حل تشریحی حسابان - کنکور ریاضی ۱۴۰۰ — حل و نکات: سمیرا عزت روش

۱۰۱) تغییر متغیر $t=x^2 \Rightarrow t^2-7t-5=0 \Rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{69}}{2} \to t=\frac{7+\sqrt{69}}{2}$ ق ق

$\to x^2=\frac{7+\sqrt{69}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{69}}{2}} \Rightarrow S=0 \ , \ P=-\frac{7+\sqrt{69}}{2}$

$2P^2-\cancel{4SP}+\cancel{2S} = 2\left(-\frac{7+\sqrt{69}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(\underbrace{49+69}_{118}+14\sqrt{69}) = 59+7\sqrt{69}$ گزینه ۴

---

۱۰۲) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \Rightarrow \Big[\underbrace{(\log 5)^2-(\log 2)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}}\Big]\log_{\frac{5}{2}}(3x-2)=1$

$\Rightarrow (\log 5-\log 2)(\log 5+\log 2)\log_{\frac{5}{2}}(3x-2)=1 \Rightarrow \log\frac{5}{2}\times\underbrace{\log 10}_{1}\times\log_{\frac{5}{2}}(3x-2)=1$

$\Rightarrow \log_{\boxed{10}}\frac{5}{2}\times\log_{\frac{5}{2}}\boxed{(3x-2)}=1 \Rightarrow 3x-2=10 \Rightarrow x=4$ گزینه ۳

---

۱۰۳) $(\log_{21}3)^2+\log_{21}(7\times21)\,\log_{21}(3\times(21)^2) = (\underbrace{\log_{21}3}_{a})^2+(\underbrace{\log_{21}7}_{1-a}+1)(\log_{21}3+2)$

$= a^2+(1-a+1)(a+2)$ $\quad\to \underbrace{\log_{21}3}_{a}+\log_{21}7=1 \to 1-a$

$= a^2+(2-a)(2+a) = \cancel{a^2}+4-\cancel{a^2}=4$ گزینه ۴

---

۱۰۴) $x>\frac{3}{2} \Rightarrow 2x-3>0 \to$ مخرج $>0 \to$ فقط صورت را در نظر می‌گیریم

$[2,4] \Rightarrow x=2,4$ باشد $\Rightarrow x=4 \Rightarrow x-3\sqrt{x}+2=0 \Rightarrow$ تناقض سوال (انتها باید باز باشند)

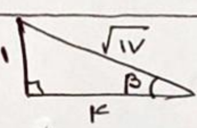
$x=2 \Rightarrow x-3\sqrt{2}+2=4-3\sqrt{2}=4-3(\overbrace{1.4}^{4.2})\neq 0 \Rightarrow 4(m^2-1)-8m+4=0$

$\to 4m^2-8m<0 \to m=0,2$ گزینه ۱ و ۳ رد می‌شود

احتمال اول: $m=0 \Rightarrow (-x^2+4)(x-3\sqrt{x}+2) \xrightarrow{[2,4]} x=3 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (-5)(5-\underbrace{\overbrace{3(1.7)}^{5.1}}_{<0})<0$ ✓

گزینه ۲

---

۱۰۵) $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4} \xrightarrow{\beta=\alpha/2} \tan\beta=\frac{1}{4} \Rightarrow$  $\Rightarrow \begin{cases} \sin\beta = 1/\sqrt{17} \\ \cos\beta = 4/\sqrt{17} \end{cases}$

$\frac{\tan 2\beta-\sin 2\beta}{\sin 2\beta-\cos 2\beta} = \frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{17}}{\frac{8}{17}-\frac{15}{17}} = \frac{\frac{8\times17-15\times8}{15\times\cancel{17}}}{\frac{-7}{\cancel{17}}}$

$= \frac{\frac{8\times2}{15}}{\frac{-7}{1}} = \frac{-16}{15\times7} = \frac{-16}{105}$

$\begin{cases} \sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{8}{17} \\ \cos 2\beta = 1-2\sin^2\beta = 1-\frac{2}{17}=\frac{15}{17} \\ \tan 2\beta = \frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{8}{15} \end{cases}$

(106

$$f(\alpha)=4\sin\alpha\cos2\alpha+2\sin\alpha=2\sin\alpha(2\underbrace{\cos2\alpha}_{1-2\sin^2\alpha}+1)$$

$$=2\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)$$

$$\frac{41\pi}{9}=\frac{36\pi+\pi}{9}=4\pi+\frac{5\pi}{9}^{\to 180}\Rightarrow \sin(\pi+\frac{5\pi}{9})=\sin\frac{5\pi}{9}=\sin100^\circ$$

100° نزدیک به زاویه 90° است و می‌توان حدوداً آن را ۱ فرض کرد.

$$f(\frac{41\pi}{9})=2\underbrace{\sin100}_{1}(3-4\underbrace{\sin^2 100}_{1})=2(-1)=-2 \to -2$$

جواب عددی نزدیک به ۲- مقداری از آن است پس گزینه ۱ صحیح است.

$(\sqrt{3}\simeq 1.7)$

(107

$$(2\cos^2\alpha)(2\cos^2 2\alpha)(2\cos^2 4\alpha)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow 8\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha\cos^2 4\alpha=\frac{1}{8}\Rightarrow \cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=\pm\frac{1}{8}\xrightarrow{\times\sin\alpha}\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{1}{2}\sin2\alpha}\cos2\alpha\cos4\alpha=\pm\frac{1}{8}\sin\alpha$$

$$\frac{1}{4}\sin4\alpha \qquad \frac{1}{8}\sin8\alpha$$

$$\Rightarrow \sin8\alpha=\pm\sin\alpha$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\sin8\alpha=\sin\alpha\Rightarrow 8\alpha=2k\pi+\alpha\Rightarrow \alpha=\frac{2k\pi}{7}\xrightarrow[k=3]{max}\frac{6\pi}{7}\\ \sin8\alpha=-\sin\alpha\Rightarrow 8\alpha=2k\pi-\alpha\Rightarrow \alpha=2k\pi/9\xrightarrow[k=4]{max}\frac{8\pi}{9}\ \checkmark\end{cases}$$

گزینه ۴

(108

$$P(x)=ax^2+bx+c \to p'(x)=2ax+b$$

$$p(x)=(\frac{1}{2}x+1)(2ax+b)-\frac{b}{2a}=ax^2+(\frac{1}{2}b+2a)x+(b-\frac{b}{2a})$$

تساوی $p(x)$ $\Rightarrow \frac{1}{2}b+2a=b\Rightarrow 2a=\frac{b}{2}\Rightarrow b=4a$ ، $c=4a-\frac{4a}{2a}=4a-2$

مقادیر b و c به a وابسته است و از آنجا که ضرایب P طبیعی هستند کمترین مقدار مجموع ضرایب مدنظر است پس $a=1$.

$$a=1\Rightarrow b=4,\ c=2\ \to \text{Min}(a+b+c)=4+2+1=7$$

گزینه ۳

(109

$$a_{n+1}=\frac{1}{a_n}+1\xrightarrow{n=99}a_{100}=\frac{1}{a_{99}}+1\Rightarrow a_{99}=\frac{1}{a_{100}-1}=\frac{1}{\frac{k}{m}-1}$$

$$=\frac{m}{k-m}\longrightarrow a_{98}=\frac{1}{a_{99}-1}=\frac{1}{\frac{m}{k-m}-1}=\frac{1}{\frac{m-k+m}{k-m}}=\frac{k-m}{2m-k}$$

گزینه ۱

روش دوم: $k=1,\ m=2\Rightarrow a_{100}=\frac{1}{2}\Rightarrow a_{99}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

$$\Rightarrow a_{98}=\frac{1}{-3}=-1/3\ \longrightarrow$$ گزینه ۱

۱۱۰)

$n = 3k = 1, 3, 6, 9 \Rightarrow 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$ ($k=0$, $k=1$, $k=2$, $k=3$)

$n = 3k+1 = 1, 7, 10 \Rightarrow 4 + 2 + 0 = 6$ ($k=0$, $k=1$, $k=2$)

$n = 3k+2 = 2, 5, 8 \Rightarrow ①\begin{cases} k=0 \\ n=2 \end{cases} \Rightarrow 1+a \quad ②\begin{cases} k=1 \\ n=5 \end{cases} \Rightarrow 1+a \quad ③\begin{cases} k=2 \\ n=8 \end{cases} \Rightarrow 2+a$

$\Rightarrow 1+a+1+a+2+a = 3a+4$

$3a+4+6+15 = 3a+25 = 19 \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = -2$

$a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{29} \Rightarrow \left[\frac{n}{k+2}\right] - 2 \rightarrow (-1) + (-1) + (0) + 0 + \dots + 0 = -2$ ($k=0$, $k=1$, $k=2$)

در دنباله سوم جای‌گذاری می‌شود

گ ۱

---

۱۱۱)

$f(x) = 2^t - 2^{-t}$ ، $t = \sqrt[3]{9\cos^2 x - 1}$

$0 \le \cos^2 x \le 1 \Rightarrow 0 \le 9\cos^2 x \le 9$

$\Rightarrow -1 \le 9\cos^2 x - 1 \le 8 \Rightarrow -1 \le t \le 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le 2^t \le 4$

2^t صعودی است $\rightarrow$ 2^{-t} نزولی است $\rightarrow$ $2^t - 2^{-t}$ صعودی است $\rightarrow$

$f(-1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

$f(2) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \rightarrow \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right] \rightarrow b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$

گ ۴

---

۱۱۲)

$\frac{1}{6+\sqrt{|x|}-|x|} > 0 \Rightarrow 6 + \sqrt{|x|} - |x| > 0 \xRightarrow{\sqrt{|x|}=t} 6 + t - t^2 > 0 \rightarrow t^2 - t - 6 < 0$

$\rightarrow (t-3)(t+2) < 0 \Rightarrow -2 < t < 3 \Rightarrow -2 < \underbrace{\sqrt{|x|}}_{+} < 3 \Rightarrow \sqrt{|x|} < 3 \Rightarrow |x| < 9$

$\Rightarrow -9 < x < 9$

گ ۱

روش دوم: امتحان کردن گزینه‌ها:

$x = 4 \Rightarrow 6 + \sqrt{4} - 4 > 0$ ✓ $\Rightarrow$ گزینه ۳ و ۴ رد می‌شود

$x = -4 \Rightarrow$ 〃 ✓ $\Rightarrow$ گزینه ۲ رد می‌شود $\Rightarrow$ گ ۱

---

۱۱۳)

$y = \sqrt{4-x} \Rightarrow y = \sqrt{4-(x-(k-2))} + k = \sqrt{-x+k+2} + k$

وارون جورش را با عرض ۱ قطع می‌کند $\Rightarrow (1, 1) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 = \sqrt{-1+k+2} + k \Rightarrow 1 - k = \sqrt{k-1} \xrightarrow{t=\sqrt{-t}} k = 0$

$\Rightarrow y = \sqrt{-x+2} \xrightarrow{\text{۱ واحد پایین}} y = \sqrt{-x+2} - 1 \xrightarrow{\text{برخورد با محور } x} \sqrt{-x+2} - 1 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{-x+2} = 1 \Rightarrow -x+2 = 1 \Rightarrow x = 1$

گ ۳

(۱۱۴

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x & -1\leq x\leq 1\\ 1 & x>1\end{cases} \quad , \quad g(x)=1-x^2 \rightarrow 1-x^2<1$$

$$fog(x)=\begin{cases}-1 & 1-x^2<-1 \rightarrow x^2>2 \rightarrow x>\sqrt{2} \text{ یا } x<-\sqrt{2}\\ x & -1\leq 1-x^2\leq 1 \rightarrow 0<x^2<2 \Rightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\end{cases}$$

مشتق $\rightarrow \; = \begin{cases}-1\\ 0\end{cases}$ نقاط مرز $=\pm\sqrt{2} \Rightarrow$ ۲ نقطه مشتق ناپذیری

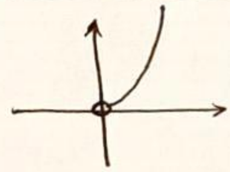
$$gof(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ 1-x^2 & -1\leq x\leq 1\\ 0 & x>1\end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق}} \begin{cases}0\\ -2x\\ 0\end{cases} \quad \underset{\text{نقاط مرز}}{x=\pm 1} \leftarrow \text{۲ نقطه مشتق ناپذیری}$$

گ ۳

$\rightarrow$ در کل ۴ نقطه مشتق ناپذیری وجود دارد.

(۱۱۵

$$f(x)=9^{\log_3 x}=3^{2\log_3 x}=3^{\log_3 x^2}=x^2 \quad ; \quad x>0$$



گ ۲

$\leftarrow$ ایراد سوال تو پیوستگی بودن در مبدأ است در حالی که $x=0$ در دامنه تابع اصلی نیست.

(۱۱۶

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)}{\left(1-\cos(\sqrt{2}x)\right)^n} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{هم ارزی}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)^2}{\left[\frac{(\sqrt{2}x)^2}{2}\right]^n}$$

چون تانژانت صفر می‌شود پس با فرمول هم ارزی

$\rightsquigarrow 1-\cos\alpha \cong \frac{\alpha^2}{2}$ یا $\cos\alpha \cong 1-\frac{\alpha^2}{2}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}{x^n} \overset{\text{مزدوج}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left[\frac{1-1+x^2}{(\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}\right]^2}{x^n}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^4}{(1-x^2)(1+\sqrt{1-x^2})^2}}{\frac{x^n}{1}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{4-n}}{(1-x^2)(1+\sqrt{1-x^2})^2}=a \Rightarrow \frac{x^{4-n}}{4}=a$$

گ ۴

$$\Rightarrow n=4 \; , \; a=\frac{1}{4} \Rightarrow n+a=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

(۱۱۷

$$x\rightarrow -\frac{1}{2}^- \Rightarrow x^2\rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^+ \Longrightarrow \frac{1}{x^2}\rightarrow 4^-$$

(یا با عددگذاری امتحان کن)

$$\Rightarrow \left[\frac{3}{x^2}\right]=[3\times 4^-]=[12^-]=11 \quad \text{و} \quad \left[\frac{-2}{x^2}\right]=\Big[-2\times \underbrace{4^-}_{3.9}\Big]=-8 \quad (-7.8)$$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{10x-5+11}{16x-8}=\frac{1}{8\underbrace{(2x-1)}_{(-\frac{1}{2})^- \Rightarrow 0^-}}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

گ ۱

۱۱۸) گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم: گزینه ۱: $a=0 \Rightarrow$ مخرج درجه ۱ $\Rightarrow$ تناقض با ناپیوستگی در دو نقطه ✗

گزینه ۲: $b=0 \Rightarrow$ مخرج درجه ۳ $= ax^3+2 \Rightarrow$ تک ریشه $\Rightarrow$ تناقض با دو نقطه ناپیوستگی ✗

گزینه ۳: $a=8,\ b=10 \Rightarrow \dfrac{8x^3-10x^2+2}{8x^3-10x+2} \rightarrow 8x^3-10x+2=0 \Rightarrow 4x^3-5x+1=0$

$\xrightarrow{\text{ریشه } x=1} (x-1)(\underbrace{4x^2+4x-1}_{\text{مختلف العلامت } c, a \Rightarrow \Delta>0})=0 \Rightarrow$ ۳ ریشه ✗ $\Rightarrow$ گ۴

---

۱۱۹) جملات پرتوان $\Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[50]{a^{2+4+\cdots+100}\,x^{2+4+\cdots+100}}}{a^{49}x^{k}} \underset{-\infty}{=} \dfrac{a^{51}x^{51}}{a^{49}x^{k}} = -1 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=51 \end{cases}$

$2+4+\cdots+100 = \dfrac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right] = \dfrac{50}{2}\left[4+(49)\times 2\right] = 25\times 102 \xrightarrow{\sqrt[50]{}} \dfrac{\cancel{25}\times\cancel{102}}{\cancel{50}} = 51$

$a=2,\ d=2$ دنباله حسابی با

$n=50$

یا $2(1+2+\cdots+50) = 2\times\left(\dfrac{(1+50)\times 50}{2}\right) = 51\times 50 \xrightarrow{\sqrt[50]{}} 51$ $(a_1+a_n)\times n$

گ۲

---

۱۲۰) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos^3(2x)+ax^2+b}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+b}{x} = 0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f'(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-6\sin 2x\,\boxed{\cos^2 2x}+2ax}{x} = 2 \xRightarrow{\text{هم‌ارزی}} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-6\times 2x+2ax}{x} = 2$ $\cos^2 2x \to 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(2a-12)x}{x} = 2 \Rightarrow 2a-12=2 \Rightarrow 2a=14 \Rightarrow \boxed{a=7} \Rightarrow a+b=6$ گ۲

---

۱۲۱) $(0,1)$ $f'(x) = \begin{cases} 2\cos 2x & \leftarrow 0^+ \Rightarrow m=2 \\ -2\cos 2x & \leftarrow 0^- \Rightarrow m=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} y-1=2x \\ y-1=-2x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y=2x+1 \xrightarrow{y=-x} 2x+1=-x \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \xrightarrow{y=-x} \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ y=-2x+1 \longrightarrow -2x+1=-x \Rightarrow x=1 \rightarrow (1,-1) \end{cases}$

فاصله $AB = \sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{16}{9}+\dfrac{16}{9}} = \sqrt{2\times\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{2}$ گ۳

---

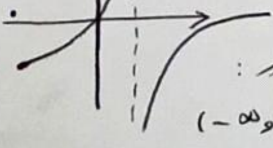
۱۲۲) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}} > 0$ $\boxed{x>0}$

$x=1$ حائز اهمیت است دقت کنید آن تابع صعودی در بازه‌ها جدا می‌شود

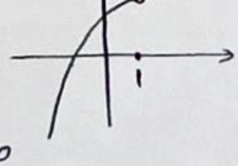
پس گزینه ۱ رد می‌شود.

$\Rightarrow f$ صعودی $\Rightarrow$ گ۲

نکته: (مقایسه گزینه‌های ۱ و ۲)



صعودی در: $(-\infty,1)$ و $(1,+\infty)$



صعودی در $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

۱۲۳)

$$f'(x)=\frac{4x^3(x^3-8)-3x^2(x^4)}{\underbrace{(x^3-8)^2}_{+}}<0 \Rightarrow 4x^6-32x^3-3x^6<0$$

$$\Rightarrow x^6-32x^3<0 \Rightarrow x^3(x^3-32)<0$$

① $x^3<0 \Rightarrow x^3-32<0 \Rightarrow$ ✗

② $x^3>0 \xRightarrow{\text{باید}} x^3-32<0$

$\boxed{x>0}$

$x^3<32 \Rightarrow x<\sqrt[3]{32}$ (4×8)

$\Rightarrow \boxed{x<2\sqrt[3]{4}}$

از طرفی $x=2$ ریشه‌ی مخرج تابع اصلی است و مجانب قائم است پس تابع در دو بازه‌ی $(0,2)$ و $(2,2\sqrt[3]{4})$ اکیداً نزولی است ←

$d_{\min}=2\sqrt[3]{4}-2$

$=2(\sqrt[3]{4}-1)$

گ ۴

---

۱۲۴)

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1 \longrightarrow f'(x)=6x^2-6x-12=6\underbrace{(x^2-x-2)}_{(x+1)(x-2)}=0$

$x=-1$, $x=2$

$\downarrow$ $\downarrow$

$(-1,8)$ $(2,-19)$ $\longrightarrow m_{AB}=\frac{-19-8}{2+1}=\frac{-27}{3}=-9$

$f'(x)=-9 \Rightarrow 6x^2-6x-12+9=0 \Rightarrow 6x^2-6x-3=0 \xrightarrow[\Rightarrow \Delta>0]{c\,,\,a \text{ مختلف العلامت}}$ دو ریشه دارد $\Rightarrow$

دو خط مماس موازی AB می‌توان یافت » گ ۳

[signature]

۱۴۰۰/۴/۱۵