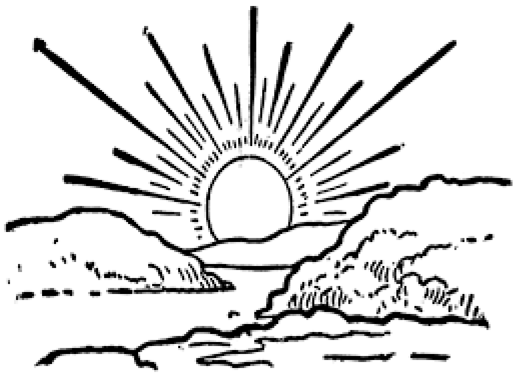
به نام خدا



ریاضی دوازدهم تجربی

مخصوص داوطلبان کنکور و شرکت کنندگان آزمون های آزمایشی

جزوه ی سطح دشوار برای داوطلبان رتبه ی زیر ۱۰۰۰ مناطق

منطبق بر آخرین کتاب درسی

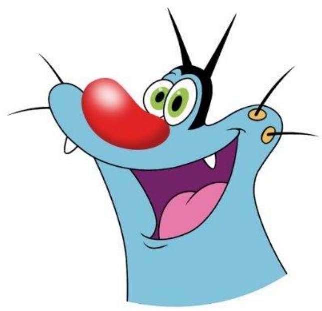
تهیه :مهندس میعاد دارستانی دبیر رسمی آموزش و پرورش جوانرود

چه کسانی این جزوه را بخوانند ؟ کنکوری هایی که میخوان زیر ۱۰۰۰ مناطق سه گانه شوند – دانش آموزان مدارس تیزهوشان و المپیادی ها

**روی چینش تست ها و سوالات این جزوه بر اساس میزان سختی و مهم بودن و احتمال طرح مفاهیم و تیپ مشابه در کنکور با نظر جمعی کار شده. لذا این جزوه نسبت به جزوه های دست نویس و تایپی اساتید منحصر به فرده. یعنی سوال الکی توی این جزوه نداریم !!

عزیزانی که درخواست جزوه یا تدریس خصوصی در پاوه و جوانرود و روانسر دارن میتونن به شماره ی زیر تماس بگیرند.

دکترین و پرستارهای محترم!!! ورود شما رو به ریاضیات دوازدهم تبریک میگم. ریاضی دوازدهم بیشتر در مورد ویژگی های توابع و کاربرد مشتقه . چیزی که حدود ۴۰ درصد سوالات کنکورتون رو تشکیل میده. به جرات میگم که ریاضی دوازدهم نسبت به هندسه و اینها بسیار آسونه و این بخت شما برای به دست آوردن درصد بالا در ریاضی می باشد.ریاضی درسیه که اغلب تجربی ها توش لنگن!!! با این که اصلا هم سخت نیست و نسبت به دروس زیست و شیمی در کنکور بسیار آسون تره . اما عدم آشنایی کافی و ترس تجربی ها از این درس باعث شده که معمولا میانگین درس ریاضی در داوطلبان تجربی پایینه. اگه کارنامه ها رو نگاه کنید این ریاضی لامصب خیلی ها رو تبدیل به پزشک کرد و رفتن. با توکل بر خدا و با خوندن این جزوه و تمرین شما هم جزیی از این گروه باشید.



توی این جزوه مباحث رو به چند سطح بیان کردیم. اول در سطح سوالات امتحانی کلاسی تالیفی. دوم نمونه سوال های امتحانی پایانی مدارس برتر کشور و سوم در سطح سوالات کنکور سراسری.تمامی نکاتی که ممکنه برای یک فصل مطرح بشه رو به صورت کامل در جزوه بیان کرده ایم.

البته هیچ جزوه ای خالی از ایراد و کم و کاستی نیست . شما می تونید این جزوه رو پرینت گرفته و در گوشه کنار جزوه مطالبی را که به نظرتون مفیده یادداشت کنید و به جزوه اضافه کنید.

نظرات و پیشنهادات خودتون رو میتونید با مهندس دارستانی به ایمیل miadtehran@gmail.com یا با شماره تلفن ۰۹۱۰۶۷۵۸۹۷۷ در میان بگذارید. در صورت درخواست مشاوره تلفنی و حضوری و همچنین تدریس آنلاین میتوانید به این شماره یا ایمیل تماس بگیرید.

بی جهد به عالم معانی نرسی

زنده به حیات جاودانی نرسی

تا همچو خلیل به آتش اندر نشوی

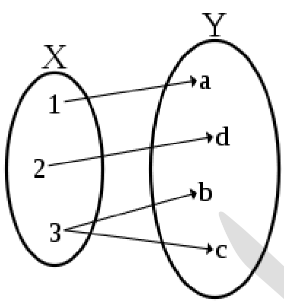
چون خضر به آب زندگانی نرسی

فصل اول تابع

سلام بچه ها . هرچند که تعریف تابع رو توی سال های قبل خوندیم اما محض یادآوری مفاهیمی رو بازتعریف می کنیم.

تابع را می‌توان به عنوان قاعده‌ای خاص برای تناظر بین اعضای دو مجموعهٔ دامنه و برد تعریف کرد. به بیان دقیق‌تر، اگر A و B دو مجموعه باشند، یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را می‌توان قاعده‌ای تعریف کرد که به هر عضو مجموعهٔ A مانند a، دقیقاً یک عضو مجموعهٔ B را مانند $f(a)$ نسبت دهد. تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B را با $f : A \to B$ نشان می‌دهیم.

تمرین (آموزش و پرورش تهران)



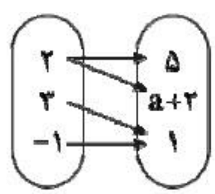
درمورد تابع بودن یا نبودن تناظر مقابل بحث کنید.

حل: طبق تعریف بالا به هر عضو از دامنه ی یک تابع دقیقا یک عضو از برد تابع نظیر می شود. مثلا در معادله ی درجه دوم که تابع می باشد به ازای هر x یک مقدار y تحویل میگیریم. اما برعکسش این گونه نیست. مثلا یک معادله برای یک جواب دو تا مجهول میتونه داشته باشه.پس این یه تابع نیست چون در اضای یک دامنه ۲ تا برد به ما داده که خلاف تعریف تابع می باشد. *(اگه نگرفتی چی شد به تعریف تابع در سنوات قبل مراجعه کن)*

این نکته ی بالا درمورد زوج مرتب ها هم همین قاعدس.

تمرین

هرگاه نمودار وِن تابع f به‌صورت



و تابع g به‌صورت $g=\{(۳,-۱),(a,b+۱),(a+۱,۲)\}$ باشند، مقدار a+b چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) −۱ ۳) −۲ ۴) ۲

حل:

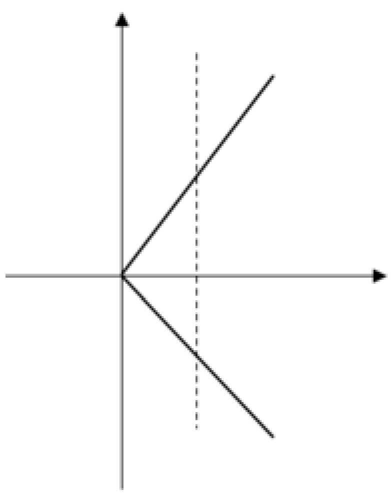
تابع مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب است که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول برابر ندارند.
در نمودار وِن تابع نباید از یک عضو دو پیکان خارج شود و در صورتی که از یک عضو مجموعه‌ی آغاز دو پیکان خارج شود باید مقدار آن‌ها برابر باشند، لذا $a+۲=۵$ و در نتیجه $a=۳$. به‌ازای $a=۳$ تابع g به‌صورت $g=\{(۳,-۱),(۳,b+۱),(۴,۲)\}$ درمی‌آید.
برای آن‌که g تابع باشد، باید $b+۱=-۱$ و در نتیجه $b=-۲$. لذا: $a+b=۳-۲=۱$

تابع داستان های دیگه ای هم داره که باید به سنوات قبل برای جزییات بیشتر مراجعه کنید (در صورت فراموشی)

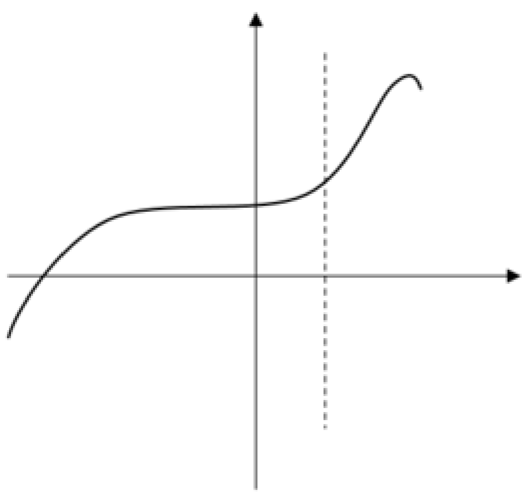
توی فصل اول ریاضی دوازدهم تمرکز ما رو رسم نمودار توابع می باشد.

نمودار تابع

از قبلنا میدونیم که هر نمودار دکارتی که به ما بدن و بگن آیا این نمودار یک تابع هست یا نه یک خط موازی محور عرض ها رسم میکردیم.اگر نمودار توسط این خط فقط در یک نقطه قطع می شد نمدار تابع بود و اگر در بیش از یک نقطه قطع می شد نمودار تابع نبود.



تابع نیست



تابع هست

اگه تا اینجا رو گرفتید بریم سر اصل مطلب

یاداشت

اعمال روی نمودار های توابع

توابع چند ضابطه ای (چند جمله ای)

قبلا ما تابع $f(x) = ax + b$ رو خوندیم که بهش تابع خطی میگیم. یا به عبارت دیگه ای یک تابع درجه یک هستش. به توان مجهول ما در هر تابع درجه ی اون تابه میگن. مثلا در تابع خطی توان x ما یک هستش. اما داستان ما از زمانی شروع میشه که توان مجهول ما از یک بیشتر بشه یعنی بشه $f(x) = ax^2 + bx + c$ یا همون معادله ی درجه ی دو یا معادله ی درجه ی سه و .... .پس زمانی که تابع ما از درجه ی یک بیشتر شد اصطلاحا بهش میگیم که تابع ما چند جمله ای میشه.

نکته:اگر یک تابع داشته باشیم که شامل چندین مجهول باشه توان بزرگترین مجهول ما میشه درجه ی تابع ما .

مثلا در چند جمله ای زیر درجه ی ۵ هستش.چون بزرگترین توان مجهول ما درجه ۵ هستش.

$$y = ۲x^{۵} - ۴x^{۳} + \sqrt{۷}x^{۲}$$

تابع $kf(x)$

برای رسم نمودار kf باید عرض ه نقطه از تابع f رو در k ضرب کنیم. خیلی گندش نکن. یه تابع داریم که هر x بهش بدی یه f(x) بهت میده . حالا هر f(x) که به دست اومده رو در kضرب کن. به همین راحتی.

*دامنه ی تابع kf(x) دقیقا همان دامنه ی تابع f(x) هستش. برد تابع kf(x)برابر برد f(x) ضربدر kهستش.

خب بعضی وقتا عدد بهمون نمیدن ولی نمودار رو به صورت تقریبی بهت میدن ببینن چقدر با این جمله ها حل کردی.

چند تا شرایط داریم

الف) اگر نمودار ما همون نمودار تابع f(x)باشه ولی در طول محور y ها کشیده شده باشه (به هر میزانی) نشون میده که k عددی بزرگتر یک هستش. میگی نه خب کاری نداره. یه تابع دلخواه انتخاب کن بعد اون تابع رو ضربدر یه عدد دلخواه بزرگتر از یک کن بعد برو نمودار رو دوباره رسم کن تا دوهزاریت بیفته.

ب) اگر نمودار در راستای محور عرض ها فشرده شده باشه نشون میده که $0 < k < 1$ بوده است.

ج)اگر تابع همون تابه f(x)باشه اما نسبت به محور x ها آینه وار معکوس شده باشه نشون میده که k=-1هستش.

د) همون اعمال الف و ب هم درمورد اعداد منفی صدق میکنه. مثلا اگر عدد ۲- رو به جای k بزاریم. اول نسبت به محور x ها وارونه میشه و بعدش با اندازه ی ۲ (قدر مطلق عدد) کشیده میشه طبق چیزی که قبلا گفتیم.

همان طور که گفتیم تابع به صورت نموداری یا ضابطه یا زوج مرتب و .. نشونش میدن. این مفاهیم بالا رو برای هر کدام از اینها باید یادبگیرین.مثلا برای ضابطه اگر برد تابع f(X) برابر [m,n] باشد و k ضریبی مثبت باشد برد تابع kf(X) برابر [km,kn]خواهد شد.

و اگر k منفی باش برد برابر [kn,km] خواهد شد.

بررسی نمودار y=f(kx)

خب این نمودار برعکس نمودار قبله. در این نمودار برد هیچ تغییری نمی کند بلکه این دامنه است که تغییر می کند.

اگر k عددی بین یک و منفی یک باشه $-1 < k < 1$ نمودار دچار کشیدگی میشه و اگر $|k|$ بزرگتر از یک باشد دچار فشردگی خواهد شد.

✸ برای رسم $f(ax+b)$ ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام می دهیم . سپس تغییرات مربوط به ضریب x را روی شکل اعمال می کنیم .

برای رسم نمودار $f(ax)$ اگر $(0<a<1)$ باشد نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

اگر $(a>1)$ نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می شود . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

اگر نقطه A روی نمودار تابع $f(x)$ باشد نقطه نظیر آن روی تابع $g(x)=f(ax+b)$ برابراست با :

$$\text{if}\quad A(x_0,y_0)\in f(x) \qquad A'\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_0-b}{a}\\ y_0\end{array}\right. \qquad \in g(x)=f(ax+b)$$

$$\text{if}\quad A(x_0,y_0)\in f(x) \qquad A'\left|\begin{array}{l}\dfrac{x_0-b}{a}\\ ky_0\pm k'\end{array}\right. \qquad \in g(x)=kf(ax+b)\pm k'$$

بررسی تابع $y=f(x-a)$ $(a>0)$

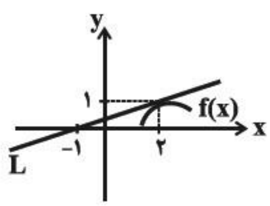
برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد مثبت محور x ها انتقال دهیم .

بررسی تابع $y=f(x+a)$ $(a>0)$

برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد منفی محور x ها انتقال دهیم .

تمرین

در شکل مقابل خط L بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به‌طول $x=2$ مماس است. شیب خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\sqrt{f(\sqrt{x})}$ در $x=4$ کدام است؟



۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{12}$

۳) $\frac{1}{24}$ ۴) $\frac{1}{48}$

حل:

شیب خط L، برابر است با مشتق تابع f در $x=2$،

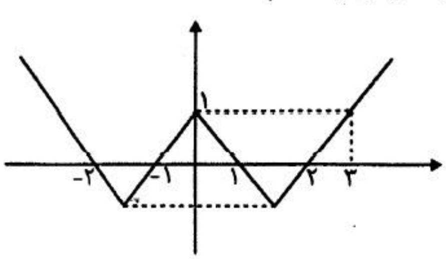
$$\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{3} \quad \text{و} \quad f(2)=1$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{\left(f(\sqrt{x})\right)'}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}}=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{f(\sqrt{x})}}$$

$$\Rightarrow g'(4)=\frac{\frac{1}{4}f'(2)}{2\sqrt{f(2)}}=\frac{1}{8}f'(2)=\frac{1}{24}$$

تمرین

نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است. مجموعه جواب نامعادله $(f(x)-1)(x-2)>0$ کدام است؟



۱) ϕ

۲) $(3,+\infty)$

۳) $(-\infty,3)$

۴) $(-3,2)\cup(3,+\infty)$

حل:

g تابعی ثابت است پس باید $g(12)=g(-1)$ باشد یعنی:

$$a^2+b=4$$

از طرفی f تابع همانی است پس $f(x)=x$ می‌شود.

$$f(b)=-3a \to b=-3a$$

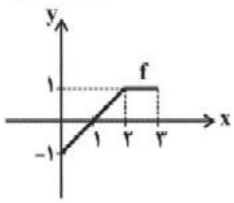
در رابطهٔ اول به جای b عبارت $-3a$ قرار می‌دهیم:

$$a^2+b=4 \xrightarrow{b=-3a} a^2-3a-4=0 \to \begin{cases} a=-1 \to b=3 \\ a=4 \to b=-12 \end{cases}$$

مقدار مثبت a برابر ۴ است.

تمرین

اگر نمودار تابع f به‌صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=-f(x+2)-1$ از کدام ناحیه(های) دستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟



۱) فقط دوم

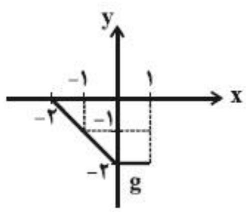
۲) اول و دوم

۳) دوم و سوم

۴) فقط اول

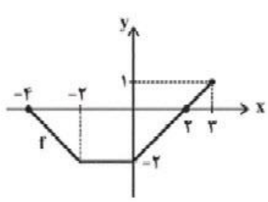
حل:

با انتقال نمودار تابع f به اندازهٔ ۲ واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا و سپس قرینه کردن آن نسبت به محور x ها، نمودار تابع g به‌دست می‌آید. با توجه به شکل، واضح است که نمودار تابع g از نواحی اول و دوم نمی‌گذرد.



تمرین

نمودار تابع f به‌صورت زیر است. دامنهٔ تابع $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{f(x)-f(-2x)}}$ کدام است؟



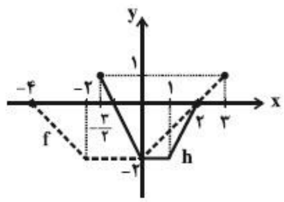
۱) $\left[-\frac{3}{2},0\right)$

۲) $\left[-\frac{3}{2},2\right)-\{0\}$

۳) $(0,2)$

۴) $\left[-\frac{3}{2},2\right)$

حل:



نمـودار دو تـابع $y=f(x)$ و $h(x)=f(-۲x)$ را در یـک دسـتگاه مختصات رسم می‌کنیم.

$$D_g=\{x\in D_f\cap D_h \mid f(x)>h(x)\}$$

$$=\left\{x\in\left[-\frac{۳}{۲},۲\right] \mid x\in(۰,۲)\right\}=\left[-\frac{۳}{۲},۲\right]\cap(۰,۲)=(۰,۲)$$

در این بازه نمـودار تـابع f بـالاتر از نمـودار تـابع h اسـت و حاصـل زیـر رادیکال مثبت است.

تمرین

نقطهٔ A روی نمودار تابع f به نقطهٔ A' روی نمودار تابع $y=۲+f\left(\frac{x}{۲}-۱\right)$ تبدیل می‌شود. کم‌تـرین فاصـلهٔ دو نقطـهٔ A و A' از یکدیگر کدام است؟ $(D_f=\mathbb{R})$

۱) ۲　　۲) $\sqrt{۲}$　　۳) $\sqrt{۵}$　　۴) ۴

حل:

نقطهٔ $A'(\alpha',\beta')$ را تبدیل‌یافتهٔ $A(\alpha,\beta)$ در نظر می‌گیریم.

$$A':\begin{cases}\frac{\alpha'}{۲}-۱=\alpha \Rightarrow \alpha'=۲\alpha+۲\\ \beta'=۲+\beta\end{cases}\Rightarrow A'=(۲(\alpha+۱),\beta+۲)$$

$$\Rightarrow |AA'|=\sqrt{(۲\alpha+۲-\alpha)^۲+(\beta+۲-\beta)^۲}=\sqrt{(\alpha+۲)^۲+۴}$$

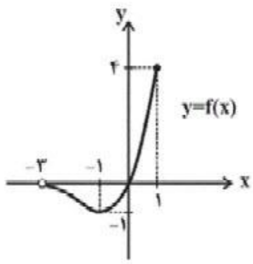
کم‌ترین مقدار $|AA'|$ زمانی رخ می‌دهد کـه $(\alpha+۲)^۲$ کـم تـرین مقـدار یعنی صفر باشد. این حالت با توجه به اینکه دامنهٔ تابع f کل اعـداد حقیقـی است، امکان‌پذیر است.

$$\Rightarrow |AA'|_{min}=\sqrt{۴}=۲$$

حالا چون اول جزوه گفتیم این جزوه متعلق به تیزهوشان و رتبه های پزشکیه این حرفو میزنم. اصلا توی درس ریاضی درس نامه یعنی کشک. اگه میخواین توی درس ریاضی موفق بشین توی کنکور فقط باید حجم و کیفیت تست حل کردنتون رو ببرین بالا . فقط همین . هر کی بیشتر تست حل کنه دستش به اصطلاح برای حل ریاضی گرمه. پس اینو یادتون باشه .

تمرین

شکل زیر مربوط به نمودار تابع f است. اگر دامنهٔ تابع $h(x)=-۳f(۱-۲x)+۴$ بازهٔ $[۰,a)$ و برد آن بازهٔ $[b,۷]$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) -۶　　۲) -۸

۳) -۴　　۴) ۴

حل:

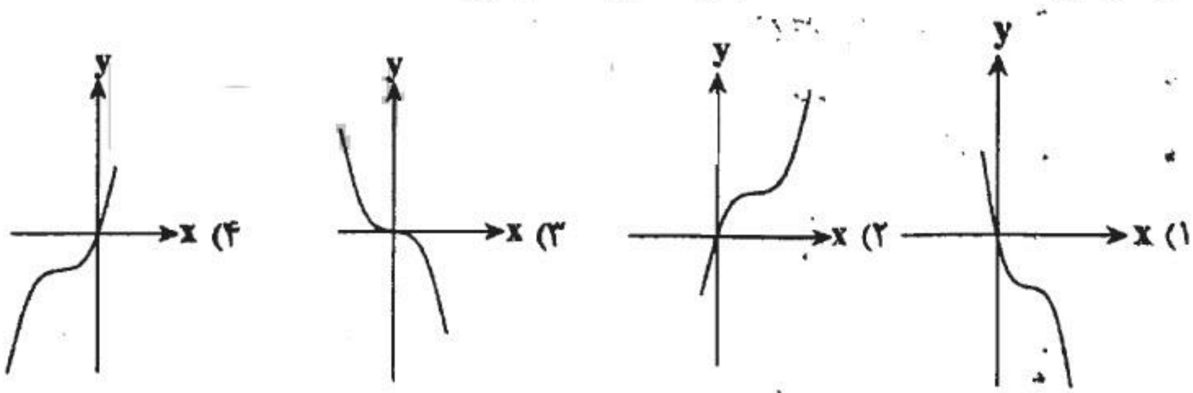
$D_f=(-۳,۱]$　　$D_h:-۳<۱-۲x\le ۱\Rightarrow -۴<-۲x\le ۰\Rightarrow ۰\le x<۲$　　$\Rightarrow D_h=[۰,۲)=[۰,a)\Rightarrow a=۲$

$R_f=[-۱,۴]$　　$R_h:-۱\le f(۱-۲x)\le ۴\Rightarrow -۱۲\le -۳f(۱-۲x)\le ۳$

$\Rightarrow -۸\le -۳f(۱-۲x)+۴\le ۷\Rightarrow R_h=[-۸,۷]=[b,۷]\Rightarrow b=-۸$　　$\Rightarrow a+b=۲+(-۸)=-۶$

تمرین

نمودار تابع $f(x)=۶x^۲-x^۳-۱۲x$ شبیه کدام گزینه است؟

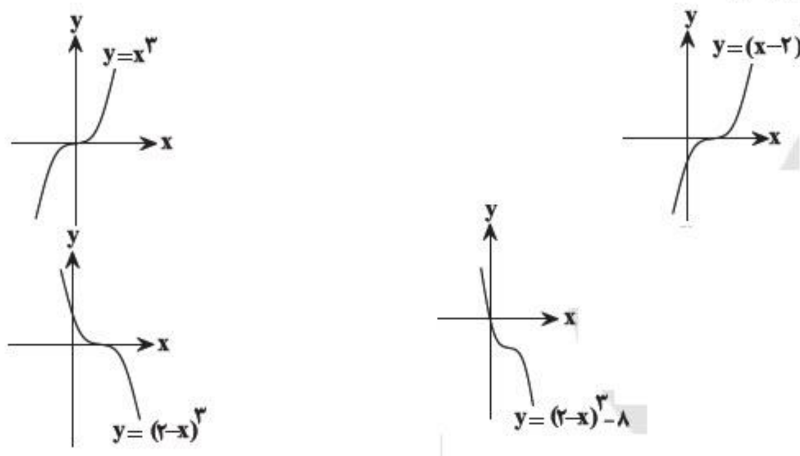


حل:

یاداشت

$$f(x)=\underbrace{۶x^{۲}-x^{۳}-۱۲x+۸}_{(۲-x)^{۳}}-۸=(۲-x)^{۳}-۸$$

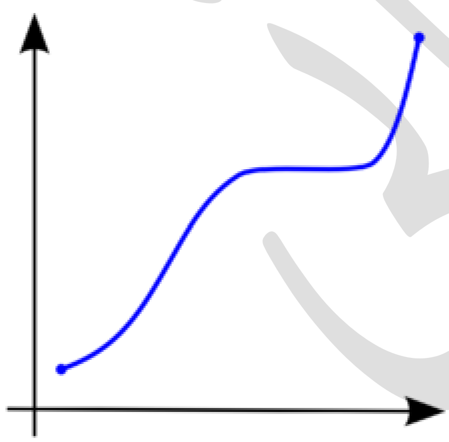
حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



توابع صعودی و نزولی

تابع صعودی: تابعی که با افزایش مقدار x (دامنه) ، مقدار تابع یا برد تابع نیز افزایش یابد یا ثابت بماند.

تابع مقابل تابع صعودی است .



*تابع صعودی اکید تابعی است که با افزایش x فقط مقدارy افزایش یابد و هیچ جا تابع ثابت نباشد

تابع نزولی :تابعی که با افزایش مقدار x مقدار yکاهش یا ثابت بماند.

تابع نزولی اکید تابعی که صرفا کاهش پیدا کند و ثابت نداشته باشد.

در هر بازه که تابع ثابت باشه، هم می‌توان گفت صعودیه و هم نزولی چون در تعریف هر دو صدق می‌کنه.

هر تابعی که در دامنه‌اش صعودی اکید (یا نزولی اکید) باشد، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. ولی ممکن تابعی یک به یک باشه ولی یکنوا نباشه مثل تابع : $y = \frac{1}{x}$

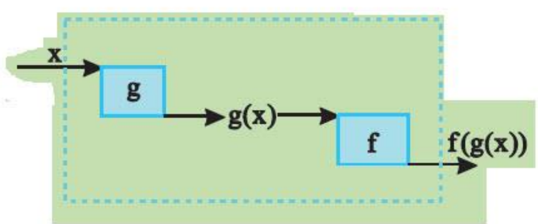
- در نمودار های چند ضابطه ای برای تعیین نزولی یا صعودی بودن لازمه که برای هر ضابطه نمودار سم کنید و در همان بازه و برای هر کدام از بازه ها نزولی یا صعودی بودن تابع رو بررسی کنسد.
- یک تابع در حالت کلی میتونه نه صعودی باشه نه نزولی اما اگر دامنه ی آن را محدود کنیم می توان آن را صعودی یا نزولی در آن بازه نامید.

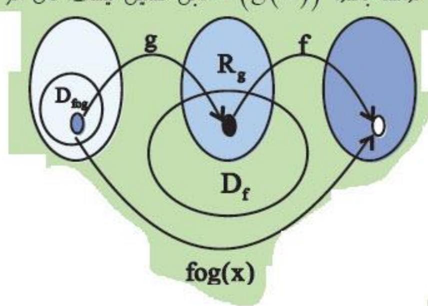
ترکیب تابع

اگر $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$ آن‌گاه $C \xrightarrow{fog} B$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

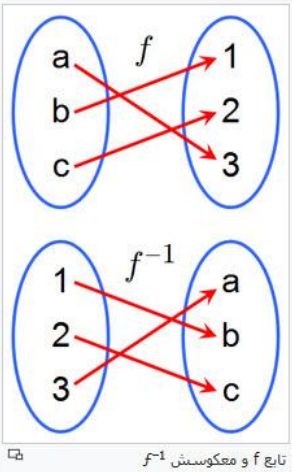
$$\begin{cases} y = fog(x) = f(g(x)) \\ D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \end{cases}$$

اگر برد $g(x)$ اشتراکی با دامنه‌ی تابع $f(x)$ نداشته باشد، $f(g(x))$ قابل تشکیل نیست. حال اگر $R_g \cap D_f \neq \phi$ آن‌گاه با جای گزینی $g(x)$ به جای x در ضابطه‌ی $f(x)$، تابع fog تشکیل می‌شود.





تابع وارون



تابع f و معکوسش f^{-1}

تابع معکوس (به انگلیسی: Inverse Function): در ریاضیات اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، آن گاه **تابع وارون (معکوس)** f یا f^{-1} تابعی از B به A است، با این ویژگی که برای هر x در دامنهٔ f، نتیجه‌ی اعمال پی‌درپی تابع و وارون آن روی x، خود x خواهد بود. به دیگر سخن:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

نمودار توابع f, f^{-1} نسبت به خط $y = x$ متقارن‌اند.

نمودار f, f^{-1} در صورت تقاطع عموماً یکدیگر را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند. (نه همیشه)

ممکن است نمودار f, f^{-1} بر هم منطبق باشند، مانند: $y = \frac{1}{x}$ و یا یکدیگر را قطع نکنند، مانند:

$$f^{-1}(x) = \log_2^x \quad , \quad f(x) = 2^x$$

تمرین

اگر ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 & , \quad x > 3 \\ \frac{4}{5}x + \frac{8}{5} & , \quad -2 \le x \le 3 \\ x^2 + 6x + 8 & , \quad x < -2 \end{cases}$ باشد، آن‌گاه طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن f(x) اکیداً صعودی است، کدام است؟

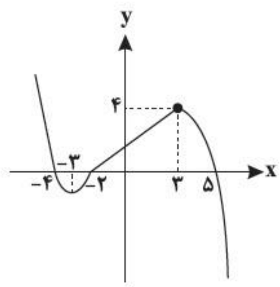
۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۳

حل:

با ساده‌سازی تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1)(x-5) & , \quad x>3\\ \frac{4}{5}x+\frac{8}{5} & , \quad -2\le x\le 3\\ (x+4)(x+2) & , \quad x<-2\end{cases}$$

تابع $f(x)$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین تابع صعودی است. و طول بازه ۶ است.

تمرین

اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x^2+22x+20$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog، کدام است؟

۱) $2x^2-7x+3$ ۲) $2x^2-3x+7$ ۳) $4x^2-2x+13$ ۴) $4x^2-4x+11$

حل:

$$\begin{cases}f(x)=2x+3\\ g(f(x))=8x^2+22x+20\end{cases} \Rightarrow g(2x+3)=8x^2+22x+20 \quad (*)$$

با شرط $2x+3=t$ داریم:

$$2x=t-3 \Rightarrow x=\frac{t-3}{2}$$

با قرار دادن معادل x برحسب t در رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$g(t)=8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2+22\left(\frac{t-3}{2}\right)+20 \quad \Rightarrow g(t)=8\left(\frac{t^2-6t+9}{4}\right)+11(t-3)+20 \quad \Rightarrow g(t)=2t^2-12t+18+11t-33+20$$

$$\Rightarrow g(t)=2t^2-t+5 \quad \Rightarrow g(x)=2x^2-x+5 \quad f(g(x))=2g(x)+3=2(2x^2-x+5)+3=4x^2-2x+13$$

تمرین

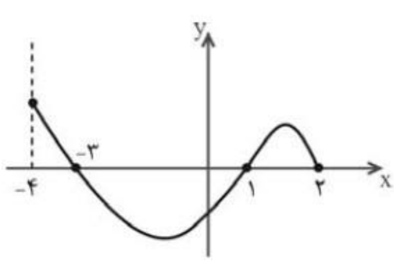
شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟

۱) $[0,2]$

۲) $[-3,2]$

۳) $[-4,-3]\cup[1,2]$

۴) $[-3,0]\cup[1,2]$



حل:

برای محاسبه‌ی دامنه‌ی عبارت رادیکالی با فرجه‌ی زوج باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد. بنابراین: $xf(x) \geq 0 \quad (*)$

از آنجا که نمودار تابع f در $x=1$، $x=-3$، $x=-4$ و $x=2$ صفر شده، جدول تعیین علامت عبارت فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

	-4		-3		0		1		2	
x		−		−	0	+		+		
f(x)		+	0	−		−	0	+	0	
xf(x)		−	0	+	0	−	0	+	0	

پس مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $(*)$ و در نتیجه دامنه‌ی عبارت داده شده برابر است با: $x \in [-3,0] \cup [1,2]$

تمرین

نمودارهای تابع خطی f و تابع درجه دوم g، محور y ها را به ترتیب با عرض‌های ۲ و ۳ قطع می‌کنند. اگر $(fog)(x)=2x^2+x-1$، آنگاه $(f-g)(x)$ کدام است؟

۱) $-2x^2-2x+1$ ۲) x^2-2 ۳) x^2+x-1 ۴) $2x^2-1$

حل:

f یک تابع خطی است که محور y ها را با عرض ۲ قطع می‌کند، پس $f(x)=mx+2$. g یک تابع درجه دوم است که محور y ها را با عرض ۳ قطع می‌کند، پس $g(x)=ax^2+bx+3$.

$$(fog)(x)=f(g(x))=m(ax^2+bx+3)+2 \qquad \Rightarrow (fog)(x)=max^2+mbx+(3m+2)$$

اما طبق فرض سؤال $(fog)(x)=2x^2+x-1$، پس، داریم:

$$\begin{cases}(fog)(x)=max^2+mbx+(3m+2)\\(fog)(x)=2x^2+x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3m+2=-1 \Rightarrow m=-1 \quad (*)\\ mb=1 \xrightarrow{(*)} -b=1 \Rightarrow b=-1\\ ma=2 \xrightarrow{(*)} -a=2 \Rightarrow a=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f(x)=-x+2\\g(x)=-2x^2-x+3\end{cases}$$

$$\Rightarrow (f-g)(x)=f(x)-g(x)=(-x+2)-(-2x^2-x+3) \qquad =2x^2-1$$

تمرین

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$ در بازهٔ $(a,+\infty)$ صعودی اکید است. حداقل مقدار a کدام است؟

۱) $-\dfrac{3}{5}$ ۲) $\dfrac{3}{5}$ ۳) -3 ۴) 3

حل: بعدا این سوال رو حل کنید. نکته ی مشتقی داره

تمرین

ضابطه‌ی تابع f به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & ; x<۰ \\ \frac{x}{۲}+۴ & ; x\geq ۰ \end{cases}$ می‌باشد، مقدار $f(۲f(۱-\sqrt{۲}))$ چه‌قدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

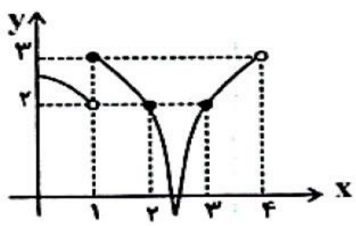
حل:

ابتدا مقدار $f(۱-\sqrt{۲})$ را به‌دست می‌آوریم. $x=۱-\sqrt{۲}<۰, f(x)=x^۲-۲x \Rightarrow f(۱-\sqrt{۲})=(۱-\sqrt{۲})^۲-۲(۱-\sqrt{۲})=۱$

بنابراین مقدار $f(۲f(۱-\sqrt{۲}))$ با مقدار $f(۲)$ برابر است. $x=۲>۰, f(x)=\frac{x}{۲}+۴ \Rightarrow f(۲)=۵$

تمرین

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت زیر باشد، دامنه‌ی تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{۲-f(x)}}$، کدام مجموعه است؟



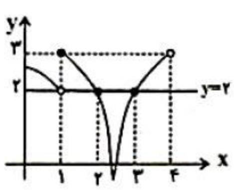
۱) $[۰,۴)$

۲) $[۰,۴)-[۲,۳]$

۳) $R-[۲,۳]$

۴) $(۲,۳)$

حل:



عبارت زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج باید نامنفی باشد و چون در مخرج کسرقرار دارد، صفر نیز نمی‌تواند باشد،

$$y=\frac{۱}{\sqrt{۲-f(x)}} \Rightarrow ۲-f(x)>۰ \Rightarrow f(x)<۲$$

با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، فقط در فاصله‌ی $۲<x<۳$، مقادیر $f(x)$ کم‌تر از ۲ است.

تمرین

اگر $f(x)+xf(-x)=x^{۲}+۱$ ، آنگاه مقدار $f(۲)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲

۳) ۳ ۴) ۴

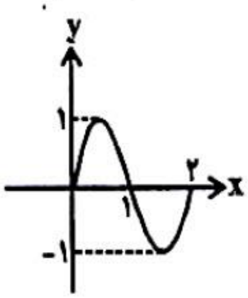
حل:

$$f(x)+xf(-x)=x^{۲}+۱\Rightarrow\begin{cases}x=۲\Rightarrow f(۲)+۲f(-۲)=۴+۱\\ x=-۲\Rightarrow f(-۲)-۲f(۲)=۴+۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{matrix}\\ -۲\end{matrix}\begin{cases}f(۲)+۲f(-۲)=۵\\ f(-۲)-۲f(۲)=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(۲)+۲f(-۲)=۵\\ -۲f(-۲)+۴f(۲)=-۱۰\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع دو ضابطه}}۵f(۲)=-۵\Rightarrow f(۲)=-۱$$

تمرین

اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، برد تابع $g(x)=۱+۳f(\frac{x}{۲})$ کدام است؟



۱) $[-۲,۴]$ ۲) $[۲,۴]$

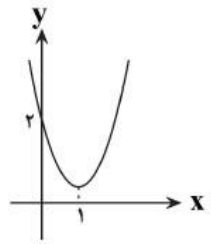
۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[-۲,۲]$

حل:

داریم:

$$-۱\le f(x)\le ۱\Rightarrow -۱\le f(\frac{x}{۲})\le ۱\Rightarrow -۳\le ۳f(\frac{x}{۲})\le ۳\Rightarrow -۲\le ۱+۳f(\frac{x}{۲})\le ۴\Rightarrow -۲\le g(x)\le ۴$$

تمرین



– شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+ax+b$ است. اگر $g(x)$ از انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ ۳ واحد به پایین حاصل شود، مجموع جواب‌های طبیعی نامعادلهٔ $g(x)<۰$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

حل: خودتون حل کنید جواب گزینه ی ۱

تمرین

اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ باشد، حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

حل:

$f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=f(۳x-۴)$

نقطهٔ $A(۱۶,\beta)$ روی تابع $g^{-۱}$ است، پس نقطهٔ $A'(\beta,۱۶)$ روی تابع g است، یعنی: $g(\beta)=۱۶$

اما $g(x)=f(۳x-۴)$ است، پس:

$\Rightarrow f(۳\beta-۴)=۱۶ \Rightarrow f^{-۱}(۱۶)=۳\beta-۴$

با قرار دادن نقطه در تابع $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ خواهیم داشت:

$\Rightarrow ۱۶+\sqrt{۱۶}=۳\beta-۴ \Rightarrow ۳\beta=۱۶+۴+۴ \Rightarrow \beta=۸$

$\Rightarrow g(۸)=۱۶ \Rightarrow g^{-۱}(۱۶)=۸$

تعداد صفحه:۳	ساعت شروع:۸ صبح	رشته : **علوم تجربی**	سؤالات امتحان نهایی‌درس : **ریاضی ۳**
مدت امتحان:۱۲۰	تاریخ امتحان: **۱۳۹۹/۰۴/۰۸**	نام و نام خانوادگی :	پایه **دوازدهم** دورۀ دوم متوسطه
مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir		دانش آموزان روزانه سراسر کشوردر**نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۹**	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد) (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد)	نمره
	الف) بخش الزامی **دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۳ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.**	
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) تابع ثابت در یک بازه،هم صعودی و هم نزولی است. ج) تابع $f(x)=x^3-3x$ در بازه $(-1,1)$ اکیداً صعودی است.	۰/۷۵

حل:

الف) درست ج) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحات: ۷ و ۷۸ و ۱۰۴	۰/۷۵

تمرین

یاداشت

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضی ۳**	رشته : **علوم تجربی**	ساعت شروع: **۸ صبح**	تعداد صفحه: **۳**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :	تاریخ امتحان: **۱۳۹۹/۰۴/۰۸**	مدت امتحان: **۱۲۰**
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۹**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد) (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد)	نمره

الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سوالات ۱ تا ۱۳ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. **۰/۷۵**

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است.

ج) تابع $f(x) = x^{3} - 3x$ در بازه $(-1,1)$ اکیداً صعودی است.

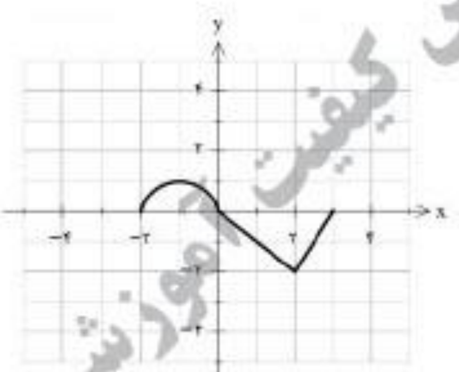
۲ درجاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. **۰/۷۵**

الف) برد تابع $y = \tan x$ برابر .... است.

۳ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. **۰/۷۵**

الف) نمودار تابع $y = 3f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید.

ب) دامنه تابع $y = 3f(\frac{1}{2}x)$ را تعیین کنید.

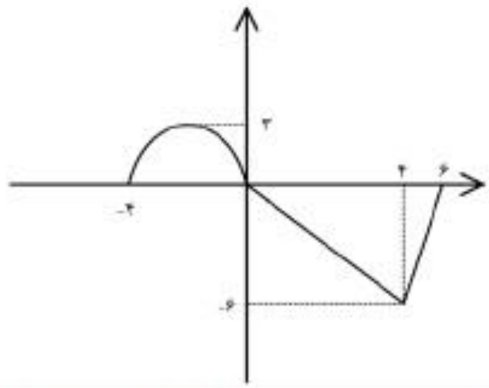


۴ اگر $f(g(x)) = 3x^{2} - 6x + 14$ و $f(x) = 3x - 6$ ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید. **۱**

حل:

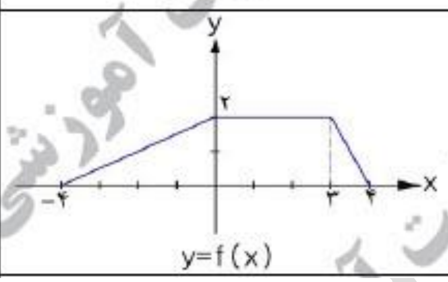
باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضی ۳**	رشته: **علوم تجربی**	ساعت شروع: **۸ صبح**	مدت امتحان: **۱۲۰دقیقه**
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه		تاریخ امتحان: **۱۳۹۹/۰۴/۰۸**	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در **نوبت خرداد** ماه سال **۱۳۹۹**		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی **http://aee.medu.ir**	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف) درست ب) نادرست ج) نادرست هر مورد ۰/۲۵ صفحات: ۷ و ۷۸ و ۱۰۴	۰/۷۵
۲	الف) R ب) صفر ج)مماس قائم هر مورد ۰/۲۵ صفحات: ۳۹ و ۶۳ و ۸۰	۰/۷۵
۳	الف)رسم شکل (۰/۵) ب) $D=[-۴,۶]$ (۰/۲۵)  صفحه: ۲۰	۰/۷۵
۴	$f(g(x))=۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴\,(۰/۵)\Rightarrow g(x)=x^۲-۲x+۶\,(۰/۵)$ صفحه: ۲۲	۱

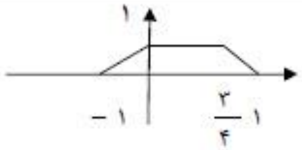
باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : **ریاضی ۳**	رشته : **علوم تجربی**	ساعت شروع: ۸ صبح	تعداد صفحه:۲
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۸/۳/۲	نام و نام خانوادگی :	مدت امتحان: ۱۲۰
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشور در **نوبت خرداد** ماه سال ۱۳۹۸			مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد) (استفاده از ماشین حساب ساده مجاز می باشد)	نمره
۱	**در جاهای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.** **الف) تابع $y=(x+۱)^{۳}$ در دامنه‌ی تعریف خود.......... (صعودی، نزولی) است.**	۰/۷۵
۲	**درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.** **الف) دوتابع $f(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$ و $g(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$ وارون یکدیگرند. (درست ، نادرست)**	۰/۷۵
۳	**دوتابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.**	۱
۴	**بااستفاده‌ازنمودارتابع $y=f(x)$،نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید.**  	۰/۵

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: **ریاضی ۳**	رشته: **علوم تجربی**	تعداد صفحه :۴	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه **دوازدهم** دورهٔ دوم متوسطه	ساعت شروع: ۸ صبح	تاریخ امتحان : ۱۳۹۸/۳/۲	
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسرکشوردر **خرداد ماه** سال ۱۳۹۸		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	الف)صعودی ۰/۲۵ ب)کوچکتر ۰/۲۵ پ)ناسازگار ۰/۲۵ صفحات:۷و۱۳۱و۱۴۴	۰/۷۵
۲	الف) درست ۰/۲۵ ب) نادرست ۰/۲۵ پ)درست ۰/۲۵ صفحات:۲۹و۳۹و۱۲۳	۰/۷۵
۳	صفحه:۱۴ $\underbrace{D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}}_{۰/۲۵}=\underbrace{\{x\geq ۴ \mid \sqrt{x-۴}\neq \pm ۱\}}_{۰/۵}=\underbrace{[۴,۵)\cup(۵,+\infty)}_{۰/۲۵}$	۱
۴	صفحات:۱۸و۲۱  	۰/۵

یاداشت

تمرین

- اگر $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنهٔ تابع gof کدام است؟

۱) $[0,1)$ ۲) $\{0\}$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $\mathbb{R}-\{1,-1\}$

حل:

روش 1 (عددگذاری):

برای حل نامساوی $1\le\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\le 0$، با توجه به گزینه‌ها اگر $x=\dfrac{1}{2}$ قرار دهیم نامساوی صدق نمی‌کند. پس فقط گزینهٔ (۲) می‌تواند صحیح باشد.

روش 2

ضابطهٔ $g(f(x))$ را تشکیل داده و دامنهٔ آن را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=\sqrt{x(1-x)} \Rightarrow g(f(x))=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}\left(1-\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}\left(\frac{-2x^2}{1-x^2}\right)}=\sqrt{\frac{(1+x^2)(-2x^2)}{(1-x^2)^2}} \Rightarrow \frac{\overbrace{(1+x^2)}^{\text{همواره مثبت}}(-2x^2)}{\underbrace{(1-x^2)^2}_{\text{همواره مثبت}}}\ge 0$$

$$\Rightarrow -2x^2\ge 0 \Rightarrow x^2\le 0 \Rightarrow x=0$$

تمرین

اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2+2x+1$ باشد، حاصل $(f\circ g)(1-\sqrt{2})-(g\circ f)(1-\sqrt{2})$، کدام است؟

۱) $4(1-\sqrt{2})$ ۲) $4(\sqrt{2}-1)$ ۳) 4 ۴) $4\sqrt{2}$

حل:

$$f(x)=|x|,\ g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$\begin{cases} f(g(x))=|g(x)|=\left|\underbrace{(x+1)^2}_{\text{همـواره نـامنفی}}\right|=(x+1)^2 \Rightarrow (fog)(1-\sqrt{2})=(\underbrace{1-\sqrt{2}+1}_{2-\sqrt{2}})^2=4-4\sqrt{2}+2=6-4\sqrt{2} \\ g(f(x))=(f(x)+1)^2=(|x|+1)^2 \Rightarrow (gof)(1-\sqrt{2})=\left(\left|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\text{منفـی}}\right|+1\right)^2=(\sqrt{2}-\cancel{1}+\cancel{1})^2=(\sqrt{2})^2=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog)(1-\sqrt{2})-(gof)(1-\sqrt{2})=(6-4\sqrt{2})-2=4-4\sqrt{2}=4(1-\sqrt{2})$$

تمرین

اگر $f(x)=x^{2}+3x$, $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$، مجموعه طول نقاط از منحنی تابع gof که در بالای محور xها قرار گیرد برابر کدام بازه است؟

۱) $(-4,1)$ ۲) $(-3,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(4,-1)$

حل:

ابتدا ضابطه‌ی gof را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=x^{2}+3x \\ g(x)=-\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \Rightarrow (gof)(x)=g(f(x))=-\frac{1}{2}f(x)+2$$

$$\Rightarrow (gof)(x)=-\frac{1}{2}(x^{2}+3x)+2$$

$$\Rightarrow (gof)(x)=-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{3}{2}x+2$$

برای به دست آوردن مجموعه‌ی نقاطی که نمودار تابع gof بالای محور xها قرار می‌گیرد، باید نامعادله‌ی $(gof)(x)>0$ را حل کنیم:

$$(gof)(x)>0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^{2}-\frac{3}{2}x+2>0 \xrightarrow{\times(-2)} x^{2}+3x-4<0 \quad \Rightarrow (x-1)(x+4)<0 \Rightarrow -1<x<4 \Rightarrow x\in(-4,1)$$

تمرین

اگر $f(x)=(2x-3)^{2}$ و $g(x)=x+2$ نمودارهای دو تابع f و fog، با کدام طول متقاطع‌اند؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

حل:

$$\begin{cases} f(x)=(2x-3)^{2} \\ g(x)=x+2 \end{cases} \Rightarrow f(g(x))=(2g(x)-3)^{2}=(2(x+2)-3)^{2}=4x^{2}+4x+1$$

$$\begin{cases} y_1=f(x)=(2x-3)^{2}=4x^{2}-12x+9 \\ y_2=f(g(x))=4x^{2}+4x+1 \end{cases} \xrightarrow[y_1=y_2]{\text{قطع می‌دهیم}} \cancel{4x^{2}}-12x+9=\cancel{4x^{2}}+4x+1 \Rightarrow 16x=8 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

تمرین

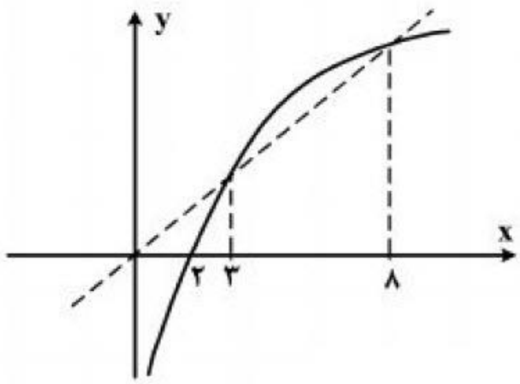
شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیهٔ اوّل و سوّم است. دامنه تابع بـا ضـابطهٔ $\sqrt{x - f^{-1}(x)}$، کدام است؟

۱) $(۰ , ۲]$

۲) $[۲ , ۳]$

۳) $[۲ , ۸]$

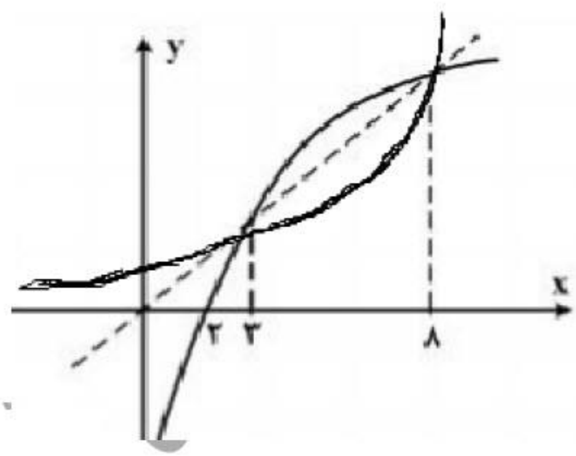
۴) $[۳ , ۸]$



حل:

$f^{-1}(x)$ قرینه‌ی $f(x)$ نسبت به خط $y = x$ است. $x - f^{-1}(x) \geq ۰ \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$

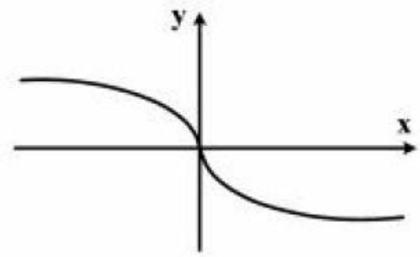
با توجه به نمودار در بازه‌ی $[۳,۸]$، $x \geq f^{-1}(x)$ است.



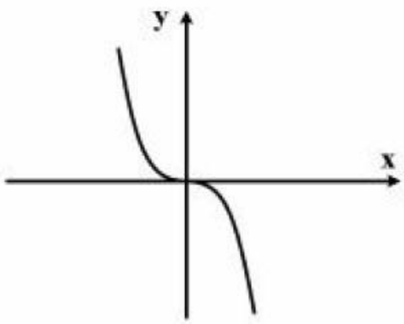
تمرین

اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟

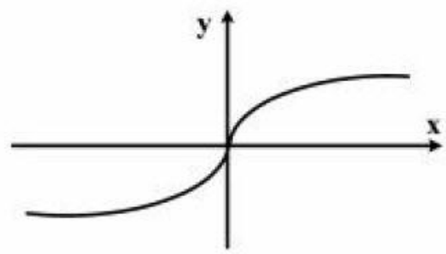
۱)



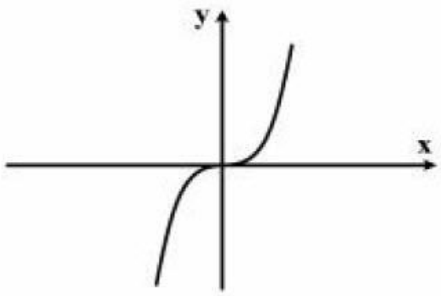
۲)



۳)



۴)



حل: دیگه آسونه . سراسری تجربی ۹۵ ..خودتون جواب رو پیدا کنید.

. .. .

. .. .

.. . . ..

. . . .

. .

فصل دوم

مثلثات

جهت دریافت ادامه ی جزوه یا تدریس خصوصی با شماره ی اول جزوه تماس بگیرید.