشکیل دهید که هر یک از ریشه‌های آن مربع هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 3x - 1 = 0$ باشد.

حل: بنا بر رابطه‌ی بین ریشه‌های دو معادله، اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی فوق و x'_1 و x'_2 ریشه‌های معادله‌ی مطلوب باشند،

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3 \quad \text{و} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -1$$

$$x'_1 = x_1^2 \quad \text{و} \quad x'_2 = x_2^2 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$S' = x'_1 + x'_2 = x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = (-3)^2 - 2(-1) = 9 + 2 = 11$$

$$P' = x'_1 x'_2 = x_1^2 x_2^2 = P^2 = (-1)^2 = 1$$

بنابراین معادله‌ی $x^2 - 11x + 1 = 0$ معادله‌ی مطلوب است.

روش دوم: در این روش هر ریشه‌ی معادله‌ی مفروض را x و هر ریشه‌ی معادله‌ی مطلوب را t در نظر می‌گیریم. سپس رابطه‌ی بین x و t را نوشته و از آن x را بر حسب t به دست آورده و در معادله‌ی مفروض قرار می‌دهیم تا پس از ساده کردن، معادله‌ی مطلوب بر حسب t به دست آید.

مثال آموزشی

• معادله‌ی درجه‌ی دومی را تشکیل دهید که هر یک از ریشه‌های آن از ۴ برابر هر یک از ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 11 = 0$ واحد بیشتر باشد.

$$\text{در معادله‌ی مفروض} \quad t = 4x + 3 \Rightarrow 4x = t - 3 \Rightarrow x = \frac{t-3}{4}$$

حل: بنا به آن چه در روش دوم بیان شد:

$$2\left(\frac{t-3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{t-3}{4}\right) - 11 = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{t^2 - 6t + 9}{16}\right) - \frac{3t-9}{4} - 11 = 0$$

$$\frac{t^2 - 6t + 9}{8} - \frac{3t-9}{4} - 11 = 0 \xrightarrow{\times 8} t^2 - 6t + 9 - 6t + 18 - 88 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t - 61 = 0$$

تست نمونه

• هرگاه ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ از سه برابر عکس ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ دو واحد کمتر باشد مقدار a کدام است؟

$$-11 \quad (4)$$

$$11 \quad (3)$$

$$-8 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

حل: ریشه‌ی معادله‌ی مطلوب را t فرض می‌کنیم و با توجه به رابطه‌ی داده شده در سؤال داریم:

$$\text{در معادله} \quad t = 3\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \Rightarrow t + 2 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{t+2}$$

$$\left(\frac{3}{t+2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{t+2}\right) + 1 = 0 \xrightarrow{\times (t+2)^2} 9 - 12t - 24 + t^2 + 4t + 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t - 11 = 0$$

با مقایسه با معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ نتیجه می‌گیریم: $a = -8$ و $b = -11$ ، بنابراین گزینه‌ی «۲» پاسخ درست است.

• اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + x - 1 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله‌ی زیر $\frac{1}{x_1+2}$ و $\frac{1}{x_2+2}$ می‌باشد؟

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (4)$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 3x - 1 = 0 \quad (1)$$

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -1 \quad \text{و} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -1$$

حل: در معادله‌ی داده شده داریم:

برای نوشتن معادله‌ی جدید، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم:

$$S' = x_1' + x_2' = \frac{1}{x_1 + 2} + \frac{1}{x_2 + 2} = \frac{x_2 + 2 + x_1 + 2}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{x_1 + x_2 + 4}{x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4} = \frac{S + 4}{P + 2S + 4} = \frac{-1 + 4}{-1 - 2 + 4} = +3$$

$$P' = x_1' x_2' = \frac{1}{x_1 + 2} \times \frac{1}{x_2 + 2} = \frac{1}{x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4} = \frac{1}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{1}{-1 - 2 + 4} = +1 \Rightarrow x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

بنابراین گزینه‌ی «۲» پاسخ صحیح است.

۸ چند جمله‌ای وارون

اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد که $a_0 \neq 0$ و از روی آن، چند جمله‌ای درجه n به صورت $Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ را بسازیم، آیا رابطه‌ای بین ریشه‌های این دو چندجمله‌ای وجود دارد؟ چندجمله‌ای $Q(x)$ را چندجمله‌ای وارون $P(x)$ می‌نامند.

یکی از دانش‌آموزان که در مورد چگونگی جواب معادلات چندجمله‌ای فکر کرده بود مسئله‌ی بالا برایش مطرح شده بود که آن را با معلم خود در میان گذاشت. معلم نیز این مسئله را برای همه دانش‌آموزان مطرح کرد تا همه درباره‌ی آن فکر کنند و راه حل‌های خودشان را ارائه کنند. در جلسه‌ی بعدی درس، معلم از دانش‌آموزان خواست راه حل‌های خودشان را ارائه کنند.

علی: به نظر من بهتر است ابتدا در حالت‌های خاص که ساده‌تر است مسئله را بررسی کنیم، مثلاً چندجمله‌ای‌های درجه اول و دوم را بررسی کنیم. معلم: آفرین، این روش شما کمک زیادی به حل مسئله می‌کند. با مشاهده‌ی مسئله در حالت‌های خاص می‌توانیم درک بهتری از جزئیات مسئله پیدا کنیم، حال بگو چه پیشنهادی داری؟

علی: من توانستم حدس بزنم که چه رابطه‌ای بین ریشه‌های دو چندجمله‌ای وجود دارد ولی نتوانستم اثباتی برای آن ارائه کنم، در حالت چندجمله‌ای‌های درجه اول مانند $P(x) = ax + b$ داریم $Q(x) = bx + a$ و ریشه‌های آن‌ها به ترتیب $-\frac{a}{b}$ و $-\frac{b}{a}$ می‌باشند که وارون یکدیگرند. در حالت چندجمله‌ای‌های درجه‌ی دوم محاسبات پیچیده‌تر بود و نتوانستم فکر خود را تعقیب کنم.

سعید: جالب است اتفاقاً من با چندجمله‌ای درجه دوم خاصی که ریشه‌هایشان را می‌دانستم محاسبه کردم و به همین نتیجه رسیدم. من یک چندجمله‌ای ساده مثل $P(x) = (x+3)(x-4)$ را در نظر گرفتم که ریشه‌هایش را از قبل می‌دانستم. اگر آن را به صورت استاندارد بنویسیم داریم: $P(x) = x^2 - x - 12$ ، بنابراین $Q(x) = -12x^2 - x + 1$ و ریشه‌های آن از دستور کلی معادله‌ی درجه‌ی دوم $\frac{1}{-3}$ و $-\frac{1}{4}$ خواهند شد.

معلم: هر دو روش کارهای خوبی برای حل مسئله انجام داده‌اند. در هر دو روش این حدس پیش می‌آید که ریشه‌های دو چندجمله‌ای معکوس یکدیگرند. شما می‌توانید این حدس را در مثال‌های دیگری هم بررسی کنید. حال چگونه می‌توانید این مطلب را برای یک چندجمله‌ای دلخواه ثابت کنید؟ ابتدا بهتر است حدس خود را به شکل دقیق‌تری بیان کنید، مثلاً برای دو چندجمله‌ای $P(x) = ax^2 + bx + c$ و $Q(x) = cx^2 + bx + a$ اگر r یک ریشه‌ی $P(x)$ باشد باید تحقیق کنیم که آیا $\frac{1}{r}$ یک ریشه‌ی $Q(x)$ می‌شود؟

علی: پس باید از $P(r) = 0$ بتوانیم نتیجه بگیریم $Q(\frac{1}{r}) = 0$. اما اگر صفر، یک ریشه‌ی $P(x)$ باشد چنین نتیجه‌گیری امکان‌پذیر نخواهد بود.

معلم: لابد صفر نمی‌تواند ریشه‌ی $P(x)$ شود. آیا می‌توانید این مطلب را بررسی کنید؟

سعید: درست است صفر نمی‌تواند ریشه‌ی $P(x)$ باشد، زیرا $P(0) = a_0 \neq 0$.

معلم: حالا که مطمئن شدید $P(x)$ ریشه‌ی صفر ندارد، سعی کنید از فرض $P(r) = 0$ حکم $Q(\frac{1}{r}) = 0$ را به دست آورید.

عباس: پس فرض کنیم $P(r) = ar^2 + br + c = 0$ اکنون می‌خواهیم $Q(\frac{1}{r})$ را به دست آوریم.

$$Q(\frac{1}{r}) = c(\frac{1}{r})^2 + b(\frac{1}{r}) + a = \frac{c + br + ar^2}{r^2} = \frac{P(r)}{r^2} = 0$$

معلم: آفرین، محاسبه را به درستی انجام دادی. انجام این محاسبه در حالت کلی هم چندان مشکل نیست.

اگر r ریشه‌ای از چندجمله‌ای $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ باشد، آن‌گاه $P(r) = 0$ بنابراین:

$$Q(\frac{1}{r}) = a_0 (\frac{1}{r})^n + a_1 (\frac{1}{r})^{n-1} + \dots + a_{n-1} (\frac{1}{r}) + a_n = \frac{1}{r^n} (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n) = \frac{1}{r^n} P(r) = 0$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ ریشه‌ی $Q(x)$ است.

علی: آیا عکس مطلب هم درست است و اگر s ریشه‌ای از $Q(x)$ باشد آیا $P(\frac{1}{s}) = 0$ ؟

معلم: این مطلب بدیهی است زیرا اگر از چندجمله‌ای $Q(x)$ شروع کنیم و چندجمله‌ای وارون آن را بسازیم همان $P(x)$ می‌شود.



همانطور که مشاهده کردید برهان نهایی این مسئله مانند یک میحث ریاضی مختصر و رسمی است و نتایج نهایی، فرایند فکر ما را نمایش می‌دهد. اما این مطلب مهم است که بدانیم با یک مسئله چگونه برخورد کنیم و راه‌حل‌های خود را به دست آوریم؟ اگر به شیوه‌های کار توجه کنید کاری که ما انجام دادیم آزمایش حالت‌های خاص به منظور دیدن یک الگو برای برهان یک مسأله‌ی کلی بود. از این روش در حل بسیاری از مسائل می‌توان استفاده کرد.

تمرین

مستقیماً ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را به دست آورید و نشان دهید ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله‌ی $cx^2 + bx + a = 0$ است.

۹ نکاتی در مورد حل معادله‌ی درجه دو

۹-۱ هرگاه در معادله‌ی درجه دو مجموع ضرایب صفر باشد یکی از ریشه‌ها (۱) و ریشه‌ی دیگر $(\frac{c}{a})$ است، یعنی:

$$a + b + c = 0 \rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$$

۹-۲ هرگاه در معادله‌ی درجه دو $a + c = b$ باشد یکی از ریشه‌ها (-۱) و ریشه‌ی دیگر $(-\frac{c}{a})$ است، یعنی:

$$a + c = b \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$$

$$\text{مثال: } (\cos^2 \theta)x^2 + x + \sin^2 \theta = 0 \rightarrow a = \cos^2 \theta \text{ و } b = 1, c = \sin^2 \theta \Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = -\tan^2 \theta$$

نتیجه: در هر معادله‌ی درجه n ، اگر مجموع ضرایب صفر باشد یکی از ریشه‌ها حتماً (۱) بوده و برای پیدا کردن ریشه‌های دیگر، عبارت را بر $(x-1)$ تقسیم می‌کنیم و اگر در یک معادله‌ی درجه n مجموع ضرایب جملات فرد و زوج با هم برابر باشند یکی از ریشه‌ها حتماً برابر (-۱) بوده و برای پیدا کردن ریشه‌های دیگر کافی است عبارت را بر $(x+1)$ تقسیم نماییم.

تست نمونه

• مجموع ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 - 6x^2 - 7x + 2 = 0$ کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

حل:

$$2 + (-7) = -6 + 2 \rightarrow x_1 = -1$$

$$3x^2 - 6x^2 - 7x + 2 \mid x+1 \Rightarrow 3x^2 - 6x^2 - 7x + 2 = (x+1)(3x^2 - 9x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-3x^2 - 3x^2}{-9x^2 - 7x}$$

$$\frac{-9x^2 - 7x}{9x^2 + 9x}$$

$$\frac{9x^2 + 9x}{2x + 2}$$

$$\frac{2x + 2}{-2x - 2}$$

$$\frac{-2x - 2}{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ \rightarrow 3x^2 - 9x + 2 = 0 \rightarrow x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 3 = 2$$

۹-۳ هرگاه در معادله‌ی درجه دو $\frac{c}{a} < 0$ باشد همواره $\Delta > 0$ بوده و معادله دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت می‌باشد.

۹-۴ شرط آن که دو معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ و $a'x^2 + b'x + c' = 0$ ریشه‌های مشترک داشته باشند آن است که:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

۹-۵ اگر دو معادله‌ی درجه دو دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند، می‌توان با حذف جمله‌ی درجه دو، این ریشه‌ی مشترک را پیدا کرد.

تست نمونه

• اگر دو معادله‌ی $mx^2 + 5x - 7 = 0$ و $3mx^2 - 10x + 4 = 0$ دارای یک ریشه‌ی مشترک باشند مقدار m کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

حل:

$$\times (-3) \begin{cases} mx^2 + 5x - 7 = 0 \\ 3mx^2 - 10x + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow -25x + 25 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{ریشه‌ی مشترک}$$

$$\Rightarrow m(1) + 5 - 7 = 0 \rightarrow m = 2$$

بنابراین گزینه‌ی «۱» پاسخ صحیح است.

معادلات دو مجذوری: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

روش حل: برای حل این معادلات ابتدا با تغییر متغیر $x^2 = t$ معادله را به معادله‌ی درجه دوم $at^2 + bt + c = 0$ ساده نموده و پس از حل آن و محاسبه‌ی t مقدار x را به دست می‌آوریم.

تست نمونه

• معادله‌ی $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ چند ریشه دارد؟

۲) ۲ ریشه

۱) ریشه ندارد

۳) ۳ ریشه

۴) ۴ ریشه

حل:

$$x^2 = t \rightarrow t^2 - 4t - 5 = 0 \rightarrow (t-5)(t+1) = 0 \Rightarrow t = -1, 5$$

$$x^2 = t = -1 \text{ و } x^2 = t = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$$

بنابراین گزینه‌ی « ۲ » پاسخ صحیح است.

مثال آموزشی

• معادله‌ای با ضرایب صحیح و کمترین درجه تشکیل دهید که یک جواب آن $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ باشد.

حل: برای یافتن این معادله قرار می‌دهیم $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. با به توان دو رساندن طرفین این تساوی می‌توان نوشت $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. یکی از جواب‌های این معادله $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ است ولی هنوز همه‌ی ضرایب این معادله عدد صحیح نیستند. می‌توان نوشت $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$ و با به توان دو رساندن طرفین این معادله و ساده کردن آن خواهیم داشت: $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$

این معادله جواب‌های دیگری هم دارد، بقیه‌ی جواب‌ها چه هستند؟ با در نظر گرفتن $x^2 = z$ می‌توان معادله را به یک معادله‌ی درجه دوم بر حسب z تبدیل کرد: $z^2 - 10z + 1 = 0$. یا حل این معادله خواهیم داشت:

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \Rightarrow x = \pm(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

حال با حل دو معادله‌ی $x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ ، $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ خواهیم داشت:

با همین روش جواب‌های $x = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ برای معادله‌ی دیگر به دست می‌آیند. این معادله دارای چهار جواب است.

در برخی از معادلات با در نظر گرفتن یک متغیر جدید می‌توان آن را به یک معادله‌ی درجه‌ی دو تبدیل کرد. به این گونه معادلات، معادلات دو مجذوری می‌گویند.

• معادله‌ی دو مجذوری $(x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$ را حل کنید.

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-1) = 0 \Rightarrow t = -2, t = 1$$

حل: با انتخاب $(x^2 - 1)^2 = t$ داریم:

$$\begin{cases} t = -2 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = -2 & \text{غ ق} \\ t = 1 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

۲ بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی دو مجذوری

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=t} at^2 + bt + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز $\Delta > 0$ ، $\frac{c}{a} > 0$ ، $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$

ریشه‌ی حقیقی ندارد $\Delta > 0$ ، $\frac{c}{a} > 0$ ، $-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow$

دو ریشه‌ی حقیقی متمایز $\Delta > 0$ ، $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow$

دو ریشه‌ی حقیقی و قرینه $\Delta = 0$ ، $-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$

ریشه‌ی حقیقی ندارد $\Delta = 0$ ، $-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow$



مثال آموزشی

• معادله‌ی دو مجذوری $mx^4 - 4x^2 + m - 3 = 0$ به ازای چه مقادیری از m دارای چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز می‌باشد؟
 حل: با انتخاب $t = x^2$ داریم: $t^2 = x^4$ ، پس:

$$mt^2 - 4t + m - 3 = 0$$

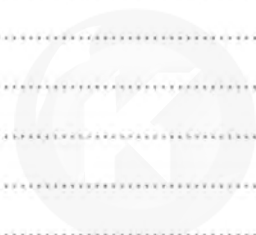
$$x^2 = t \rightarrow x = \pm\sqrt{t}$$

از طرف دیگر:

واضح است که به ازای t های منفی مقداری برای x به دست نمی‌آید و به ازای هر t مثبت دو مقدار برای x به دست می‌آید و چون معادله‌ی $mx^4 - 4x^2 + m - 3 = 0$ باید چهار ریشه‌ی حقیقی و متمایز داشته باشد نتیجه می‌گیریم که معادله‌ی $mt^2 - 4t + m - 3 = 0$ باید دو ریشه‌ی مثبت (دو t مثبت) داشته باشد و شرط آنکه معادله‌ی درجه‌ی دو دارای دو ریشه‌ی مثبت باشد آن است که:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow 16 - 4m(m-3) > 0 \xrightarrow{*(-4)} m^2 - 3m - 4 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 4 & (1) \\ -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow \frac{4}{m} > 0 \rightarrow m > 0 & (2) \\ \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m-3}{m} > 0 \rightarrow m < 3 \text{ یا } m > 3 & (3) \\ \xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} 3 < m < 4 \end{cases}$$

یادداشت:



سایت کنکور
Konkur.in