۱۰۱) گزینه ۴

$x^4-7x^2-5=0 \xrightarrow{x^2=t} t^2-7t-5=0 \xrightarrow{\Delta} t=\frac{7\pm\sqrt{69}}{2} \to x^2=\frac{7\pm\sqrt{69}}{2} \to$

غ ق ق

$\to x^2=\frac{7+\sqrt{69}}{2} \to x=\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \begin{cases}\alpha=+\sqrt{\ }\\ \beta=-\sqrt{\ }\end{cases} \to \underline{S=\alpha+\beta=0}$

مجموع ریشه ها، چون ریشه ها قرینه اند، صفر است.

$2p^2-\underbrace{3Sp+2S}_{\text{صفر}} = 2p^2 = 2\alpha^2\beta^2 = 2\,\frac{7+\sqrt{69}}{2}\times\frac{7+\sqrt{69}}{2} = \frac{118+14\sqrt{69}}{2} = \underline{59+7\sqrt{69}}$

۱۰۲) گزینه ۳

$\begin{vmatrix}\log 5 & \log 2\\ \log 2 & \log 5\end{vmatrix} = (\log 5)^2-(\log 2)^2 = (\log 5-\log 2)(\log 5+\log 2)$

$=\log\frac{5}{2}\times\cancel{\log 10}^{\,1} = \log_{10}\frac{5}{2}$

$\log_{10}\frac{5}{2}\times\log_{\frac{5}{2}}(3n-2) = \log_{10}(3n-2)=1 \to 3n-2=10 \to n=4$

۱۰۳) گزینه ۴

$\log_{21}3=a \quad , \quad \log_{21}49=b$

$a^2+(\log_{21}3\times 49)(\log_{21}27\times 49) = a^2+(\overset{a}{\cancel{\log_{21}3}}+\overset{b}{\cancel{\log_{21}49}})(\overset{3a}{\cancel{3\log_{21}3}}+\overset{b}{\cancel{\log_{21}49}})$

$=a^2+3a^2+4ab+b^2=(2a+b)^2=(2\log_{21}3+\log_{21}49)^2=(\log_{21}9\times 49)^2$

$=(\log_{21}21^2)^2=2^2=\underline{4}$

۱۰۴) گزینه ۲

$x>\frac{3}{2}\to 2x-3>0$ مخرج $\oplus$ است

$x-3\sqrt{x}+2=0\to(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)=0 \begin{cases}x=4\\ x=1\end{cases} \to$

0	1		4	
+		− ✓		+

جواب $[2,4]$

ریشه عبارت

$\sqrt{x}-2$

ریشه عبارت

$(m^2-1)x^2-4mx+4 \xrightarrow{x=2} 4m^2-4-8m+4=0 \to \begin{cases}m=0\to \underline{-x^2+4}\\ m=2\to \underline{3x^2-8x+4}\end{cases}$

عبارت

$-x^2+4=0\to x=\pm 2$

−2		+2	
−	+		− ✓

$m=0$

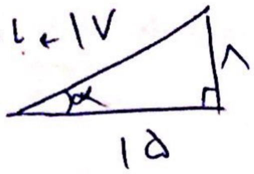
قابل قبول

Scanned with CamScanner

۱۰۵ گزینه ۴

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\times\frac{1}{4}}{1-(\frac{1}{4})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{8}{15}$$

با فیثاغورث ← ۱۷



$$\sin\alpha = \frac{8}{17},\quad \cos\alpha = \frac{15}{17} \rightarrow \frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}} = \frac{\frac{2\times 8}{15\times 17}}{\frac{-7}{17}} = \frac{-16}{105}$$

۱۰۶ گزینه ۱

$$f(\alpha) = \frac{(4\sin\alpha\cos2\alpha + 2\sin\alpha)\times\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\times 2\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{2\sin2\alpha\cos2\alpha + \sin2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin4\alpha+\sin2\alpha}{\cos\alpha} = \cancel{\frac{2\sin3\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$= 2\sin3\alpha = 2\sin300 = -2\times\sin60 = -\sqrt{3}$$

$$\alpha = \frac{41\pi}{9} = 820^\circ \xrightarrow{-720} 100^\circ$$

۱۰۷ گزینه ۴

$$(1+\cos2\alpha)(1+\cos4\alpha)(1+\cos8\alpha) = \frac{1}{8}$$

$$\left((2\cos^2\alpha)\times(2\cos^2 2\alpha)\times(2\cos^2 4\alpha) = \frac{1}{8}\right)\times\sin^2\alpha$$

$$\underbrace{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\times 2\cos^2 2\alpha\times 2\cos^2 4\alpha = \frac{1}{8}\sin^2\alpha$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha\times 2\cos^2 2\alpha} = \frac{1}{8}\sin^2\alpha$$

$$\frac{1}{4}\sin^2 4\alpha\times 2\cos^2 4\alpha = \frac{1}{8}\sin^2\alpha$$

$$\cancel{\frac{1}{8}}\sin^2 8\alpha = \cancel{\frac{1}{8}}\sin^2\alpha \begin{cases} \sin8\alpha = \sin\alpha \rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi+\alpha \\ 8\alpha = 2k\pi+(\pi-\alpha)\end{cases} \\ \sin8\alpha = -\sin\alpha \rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 2k\pi-\alpha \\ 8\alpha = 2k\pi+(\pi+\alpha)\end{cases}\end{cases}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7} \xrightarrow{k=0,1,\ldots} 0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{9} \xrightarrow{k=0,\ldots} \frac{\pi}{9}, \ldots$$

$$\rightarrow 9\alpha = 2k\pi \rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9} \rightarrow 0, \frac{2\pi}{9}, \ldots \frac{8\pi}{9}$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{7}$$

$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{7} \\ x = \frac{k\pi}{9}\end{cases}$$ جواب کلی

البته π جواب نیست.

Scanned with CamScanner

۱۰۸ گزینه ۳

$p(x) = ax^2 + bx + c$

$p'(x) = 2ax + b \rightarrow p(x) = \underbrace{(2ax+b)}_{\text{مقسوم‌علیه}}\underbrace{(\frac{1}{2}x+1)}_{\text{خارج‌قسمت}}\underbrace{-2}_{\text{باقیمانده}}$

$ax^2 + bx + c = ax^2 + \underbrace{(2a + \frac{b}{2})}_{b}x + \underbrace{b-2}_{c}$

$\rightarrow c = b - 2 \longrightarrow c = 4a - 2$

$2a + \frac{b}{2} = b \rightarrow b = 4a$

$\underbrace{a+b+c}_{\text{مطلوب}} = a + 4a + 4a - 2 = 9a - 2 \xrightarrow{a=1} 9 - 2 = 7$

۱۰۹ گزینه ۱

$a_{100} = \frac{k}{m} \xrightarrow{n=99} a_{100} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \Rightarrow \frac{k}{m} - \frac{1}{1} = \frac{1}{a_{99}} = \frac{k-m}{m}$

$\rightarrow \boxed{a_{99} = \frac{m}{k-m}}$

$n=98 \rightarrow a_{99} = \frac{1}{a_{98}} + 1 \rightarrow \frac{m}{k-m} - 1 = \frac{1}{a_{98}} = \frac{-k+2m}{k-m} \rightarrow a_{98} = \frac{-m+k}{-k+2m} = \frac{k-m}{2m-k}$

۱۱۰ گزینه ۱

$a_1 = 4,\ a_4 = 2,\ a_7 = 0,\ a_{10} = -2 = 4$

$a_2 = 1+a,\ a_5 = 1+a,\ a_8 = 2+a$ — جمع جملات اول

$,\ a_3 = 2,\ a_6 = 4,\ a_9 = 8$

اعداد صحیح n از ۰ تا ۹

$25 + 3a = 19 \rightarrow a = -2$

$a_2 + a_5 + \dots + a_{29} =$

$\underbrace{(1+a)}_{-1} + \underbrace{(1+a)}_{-1} + (a+2) + \dots + \underbrace{(a+2)}_{\text{صفر}} \xrightarrow{a=-2} -2$

Scanned with CamScanner

۱۱۱ گزینه ۴

$0 \leq \cos^2(x) \leq 1 \rightarrow 0 \leq 9\cos^2 x \leq 9 \rightarrow -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8 \xrightarrow{\sqrt[3]{}}$

$-1 \leq \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1} \leq 2$

$-2 \leq \sqrt[3]{1 - 9\cos^2 x} \leq 1$

$\rightarrow f(x)$ حداقل $2^{-1} - 2^{1} = -\frac{3}{2}$ ، حداکثر $2^{2} - 2^{-2} = \frac{15}{4}$ $\rightarrow \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right]$

$b - a = \frac{21}{4}$

۱۱۲ گزینه ۱ می‌توان از رد گزینه استفاده کرد.

$x = 4 \rightarrow \frac{1}{4 + \sqrt{4} - 4} = \frac{1}{4} \rightarrow$ نه مخرج صفر شد و نه عبارت جلوی گذاشتیم

گزینه ۳ و ۴ رد می‌شوند

$x = -4 \rightarrow \frac{1}{4 + \sqrt{4} - 4} = \frac{1}{4} \rightarrow$ گزینه ۲ رد می‌شود

۱۱۳ گزینه ۳

$y = \sqrt{4 - (x - (k-2))} + k$

نمودار وارون خودش را در دو نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم $y = x$ قطع می‌کند یعنی از نقطه $(1,1)$ می‌گذرد

$1 = \sqrt{4 - 3 + k} + k \rightarrow \sqrt{1 + k} = 1 - k \rightarrow 1 + k = k^2 - 2k + 1 \rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 3 \end{cases}$

$k = 0 \rightarrow y = \sqrt{4 - (x+2)} \xrightarrow[\text{۳ واحد به پایین}]{\text{یک واحد را اضافه کنیم}} y = \sqrt{2 - x} + 1 = 0$

محل برخورد با محور x ها

$\sqrt{2 - x} = 1$

$\boxed{x = 1}$

$k = 3 \rightarrow y = \sqrt{5 - x} + 3 \xrightarrow{-1} y = \sqrt{5 - x} + 2 = 0$ ✗ جواب ندارد

۱۱۴ گزینه ۳

$g \circ f = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

$x = -1 \rightarrow$ پیوسته است

$(g \circ f)'(-1)^- = 0$

$(g \circ f)'(-1)^+ = -2x = +2$

مشتق‌پذیر نیست

$x = 1 \rightarrow$ پیوسته است

$(g \circ f)'(1^-) = -2x = -2$

$(g \circ f)'(1^+) = 0$

$\rightarrow$ مشتق‌پذیر نیست

۱۱۴ ادامه

$$f\circ g = \begin{cases} -1 & x>\sqrt{2} \\ 1-x^2 & -\sqrt{2}\le x\le \sqrt{2} \\ -1 & x<-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$1-x^2<-1 \to -x^2<-2 \to x^2>2 \begin{cases} x>\sqrt{2} \\ x<-\sqrt{2} \end{cases}$$

$$-1\le 1-x^2\le 1 \to x^2\le 2 \to -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$$

تابع fog در $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ پیوسته است ولی مشتق‌پذیر نیست

$$(f\circ g)'(\sqrt{2}^+)=0 \quad , \quad (f\circ g)'(\sqrt{2}^-)=-2x=-2\sqrt{2}$$

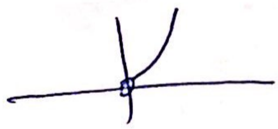
$$(f\circ g)'(-\sqrt{2}^-)=-2x=+2\sqrt{2} \quad , \quad (f\circ g)'(-\sqrt{2}^-)=0$$

درنتیجه در ۲ نقطه مشتق ناپذیر است.

۱۱۵ گزینه —

$$f(x)=3^{2\log_3 x}=3^{\log_3 x^2}=x^2$$

از طرفی $x>0$ پس شکل کلی به صورت



هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

از طرفی داریم:

$$x\to 0^+ \to \log_3 0^+ = -\infty \to 9^{-\infty}=0$$

۱۱۶ گزینه ٤

$$x\to 0^+ \to \tan^2 X\approx X^2$$

$$\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)\approx\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\times\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\right)^2\xrightarrow{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{1\times 2}\right)^2=\frac{x^4}{4}$$

$$\underset{x\to 0^+}{1-\cos X\approx\frac{X^2}{2}} \to 1-\cos\sqrt{2x}\approx\frac{(\sqrt{2x})^2}{2}=x$$

$$\lim\frac{\frac{\cancel{x^4}}{4}}{\cancel{x^n}}=a \longrightarrow \begin{cases} n=4 \\ a=\frac{1}{4}\end{cases} \to a+n=\frac{17}{4}$$

۱۱۷ گزینه ۱

$x \to -\frac{1}{2}^- \to x < -\frac{1}{2} \to x^2 > \frac{1}{4} \to \frac{1}{x^2} < 4$

$\frac{3}{x^2} < 12 \to \left[\frac{3}{x^2}\right] = 11$

$-\frac{2}{x^2} > -8 \to \left[\frac{-2}{x^2}\right] = -8$

$\to \lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{10x-5+11}{12x-(-8)} = \frac{10x+6}{12x+8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

۱۱۸ گزینه ۴

مجانب افقی $\underset{x\to\infty}{} \to y = \frac{ax^3}{ax^3} = 1 \to y=1 \to$ موازی محور xها $(a \neq 0)$

از طرفی چون یک مجانب دیگر داریم باید ریشه مخرج باشد و با ریشه صورت مشترک نباشد.

تابع کسری در نقاطی که ریشه مخرج باشند ناپیوسته است، چون ۲ نقطه ناپیوستگی داریم، باید مخرج ۲ ریشه داشته باشد، یک ریشه مشترک با صورت و دیگری مجانب قائم.

$ax^3-bx^2+2 = ax^3-bx+2 \to bx^2-bx=0 < \begin{matrix} x=0 \to \text{ریشه} \\ x=1 \to \text{ریشه مشترک} \end{matrix}$

$x=1 \to a-b+2=0 \to b=a+2$

$y = \frac{ax^3-(a+2)x^2+2}{ax^3-(a+2)x+2} = \frac{}{ax^3-ax-2x+2}$

$ax(x^2-1)-2(x-1)$

$(x-1)(\underbrace{ax^2+ax-2}_{\text{فقط یک ریشه}})$

$\Delta = 0$

$a^2+8a=0 < \begin{matrix} a=0 \ \times \\ a=-8 \to b=-6 \end{matrix}$

۱۱۹ گزینه ۴

$x\to-\infty$ ← توان بزرگترها را نگه می‌داریم.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[50]{(a^2x^2)(a^4x^4)\dots(a^{100}x^{100})}}{a^{49}x^k} = \frac{\sqrt[50]{a^{50\times51}x^{50\times51}}}{a^{49}x^k} = \frac{|a^{51}\times x^{51}|}{a^{49}\times x^k} = -\frac{a^{51}x^{51}}{a^{49}x^k} = -1$

$2+4+\dots+100 = 2\times\frac{50\times51}{2} = 50\times51$

$\begin{cases} k=51 \\ -a^2=-1 \to a=\pm1 \to a=1 \end{cases}$

اگر a منفی باشد از قدر مطلق علامت بصورت مثبت خارج می‌شود و $a^2=-1$ که قابل قبول نیست.

۱۲۰ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^3(2x)+ax^2+b}{x}=0 \to \lim\frac{1+b}{0}=0$$

$b+1=0$ → حاصل در صفر صفر/صفر عدد می‌شود

$\boxed{b=-1}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-2\times 3\cos^2 2x\times \sin 2x+2ax}{x}=-6\times 2\times \underbrace{\cos^2 2x}_{1}+2a=-12+2a=2$$

$\boxed{a=7}$

$a+b=6$

۱۲۱ گزینه ۴

$f(x)=\sin 2x+1 \to f'(x)=2\cos 2x \xrightarrow{x\to 0^+} 2$

$x\to 0^+$

$f(0)=1 \quad \to y-y_0=m(x-x_0)$

$y-1=2(x-0) \to \boxed{y=2x+1}$

$x\to 0^- \to f(x)=-\sin 2x+1 \to f'(x)=-2\cos 2x \xrightarrow{x\to 0^-} f'(0^-)=-2$

$y-y_0=m(x-x_0)=y-1=-2(x)\to y=-2x+1$

$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x \end{cases} \to 2x+1=-x \to x=-\frac{1}{3} \to y=+\frac{1}{3}$

$\to |AB|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$

$\begin{cases} y=-2x+1 \\ y=-x \end{cases} \to -2x+1=-x \to x=1 \to y=-1$

۱۲۲ گزینه ۴

$$f'(x)=\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}-\frac{0-2\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

چون x باید مثبت باشد (به خاطر $\sqrt{x}$) مشتق ریشه ندارد و با توجه گزینه ها و ریشه ها مخرج عمل می‌کنیم.

نیازی به جدول تعیین علامت نداریم $\quad 0<x<1 \to f'(x)>0 \to$ (ابتدا) صعودی

$1<x<\infty \to f'(x)>0 \to$ صعودی

تفاوت گزینه اول و چهارم در این است که $x=1$ ریشه مخرج است و تابع از علامت $\cup$ (اجتماع) استفاده نمی‌کنیم

بلکه تابع در هر بازه جداگانه صعودی است.

۱۲۳ گزینه ۴

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-(3x^2)(x^4)}{(x^3-8)^2}=\frac{x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}=\frac{x^3(x^3-32)}{(x^3-8)^2}$$

مخرج همواره مثبت

$\boxed{x=2}$ ریشه مخرج

$x^3=0 \rightarrow x=0$

$x^3-32=0 \rightarrow x^3=32 \rightarrow \boxed{x=2\sqrt[3]{4}}$

مجانب قائم (ریشه مخرج)

x		0		2		$2\sqrt[3]{4}$	
y'	+	0	−		−	0	+
y	↗		↘		↘		↗

عبارت صورت درجه ۶ است

← نقطه درجه ۴

$(0,2)$ نزولی → طول بازه $=2-0=2$

$(2,2\sqrt[3]{4})$ نزولی → // // $=2\sqrt[3]{4}-2=2(\sqrt[3]{4}-1)$ → مینیمم طول

۱۲۴ گزینه ۳

$$f'(x)=6x^2-6x-12=0 \begin{cases} x=-1 \rightarrow y=8 \\ x=2 \rightarrow y=-19 \end{cases}$$

$$m_{AB}=\frac{-19-8}{2-(-1)}=\frac{-27}{3}=-9$$

شیب خط مماس = مشتق ⇐ $6x^2-6x-12=-9 \rightarrow 6x^2-6x-3=0 \quad \Delta>0$

۲ ریشه دارد، پس ۲ نقطه وجود دارد.