Year: Month: Date: Subject:

۱۲۶) ۴

$$\sqrt{1+\tan^2 x}\left(2\sin^2\frac{\pi}{4}-\sin^2 x\right)=|\sec x|\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\sin^2 x\right)$$

$$=|\sec x|(1-\sin^2 x)=|\sec x|\cos^2 x\xrightarrow{\pi<x<\frac{3\pi}{2}}-\sec x\cos^2 x=-\cos x$$

---

۱۲۷) ۳

V = سرعت آب رودخانه — V_1 = سرعت رفت — V_2 = سرعت برگشت

$$V=\frac{x}{t}\Rightarrow t=\frac{x}{V}\Rightarrow t_{رفت}=\frac{x_{رفت}}{V_{رفت}}=\frac{1200}{100+V}$$

$$t_{برگشت}=\frac{x_{برگشت}}{V_{برگشت}}=\frac{1200}{100-V}$$

$$t_{رفت}=t_{برگشت}-5\Rightarrow\frac{1200}{100+V}=\frac{1200}{100-V}-5$$

$$\Rightarrow\frac{240}{100+V}=\frac{240}{100-V}-1\Rightarrow\frac{240}{100+V}=\frac{240-100+V}{100-V}$$

$$\Rightarrow 240(100-V)=(140+V)(100+V)\Rightarrow 24000-240V=14000+240V+V^2$$

$$\Rightarrow V^2+480V-10000=0\Rightarrow(V-20)(V+500)=0\Rightarrow\begin{cases}V=20 \checkmark\\V=-500\end{cases}$$

---

۱۲۸) ۱

$$1<\frac{2x-3}{x+1}<3\xrightarrow{\text{با فرض } x>-1}x+1<2x-3<3x+3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2n-3 < 3n+3 \\ 2n-3 > n+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n > -6 \\ n > 4 \end{cases} , n>1 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{n > 4} \quad (1)$$

$$\text{if } n<1 \Rightarrow 3n+3 < 2n-3 < n+1 \Rightarrow \begin{cases} 2n-3 < n+1 \\ 3n+3 < 2n-3 \end{cases}$$

$$n<1 \Rightarrow \begin{cases} n<4 \\ n<-6 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \boxed{n<-6} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \text{برابری معادله } n>4 \text{ یا } n<-6 \Rightarrow \mathbb{R} - [-6,4]$$

۳ (۱۲۹

$$\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6} = \frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4!\times24} + \frac{8\times7\times6\times5!}{5!\times6} + \frac{8\times7\times6!}{6!\times2}$$

$$= 70 + 56 + 28 = 154$$

۴ (۱۳۰

$$3a+\sqrt{2a^2+4a}=2 \Rightarrow \sqrt{2a^2+4a} = 2-3a \Rightarrow 2a^2+4a = 4-12a+9a^2$$

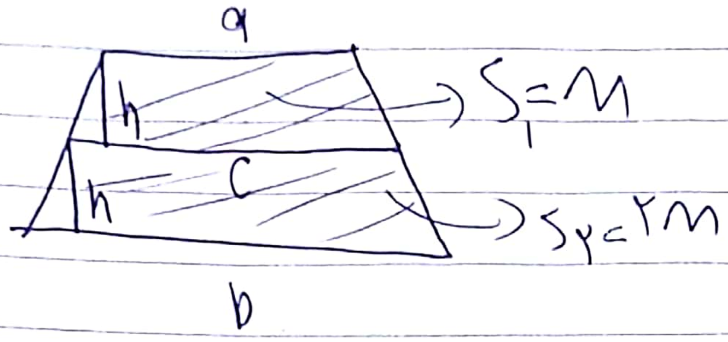
$$\Rightarrow 7a^2-16a+4=0 \Rightarrow a^2-\frac{16}{7}a+\frac{4}{7}=0 \quad (a-2)(a-\frac{2}{7})=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow \text{در معادله اصلی صدق نمی‌کند } ✗ \quad -2a(-\frac{2}{7}) \\ a=\frac{2}{7} ✓ \Rightarrow \frac{a+1}{a} = 1+\frac{1}{a} = 1+\frac{7}{2} = 4.5 \end{cases}$$

AKBARI

Year: Month: Date: Subject:

۱۳) ۲



$$S_1 = \frac{1}{2}h(a+c) = m$$

$$S_2 = \frac{1}{2}h(b+c) = 2m$$

تقسیم $\Rightarrow \frac{b+c}{a+c} = 2 \Rightarrow b+c = 2a+2c$

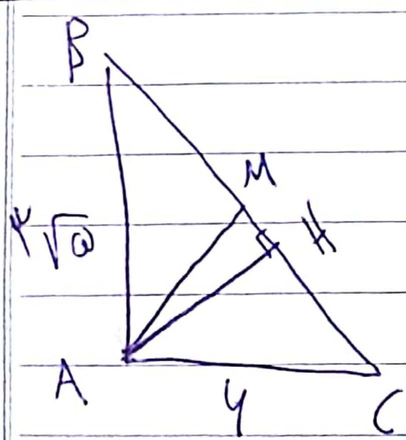
از طرفی می‌دانیم $c = \frac{a+b}{2}$ بنابراین داریم:

$$b = 2a + c \Rightarrow b = 2a + \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2b = 4a + a + b$$

$$\Rightarrow b = 5a \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{1}{5}}$$

---

۱۳۲) ۴



می‌دانیم میانه وارد بر وتر نصف وتر است.
بنابراین داریم:

$$BC = \sqrt{36+45} = \sqrt{81} = 9 \Rightarrow \boxed{AM = 4.5}$$

$$MH = MC - HC = \frac{1}{2}BC - \sqrt{36 - AH^2} = 4.5 - \sqrt{36-20}$$

$$\boxed{AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{3\sqrt{5} \times 6}{9} = 2\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{MH = \frac{1}{2}}$$

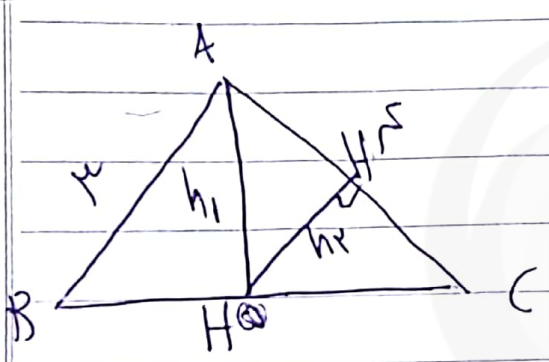
Year: Month: Date: Subject:

$$S_{AMH} = \frac{1}{2} \times AH \times HM = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 4 = 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{4\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = 18$$

۲ (۱۳۹۳



$$h_1 = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4$$

$$h_2 = \frac{h_1 \times HC}{AC} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{HC}{AC} = \frac{\sqrt{AC^2 - h_1^2}}{AC} = \frac{\sqrt{16 - \frac{144}{25}}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{\frac{256}{25}}}{4} = \frac{\frac{16}{5}}{4} = \frac{4}{5}$$

۳ (۱۳۹۴

$$\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{19\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)$$

(۱۵)

Year: Month: Date: Subject:

$$\sin\left(\frac{9\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{33\pi}{9}-\frac{\pi}{9}\right)-\tan\left(\frac{6\pi}{4}+\frac{33\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{21\pi}{9}-\frac{\pi}{9}\right)$$

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\left(-\cos\frac{\pi}{9}\right)+\tan\left(\frac{33\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1\times\frac{1}{2}=\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

---

۳ (۱۳۹۵)

$$f(x)=a+b\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow -\frac{2}{2}=a+b\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a-\frac{\sqrt{2}}{2}b=-\frac{2}{2}$$

$$f_{max}(x)=\sqrt{2}\Rightarrow a+b=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)b=\sqrt{2}+\frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow b=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}\times\frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow b=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}\Rightarrow b=\sqrt{2}$$

---

۱ (۱۳۹۴)

$$(0.4)^{2n-1}=\left(\frac{125}{8}\right)^{n}\Rightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{3n^2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{-2n+1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{3n^2}\Rightarrow 3n^2=-2n+1\Rightarrow n^2+\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}=0$$

$$\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow(n+1)\left(n-\frac{1}{3}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}n=-1\\ n=\frac{1}{3}\end{cases}$$

AKBARI

Year: Month: Date: Subject:

با توجه به اینکه 9^x برابر x. x نمی‌تواند منفی باشد $x=\frac{1}{3}$ قابل قبول است و داریم

$$\log_8(9x+1) = \log_8(9\times\tfrac{1}{3}+1) = \log_8 4 = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

۲ـ ۱۳۷

$f(0)=0 \Longrightarrow$ ۳ گزینه ×

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \Longrightarrow$ در این راستا گزینه ۱ ✗ تنها گزینه ۲ صدق می‌کند

۴ـ ۱۳۸

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2) \Longrightarrow \lim_{x\to -2} \frac{8+x^3}{|x+2|} = a$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to -2^-} \frac{8+x^3}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)} = 12$$

$\Longrightarrow$ $a=12$

۱ـ ۱۳۹

A) موفقیت در آزمون اول $\Longrightarrow P(A)=0.7$

B = موفقیت در آزمون دوم $\Longrightarrow P(B)=0.6$

$P(B|A)=0.8 \Longrightarrow P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$\Longrightarrow P(A\cap B) = 0.8\times 0.7 = 0.56$

Year: Month: Date: Subject:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/7 + 0/6 - 0/56 = 0/74$

۱۰ـ۲

$\bar{X}_1 = 80$, $\sigma_1 = 5 \Rightarrow C.V_1 = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$

$\bar{X}_2 = 72$, $\sigma_2 = 4 \Rightarrow C.V_2 = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$

هرچه که ضریب تغییرات کمتری داشته باشد بهتر است

(۱۱ـ۱)

$$f(x) = |x+2| + |x-1| = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 1 \\ 3 & -2 \leq x < 1 \\ -2x-1 & x < -2 \end{cases} \Rightarrow \text{اکیداً نزولی}$$

۱۳ـ۴

$4\sin x \sin(\frac{3\pi}{2} - x) = 1 \Rightarrow 4\sin x \times (-\cos x) = 1$

$\Rightarrow -4\sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$

$\Rightarrow$ جمع $= \frac{60\pi}{12} = 5\pi$

AKBARI

Year: Month: Date: Subject:

۳ - ۱۳۴

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+10x+16}{12+4\sqrt[3]{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+10}{\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{-28+10}{\frac{2}{\sqrt[3]{64}}}$$

$$= \frac{-4}{\frac{1}{4}} = -12$$

۴ - ۱۳۴

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2-1}{x+|x|} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2-1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{x^2-1}{x+|x|} = \lim_{x\to0^-} \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

حد نمی‌باشد

۳ - ۱۳۵

$$\lim_{x\to-\infty} 2x+\sqrt{4x^2+x} = \lim_{x\to-\infty} 2x+2\left|x+\frac{1}{8}\right|$$

$$\to \lim_{x\to-\infty} 2x-2x-\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

AKBARI

۳_۱۴۶

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = f'(4)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x) - (-2)(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(5-8) + 2(1+2)}{(5-8)^2} = \frac{-\frac{3}{4}+6}{9} = \frac{\frac{21}{4}}{9} = \frac{7}{12}$$

۲_۱۴۷

تابع داده شده به غیر از نقطه ۲ در همه جا پیوسته و مشتق‌پذیر است. لذا داریم.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} -x^2 + ax + b = 2a + b - 4$$

$$f(2) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{2a + b = 5}$$

AKBARI

(1.)

Year: Month: Date: Subject:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2} \underset{x=2}{=} -1$$

$$\Rightarrow a = 4$$

$$f'(x) = (-x^2 + ax + b)' = -2x + a \underset{x=2}{=} -4 + a$$

$$\Rightarrow 2a + b = 4 \Rightarrow b = -1$$

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = g'(x) f'(g(x)) = 4$$

$$g(x) = 0 \Longrightarrow g'(x) f'(0) = 4 \Rightarrow f'(0) = \frac{4}{g'(x)} \quad (1)$$

$$g'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = -\frac{4}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow g'(x) = -4 \quad (1) \Rightarrow f'(0) = \frac{4}{-4} = -2$$

(11)

۲ ـ (۶۹)

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(4) = \frac{9}{4}$$

$$f(4) = \frac{14}{2} - \frac{1}{4} = \frac{41}{4}$$

$$f(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left| f'(4) - \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \right|$$

$$= \left| \frac{9}{4} - \frac{\frac{41}{4} + \frac{1}{2}}{3} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{9}{4} - \frac{33}{12} \right| = \left| \frac{27}{12} - \frac{33}{12} \right| = \left| -\frac{6}{12} \right| = \frac{1}{2} = 0.5$$

AKBARI

Year: Month: Date: Subject:

۴-۱۵

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\geq 4 \\ -x^2+4x & x<4 \end{cases}$$

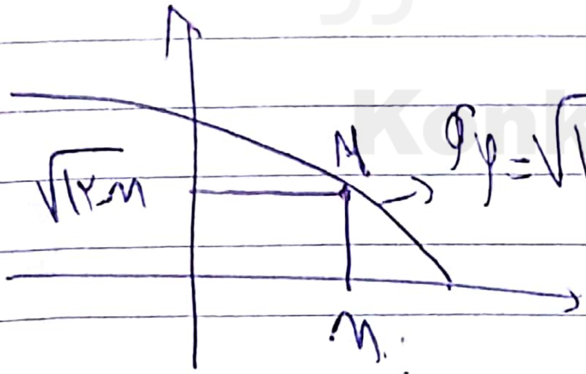
$$f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & x>4 \\ -2x+4 & x<4 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow (2,4)$$

همچنین نقطه تابع در نقطه $x=4$ مشتق‌ناپذیر است لذا $x=4$ نقطه بحرانی داریم

بنابراین داریم

$$f(4)=0 \Rightarrow \begin{cases}(2,4)\\(4,0)\end{cases} \Rightarrow \sqrt{(4-2)^2+(0-4)^2}=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$$

۳-۱۵۱



$\Rightarrow y_M=\sqrt{12-x}$

$f(M)=$ مساحت مستطیل $= x\sqrt{12-x}=f(x)$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{12-x}-\frac{x}{2\sqrt{12-x}}=0 \Rightarrow \frac{2(12-x)-x}{2\sqrt{12-x}}=0$$

$\Rightarrow ۲۴ - ۲n - ۹n = ۰ \Rightarrow n = ۸$

$\Rightarrow f_{max}(n) = ۸\sqrt{۲ - ۸} = ۱۶$

---

۴ - ۱۰۲

$F = \Big|_{۷}^{۲} \quad F' \Big|_{-۱}^{۲}$

$\Rightarrow \alpha = ۲ \quad \beta = ۸ \quad \gamma = ۴$

$F = \Big|_{\gamma+\beta}^{\alpha} \quad F' \Big|_{-\gamma+\beta}^{\alpha}$

$۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow a = \sqrt{b^۲ + c^۲} = ۵$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{۴}{۵}$

---

۱ - ۱۰۳

$a_n = n^۲ + \frac{n(n-۱)}{۲} \Rightarrow a_۹ = ۸۱ + \frac{۹ \times ۸}{۲} = ۱۱۷$

Year: Month: Date: Subject:

۴ـ۱۰۴

$y = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow (x-1)^2 = y+4 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y+4}$

$x > 1 \Longrightarrow \boxed{f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}}$

$g(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow 1 + \sqrt{x+4} = \frac{x-9}{2}$

$\Rightarrow \sqrt{x+4} = \frac{x-11}{2} \Rightarrow x+4 = \frac{x^2 - 22x + 121}{4}$

$\Rightarrow x^2 - 22x + 121 = 4x + 16 \Rightarrow x^2 - 26x + 105 = 0$

$-21 \times (-5)$

$\Rightarrow (x-21)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ ✗} \\ x = 21 \text{ ✓} \end{cases}$

۲ـ۱۵۳

$P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{\frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!}}{\frac{11 \times 10 \times 9!}{2! \times 9!}} = \frac{15}{11 \times 5} = \frac{2}{11}$

AKBARI