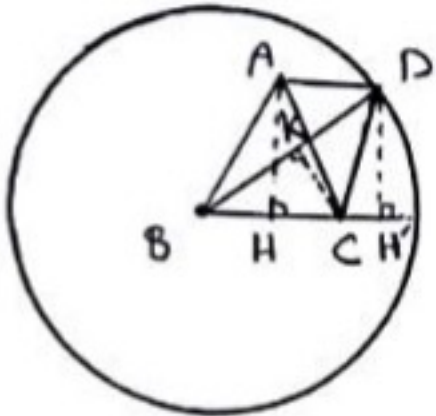


پانچ سوالات هندسه و گسسته کنکور سراسری خارج از کشور ریاضی ۹۸
 تهیه و تنظیم: فرزانه خاکپاش - امیرحسین ابوجوب

۱۲۰ - گزینه ۳



مثلث ABC متساوی الساقین است، بنابراین ارتفاع AH
 نیز هست و داریم:

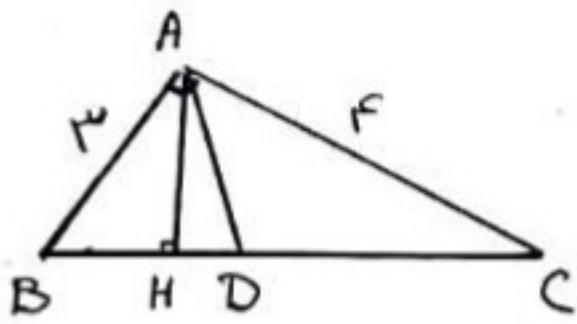
$$\therefore AH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow AH = 15$$

اگر پای ارتفاع وارد از نقطه C بر پاره خط BD را k و پای ارتفاع وارد از نقطه D بر
 امتداد پاره خط BC را H' بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{BCD} &= \frac{1}{2} CK \times BD \\ S_{BCD} &= \frac{1}{2} DH' \times BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow CK \times BD = DH' \times BC$$

$$\Rightarrow CK \times 25 = 15 \times 16 \Rightarrow C = \frac{240}{25} = 9,6$$

دقت کنید که AH و DH' فاصله خط موازی BC و AD هستند و برابر یکدیگرند.



۱۲۱ - گزینه ۳

$$\triangle ABC: BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

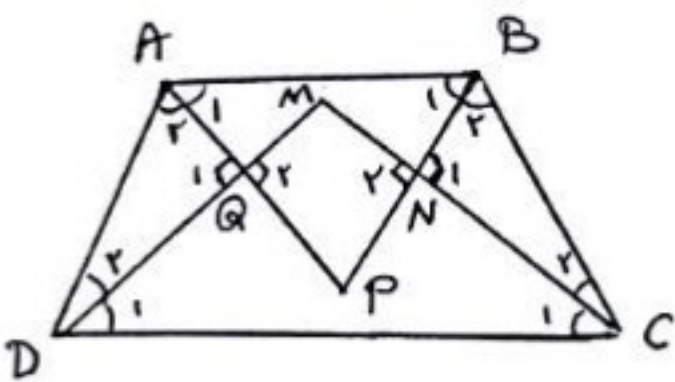
$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

از طرفی طبق قضیه نیمسازها که زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{3}{4+3}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

$$DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75 - 63}{35} = \frac{12}{35}$$



۱۲۲ - گزینه ۲

$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{D}_2 = 90^\circ$$

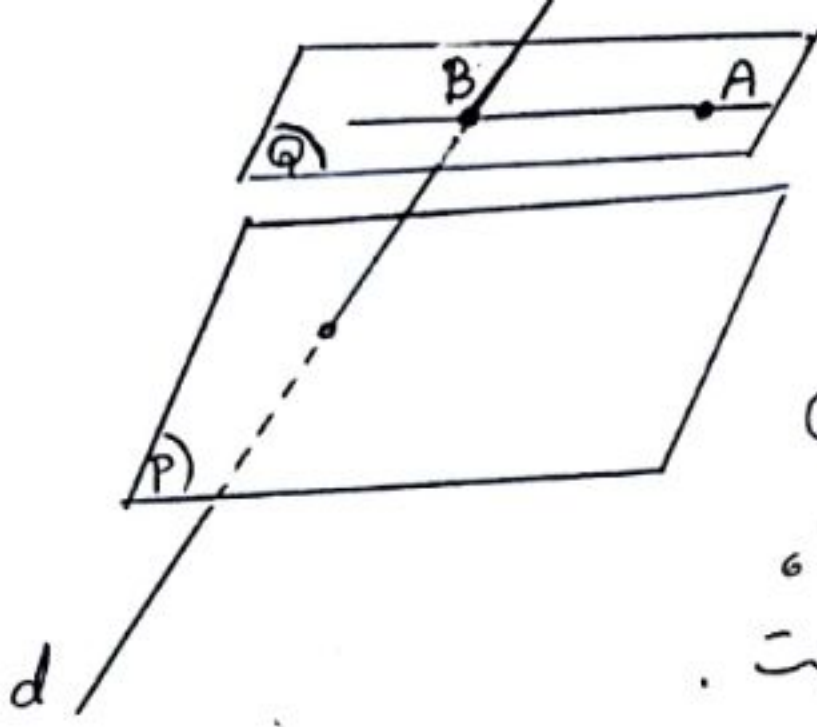
$$\xrightarrow{\triangle AQD} \hat{Q}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{Q}_2 = 90^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 90^\circ$$

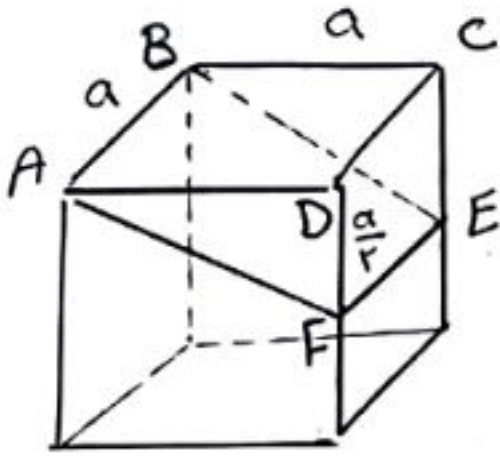
$$\xrightarrow{\triangle BNC} \hat{N}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{N}_2 = 90^\circ$$

بنابراین مجموع زوایای مقابل در چهارضلعی MNPQ برابر ۱۸۰ است، پس این چهارضلعی مماسی است.

۱۲۳ - گزینه "۴"



فرض کنید خط d و صفحه P متقاطع باشند. از نقطه A ،
 صفحه Q را موازی با صفحه P رسم می‌کنیم. خط d و صفحه Q
 را در نقطه B قطع می‌کند. حال خط گذرنده از نقاط A و B ،
 تنها خطی است که خط d را قطع کرده و با صفحه P موازی است.



۱۲۴ - گزینه "۱"
 $\triangle ADF: AF^2 = AD^2 + DF^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2}$

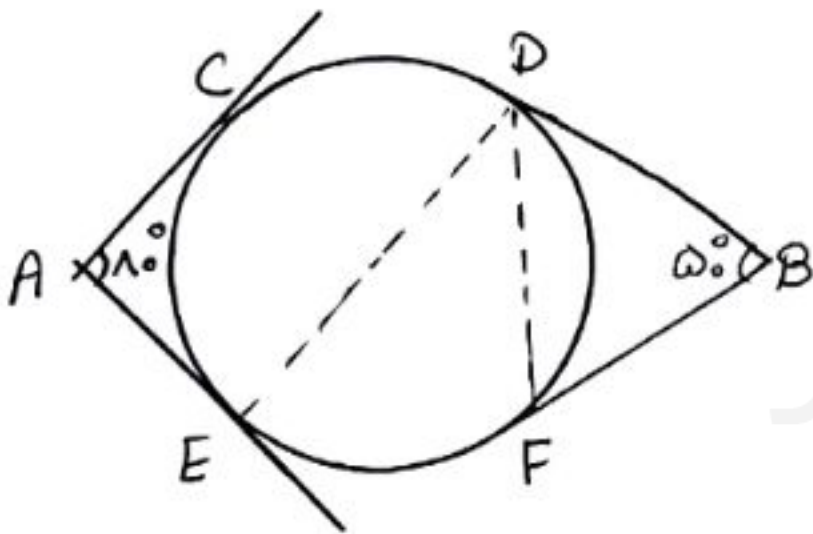
$\Rightarrow AF = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

سطح مقطع این برش، مستطیل $ABEF$ است. داریم:

$S_{ABEF} = AB \times AF = a \times \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2}a^2$

$\Rightarrow S_{ABEF} = \frac{\sqrt{5}}{2}S_{ABCD}$

۱۲۵ - گزینه "۳"



وتر CD برابر شعاع دایره است، پس $\widehat{CD} = 40^\circ$ می‌باشد.

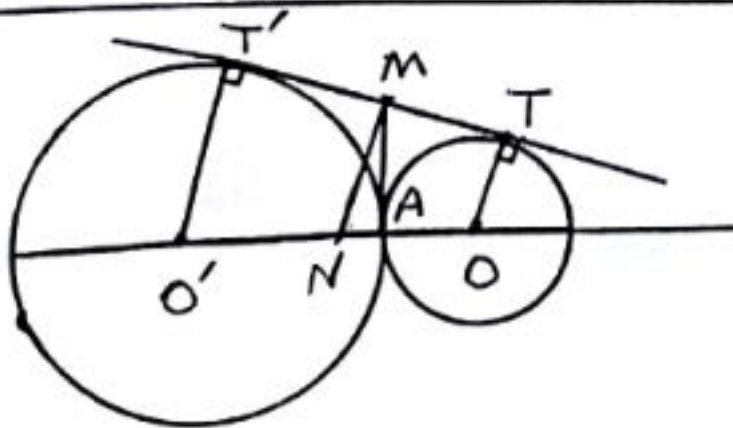
فرض $\widehat{CE} = x$ ، $\widehat{DE} = y$ و $\widehat{EF} = z$ داریم:

$\widehat{B} = \frac{(40^\circ + x + z) - y}{2} = 50^\circ \Rightarrow x + z - y = 40^\circ$

$\widehat{A} = \frac{(40^\circ + y + z) - x}{2} = 18^\circ \Rightarrow y + z - x = 100^\circ$

از جمع دو رابطه فوق داریم: $2z = 140^\circ \Rightarrow z = 70^\circ \Rightarrow \widehat{EDF} = \frac{z}{2} = 35^\circ$

۱۲۶ - گزینه "۱"



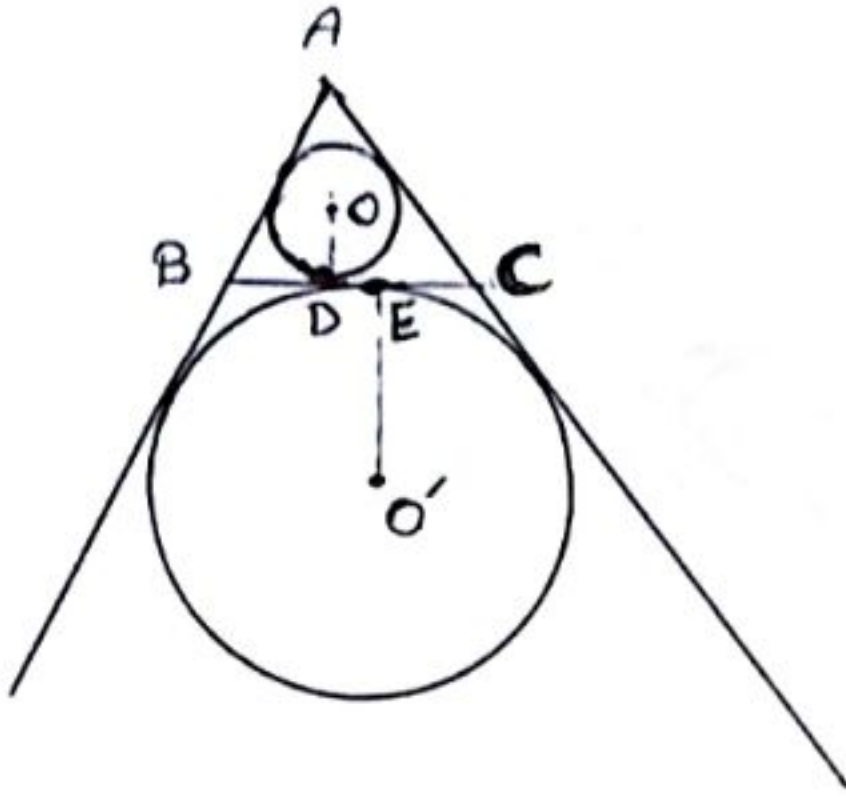
فرض کنید نقطه N وسط OO' و نقطه M وسط TT' باشد.

در ذوزنقه $OO'TT'$ داریم:

$MN = \frac{OT + O'T'}{2} = \frac{R + R'}{2}$

یعنی نقطه وسط مماس مشترک دو دایره روی دایره ای به قطر OO' است.

$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{4 \times 9} = 12 \Rightarrow MA = MT = MT' = \frac{TT'}{2} = 6$



فرض کنید دایره‌های مماس داخلی و مماس خارجی نظر رأس A به ترتیب در نقاط E و D بر ضلع BC مماس باشند.

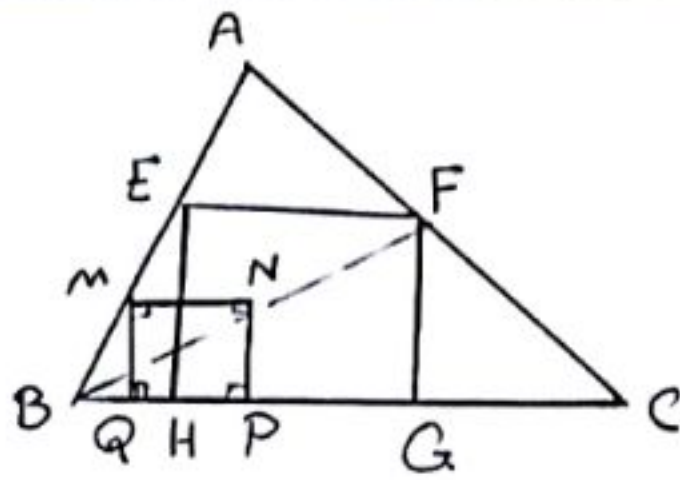
در این صورت داریم:

$$P = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{5 + 7 + 8}{2} = 10$$

تصور نقاط O و O' (مراکز دو دایره) بر ضلع BC،

همان نقاط D و E هستند. داریم:

$$\begin{aligned} DE &= BD - BE = (P - c) - (P - b) \\ &= b - c = 7 - 5 = 2 \end{aligned}$$



مربع MNPQ را داخل مثلث ABC به گونه‌ای می‌سازیم که

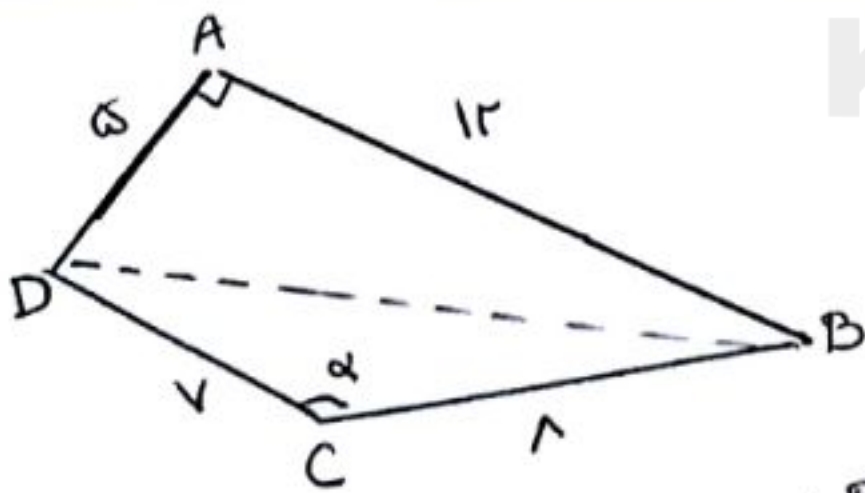
یکی از اضلاع آن روی ضلع BC واقع باشد. از رأس B

به نقطه N وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع AC را در

نقطه F قطع کند و سپس از F خط موازی با BC رسم می‌کنیم تا

ضلع AB را در نقطه E قطع نماید. از نقاط E و F، دو عمود EH و FG را بر ضلع BC رسم می‌کنیم.

چهارضلعی EFGH مربع است و مجانب مربع MNPQ در رأس B می‌باشد.



$$\triangle ABD: BD^2 = AB^2 + AD^2 = 12^2 + 5^2 = 149 \Rightarrow BD = 13$$

لجوب قضیه کینوس کا در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 149 = 44 + 49 - 2 \times 8 \times 7 \times \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 112 \cos \alpha = -56 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ y & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+4y-1 & -2x+4 \\ 7+y & -3 \end{bmatrix} \quad \text{گزینه « ۲ » ۱۳۰}$$

برای این که ماتریس قطری باشد، لازم است درایه‌ها خارج قطر اصلی آن همگی برابر صفر باشند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 7 + y = 0 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

گزینه « ۱ » ۱۳۱

گزینه « ۴ » ۱۳۲ - طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان 3×3 داریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 10 + 72) - (0 + 60 - 3) = 25$$

گزینه « ۳ » ۱۳۳

فرض کنید معادله دایره مورد نظر به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد. برای یافتن معادله وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = x^2 + y^2 - 17 \Rightarrow ax + by = -c - 17$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $2x - y = 3$ منطبق است، پس داریم:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{-1} = \frac{-c-17}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = 3b - 17 \end{cases}$$

نقطه $(-1, 4)$ روی دایره است، پس مختصات آن در معادله دایره صدق می‌کند:

$$x^2 + y^2 + (-2b)x + by + 3b - 17 = 0 \xrightarrow{(-1, 4)} 36 + 1 - 12b - b + 3b - 17 = 0$$

$$\Rightarrow 10b = 20 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ c = -11 \end{cases}$$

$$\text{شعاع دایره: } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 4 + 44}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = 4$$

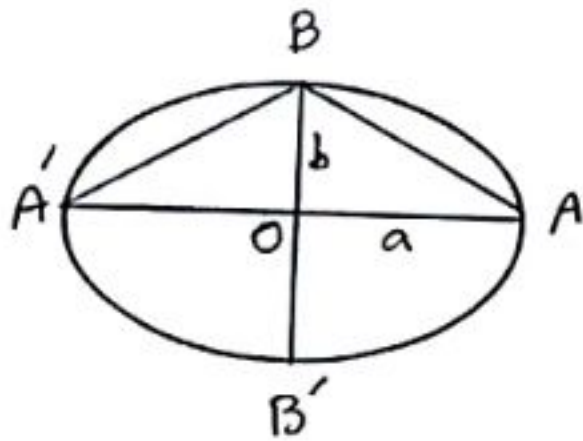
$$2x^2 - 4x + 3y = 4 \Rightarrow 2(x^2 - 2x + 1) - 2 = -3y + 4$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 = -3y + 6 \Rightarrow (x-1)^2 = -\frac{3}{2}(y-2)$$

سهی قائم‌الاست و روبه پایین باز می‌شود و $S(1, 2)$ رأس سهی است. داریم:

$$fa = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{8}$$

$$\text{کانون سهی: } F\left(1, 2 - \frac{3}{8}\right) = \left(1, \frac{13}{8}\right)$$



$$e = \sqrt{\frac{r}{3}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{r}{3}} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{r}{3} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{r}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{r}{3} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

$$\tan(\hat{ABO}) = \frac{OA}{OB} = \frac{a}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{ABO} = 60^\circ \Rightarrow \hat{ABA'} = 120^\circ$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - 12\vec{k}$$

حجم متوازی السطوح برابر است با قدر مطلق دترمینان ماتریسی که در این‌ها \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} مولفه‌های سه بردار

\vec{a} ، \vec{b} و $\vec{a} \times \vec{b}$ هستند و بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & -12 \end{vmatrix} = (0 + 9 + 24) - (0 - 12 - 144) = 189 \Rightarrow V = 189$$

تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه A برابر $2^9 = 512$ است، پس $|A| = 9$ بوده و در نتیجه داریم:

$$|(BUA')'| = |A \cap B'| = |A - B| = |A| - |A \cap B| = 9 - 3 = 6$$

یعنی تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر $2^6 = 64$ است.

اگر احتمال شرکت امیر و بهروز در مسابقه علمی را به ترتیب با A و B بنامیم، آنگاه داریم:

$$P(A) = 0,4 \text{ و } P(B) = 0,3$$

$$P(A|B) = 0,5 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,5 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,5 \times 0,3 = 0,15$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,15}{1 - 0,3} = \frac{0,25}{0,7} = \frac{5}{14}$$

۱۳۹ - گزینه « ۲ »
با توجه به آنکه رنگ مهره اول خارج شده از جعبه را مشاهده نکرده ایم، مانند آن است که این مهره

از جعبه خارج شده است و در نتیجه احتمال خارج شدن مهره سفید از جعبه، برابر $\frac{6}{10} = 0,6$ می باشد.

$$\bar{x} = \frac{6 \times 10 + 9 \times 12 + 10 \times 14 + 12 \times 15 + 8 \times 16 + 5 \times 18}{6 + 9 + 10 + 12 + 8 + 5} = \frac{706}{50} = 14,12$$

تعداد داده ها برابر ۵۰ است. چون تعداد داده ها زوج است، پس میانگین داده ها برابر میانگین دو داده وسط یعنی داده های بیست و پنجم و بیست و ششم است که با توجه به فراوانی

$$Q_2 = \frac{14 + 15}{2} = 14,5 \quad \text{داده ها داریم:}$$

$$Q_2 - \bar{x} = 14,5 - 14,12 = 0,38$$

اگر داده ها را به صورت صعودی مرتب کنیم، داریم:

$$32, 37, 39, 42, 46, 50, 54, 56, 57, 59$$

میانگین داده ها برابر است با $Q_2 = \frac{42 + 46}{2} = 44$ و چارک ها اول و سوم به ترتیب $Q_1 = 39$ و $Q_3 = 56$ هستند.

$$\bar{x} = \frac{42 + 46 + 50 + 54}{4} = 48 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(-6)^2 + (-2)^2 + 2^2 + 6^2}{4} = \frac{40}{4} = 10 \Rightarrow \sigma = 2\sqrt{5}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{24} \approx 0,09$$

۱۴۲ - گزینه « ۱ »

$$[(427, 429), 154] = [(3 \times 11 \times 19, 3 \times 11 \times 33), 154]$$

$$= [33, 154] = [3 \times 11, 2 \times 7 \times 11] = 2 \times 3 \times 7 \times 11 = 462$$

۱۴۳ - گزینه « ۲ »

$$\left. \begin{aligned} \alpha | 5n + 4 &\xrightarrow{x \equiv 11} \alpha | 55n + 44 \\ \alpha | 11n + 3 &\xrightarrow{x \equiv 5} \alpha | 55n + 15 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{فاضل}} \alpha | 29 \xrightarrow{\alpha \neq 1} \alpha = 29$$

$$29 | 5n + 4 \Rightarrow 5n + 4 \equiv 0 \pmod{29} \Rightarrow 5n \equiv -4 \equiv 25 \pmod{29} \Rightarrow n \equiv 5 \pmod{29}$$

$$\Rightarrow n = 29k + 5 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

بنابراین اعداد دورقمی n عبارت اند از: ۳۴, ۶۳, ۹۲

۱۴۴ - گزینه « ۴ »

$$9x + 13y = 725 \Rightarrow 13y \equiv 725 - 9x \pmod{9} \Rightarrow 4y \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow y \equiv -1 \pmod{9}$$

$$\xrightarrow{\div 4} y \equiv -1 \pmod{9} \Rightarrow y = 9k - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(۴, ۹) = ۱

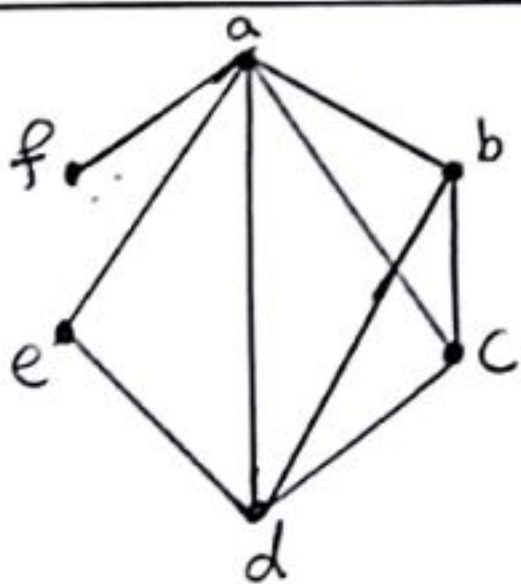
$$9x + 13(9k - 1) = 725 \Rightarrow 9x = -117k + 738 \Rightarrow x = -13k + 82$$

$$\left. \begin{aligned} x > 0 &\Rightarrow -13k + 82 > 0 \Rightarrow k < \frac{82}{13} \\ y > 0 &\Rightarrow 9k - 1 > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{9} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 \leq k \leq 6$$

یعنی این معادله سیاه دارای ۶ دسته جواب طبیعی است.

۱۴۵ - گزینه « ۱ »

$$\begin{aligned} 3 \equiv 125 \equiv 2 \pmod{5} &\xrightarrow{\text{بهمراه ۳}} 9 \equiv 8 \pmod{5} \xrightarrow{x \equiv 10} 10 \equiv 0 \pmod{5} \\ 2 \equiv 1 \pmod{5} &\xrightarrow{\text{بهمراه ۲}} 20 \equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$



۱۴۶ - گزینه « ۳ »

دوره های به طول ۳ در این گراف عبارت اند از:
 abca, acda, abda, adea, bcdb

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15 \Rightarrow y_1 + 2 + y_2 + 2 + y_3 + 2 + y_4 + 2 = 15$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7 \longrightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$$

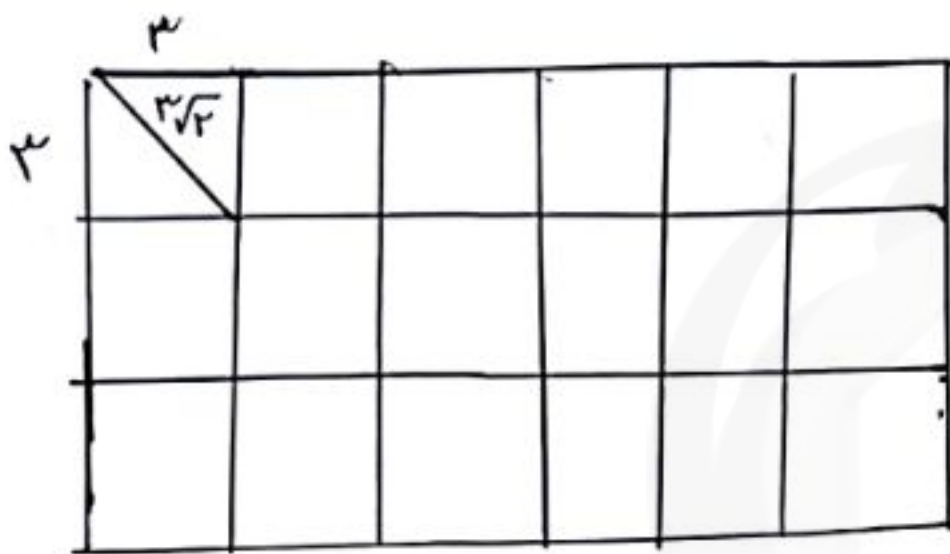
فرض کنید S مجموعه اعداد سه رقمی و A_1 و A_2 زیر مجموعه های S باشند که به ترتیب نامقد ۵ و ۲ هستند.

$$|S| = 9 \times 10 \times 10 = 900$$

$$|A_1| = |A_2| = 8 \times 9 \times 9 = 648$$

$$|A_1 \cap A_2| = 7 \times 8 \times 8 = 448$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1 \cup A_2| = 900 - (648 + 648 - 448) = 52$$



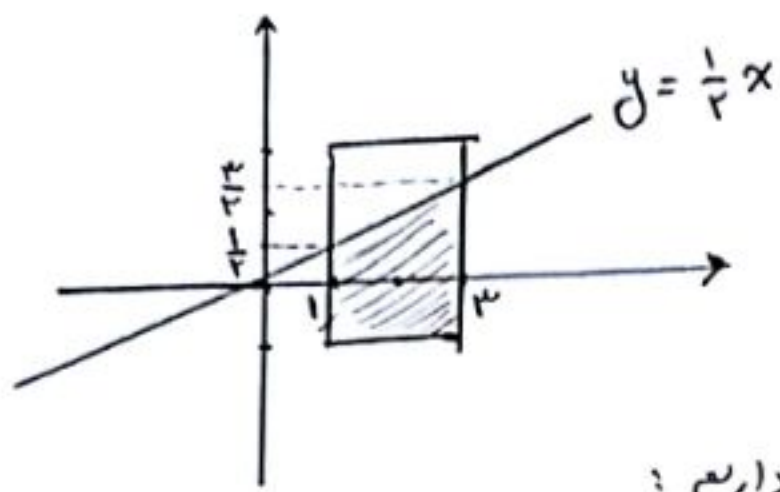
مطابق شکل اگر مستطیل را به ۱۸ مربع به طول ضلع ۳ تقسیم کنیم، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری اگر ۱۹ نقطه داخل مستطیل انتخاب کنیم، حداقل دو نقطه از میان آنها داخل یک مربع قرار گرفته و در نتیجه فاصله آنها از طول قطر مربع یعنی $3\sqrt{2}$ کمتر است.

اگر نقاط $A(0, 2, 1)$ و $B(-1, -1, 0)$ را روی این دو خط انتخاب کنیم، آنگاه با توجه به آنکه $u = (2, 3, 1)$ بردار هادی این دو خط موازی است، داریم:

$$\vec{AB} = (-1, -3, -1)$$

$$u = (2, 3, 1) \Rightarrow n = \vec{AB} \times u = (0, -1, 3)$$

$$\text{معادله صفحه: } -(y-2) + 3(z-1) = 0 \Rightarrow -y + 3z - 1 = 0 \Rightarrow y - 3z + 1 = 0$$



اگر اعداد a و b را به ترتیب روی محورهای x و y در نظر بگیریم،

آنگاه فضای نمونه‌ای شامل یک مستطیل به طول اضلاع

2 و 3 و پیمانه مطلوب معادل ناحیه‌ها سورخورده است. داریم:

$$\alpha(S) = 2 \times 3 = 6$$

$$\alpha(A) = \frac{1}{2} \times 2 \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \right) = 4$$

$$P(A) = \frac{\alpha(A)}{\alpha(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$M^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس $M^{(2)}$ دارای ۷ درانه یک است.

سایت کنکور

Konkur.in