

۱۴۱- بردار $\vec{a} = (-1, a, 1)$ با محور z در فضا زاویه 45° درجه می سازد اگر $\vec{b} = (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ و

زاویه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ با محور z در فضا θ باشد مقدار $\cos\theta$ کدام است؟

- (1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

حل: در نظام قبلی خواندیم اگر زاویه بین بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ با جهت مثبت محور x ها و y ها و z ها را بترتیب

α, β, γ بنامیم داریم $\cos\gamma = \frac{a_3}{|a|}$ پس

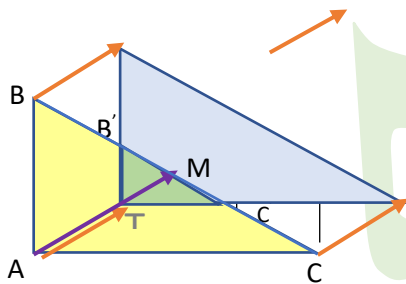
$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+1}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2+a^2}} \Rightarrow 2 = 2+a^2 \Rightarrow a=0$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{3}, +\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \cos\theta = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

۱۴۲- مثلث قائم الزاویه ABC به طول وتر ۸ واحد مفروض است. این مثلث را توسط بردار \vec{AT} که در جهت بردار

\vec{AM} (م) وسط وتر BC قرار دارد. انتقال می دهیم اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید، $\frac{1}{16}$ مساحت اولیه باشد

اندازه بردار \vec{AT} کدام است



- (1) 3 (2) 4 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

حل: در انتقال شیب خط ها حفظ می شود پس مثلث ABC با مثلث $TB'C'$ که (مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید) متشابه اند AM و TM میانه ی متناظر آنها پس

$$\frac{S_{ABC}}{S_{TB'C'}} = \left(\frac{AM}{TM}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{\frac{1}{16}S} = \left(\frac{4}{TM}\right)^2 \Rightarrow \frac{16}{1} = \frac{16}{TM^2} \Rightarrow TM = 1$$

$$|\vec{AT}| = |\vec{AM}| - |\vec{TM}| = 4 - 1 = 3$$

۱۴۳- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ مجموع درایه های سطر سوم ماتریس A کدام است؟

(1) 3 (2) 5 (3) 12 (4) 13

حل: مجموع درایه های سطر سوم ماتریس A پس

$$A \text{ سطر سوم} = [0 \quad -1 \quad 1] \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [3 \quad 7 \quad -2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [7 \quad 1 \quad -5]$$

$$a_{31} + a_{31} + a_{31} = 7 + 1 - 5 = 3$$

۱۴۴- فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ اگر $BA^T A = 52I$ باشد. ماکزیم مقدار درایه های ماتریس B، کدام است؟

(1) 14 (2) 18 (3) 24 (4) 28

در کتاب نظام قبلی خواندیم ترانهاد یک ماتریس:

بطور خلاصه: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ، ترانهاد A ماتریسی A^T نشان می دهند. سطر های ماتریس A^T ستون های ماتریس A ستون های ماتریس

A^T به ترتیب سطرهای A می باشند. به عبارت دیگر داریم: $a'_{ij} = a_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{مثال:}$$

$$BA^T A = B \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 52 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\times \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1}} B = 52 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\underbrace{42-16}_{26}} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \text{MAX}_{aij} = 28$$

۱۴۵- کدام عبارت درست است؟

- (۱) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در تعداد نامتناهی صفحه قرار می گیرند.
- (۲) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در صفحه عمود بر آن دو خط موازی قرار می گیرند
- (۳) مجموعه نقاطی از فضا که از یک نقطه و یک خط از آن نمی گذرد، به یک فاصله باشند، روی منحنی سهمی صفحه قرار می گیرند
- (۴) مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فاصله های هر نقطه ی آن از دو نقطه ثابت در فضا به یک اندازه باشند، روی محیط بیضی قرار می گیرند

۱۴۶- سهمی $(x-1)^2 - 12y = 6$ با راس F و F' مفروض است. یک بیضی با کانون های F و F' و خروج از مرکز $\frac{1}{6}$ می سازیم. فاصله مرکز بیضی از مبدا مختصات، کدام است؟

- (1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{12}$ (4) 2

حل : $(x-1)^2 = 12y + 6 \rightarrow (x-1)^2 = 12\left(y + \frac{1}{2}\right)$ سهمی F راس $\left| -\frac{1}{2} \right|$ و F' کانون $\left| -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2} \right|$

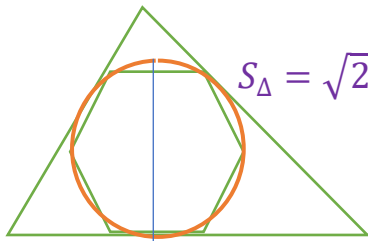
مرکز بیضی وسط F, F' قرار دارد $\left| \frac{1}{1} \right| \xrightarrow{O(0,0)} OM = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

۱۴۷- مثلثی با طول اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ مفروض است. اندازه ضلع شش ضلعی محاط شده در این مثلث، کدام است

- (1) 8 (2) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (3) 4 (4) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = 21 \times 4 = 84$$



$$R = \frac{S}{P} = \frac{84}{21} = 4$$

۱۴۸- زاویه xoy و نقطه M داخل زاویه با شرط $2Moy = xom$ باشد، مفروض است. از نقطه M عمود

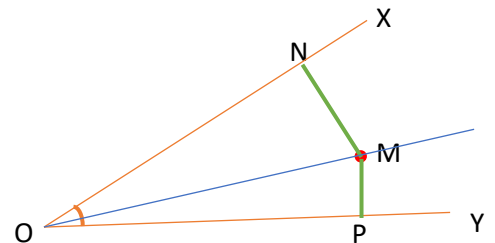
های MN و MP را به ترتیب بر نیم خط های Ox و Oy را رسم می کنیم نسبت $\frac{MN}{MP}$ کدام است

- (1) $\frac{2OP}{ON}$ (2) $\frac{OP}{OM}$ (3) $\frac{2OP}{ON}$ (4) $\frac{2OP}{OM}$

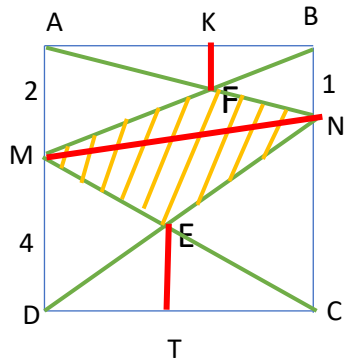
حل $\frac{MN}{MP} = \frac{\frac{MN}{OM}}{\frac{MP}{OM}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha$

پس

$$\frac{MN}{MP} = 2 \cos \alpha = 2 \times \frac{OP}{OM}$$



۱۴۹- مستطیل ABCD مطابق شکل زیر مفروض است .



مساحت چهار ضلعی MENF کدام است

- (1) $\frac{104}{9}$ (2) 13 (3) $\frac{47}{3}$ (4) 16

حل : از M به N وصل می کنیم ۲ نوزنقه ایجاد می شود از E به موازات

قاعده ها رسم می کنیم پس در نوزنقه MNCD داریم

$$\frac{1}{ET} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20} \rightarrow ET = \frac{20}{9} \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} FK = \frac{2}{3}$$

$$S_{ENFM} = \frac{8 \times \frac{2}{3}}{2} + \frac{8 \times \frac{20}{9}}{2} = \frac{8}{3} + \frac{80}{9} = \frac{140}{9}$$

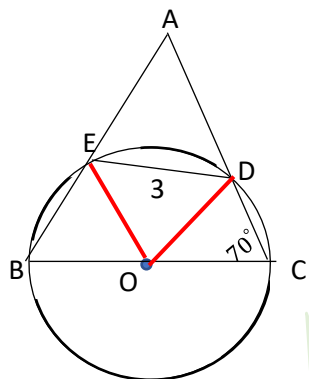
۱۵۰- در یک مثلث با زاویه ۱۳۸ درجه ، کوچکترین زاویه بین دو نیمساز خارجی به درجه ، کدام است ؟

- (1) 21 (2) 11.5 (3) 34.5 (4) 42

$$\text{حل : } 90 - \frac{138}{2} = 90 - 69 = 21$$

۱۵۱- در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است . اندازه کمان \widehat{EDC} به درجه ، کدام است ؟

- (1) 80 (2) 90 (3) 100 (4) 120



حل:

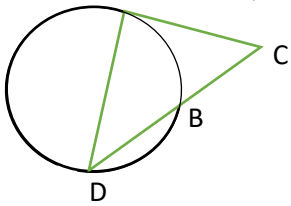
$$OC = OD \rightarrow \text{متساوی الاضلاع} \rightarrow ODC \rightarrow ODC = OCD = 70$$

$$\begin{cases} OD = OE = R = 3 \\ ED = 3 \text{ طرف} \end{cases} \rightarrow OD = OE = ED \rightarrow \text{متساوی الاضلاع} \rightarrow ODE \rightarrow ODE = 60$$

$$\angle EDC = (60 + 70) = 130$$

$$\widehat{EDC} = 360 - 2(130) = 100$$

۱۵۲- در شکل زیر پاره خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ آنگاه، نسبت $\frac{DB}{BC}$ ، کدام است؟



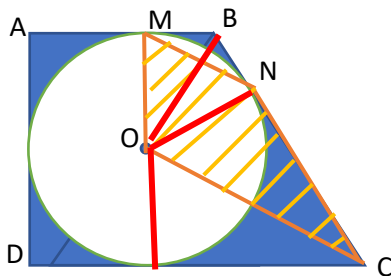
- (1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) 2 (4) 3

$$AC^2 = BC \times CD$$

$$\rightarrow (\sqrt{3}x)^2 = x \times (x + y) \rightarrow 2x = y \rightarrow BD = 2x \rightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{2x}{x} = 2$$

۱۵۳- مطابق شکل زیر نوزنقه بر دایره ای به شعاع ۳ واحد محیط است.

اگر زاویه $\widehat{MBN} = 120^\circ$ باشد. مساحت چهار ضلعی OMNC کدام است؟



- (1) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (2) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ (4) $9\sqrt{3}$

حل: مرکز دایره نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی نوزنقه است و

زاویه B برابر ۱۲۰ درجه و در نتیجه $B_1 = B_2 = 60$ و نقاط تماس M, N و $BMO = BNO = 90$

در نتیجه $O_1 = O_2 = 30$ پس مثلث MNO متساوی الاضلاع که هر ضلعش برابر شعاع که ۳ واحد است (۱)

از طرفی ABCD نوزنقه پس زاویه C برابر ۶۰ درجه پس $C_1 = C_2 = 30$ و $N = 90^\circ$ و $ON = 3$ پس $CN = 3\sqrt{3}$ (۲)

$$(۱) و (۲) \quad S = S_{OMN} + S_{ONC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 + \frac{3\sqrt{3} \times 3}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

۱۵۴- فرض کنید. خطوط $x - y = 3$, $x + y = 1$ قطره‌های یک دایره و خط $4x + 3y + 5 = 0$ مماس بر آن باشد. نزدیکترین فاصله نقطه $M(4, -2)$ از دایره، کدام است

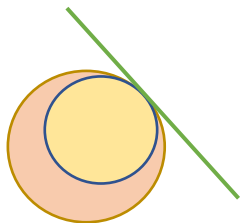
حل:

- (1) $\sqrt{3} - 1$ (2) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\sqrt{5} - 2$

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2, y = -1 \Rightarrow \text{مرکز} \left| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right. \Rightarrow R = \frac{|4(2) + 3(-1) + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = 2$$

$$OM = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \text{کمترین فاصله} = d - R = \sqrt{5} - 2$$

۱۵۵- فرض کنید . طول خط مرکزین دو دایره با شعاع های $6a - 1$, $a^2 - 2$ برابر ۶ واحد باشد . اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند . میانگین مقادیر ممکن برای a کدام است



$$7(4 \quad 6 \quad 3 \quad \frac{13}{3} \quad 2 \quad 3 \quad 1)$$

حل دایره فقط یک مماس مشترک دارد پس ۲ دایره مماس درونند و آن مماس مشترک خارجی

$$TT' = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}$$

$$\Rightarrow 0 = \sqrt{36 - (a^2 - 6a - 1)^2} \Rightarrow |a^2 - 6a - 1| = 6 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = 1 \xrightarrow{r=a^2-2} r = -1 < 0 \\ a = -1 \xrightarrow{r=a^2-2} r = -1 < 0 \\ a = 7 \end{cases}$$

$$a = \{5, 7\} \Rightarrow \text{میانگین} = \frac{12}{2} = 6$$