

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

سراسری تجربی ۹۸

اگر $\log_{\lambda}(9x+1) = (\frac{125}{\lambda})^{2x-1}$ باشد، کدام است؟ $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{1-2x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{3x} \rightarrow 3x = 1 - 2x \rightarrow b=a+c \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\log_{\lambda}(9x+1) \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} \log_{\lambda} 4 = \frac{2}{3}$$

سراسری تجربی ۹۸

شکل رو به رو، نمودار تابع $y = \log_{\lambda} U(x)$ کدام است؟با توجه به مجانب قائم تابع $x = -1$ و نزوی بودن تابع و همچنین نمودار تابع از مبدأ مختصات گذشته داریم:

$$(0,0) \in f \rightarrow \log_{\lambda} 1 = 0 \rightarrow 3 \rightarrow \text{false}$$

$$x > -1 \rightarrow x + 1 > 0$$

$$y = \log(x+1)^{-1} \rightarrow y = -\log(x+1) < 0$$

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

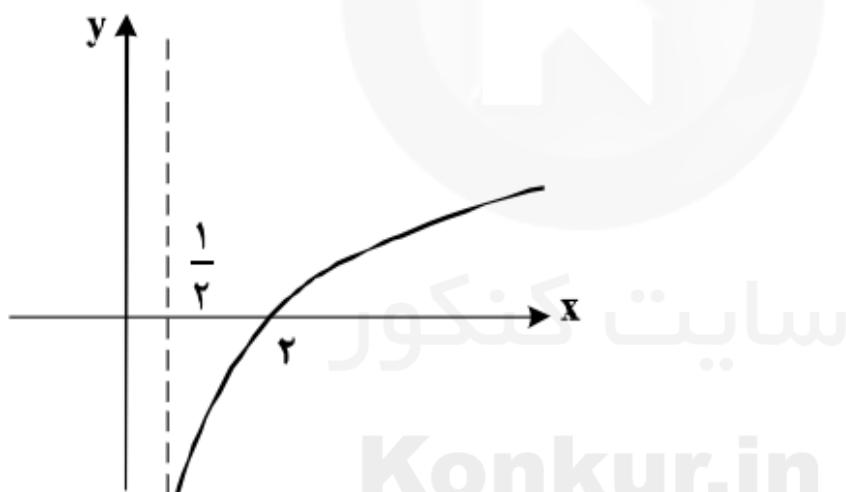
سراسری تجربی ۹۸ - خارج از کشور

اگر $3^{x^2-2} = 81^x$ باشد، حاصل $\log_e(x-2)$ کدام است؟ $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

$$3^{x^2-2} = 3^{4x} \rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta=24} \begin{cases} x_1 = \frac{4+2\sqrt{6}}{2} = 2 + \sqrt{6} \\ x_2 = \frac{4-2\sqrt{6}}{2} = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\log_e(x-2) = \log_e(2+\sqrt{6}-2) = \log_e \sqrt{6} = \frac{1}{2}$$

سراسری تجربی ۹۸ - خارج از کشور

شکل زیر، نمودار تابع $y = -1 + \log_b(2x+1)$ است. این منحنی خط $y = 1$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۴ (۱)

۵ (۲)

۶ (۳)

۷ (۴)

۳

با توجه به مجانب قائم تابع $x = \frac{1}{2}$ و طول از مبدأ داریم:

$$x > \frac{1}{2} \rightarrow 2x > 1 \rightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x + a > 0 \end{cases} \rightarrow a = -1$$

$$y = -1 + \log_b(2x-1) \xrightarrow{(2,0)} = -1 + \log_b 3 \rightarrow \log_b 3 = 1 \rightarrow b = 3$$

$$\begin{cases} y = -1 + \log_3(2x-1) \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow 1 = -1 + \log_3(2x-1) \rightarrow \log_3(2x-1) = 2$$

$$2x-1 = 9 \rightarrow x = 5$$

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

سراسری ریاضی ۹۸

نمودار یک تابع به صورت $y = x^r - x$ ، نمودار تابع $f(x) = -2 + (\frac{1}{3})^{Ax+B}$ را در دو نقطه به طول های ۱ و ۲ قطع می کند . $f(3)$ کدام است ؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۵

$$y = x^r - x \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow A(1, 0) \\ x = 2 \rightarrow y = 2 \rightarrow B(2, 2) \end{cases}$$

$$y = -2 + (\frac{1}{3})^{Ax+B} \rightarrow \begin{cases} 0 = -2 + (\frac{1}{3})^{-A-B} \rightarrow 2 = (\frac{1}{3})^{-A-B} \rightarrow -A - B = 1 \\ 2 = -2 + (\frac{1}{3})^{-2A-B} \rightarrow 4 = (\frac{1}{3})^{-2A-B} \rightarrow -2A - B = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$y = -2 + (\frac{1}{3})^{-x} \rightarrow f(3) = -2 + (\frac{1}{3})^{-3} = -2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

سراسری ریاضی ۹۸ - خارج از کشور

نمودار یک تابع به صورت $f(x) = 3^{Ax+B}$ ، نمودار تابع $y = x^r$ را در دو نقطه به طول های ۱ و ۳ قطع می کند
عرض نقطه تلاقی تابع f با محور y ها ، کدام است ؟

 $\sqrt{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{27}$ (۱)

۶

$$y = x^r \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow A(1, 1) \\ x = 3 \rightarrow y = 9 \rightarrow B(3, 9) \end{cases}$$

$$f(x) = 3^{Ax+B} \rightarrow \begin{cases} 3^{A+B} = 1 = 3^0 \\ 3^{3A+B} = 9 = 3^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + B = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = 3^{x-1} \xrightarrow{x=0} y = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

سراسری تجربی ۹۷ - خارج از کشور

کدام یک از توابع زیر ، با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است ؟

۷

$$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{6}} \quad (۴) \quad \log\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \quad (۳) \quad \log \frac{x^r - 4}{x^r + 2x} \quad (۲) \quad \log(x-2) - \log x \quad (۱)$$

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

$$y = \log \frac{x-2}{x} \longrightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \longrightarrow D = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

۱) $y = \log(x-2) - \log x \longrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \longrightarrow x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \cap x > 2 \longrightarrow \text{unacceptable}$

۲) $y = \log \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \longrightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} > 0 \longrightarrow (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (2, +\infty) \longrightarrow \text{unacceptable}$

۳) $y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \longrightarrow y = \log \left| \frac{x-2}{x} \right| \longrightarrow x \neq 2 \wedge x \neq 0 \longrightarrow \text{unacceptable}$

۴) $y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \longrightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \longrightarrow D = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \longrightarrow \text{acceptable}$

سراسری ریاضی ۹۷

از رابطه $\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$ ، مقدار لگاریتم $(2x+5)$ در پایه ۴ ، کدام است؟

۱/۵ (۴)

۱/۲۵ (۳)

۰/۷۵ (۲)

۰/۵ (۱)

$$\log(x+2)(2x-1) = \log(4x+1) \longrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \xrightarrow[b=a+c]{ } \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\log_4(2x+5) = \log_4 \lambda = \frac{3}{2}$$

سراسری ریاضی ۹۷ - خارج از کشور

از رابطه $\log(2x-5) + \log(x+1) = \log(4x-1)$ ، مقدار لگاریتم $(2x+1)$ در پایه ۳ ، کدام است؟

۲ (۴)

۱/۵ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

$$\log(2x-5)(x+1) = \log(4x-1) \longrightarrow 2x^2 - 7x - 5 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 5 \end{cases}$$

$$x^2 - 7x - 5 = 0 \xrightarrow[b=a+c]{ } \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{5}{a} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases} \quad \log_3(2x+1) = \log_3 9 = 2$$

سراسری تجربی ۹۶

از دو معادله $\ln(2y-3x) + \ln 2 = 0$ و $\ln(2x+1) + \ln(y-2) - \ln y = \ln 3$ ، مقدار xy ، کدام است؟

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

$$\begin{cases} \ln \frac{(2x+1)(y-2)}{y} = \ln 3 \rightarrow xy - 2x - y = 1 \\ \ln(2y-3x)(2) = \ln 1 \rightarrow 4y - 6x = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xy - 2x - y = 1 \\ y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$6x^2 - 13x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2}, y = 4 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow xy = 10$$

سراسری ریاضی ۹۶ - خارج از کشور

از دو معادله $\ln(x - 4y) = 2 \ln 2$ و $\ln(y + x - 1) + \ln(2y + 3) = 0$ ، مقدار xy ، کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

$\ln(x - 4y) = \ln 4 \rightarrow x - 4y = 4 \rightarrow x = 4y + 4$

$\ln(y + x - 1)(2y + 3) = \ln 1 \Rightarrow (y + x - 1)(2y + 3) = 1$

$(y + 4y + 4 - 1)(2y + 3) = 1 \Rightarrow (5y + 3)(2y + 3) = 1$

$$10y^2 + 21y + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}, x = 2 \\ y = -1/6 \end{cases} \rightarrow xy = -1$$

سراسری ریاضی ۹۶

تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_2(bx - 4)$ ، از دو نقطه $(2, 6)$ و $(12, 10)$ می‌گذرد ، a کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

$f(x) = a + \log_2(bx - 4)$

$$\begin{cases} (2, 6) \rightarrow a + \log_2(2b - 4) = 6 \\ (12, 10) \rightarrow a + \log_2(12b - 4) = 10 \end{cases} \rightarrow \log_2(12b - 4) - \log_2(2b - 4) = 4$$

$$\log_2 \frac{12b - 4}{2b - 4} = 4 \rightarrow \frac{12b - 4}{2b - 4} = 16 \rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 5 \end{cases}$$

$a + \log_2(2b - 4) = 6 \rightarrow a + \log_2 2 = 6 \rightarrow a + 1 = 6 \rightarrow a = 5$

سراسری ریاضی ۹۶ - خارج از کشور

تابع با ضابطه $f(x) = a + \log_2(3x + b)$ ، از دو نقطه $(5, 11)$ و $(21, 15)$ می‌گذرد ، a کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

$$f(x) = a + \log_2(3x + b)^2$$

$$\begin{cases} (5, 11) \rightarrow a + \log_2(15 + b)^2 = 11 \\ (21, 15) \rightarrow a + \log_2(63 + b)^2 = 15 \end{cases} \rightarrow \log_2(63 + b)^2 - \log_2(15 + b)^2 = 4$$

$$\log_2 \frac{(63 + b)^2}{(15 + b)^2} = 4 \rightarrow \frac{(63 + b)^2}{(15 + b)^2} = 16 \rightarrow \frac{63 + b}{15 + b} = 4 \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$a + \log_2(16)^2 = 11 \rightarrow a + 2\log_2(16) = 11 \rightarrow a + 4 = 11 \rightarrow a = 3$$

سراسری تجربی ۹۵

از معادله $\log_2(2x^2 + 1) - \log_2(x + 2) = 1$ ، مقدار لگاریتم $(2x^2 + 1) / (x + 2)$ در مبنای ۸ ، کدام است؟

$$\frac{2}{3} (4)$$

$$\frac{1}{2} (3)$$

$$-\frac{1}{2} (2)$$

$$-\frac{2}{3} (1)$$

$$\log_2(2x^2 + 1) - \log_2(x + 2) = 1 \rightarrow \log_2 \frac{(2x^2 + 1)}{(x + 2)} = 1 \rightarrow \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = 8$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \log_2(2x - 1) = \log_2(-3) = \infty \\ x_2 = -\frac{c}{a} = \frac{5}{2} \rightarrow \log_2(2x - 1) = \log_2 4 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۵ - خارج از کشور

از معادله $\log(x^2 - x - 5) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$ ، مقدار لگاریتم $\sqrt[3]{x+1}$ در مبنای ۴ ، کدام است؟

$$1 (4)$$

$$\frac{2}{3} (3)$$

$$\frac{1}{2} (2)$$

$$\frac{1}{3} (1)$$

$$\log(x^2 - x - 5) - \log(x - 3) = \log(2x - 5) \rightarrow \log \frac{(x^2 - x - 5)}{(x - 3)} = \log(2x - 5)$$

$$\frac{x^2 - x - 5}{x - 3} = 2x - 5 \rightarrow \frac{(x - 3)(x + 2)}{(x - 3)} = (2x - 5) \xrightarrow{x \neq 3} \begin{cases} x_1 = 7 \rightarrow \text{True} \\ x_2 = 3 \rightarrow \text{false} \end{cases}$$

$$\log \sqrt[3]{x+1} = \log \sqrt[3]{4} = \log 2 = \frac{1}{2}$$

۱۴

۱۵

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

سراسری ریاضی ۹۵

نمودار های دو تابع $f(x) = 3^{ax+b}$ و $g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x$ در نقطه ای به طول ۱- متقاطع هستند. اگر باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

$$\begin{cases} f(x) = 3^{ax+b} \rightarrow f(-1) = 3^{-a+b} \\ g(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x \rightarrow g(-1) = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1} = 9 \end{cases} \rightarrow 3^{-a+b} = 9 \rightarrow [-a + b = 2]$$

۱۶

$$f(2) = \frac{1}{3} \rightarrow 3^{2a+b} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow [2a + b = -1]$$

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \quad f(x) = 3^{-x+1} \rightarrow 3^{-x+1} = 27 \rightarrow x = -2$$

$$f^{-1}(27) = k \rightarrow f(k) = 27 \rightarrow 3^{-k+1} = 27 = 3^3 \rightarrow k = -2$$

سراسری ریاضی ۹۵ - خارج از کشور

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = A(2^Bx)$ و خط به معادله $5y = 4x$ ، در دو نقطه به طول های ۲ و ۴ متقاطع هستند. مقدار $f^{-1}(10)$ کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

$$y = \frac{5}{4}x \xrightarrow{x=2} y = \frac{5}{2} \rightarrow (2, \frac{5}{2}) \quad y = \frac{5}{4}x \xrightarrow{x=4} y = 5 \rightarrow (4, 5)$$

$$\begin{cases} f(2) = \frac{5}{2} \rightarrow A \times 2^B = \frac{5}{2} \div 2^B = 2 \rightarrow B = \frac{1}{2} \\ f(4) = 5 \rightarrow A \times 2^{4B} = 5 \end{cases} \quad A = \frac{5}{4}$$

$$f(x) = \frac{5}{4} \times 2^{\frac{1}{2}x} \quad f^{-1}(10) = k \rightarrow f(k) = 10$$

$$\frac{5}{4} \times 2^{\frac{1}{2}k} = 10 \rightarrow 2^{\frac{1}{2}k} = 8 = 2^3 \rightarrow \frac{1}{2}k = 3 \rightarrow k = 6$$

۱۷

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

سراسری تجربی ۹۳

اگر نمودار تابع $f(x) = a(b)^x - 1$ کدام است؟
 از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 1)$ بگذرد.

 $\frac{3}{4} (4)$ $-\frac{1}{4} (3)$ $-\frac{1}{2} (2)$ $-\frac{3}{4} (1)$

۱۸

$$A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow \frac{1}{2} = a \times b^{-\frac{1}{2}} - 1 \rightarrow \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{a^2}{b} = \frac{9}{4} \rightarrow b = \frac{4a^2}{9}$$

$$B(1, 1) \rightarrow 1 = ab - 1 \rightarrow ab = 12 \rightarrow a \times \frac{4a^2}{9} = 12 \rightarrow a^3 = 27 \rightarrow a = 3, b = 4$$

$$f(-1) = 3 \times 4^{-1} - 1 = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

سراسری تجربی ۹۳

از تساوی $\log_x(x^r + 4) = 1 + \log_x 5$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۲ ، کدام است؟

 $2 (4)$ $\frac{3}{2} (3)$ $\frac{1}{2} (2)$ $-1 (1)$

۱۹

$$\log_x(x^r + 4) = 1 + \log_x 5 \rightarrow \log_x(x^r + 4) = \log_x x + \log_x 5 \rightarrow \log_x(x^r + 4) = \log_x 5x$$

$$x^r - 5x + 4 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow \log_2 x = \log_2 1 = 0 \\ x_2 = \frac{c}{a} = 4 \rightarrow \log_2 x = \log_2 4 = 2 \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

فاصله نقطه تلاقی دو منحنی به معادلات $y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4$ و $y = 2^x$ ، از نقطه $A(0, 4)$ ، کدام است؟

 $5 (4)$ $4 (3)$ $3 (2)$ $2 (1)$

روش اول:

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \end{cases} \rightarrow 2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \xrightarrow{2^x = (\sqrt{2})^x} (\sqrt{2})^x - \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^x - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{(\sqrt{2})^x = t > 0} t^2 - \sqrt{2}t - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 18} t = \frac{\sqrt{2} \pm 3\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{t > 0} t = \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{(\sqrt{2})^x = t > 0} (\sqrt{2})^x = 2\sqrt{2} \xrightarrow{2^x = 2^2} x = 2 \rightarrow y = 4 \rightarrow B(2, 4)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (4 - 4)^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

۲۰

روش دوم:

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \end{cases} \rightarrow 2^x = (\sqrt{2})^{x+1} + 4 \xrightarrow{x=3} 2^3 = (\sqrt{2})^{3+1} + 4$$

$$x = 3 \rightarrow y = 8 \rightarrow B(3, 8) \rightarrow AB = \sqrt{(3 - 0)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

سراسری تجربی ۹۳ - خارج از کشور

از تساوی $\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6)$ ، مقدار لگاریتم x در پایه ۴ ، کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

۲۲

$$\log_x(3x + 8) = 2 - \log_x(x - 6) \rightarrow \log_x(3x + 8) + \log_x(x - 6) = 2$$

$$\log_x(3x + 8)(x - 6) = 2 \rightarrow (3x + 8)(x - 6) = x^2 \rightarrow 2x^2 - 10x - 48 = 0$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \rightarrow \text{false} \\ x = 8 \rightarrow \log_4 x = \log_4 8 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

سراسری تجربی ۹۲ - خارج از کشور

از دو معادله $\log(x + 1) + \log(2y + x^2) = 2$ و $4^x + 2^x = 72$ ، مقدار y کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

$$4^x + 2^x = 72 \rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 72 = 0 \xrightarrow{2^x=t} t^2 + t - 72 = 0 \rightarrow (t + 9)(t - 8) = 0$$

$$t = -9, t = 8 \rightarrow 2^x = 8 \rightarrow x = 3$$

$$\log(x + 1) + \log(2y + x^2) = 2 \xrightarrow{x=3} \log 4 + \log(2y + 9) = 2 \rightarrow \log 4(2y + 9) = 2$$

$$4(2y + 9) = 10^2 = 100 \rightarrow 2y + 9 = 25 \rightarrow y = 8$$

سراسری تجربی ۹۰

اگر $\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5})$ باشد ، حاصل $\log 2 = k$ است؟

۲ + ۴k (۴)

۱ + k (۳)

۴k (۲)

۲k (۱)

۲۴

$$\log(6 - 2\sqrt{5}) + 2\log(1 + \sqrt{5}) = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(1 + \sqrt{5})^2 = \log(6 - 2\sqrt{5}) + \log(6 + 2\sqrt{5})$$

$$\log(6 - 2\sqrt{5})(6 + 2\sqrt{5}) = \log(36 - 40) = \log 16 = 4 \log 2 \xrightarrow{\log 2 = k} 4k$$

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

سراسری تجربی ۹۰ - خارج از کشور

اگر $\log \sqrt[3]{1/6} = 3k$ باشد ، آنگاه حاصل کدام است ؟۱- k (۴)۱- $2k$ (۳)۲- $5k$ (۲)۱- $4k$ (۱)

۲۵

$$\log \sqrt[3]{1/6} = \log(1/6)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log(1/6) = \frac{1}{3} \log\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}(\log 1 - \log 6) = \log 2 - \frac{1}{3} \log 6$$

$$\log 10 - \log 6 - \frac{1}{3} \log 6 \xrightarrow{\log 6 = 3k} 1 - 3k - k = 1 - 4k$$

سراسری تجربی ۸۹

از دو معادله $x^2 + y^2 = 46$ و $\log_3 x + \log_3 y = 2$ ، لگاریتم $(x+y)$ در پایه ۴ ، کدام است ؟

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

۲ (۲)

۱/۵ (۱)

۲۶

$$\log_3 x + \log_3 y = 2 \longrightarrow \log_3 xy = 2 \longrightarrow xy = 9$$

$$x^2 + y^2 = 46 \longrightarrow (x+y)^2 - 2xy = 46 \xrightarrow{xy=9} (x+y)^2 = 64 \longrightarrow x+y = 8$$

$$\log_4(x+y) = \log_4 8 = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۸۹ - خارج از کشور

از دو معادله $(x+y)$ ، لگاریتم $x^2 - y^2 = 32$ و $\log_2 x = 1 + \log_2(y+1)$ در پایه ۴ ، کدام است ؟

۲ (۴)

 $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۱)

۲۷

$$\log_2 x = 1 + \log_2(y+1) \longrightarrow \log_2 x = \log_2 2 + \log_2(y+1) \longrightarrow x = 2y + 2$$

$$x^2 - y^2 = 32 \longrightarrow (2y+2)^2 - y^2 = 32 \longrightarrow 3y^2 + 8y - 28 = 0$$

$$\frac{b'=4}{\Delta'=16+84=100} \rightarrow y = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 2 \longrightarrow x = 6 \\ y = -14 \end{cases} \quad \log_4(x+y) = \log_4 8 = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۸۸

اگر $4^a = 2\sqrt{2}$ ، لگاریتم $(4a+1)$ در پایه ۴ ، کدام است ؟ $\frac{3}{2}$ (۴)

۲ (۳)

 $\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

۲۸

$$4^a = 2\sqrt{2} \longrightarrow 2^{2a} = \sqrt{2} \longrightarrow 2^{2a} = 2^{\frac{3}{2}} \longrightarrow a = \frac{3}{4} \longrightarrow \log_4(4a+1) = \log_4 4 = 1$$

بسمه تعالى

تھیہ و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمائی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

۲۹	سراسری تجربی ۸۸ - خارج از کشور اگر a و b ریشه های معادله $x^3 - 10x + 1 = 0$ باشند ، حاصل $\log a + \log b - \log(a+b)$ کدام است ؟	۱) ۴ ۰) ۳ -۱) ۲ -۲) ۱
	$x^3 - 10x + 1 = 0 \rightarrow S = a + b = 10 \quad P = ab = 1$	
	$\log a + \log b - \log(a+b) \rightarrow \log ab - \log(a+b) = \log 1 - \log 10 = -1 - 1 = -2$	
۳۰	سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور اگر لگاریتم a در پایه $\sqrt[3]{3}$ برابر $\frac{4}{3}$ باشد ، آنگاه لگاریتم $(a^3 + 7)$ در پایه ۸ ، کدام است ؟	۳) ۲ ۰) ۱ ۲) ۱ ۱) ۰
	$\log_{\sqrt[3]{3}} a = \frac{4}{3} \rightarrow a = (\sqrt[3]{3})^{\frac{4}{3}} \rightarrow a = 3^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{9}$	$\log_8 (a^3 + 7) = \log_8 16 = \frac{4}{3}$
۳۱	سراسری تجربی ۸۷ - خارج از کشور از دو معادله $\log(y-x) + \log(4x+y) = 2$ و $\log(y+2) = 1$ ، مقدار x کدام است ؟	۰) ۴ ۳) ۳ ۲) ۲ ۱) ۱
	$\log(y+2) = 1 \rightarrow y+2 = 10 \rightarrow y = 8$	
	$\log(y-x) + \log(4x+y) = 2 \xrightarrow{y=8} \log(8-x) + \log(4x+8) = 2$	
	$\log(8-x)(4x+8) = 2 \rightarrow (8-x)(4x+8) = 100 \rightarrow (8-x)(x+2) = 25$	
	$x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$	
۳۲	سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور اگر $\log 3 + \log \sqrt[5]{3} = \log(81)^k$ باشد ، آنگاه لگاریتم $\frac{5}{k}$ در پایه ۲ کدام است ؟	۵) ۴ ۴) ۳ ۳) ۲ ۲) ۱
	$\log 3 + \log \sqrt[5]{3} = \log(81)^k \rightarrow \log 3^{\sqrt[5]{3}} = \log(81)^k \rightarrow 3^{\sqrt[5]{3}} = (81)^k \rightarrow k = \frac{5}{16}$	
	$\log_2 \frac{5}{k} = \log_2 16 = 4$	
۳۳	سراسری تجربی ۸۶ - خارج از کشور اگر $\log_2 12 = a$ باشد ، عدد 4^{a-2} کدام است ؟	۱۸) ۴ ۹) ۳ ۶) ۲ ۹) ۱

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

$$\log_2 12 = a \rightarrow 12 = 2^a$$

$$2^{a-2} = \frac{2^a}{2^2} = \frac{(2^a)^2}{2^4} = \frac{144}{16} = 9$$

۲۵ (۴)

۱۵ (۳)

۱۲/۵ (۲)

۷/۵ (۱)

۳۴

$$4\sqrt{2} = 2^x \rightarrow 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x} \rightarrow 2x = \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$1 + \log \sqrt{x+1} = \log y \rightarrow \log 10 + \log \frac{3}{2} = \log y \rightarrow \log 15 = \log y \rightarrow y = 15$$

سراسری تجربی ۸۵

اگر $1 + \log \sqrt{x+1} = \log y$ باشد، مقدار y کدام است؟ $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۱)

۳۵

$$2^x \times 8^y = 4 \rightarrow 2^x \times 2^{3y} = 2^2 \rightarrow x + 3y = 2 \quad (1)$$

$$\log x = \log 2y \rightarrow x = 2y \stackrel{(1)}{\rightarrow} 5y = 2 \rightarrow y = \frac{2}{5} \rightarrow x = \frac{4}{5}$$

سراسری تجربی ۸۴ - خارج از کشور

$$\text{اگر } A \text{ عدد } (\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}})^2 = 2^A \text{ کدام است؟}$$

۱۲\sqrt{2} (۴)

۸\sqrt{2} (۳)

۱۶ (۲)

۸ (۱)

۳۶

$$(\frac{4\sqrt{32}}{2\sqrt{8}})^2 = 2^A \rightarrow (\frac{2^{8\sqrt{2}}}{2^{2\sqrt{2}}})^2 = 2^A \rightarrow (2^{6\sqrt{2}})^2 = 2^A \rightarrow 2^{12\sqrt{2}} = 2^A \rightarrow A = 12\sqrt{2}$$

سراسری تجربی ۸۳

اگر $1 + \log \frac{1}{x} + \log(x+1) = 1$ باشد، لگاریتم عدد x در پایه ۸، کدام است؟ $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۱)

۳۷

$$\log \frac{1}{x}(x+1) = \log 10 \rightarrow \frac{1}{x}(x+1) = 10 \rightarrow 2 + \frac{2}{x} = 10 \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$\log_8 \frac{1}{4} = \log_8 4^{-1} = -\frac{1}{3}$$

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

سراسری تجربی ۸۲

$$\log(3x - 2) = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} \text{ باشد، مقدار } x \text{ کدام است؟}$$

۳۸

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$\log(3x - 2) = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} \rightarrow \log(3x - 2) = (\log 5)^2 - (\log 2)^2$$

$$\log(3x - 2) = (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) \rightarrow \log(3x - 2) = \log \frac{5}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

سراسری تجربی ۸۲

فاصله نقطه برخورد تابع نمایی $y = 2^x$ با محور y ها و نقطه برخورد معکوس این تابع نمایی با محور x ها کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

$$y = 2^x \rightarrow y = 2^0 = 1 \rightarrow A(0, 1) \in f \rightarrow B(1, 0) \in f^{-1}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$$

سراسری تجربی ۸۱

$$\text{اگر } \log_b ab^{\gamma} \text{ باشد، آنگاه حاصل } \log_{\sqrt{b}} ab^{\gamma} \text{ کدام است؟}$$

$$7 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

روش اول:

$$\log_b a = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{\log a}{\log b} = \frac{3}{2} \rightarrow \log a = \frac{3}{2} \log b$$

$$\log_{\sqrt{b}} ab^{\gamma} = \frac{\log ab^{\gamma}}{\log \sqrt{b}} = \frac{\log a + \gamma \log b}{\frac{1}{2} \log b} = \frac{\frac{3}{2} \log b + \gamma \log b}{\frac{1}{2} \log b} = \frac{\frac{7}{2} \log b}{\frac{1}{2} \log b} = 7$$

روش دوم:

$$\log_b a = \frac{3}{2} \rightarrow a = b^{\frac{3}{2}} \rightarrow \log_{\sqrt{b}} ab^{\gamma} = \log_{\sqrt{b}} b^{\frac{3}{2}} \times b^{\gamma} = \log_{\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}} b^{\frac{3}{2} + \gamma} = 7$$

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

سراسری تجربی ۸۰

۴۱

اگر $\frac{4}{x}$ باشد، عدد کدام است؟ $\log_2(5x+1) + \log_2 x = 2$

۵ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

-۴ (۱)

$$\log_2(5x+1) + \log_2 x = 2 \longrightarrow \log_2 x(5x+1) = 2 \longrightarrow x(5x+1) = 2^2$$

$$5x^2 + x - 4 = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x_1 = -1 \longrightarrow \text{false} \\ x_2 = \frac{4}{5} \longrightarrow \text{True} \end{cases} \xrightarrow{x=\frac{4}{5}} 5$$

سراسری تجربی ۷۹

۴۲

اگر $\log(x^3 - x + 1) + \log(x + 1) = 1$ باشد، مقدار لگاریتم x در پایه ۳، کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$\log(x+1)(x^3 - x + 1) = \log 10 \longrightarrow x^3 + 1 = 10$$

$$x^3 = 9 \longrightarrow x = \sqrt[3]{9} = \frac{2}{3}$$

سراسری تجربی ۷۸

۴۳

اگر $\log_2 4^x = x^3$ باشد، مقدار لگاریتم x در پایه $\frac{1}{2}$ ، کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

$$\log_2 2^{2x} = x^3 \longrightarrow 2^{2x} = 2^{x^3} \longrightarrow x^3 = 2x \longrightarrow x(x^2 - 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} = -\frac{1}{2}$$

سراسری تجربی ۷۷

۴۴

اگر x باشد، آنگاه $\log_2(1-x) = \log_9 3\sqrt{3}$ برابر کدام است؟

۱ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

$$\log_9 3\sqrt{3} = x \longrightarrow 3\sqrt{3} = 9^x \longrightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\log_2(1-x) = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

بسمه تعالیٰ

تهیّه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

اگر α و β ، جواب های معادله $|e^x - 1| = |3 - 2e^x|$ باشد ، $e^{\alpha+\beta}$ کدام است ؟

 $\frac{10}{3} (4)$ $\frac{5}{3} (3)$ $\frac{4}{3} (2)$ $\frac{4}{3} (1)$

۴۵

$$|e^x - 1| = |3 - 2e^x| \longrightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 3 - 2e^x \longrightarrow e^x = \frac{4}{3} \longrightarrow x = \ln \frac{4}{3} \\ e^x - 1 = -3 + 2e^x \longrightarrow e^x = 2 \longrightarrow x = \ln 2 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = \ln \frac{4}{3} + \ln 2 = \ln \frac{8}{3} \quad e^{\alpha+\beta} = e^{\ln \frac{8}{3}} = \left(\frac{8}{3}\right)^{\ln e} = \frac{8}{3}$$

اگر α ریشه های معادله لگاریتمی $\log(3x+1) + 2\log\sqrt{x-2} = \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x + 1) + \log(x+2)$ باشد حاصل $\log_5(4\alpha + 13)$ کدام است ؟

 $4 (4)$ $3 (3)$ $2 (2)$ $1 (1)$

$$\log(3x+1) + 2\log\sqrt{x-2} = \frac{1}{2}\log(x^2 - 2x + 1) + \log(x+2)$$

$$\log(3x+1) + \log(\sqrt{x-2})^2 = \frac{1}{2}\log(x-1)^2 + \log(x+2)$$

$$\log(3x+1) + \log(x-2) = \log(x-1) + \log(x+2)$$

$$\log(3x+1)(x-2) = \log(x-1)(x+2) \longrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\log_5(4\alpha + 13) = \log_5 25 = 2$$

اگر $f(x) = \log_3(x-1)$ ، آن گاه دامنه تابع $y = \sqrt{4 - f^{-1}(x)}$ شامل چند عدد طبیعی است ؟

 $3 (4)$ $2 (3)$ $1 (2)$ $0 (1)$ صفر

۴۶

$$f(x) = \log_3(x-1) \longrightarrow x-1 = 3^y \longrightarrow x = 1 + 3^y \longrightarrow f^{-1}(x) = 1 + 3^x$$

$$4 - f^{-1}(x) \geq 0 \longrightarrow 4 - 1 - 3^x \geq 0 \longrightarrow 3 \geq 3^x \longrightarrow x \leq 1$$

 $4) بی شمار$ $3 (3)$ $2 (2)$ $1 (1)$ صفر

۴۷

اگر $f(x) = e^{x \ln 2}$ باشد ، معادله $f \circ f^{-1}(x) = x^2$ چند جواب حقیقی دارد ؟

بسمه تعالیٰ

تهیّه و تنظیم: سید علی موسوی

(فصل ۵- توابع نمایی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)

$$f(x) = e^{x \ln 2} \longrightarrow f(x) = e^{\ln 2^x} = (2^x)^{\ln e} = 2^x \longrightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x$$

$$\longrightarrow D_{f^{-1}} = (0, +\infty) \quad (f \circ f^{-1})(x) = x, x \in D_{f^{-1}}$$

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x \\ f \circ f^{-1}(x) = x \end{cases} \longrightarrow x^2 = x \longrightarrow x^2 - x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin D_{f \circ f^{-1}} \\ x = 1 \longrightarrow \text{True} \end{cases}$$

حاصل کدام است؟ [] نماد جزء صحیح است)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴۹

$$[\log_2(2 + \sqrt{3}) - \log_2(2 - \sqrt{3})] = [\log_2(7 + 4\sqrt{3})] = 4$$

$$\log_2(2 + \sqrt{3}) - \log_2(2 - \sqrt{3}) = \log_2 \frac{(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})} = \log_2(7 + 4\sqrt{3})$$

$$\log_2 8 < \log_2(7 + 4\sqrt{3}) < \log_2 16 \longrightarrow 3 < \log_2(7 + 4\sqrt{3}) < 4$$

اگر نمودار تابع $f(x) = 3^{x-a} + b$ از نقاط $(0, 3)$ و $(1, 9)$ بگذرد، آن گاه حاصل چند برابر است؟

 $\sqrt{3}$ $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)

۵۰

$$\begin{cases} (0, 3) \longrightarrow 3^{-a} + b = 3 \\ (1, 9) \longrightarrow 3^{1-a} + b = 9 \end{cases} \longrightarrow 3^{1-a} - 3^{-a} = 6 \longrightarrow 3 \times 3^{-a} - 3^{-a} = 6 \longrightarrow 3t - t = 6$$

$$t = 3 \longrightarrow 3^{-a} = 3 \longrightarrow a = -1 \longrightarrow b = 0$$

$$\sin\left(-\frac{a\pi}{3}\right) + b = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

از معادلات $9^{y-x} \times 3^{x-3} = 1$ و $\log x = 2 \log y - \log 3$ کدام است؟

۶ (۴)

۱۲ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۵۱

$$\log x = \log y^r - \log 3 \longrightarrow y^r = 3x$$

$$3^{2y-2x} \times 3^{x-3} = 1 \longrightarrow 3^{2y-x-3} = 3^0 \longrightarrow 2y - x - 3 = 0 \longrightarrow 6y - 3x - 9 = 0$$

$$6y - y^r - 9 = 0 \longrightarrow y^r - 6y + 9 = 0 \longrightarrow (y - 3)^r = 0 \longrightarrow y = 3, x = 3$$

اگر $2^{4x} - 2^{x+2} = 32$ باشد، آن گاه مقدار y کدام است؟

۲/۷۵ (۴)

۲/۵ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۲ (۱)

$$2^{4x} - 2^{x+2} = 32 \longrightarrow (2^x)^2 - 2^x \times 2^2 - 32 = 0 \xrightarrow{2^x=t} t^2 - 4t - 32 = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = 8 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$2^x = 8 = 2^3 \longrightarrow x = 3$$

$$\log 4 + \log(2y - 3) = 1 \longrightarrow \log 8y - 12 = 1$$

$$8y - 12 = 10^1 \longrightarrow 8y = 22 \longrightarrow y = 2/75$$

اگر تابع $f(x) = a + \log_2(bx + 6)$ محور x ها در نقطه ای به طول یک قطع کند و $f(-1) = 1$ باشد، آن گاه $f(-1)$ کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

۵ (۱)

$$f(x) = -3 + \log_2(2x + 6) \longrightarrow f(-1) = -3 + \log_2 4 = -3 + 2 = -1$$

$$\begin{cases} (1, 0) \longrightarrow a + \log_2(b + 6) = 0 \\ (5, 1) \longrightarrow a + \log_2(5b + 6) = 1 \end{cases} \longrightarrow \log_2(5b + 6) - \log_2(b + 6) = 1$$

$$\log_2 \frac{(5b + 6)}{(b + 6)} = 1 \longrightarrow \frac{(5b + 6)}{(b + 6)} = 2^1 \longrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

۵۳

اگر $x = \frac{4}{y}$ و $x^2 + 4y^2 = 65$ باشد، لگاریتم $x + 2y$ در مبنای $\sqrt{3}$ کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

۵۴

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 65 \\ xy = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \log_{\sqrt{3}}(x + 2y) = \log_{\sqrt{3}} 9 = 4$$

(سید علی موسوی ۰۹۱۵۳۲۱۵۶۱۴)

دبیر ریاضی ناحیه ۴ مشهد

@dostaneriazi

بسمه تعالیٰ

تهییه و تنظیم :

(فصل ۵- توابع نمائی و لگاریتمی)

سوالات ریاضی (۲)



همکاران و دانش آموزان عزیز ، تست هائی که در اختیار شما قرار گرفته است ، زحمات چندین ساله بنده می باشد ، به همین خاطر قبل از مطالعه هزینه این جزوای را پرداخت کنید و هزینه آن یک صلوات و یک فاتحه برای روح پدر عزیزم است .

با تشکر : سید علی موسوی