سؤال ۱۲۵ - گزینهٔ «۱»

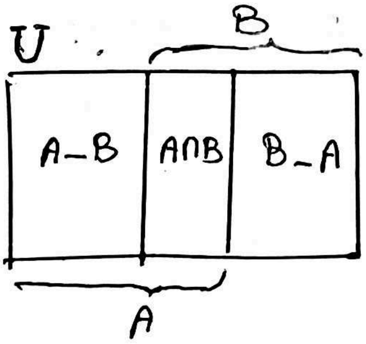
p	q	r	$q\vee r$	$p\Rightarrow(q\vee r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د

همان طور که در جدول مشاهده می‌شود، در ۷ ردیف ارزش گزارهٔ $p\Rightarrow(q\vee r)$ درست است که در ردیف‌های ۲، ۶ و ۸ یعنی ۳ ردیف آن، ارزش گزارهٔ r نادرست است.

سؤال ۱۲۶ - گزینهٔ «۱»

$$(A'-B)'\cap C = (A'\cap B')'\cap C = (A\cup B)\cap C = U\cap C = C$$

مطابق نمودار ون، متمم مجموعهٔ C در این سؤال معادل مجموعهٔ $A\cap B$ است،



بنابراین داریم:

$$C' = B \Rightarrow A\cap B = B \Rightarrow B\subseteq A$$

سؤال ۱۲۷ - گزینهٔ «۳»

$$20! = 1\times2\times3\times\dots\times20 = 1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)$$

$$\times11\times(2^2\times3)\times13\times(2\times7)\times(3\times5)\times2^4\times17\times(2\times3^2)\times19\times(2^2\times5)$$

$$=2^{18}\times3^8\times5^4\times7^2\times11^1\times13^1\times17^1\times19^1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 18+8+4+2+4\times1 = 36$$

سؤال ۱۲۸ - گزینهٔ «۳»

تعداد داده ها برابر ۲۲ است ، پس میانگین داده های یازدهم و دوازدهم برابر میانه است.

همچنین میانهٔ ۱۱ دادهٔ اول یعنی دادهٔ ششم برابر چارک اول و میانهٔ ۱۱ دادهٔ آخر یعنی دادهٔ هفدهم برابر چارک سوم است. بنابراین $Q_1 = ۱۳$ بوده و در نتیجه داریم:

$$Q_۳ - Q_۱ = ۱۷ \Rightarrow Q_۳ - ۱۳ = ۱۷ \Rightarrow Q_۳ = ۳۰$$

پس مقدار a لزوماً برابر ۳۰ است. میانگین داده ها برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{۳\times۱۱ + ۲\times۱۲ + ۶\times۱۳ + ۳\times۱۴ + ۲\times۲۸ + ۱\times۳۰ + ۵\times۳۱}{۲۲} = ۱۹$$

واریانس داده ها از رابطهٔ زیر محاسبه می شود:

$$\sigma = \frac{۳(-۸)^۲ + ۲(-۷)^۲ + ۶(-۶)^۲ + ۳(-۵)^۲ + ۲\times۹^۲ + ۱\times۱۱^۲ + ۵\times۱۲^۲}{۲۲} = ۷۲$$

سؤال ۱۲۹ - گزینهٔ «۳»

اولین داده به صورت ۱۰۷۰۱ است و مطابق تعریف ارائه شده داریم:

$$\underbrace{۱۰۷۰۱}_{\text{عضو ۱}}, \ldots, \underbrace{۱۰۷۱۲}_{\text{عضو ۱۲}}, \underbrace{۱۰۸۰۱}_{\text{عضو ۱۳}}, \ldots, \underbrace{۱۰۹۰۱}_{\text{عضو ۲۵}}, \ldots, \underbrace{۱۱۵۰۱}_{\text{عضو ۹۷}}, \ldots, \underbrace{۱۱۵۰۴}_{\text{عضو ۱۰۰}}$$

در واقع $۱۰۰ = ۸\times۱۲ + ۴$ است ، پس ۸ گروه سنی (۷ تا ۱۴ سال) قبل از رسیدن به عضو صدم مجموعه به پایان رسیده و از عضو نود و هفتم گروه سنی ۱۵ سال آغاز می گردد که صدمین عضو مجموعه نیز به این گروه تعلق دارد.

۱۳۰ - گزینهٔ «۴»

تعداد راه های انتخاب دو کارت به صورت متوالی برابر $۴۲۰ = ۲۱ \times ۲۰$ است ولی در سه حالت عدد یکسانی ایجاد می شود که عبارت اند از :

$\boxed{1}\,\boxed{12}$ و $\boxed{11}\,\boxed{2}$

$\boxed{1}\,\boxed{21}$ و $\boxed{12}\,\boxed{1}$

$\boxed{1}\,\boxed{11}$ و $\boxed{11}\,\boxed{1}$

بنابراین تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با : $n(S) = ۴۲۰ - ۳ = ۴۱۷$

به ازای کارت ۱ ، ۴ کارت با شماره های ۲ ، ۸ ، ۱۴ و ۲۰ ، به ازای کارت ۲ ، ۳ کارت با شماره های ۴ ، ۱۰ و ۱۶ و به ازای کارت ۳ ، ۳ کارت با شماره های ۶ ، ۱۲ و ۱۸ ، می توانند در کنار هم اعدادی مضرب ۶ ایجاد کنند . بنابراین تعداد حالت ها به ازای شماره های ۱، ۲ و ۳ برابر ۱۵ است . برای هر سه کارت بعدی نیز تعداد حالت های مشابهی خواهیم داشت که در مجموع برابر $۷ \times ۱۰ = ۷۰$ می شود ، ولی سه حالت ۶ و ۶ ، ۱۲ و ۱۲ و نیز ۱۸ و ۱۸ امکان پذیر نیست ، پس تعداد اعضای پیشامد تصادفی برابر است با : $n(A) = ۷۰ - ۳ = ۶۷$

در نتیجه داریم : $P(A) = \dfrac{۶۷}{۴۱۷}$

---

۱۳۱ - گزینهٔ «۲»

$$10000 \leqslant 18x < 100000 \xrightarrow[x\in \mathbb{Z}]{\div 9} 1112 \leqslant 2x \leqslant 11111$$

عدد $2x$ زوج است و باید مربع کامل باشد ، بنابراین داریم :

$$34^2 \leqslant 2x \leqslant 104^2$$

پس تعداد مقادیر x برابر است با : $n = \dfrac{104 - 34}{2} + 1 = 36$

۱۳۲ - گزینهٔ «۴»

نکته : اگر عدد A به صورت عامل های اول $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ تجزیه شود، تعداد مقسوم‌علیه های مثبت آن از رابطهٔ $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ به دست می آید.

بنابراین داریم :

$$x \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های } = (m+1)(n+1)$$

$$\frac{x}{40} = \frac{2^m \times 5^n}{2^3 \times 5} = 2^{m-3} \times 5^{n-1}$$

$$\frac{x}{40} \text{ تعداد مقسوم‌علیه‌های } = (m-2)(n)$$

$$(m+1)(n+1) - (m-2)n = 12 \Rightarrow mn + m + n + 1 - mn + 2n = 12$$

$$\Rightarrow m + 3n = 11$$

از طرفی داریم :

$$\begin{cases} m-3 \geq 0 \Rightarrow m \geq 3 \\ n-1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1 \end{cases}$$

برای کوچک بودن عدد x، باید توان عدد ۵ تا حدامکان کوچک باشد که کمترین مقدار آن برابر ۱ است، پس $n=1$ و $m=8$ بوده و درنتیجه داریم :

$$\min(x) = 2^8 \times 5 = 1280$$

تذکر : این سؤال مربوط به کاربردهای قضیهٔ بنیادی حساب است که در کتاب ریاضیات گسستهٔ نظام جدید وجود ندارد.

---

۱۳۳ - گزینهٔ «۳»

عدد $\overline{aba}$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، پس باید بر ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد.

دراین صورت a حتماً رقمی زوج و غیرصفر است.

$$\overline{aba} \text{ کوچک‌ترین مقدار } = 252 \qquad \overline{aba} \text{ بزرگ‌ترین مقدار } = 888$$

$$\text{میانگین دو عدد} = \frac{252+888}{2} = 570$$

۱۳۴ - گزینه‌ی «۲»

$$q=r+3 \Rightarrow a = 11(r+3)+r = 12r+33 \Rightarrow a-q = 12r+24 = 12(r+2)$$

$$0 \leq r < b \Rightarrow 0 \leq r < 11$$

بنابراین برای r یازده مقدار ۰ تا ۱۰ قابل قبول است. به ازای مقادیر زوج r، r+2 نیز زوج بوده و عدد $a-q$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است، یعنی اعضای فضای نمونه شامل مقادیر ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ هستند و در نتیجه احتمال مورد نظر برابر $\frac{6}{11}$ است.

---

۱۳۵ - گزینه‌ی «۳»

کوچک‌ترین عددی به صورت $n!$ که مضرب ۳۶ باشد، عدد $6!$ است، پس داریم:

$$10-m=6 \Rightarrow m=4$$

بنابراین باید باقی‌مانده‌ی تقسیم 4^{123} را بر ۱۵ به دست آوریم:

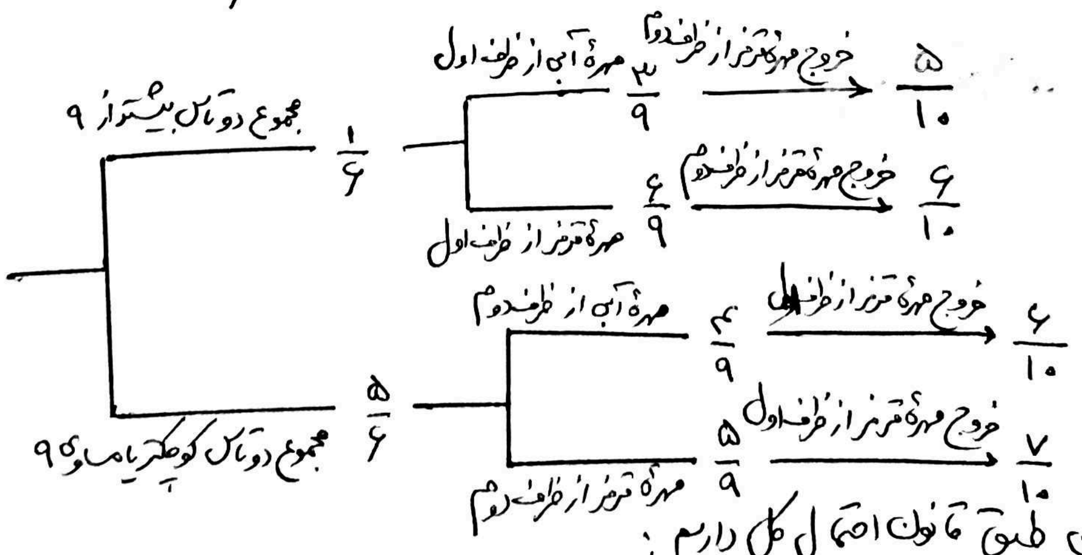
$$4^2 \overset{15}{\equiv} 1 \xrightarrow{\text{به توان } 61} 4^{122} \overset{15}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{123} \overset{15}{\equiv} 4$$

۱۳۶- گزینه‌ی «۳»

پیشامد آنکه مجموع دو تاس عددی بیشتر از ۹ باشد، به صورت مجموعه‌ی زیر است:

$$\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

یعنی احتمال این پیشامد برابر $\frac{1}{6}$ و در نتیجه متمم آن برابر $\frac{5}{6}$ است. طبق نمودار درختی داریم:



$= \frac{173}{270}$

بنابراین طبق قانون احتمال کل داریم:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{3}{9}\times\frac{5}{10}+\frac{6}{9}\times\frac{6}{10}\right)+\frac{5}{6}\left(\frac{4}{9}\times\frac{6}{10}+\frac{5}{9}\times\frac{7}{10}\right)=\frac{1}{6}\times\frac{51}{90}+\frac{5}{6}\times\frac{59}{90}=\frac{346}{540}$$

سوال ۱۳۷ - گزینه «۴»

برای این که معادله دارای جواب های صحیح و نامنفی باشد، x_4 باید یکی از مقسوم علیه های مثبت عدد ۱۰ باشد که در نتیجه داریم:

$x_4=1 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=10 \longrightarrow$ تعداد جواب $=\binom{12}{2}=66$

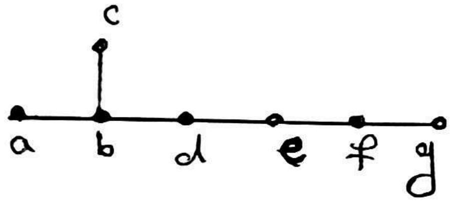
$x_4=2 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=5 \longrightarrow$ تعداد جواب $=\binom{7}{2}=21$

$x_4=5 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=2 \longrightarrow$ تعداد جواب $=\binom{4}{2}=6$

$x_4=10 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=1 \longrightarrow$ تعداد جواب $=\binom{3}{2}=3$

تعداد کل جواب ها $=66+21+6+3=96$

سوال ۱۳۸ - گزینه «۲»



مطابق شکل کوچکترین اندازه گراف ساده همبندی از مرتبه ۷ که در آن $\Delta=3$ باشد، برابر ۶ است.

سوال ۱۳۹ - گزینه «۴»

مربع لاتین را مطابق شکل کامل می کنیم:

۲	۴	۳	۵	۱
۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	۴

همان طور که مشاهده می شود $a=4$ و $b=1$ است.

سوال ۱۴۰ - گزینه «۲»

گزینه «۱»: مجموعه $\{b,h\}$ قادر به احاطه رأس g نیست.

گزینه «۲»: مجموعه $\{b,g,i\}$ قادر به احاطه تمام رئوس گراف است.

گزینه «۳»: مجموعه $\{a,c,h\}$ قادر به احاطه رئوس e و g نیست.

گزینه «۴»: چون تمام رئوس گراف با مجموعه سه عضوی $\{b,g,i\}$ احاطه می شوند، پس یک مجموعه چهار عضوی نمی تواند احاطه گر مینیمال باشد.

سؤال ۱۴۱- گزینه‌ی «۱»

زاویه‌ای که یک بردار با محور zها می‌سازد، در واقع همان زاویه‌ای است که با بردار یکه‌ی این محور یعنی بردار $\vec{k}=(0,0,1)$ ایجاد می‌کند، بنابراین داریم:

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{|\vec{a}|\,|\vec{k}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2+\alpha^2}\times 1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2+\alpha^2}$$

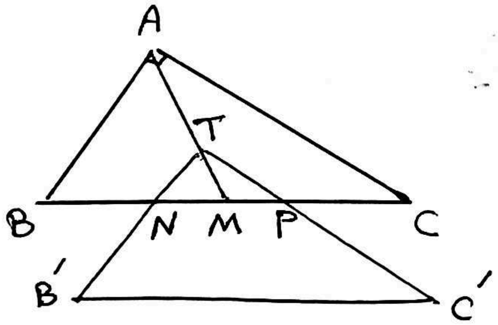
$$\Rightarrow 2+\alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = (-1, 0, 1)\\ \vec{b} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

اگر θ زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ و محور zها (بردار $\vec{k}$) باشد، آن‌گاه داریم:

$$\cos\theta = \frac{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{k}}{|\vec{a}\times\vec{b}|\,|\vec{k}|} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}\times 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

سؤال ۱۴۲- گزینه‌ی «۱»



مطابق شکل دو مثلث ABC و TNP متشابه‌اند. از طرفی نسبت میانه‌ها در دو مثلث متشابه برابر نسبت تشابه دو مثلث است، بنابراین داریم:

$$\frac{S_{TNP}}{S_{ABC}} = \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{TM}{AM}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{TM}{AM} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AT}{AM} = \frac{3}{4} \Rightarrow AT = \frac{3}{4}AM = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}BC = \frac{3}{8}\times 8 = 3$$

تذکر: AM میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و طول آن برابر نصف طول وتر است.

سؤال ۱۴۳ - گزینه «۱»

$$\text{سطر سوم ماتریس } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 11 & -3 \\ 2 & 8 & 2 \\ 9 & 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = 7 + 1 - 5 = 3$$

سؤال ۱۴۴ - گزینه «۴»

نکته: ماتریس A^T (ترانهاده‌ی ماتریس A)، ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون‌های ماتریس A حاصل می‌شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B A^T A = 52 I \Rightarrow B \times \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 52 I \Rightarrow B \ \frac{1}{52} \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = I$$

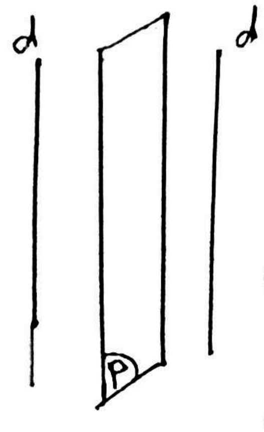
بنابراین ماتریس B، وارون ماتریس $\frac{1}{52}\begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ است و در نتیجه داریم:

$$B = 52 \times \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیمم درایه‌های ماتریس B، برابر ۲۸ است.

تذکر: وارون ماتریس kA به صورت $\frac{1}{k} A^{-1}$ است.

سؤال ۱۴۵ - گزینه «۳»



مجموعه‌ی نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، روی صفحه‌ای که موازی این دو خط و دقیقاً وسط آن دو خط واقع است قرار دارند، بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» نادرست است. همچنین مجموعه‌ی نقاطی از فضا که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه‌ی ثابت در فضا به یک اندازه باشد، یک شکل فضایی شبیه بیضی (بیضی گون) نه خود بیضی است.

سؤال ۱۴۶ - گزینهٔ «۲»

$$(x-1)^2-12y=6 \Rightarrow (x-1)^2=12y+6 \Rightarrow (x-1)^2=12\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

سهمی رو به بالا باز می‌شود و $F\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ رأس و $a=3$ فاصلهٔ کانونی آن است.

مختصات کانون این سهمی برابر است با:

$$F'\left(1,-\frac{1}{2}+3\right)=\left(1,\frac{5}{2}\right)$$

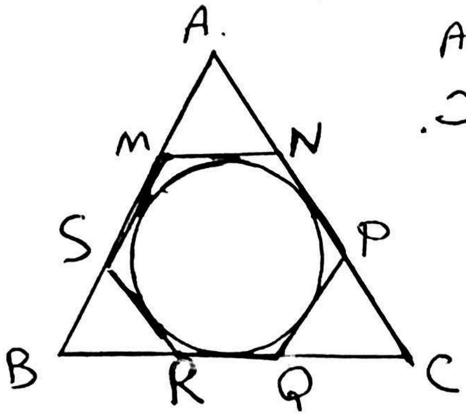
اگر نقاط F و F' کانون‌های یک بیضی باشند، آن‌گاه نقطهٔ O' (مرکز بیضی) دقیقاً وسط آن دو قرار دارد، بنابراین داریم:

$$O'=\frac{F+F'}{2}=(1,1)$$

فاصلهٔ این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OO'=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

سؤال ۱۴۷ - گزینهٔ «۲»



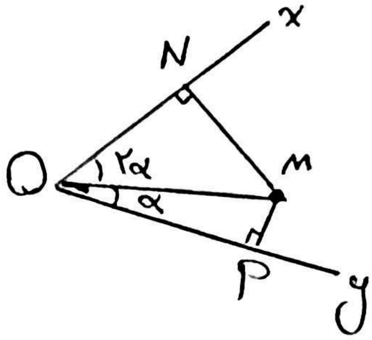
مطابق شکل شش‌ضلعی MNPQRS که درون مثلث ABC محاط شده است، بر دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث، محیط است. بنابراین کافی است شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را محاسبه کرده و سپس طول هر ضلع شش‌ضلعی منتظم محیطی این دایره را به دست آوریم.

$$P=\frac{13+14+15}{2}=21$$

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{21\times 8\times 7\times 6}=84$$

$$r=\frac{S}{P}=\frac{84}{21}=4$$

$$MN=2r\tan\frac{180^\circ}{6}=2\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$



سؤال ۱۴۸ - گزینهٔ «۴»

مطابق شکل اگر $M\hat{O}y=\alpha$ باشد، آنگاه $x\hat{O}M=2\alpha$ است

و داریم:

$$\left.\begin{aligned}\overset{\triangle}{OMN}:\ \sin 2\alpha &= \frac{MN}{OM}\\ \overset{\triangle}{OMP}:\ \sin\alpha &= \frac{MP}{OM}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{MP}{OM}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$$

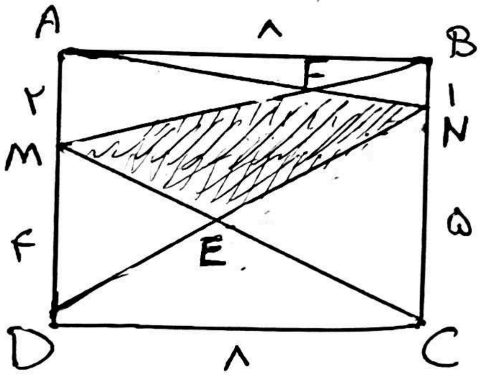
$$\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha \qquad (1)$$

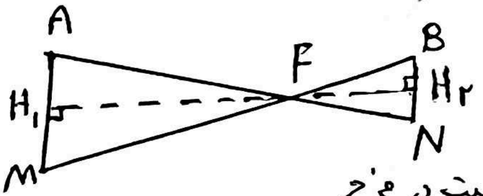
از طرفی در مثلث OMP داریم:

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OM} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2OP}{OM}$$

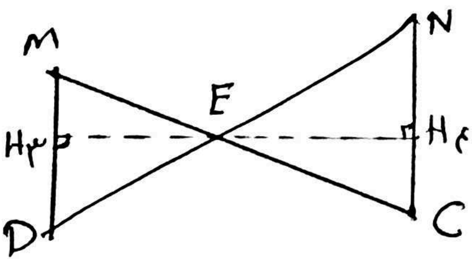
سؤال ۱۴۹ - گزینهٔ «۱»





$$\overset{\triangle}{AFM} \sim \overset{\triangle}{BFN} \Rightarrow \frac{FH_1}{FH_2} = \frac{AM}{BN} = \frac{2}{1}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{FH_1}{H_1H_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow FH_1 = \frac{2}{3}\times 8 = \frac{16}{3}$$

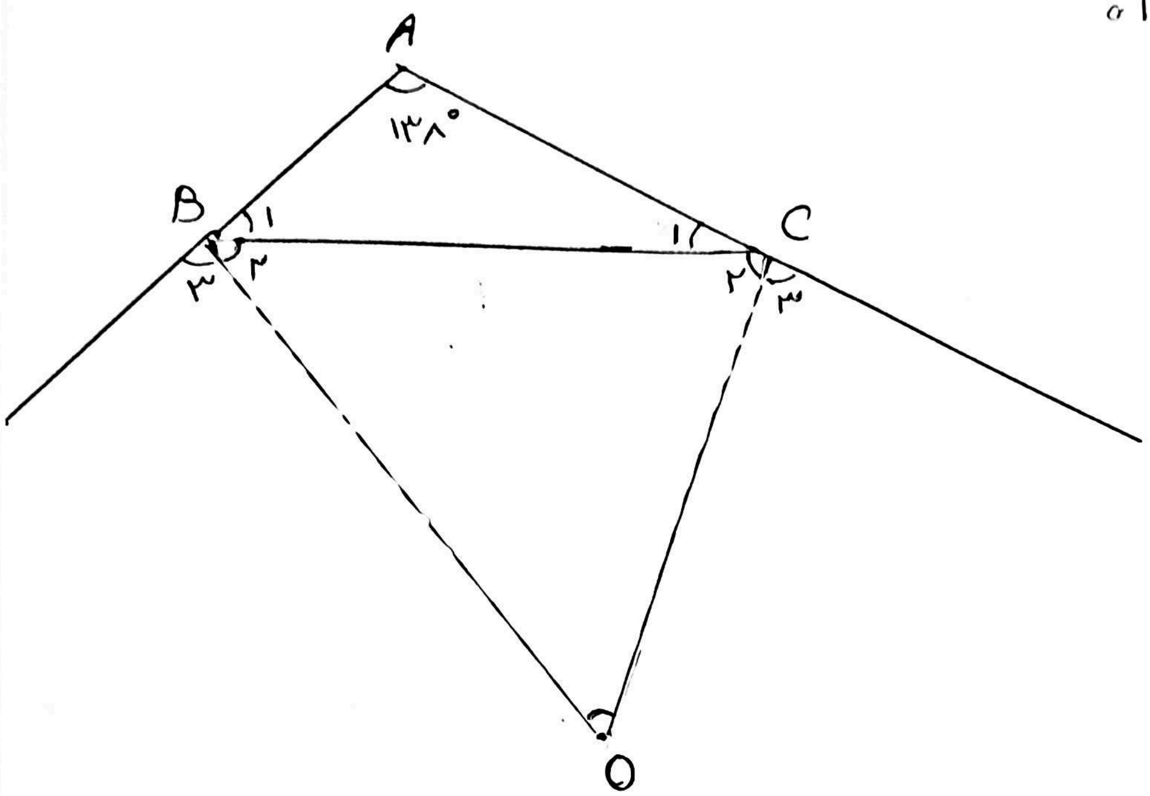


$$\overset{\triangle}{MED} \sim \overset{\triangle}{NEC} \Rightarrow \frac{EH_3}{EH_4} = \frac{MD}{NC} = \frac{4}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{EH_3}{H_3H_4} = \frac{4}{9} \Rightarrow EH_3 = \frac{4}{9}\times 8 = \frac{32}{9}$$

$$S_{MFNE} = S_{AND} - (S_{AFM} + S_{MED}) = \frac{1}{2}\times 8\times 6 - \left(\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times 2 + \frac{1}{2}\times\frac{32}{9}\times 4\right)$$
$$= 24 - \left(\frac{16}{3} + \frac{64}{9}\right) = \frac{104}{9}$$

سؤال ۱۵۰ - گزینهٔ ۱

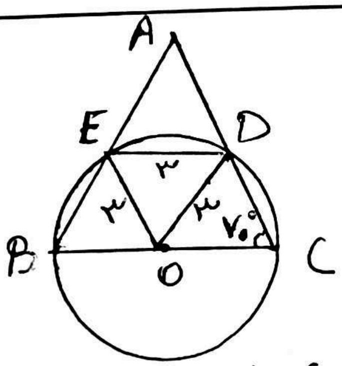


$$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180° - 138° = 42° \Rightarrow (\hat{B}_2+\hat{B}_3)+(\hat{C}_2+\hat{C}_3) = 360° - 42°$$

$$\Rightarrow 2\hat{B}_2 + 2\hat{C}_2 = 318° \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 159°$$

$$\Rightarrow \hat{O} = 180° - 159° = 21°$$

سؤال ۱۵۱ - گزینهٔ ۳



مطابق شکل شعاع های OD و OE را رسم می‌کنیم.

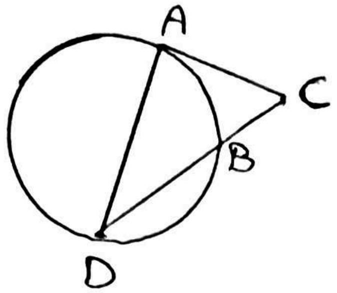
مثلث ODE متساوی الاضلاع است، پس $\hat{DOE} = 60°$

و درنتیجه $\widehat{DE} = 60°$ است.

(زاویهٔ محاطی) $\hat{C} = \dfrac{\widehat{BE}+\widehat{ED}}{2} \Rightarrow 70° = \dfrac{\widehat{BE}+60°}{2} \Rightarrow \widehat{BE} = 80°$

$$\widehat{EDC} = 180° - \widehat{BE} = 180° - 80° = 100°$$

سؤال ۱۵۲ - گزینهٔ «۳»



طبق روابط طولی در دایره داریم:

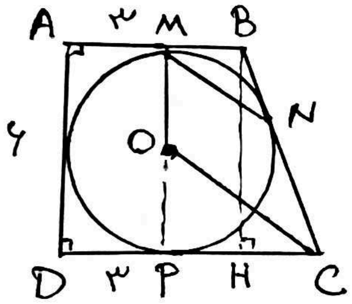
$$CA^{۲} = CB \times CD \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CA} = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{CB + BD}{CA} = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \frac{CB}{CA} + \frac{BD}{CA} = \sqrt{۳} \Rightarrow \frac{BD}{CA} = \sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\frac{\frac{BD}{CA}}{\frac{BC}{CA}} = \frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = ۲$$

سؤال ۱۵۳ - گزینهٔ «۱»



از نقطهٔ B، عمود BH را بر ضلع CD رسم می‌کنیم.

زاویهٔ C مکمل زاویهٔ B و برابر ۶۰° است، پس داریم:

$$\overset{\triangle}{BCH}: \sin ۶۰^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۶}{BC} \Rightarrow BC = ۴\sqrt{۳}$$

$$\overset{\triangle}{BCH}: \cos ۶۰^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{CH}{۴\sqrt{۳}} \Rightarrow CH = ۲\sqrt{۳}$$

چهارضلعی ABCD محیطی است، بنابراین داریم:

$$AB + CD = AD + BC \Rightarrow ۲AB + CH = AD + BC$$

$$\Rightarrow ۲AB + ۲\sqrt{۳} = ۶ + ۴\sqrt{۳} \Rightarrow ۲AB = ۶ + ۲\sqrt{۳} \Rightarrow AB = ۳ + \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow BM = BN = \sqrt{۳}$$

$$S_{OMNC} = S_{ABCD} - (S_{AMPD} + S_{OPC} + S_{BMN})$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۶(۶ + ۴\sqrt{۳}) - (۳ \times ۶ + \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳\sqrt{۳} + \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۳} \times \sqrt{۳} \times \underbrace{\sin ۱۲۰^\circ}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}})$$

$$= ۱۸ + ۱۲\sqrt{۳} - (۱۸ + \frac{۹\sqrt{۳}}{۲} + \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}) = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{۲۱\sqrt{۳}}{۴}$$

$$= \frac{۲۷\sqrt{۳}}{۴}$$

سؤال ۱۵۴- گزینهٔ «۴»

مرکز دایره محل تلاقی قطرهای دایره است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \text{مرکز دایره}: O(2,-1)$$

فاصلهٔ مرکز دایره از خط مماس بر دایره، برابر طول شعاع دایره است.

$$R = \frac{|4(2)+3(-1)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

اگر فاصلهٔ نقطهٔ M از مرکز دایره را با d نمایش دهیم، آن‌گاه نزدیک‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ M از نقاط واقع بر دایره برابر $|d-R|$ است، بنابراین داریم:

$$d = OM = \sqrt{(4-2)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

$$|d-R| = \sqrt{5}-2$$

سؤال ۱۵۵- گزینهٔ «۱»

اگر دو دایره تنها یک مماس مشترک داشته باشند، آن‌گاه حتماً مماس داخل هستند.

اگر شعاع‌های دو دایره را با R و R' و طول خط‌المرکزین دو دایره را با d نمایش دهیم، داریم:

$$|R-R'| = d \Rightarrow |(a^2-2)-(6a-1)| = 6$$

$$\Rightarrow |a^2-6a-1| = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-6a-1=6 \Rightarrow a^2-6a-7=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=7 \end{cases} \\ a^2-6a-1=-6 \Rightarrow a^2-6a+5=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=5 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{میانگین مقادیر } a = \frac{-1+7+1+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$