حل تشریحی آزمون سراسری خارج از کشور ۹۸ رشته ریاضی

۱۰۱) گزینه ۴

$|A| = 15$ = تعداد دارای عضویت باشگاه

$|F| = 12$ = تعداد اعضای فوتبال $\Rightarrow |A \cup F| = |A| + |F| - |A \cap F|$

$|A \cap F| = 7$ = ... هر دو $\qquad = 15 + 12 - 7 = 20$

$\Rightarrow |A' \cap F'| = 42 - 20 = \boxed{22}$

---

۱۰۲) گزینه ۳

$A = \sqrt[5]{\sqrt{3^5}} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[10]{3^5} \times \left(\frac{1}{12}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{(4 \times 3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}} \times 3^1} = \frac{1}{24}$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{2}} = (25)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

---

۱۰۳) گزینه ۳

همواره منفی $\Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 4(m-3)^2 + 4(1-m) < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \\ a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow \underline{m > 1} \; (1) \end{cases}$

$(m-2)(m-5) < 0$

$\underline{2 < m < 5} \; (2)$

$(1) \cap (2) \quad \boxed{2 < m < 5}$

---

۱۰۴) گزینه ۴

$f(x+2) - 9 = (x+2)^2 - (x+2) - 2 - 9 = x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) < 0$

$\Rightarrow \underline{-2 < x < 5}$

---

۱۰۵) گزینه ۱

$A = \frac{1}{3}\left(\frac{5-2}{2 \times 5} + \frac{8-5}{5 \times 8} + \frac{11-8}{8 \times 11} + \cdots + \frac{20-17}{17 \times 20}\right)$

$A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{8}} + \cancel{\frac{1}{8}} - \cancel{\frac{1}{11}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{17}} - \frac{1}{20}\right)$

$A = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{20}\right) = \frac{3}{20} = 0/15$

---

۱۰۶) گزینه ۲

$x < -2 \Rightarrow 1 - 2x - x - 2 = 3 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$ غ ق ق

$-2 \le x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2x + x + 2 = 3 \Rightarrow \underline{x = 0}$ ق ق $\qquad \longrightarrow$ مجموع $= \frac{2}{3}$

$x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow \underline{x = \frac{2}{3}}$ ق ق

۱۰۷) گزینه ۴

$g^{-1}=\{(4,2),(2,4),(6,5),(1,3)\} \Rightarrow g^{-1}\circ f=\{(1,4),(4,5)\}$

$\Rightarrow (g^{-1}\circ f)-f=\{(1,2),(4,-1)\} \to \text{برد}=\{-1,2\}$

۱۰۸) گزینه ۳

$M|_{1}^{1}\in f \to f(1)=1 \to 3^{A+B}=1=3^{0} \to A+B=0$ $\Rightarrow 2A=2 \to A=1$

$N|_{9}^{2}\in f \to f(2)=9 \to 3^{2A+B}=9=3^{2} \Rightarrow 2A+B=2$ $\quad B=-1$

$\Rightarrow f(x)=3^{x-1} \to f(0)=3^{-1}=\frac{1}{3}$

۱۰۹) گزینه ۲

$A=\tan(4\pi-\frac{\pi}{4})\cdot\sin(4\pi-\frac{\pi}{4})+\cos(4\pi-\frac{2\pi}{3})=\tan(-\frac{\pi}{4})\cdot\sin(-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{2\pi}{3}$

$=(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2})+(-\frac{1}{2})=0$

۱۱۰) گزینه ۲

$\lim_{x\to1^+}\frac{\sin^2\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-\cos^2\pi x}{1+\cos\pi x}=\lim_{x\to1^+}(1-\cos\pi x)=1-(-1)=2$

۱۱۱) گزینه ۳

f در R پیوسته $\Rightarrow$ f باید در ۱ و ۱- پیوسته باشد

$f(x)=\begin{cases}x[x]; & -1\le x<1\\ ax+b; & x\ge1 \text{ یا } x\le-1\end{cases}$

$\lim_{x\to1^-}f(x)=0 \quad \lim_{x\to1^+}f(x)=a+b \to a+b=0$ (1)

$\lim_{x\to-1^-}f(x)=-a+b \quad \lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}-x=1 \Rightarrow b-a=1$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow 2b=1 \to b=\frac{1}{2},\ a=-\frac{1}{2}$

۱۱۲) گزینه ۱

$f(x)=\tan\pi x-\cot\pi x=-2\cot2\pi x \Rightarrow T=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

۱۱۳) گزینه ۴

$1-2\sin^2x\cos^2x=\frac{1}{2} \to \sin^2x\cos^2x=\frac{1}{4} \to \frac{1}{4}\sin^2 2x=\frac{1}{4}$

$\to \sin^2 2x=1 \to \sin2x=1 \to 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \to x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$\sin2x=-1 \to 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2} \to x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

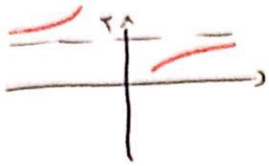
اجتماع $\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ یا $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}=4\pi$

۱۱۴) گزینه ۱

$\lim_{x\to\infty} y = 2 \to y=2$ مجانب افقی

$\lim_{x\to+\infty}(y-2) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x-2}{x^2+3x} = 0\ (0^-)$



$\lim_{x\to-\infty}(y-2) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5x-2}{x^2+3x} = 0\ (0^+)$

۱

۱۱۵) گزینه ۴

$y=4x-5 \xrightarrow{x=2} y=1 \to (2,1)\in g \to g(2)=1$

$m_d = 4 \to g'(2)=4 \qquad \lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{2(x-1)} = \frac{1}{2}f'(1) = \frac{2}{4} \to f'(1)=\frac{4}{4}$

$(fog)'(2) = g'(2)\cdot f'(g(2)) = 4f'(1) = 4\left(\frac{4}{4}\right) = 4$

۱۱۶) گزینه ۳

$D_f: R-\{0\} \qquad f(x) = \frac{|x|\cdot|x^2-2|}{x}$

$x=\pm\sqrt{2}$ ریشه‌ی ساده داخل قدرمطلق و نقطه گوشه‌دار (دو نقطه) و مشتق‌ناپذیر f

و در ۰ چون تابع تعریف نشده این نقطه، نقطه مشتق‌ناپذیر محسوب نمی‌شود.

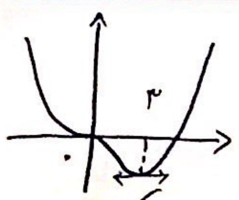
۱۱۷) گزینه ۲

آهنگ متوسط تغییر در $[0,4]$ $= \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{3+\frac{1}{5}-2}{4} = \frac{3}{10}$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $\frac{3}{2}$ $= f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}\Big|_{x=\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{17}{50}$

$\frac{17}{50} - \frac{3}{10} = \frac{2}{50} = 0/04$

۱۱۸) گزینه ۴



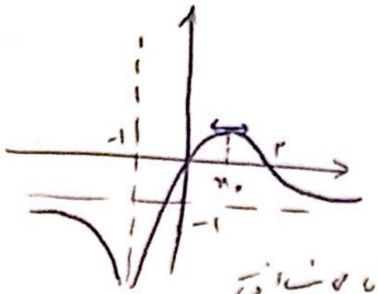
$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$

عطف افقی $x=0 \Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=0 \to b=0,\ f''(0)=0$

$f(-2)=16+32=48$

طول اکسترمم نسبی $x=3 \Rightarrow f'(3)=0 \Rightarrow 4x^3+3ax^2\big|_{x=3} = 0 \Rightarrow 108+27a=0 \Rightarrow a=-4$

۱۴۹) گزینه ۳



$$f'(x)=\frac{(2-2x)(x+1)^2-2(x+1)(2x-x^2)}{(x+1)^4}=\frac{2(1-x^2-2x+x^2)}{(x+1)^4}=0$$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ طول max $\Rightarrow$ عرض max $\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right.$

فاصله دو خط $=\frac{1}{3}-(-1)=\frac{4}{3}$

۱۵۰) گزینه ۴

$D_f:[-3,3]-\{1\}$ $\rightarrow k-2\geq -3 \rightarrow k\geq -1$

$3k+2\leq 3 \rightarrow k\leq \frac{1}{3} \Rightarrow [-1,\frac{1}{3})$

$k\neq -\frac{1}{3}$

دانش آموزان قدیم

۱۵۰/ ۴

$$f'(x)=2\tan(\sin^{-1}x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(1+\tan^2(\sin^{-1}x))$$

$$f'(\tfrac{1}{2})=2\tan(\tfrac{\pi}{6})\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times(1+\tan^2(\tfrac{\pi}{6}))=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times(1+\frac{1}{3})=\frac{4}{3}(\frac{4}{3})=\frac{16}{9}$$

۱۵۱) گزینه ۱

$$\bar{f}=\frac{\int_0^4(x+x\sqrt{x})dx}{4-0}=\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big]_0^4}{4}=\frac{8+\frac{64}{5}}{4}=\frac{26}{5}=5/2$$

۱۵۲) گزینه ۳

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(\cos(2x)-\cos 4x)dx=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{2}}{2})-\frac{1}{8}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{16}=\frac{3\sqrt{2}}{16}$$