

پاسخ تشریحی سوالات ریاضی کنکور ۱۴۰۰ رشته تجربی | علی دارمی؛ مدرس ریاضیات کنکور

۱۲۶- فرض کنید  $a = \sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$  و  $b = \sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$ . مقدار  $(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2$  کدام است؟

(۱)  $4(2 + \sqrt{3})$  (۲)  $4(2 - \sqrt{3})$  (۳)  $16(2 + \sqrt{3})$  (۴)  $16(2 - \sqrt{3})$

پاسخ صحیح: گزینه ۴ - متوسط

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 &= (a - b)^4 (a + b)^4 = (a^2 - b^2)^4 \\ &= (a^4 + b^4 - 2a^2b^2)^2 = (\sqrt{6} - 2 + \sqrt{6} - 2 - 2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 \\ &= (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 = 4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 = 4(6 + 2 - 2\sqrt{12})^2 = 16(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

۱۲۷- فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  جواب‌های معادله  $(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$  باشند. مقدار  $x_1 + x_2$  کدام است؟

(۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

پاسخ صحیح: گزینه ۴ - متوسط

$$\sqrt[3]{x} = t \rightarrow x = t^3$$

$$(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1)(t^2 - 1) = 2t \rightarrow \frac{(t^4 + t^2 + 1)(t^2 - 1)}{t^2} = 2t$$

$$t^6 - 2t^3 - 1 = 0 \xrightarrow{x=t^3} x^2 - 2x - 1 = 0 \xrightarrow{\text{جمع ریشه ها}} S = \frac{-b}{2a} = 2$$

۱۲۸- فرض کنید  $x_1$  و  $x_2$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x = 0$  باشند.  $\frac{1}{(x_1+1)^3}$  و  $\frac{1}{(x_2+1)^3}$  ریشه‌های کدام معادله هستند؟

$$125x^2 = 16x + 1 \quad (2)$$

$$125x^2 + 16x = 1 \quad (1)$$

$$125x^2 + 12x = 1 \quad (4)$$

$$125x^2 = 12x + 1 \quad (3)$$

پاسخ صحیح: گزینه ۱ - متوسط

$$x^2 + x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = -5 \end{cases}, x_1 + x_2 = -1 \rightarrow \begin{cases} -x_1 = x_2 + 1 \\ -x_2 = x_1 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x_1+1)^3} + \frac{1}{(x_2+1)^3} &= \frac{1}{(-x_1)^3} + \frac{1}{(-x_2)^3} = \frac{-(x_1^3 + x_2^3)}{(x_1 x_2)^3} = \frac{-(x_1^3 + x_2^3)}{(x_1 x_2)^3} \\ &= \frac{-(S^3 + 3PS)}{P^3} = \frac{-((-1)^3 + 3(-1)(-5))}{(-5)^3} = \frac{-16}{125} \end{aligned}$$

فقط در گزینه ۱،  $S = \frac{-16}{125}$  دیده می‌شود.

۱۲۹- اگر  $f(x) = 16 \cos^2(3x) \cos^2(6x) \cos^2(12x) \cos^2(24x)$  باشد، مقدار  $f\left(\frac{\pi}{36}\right)$  کدام است؟

$$\frac{6 + 3\sqrt{3}}{16} \quad (4)$$

$$\frac{6 + \sqrt{3}}{16} \quad (3)$$

$$\frac{6 - \sqrt{3}}{16} \quad (2)$$

$$\frac{6 - 3\sqrt{3}}{16} \quad (1)$$

پاسخ صحیح: گزینه ۴ - متوسط

$$\frac{\pi}{36} = \theta \rightarrow f(\theta) = 16 \cos^2(3\theta) \cos^2(6\theta) \cos^2(12\theta) \cos^2(24\theta) = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

اگر گزینه‌ها را ساده کنیم  $(\sqrt{3} = 1/7)$ ، گزینه ۱  $\cong \frac{1}{16}$ ، گزینه ۲  $\cong \frac{4}{16}$ ، گزینه ۳  $\cong \frac{5}{16}$ ، و گزینه ۴  $\cong \frac{11}{16}$ ، که گزینه ۴ نزدیکترین جواب به  $1/16$  است.

۱۳۰- اگر زاویه  $\alpha$  در ناحیه سوم مثلثاتی و  $\tan(\alpha) = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)}$  کدام است؟

(۱)  $-\frac{96}{175}$       (۲)  $\frac{1056}{175}$       (۳)  $\frac{96}{175}$       (۴)  $-\frac{1056}{175}$

پاسخ صحیح: گزینه ۲ - متوسط

✓ توصیه می‌کنم مقادیر زوایای مهم (۱۵، ۳۷ و ۵۳ درجه) را حفظ کنید.

$$\begin{aligned} \tan \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = 37 \text{ ربع سوم} &\rightarrow \frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha - \pi)}{\cot(2\alpha)} \Rightarrow \frac{\cos(75 - 90) + \cos(37)}{\cot(75)} \\ &= \frac{\cos(15) + \cos(37)}{\cot(75)} = \frac{\sin(75) + \cos(37)}{\tan(15)} = \frac{0.9 + 0.8}{\frac{1}{4}} = 4 \times 1.7 \cong 6.8 \end{aligned}$$

با نگاهی به گزینه‌ها و ساده کردن آنها می‌توان فهمید گزینه صحیح کدام است. (حواستون به منفی و مثبت نسبت‌ها باشه!)

۱۳۱- تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی  $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$  در فاصله  $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

(۱) ۱      (۲) ۳      (۳) ۵      (۴) ۶

پاسخ صحیح: گزینه ۳ - آسان

$$1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1 \rightarrow -\sin^2(x)(1 + \cos(3x)) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin^2(x) = 0 \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \cos(3x) = -1 \xrightarrow{3x=(2k+1)\pi} x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

تعداد جوابهای معادله بالا ۵ ( $x = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ ) است.

۱۳۲- دامنه تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{\log_4(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ ، کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$   
 (۲)  $(-1, 2)$   
 (۳)  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$   
 (۴)  $(-2, 1)$

پاسخ صحیح: گزینه ۱ - آسان

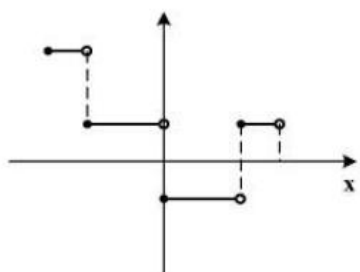
روش اول: عددگذاری  $\leftarrow x = 0$  گزینه ۲ و ۴ حذف می‌شود. (زیر رادیکال منفی)

$x = 2$  گزینه ۳ حذف می‌شود. (لگاریتم صفر)

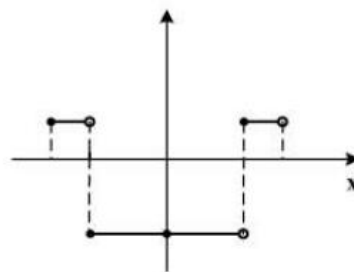
روش دوم: اشتراک‌گیری از دامنه‌ها

$$\begin{cases} \log_4(x^2 - x - 2) \rightarrow (x - 2)(x + 1) > 0 \rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -1 \\ \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

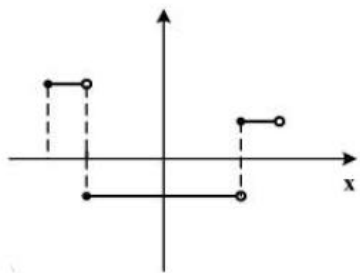
۱۳۳- نمودار تابع  $y = 2||3x|| - 1$  به ازای  $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{3}$ ، کدام است؟



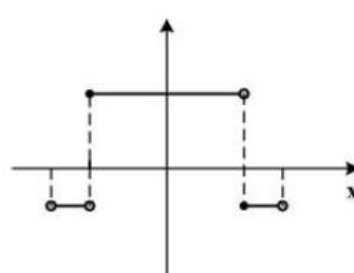
(۲)



(۱)



(۴)



(۳)

پاسخ صحیح: گزینه ۲ - آسان

$$\begin{cases} x = 0^- \rightarrow y = +1 \\ x = 0^+ \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

۱۳۴- فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های  $2y = x^2$  و  $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$  با مبدأ مختصات، کدام است؟  
 (۱)  $\sqrt{3}$  (۲)  $\sqrt{6}$  (۳)  $2\sqrt{3}$  (۴)  $\sqrt{15}$

پاسخ صحیح: گزینه ۴ - آسان

$$2y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{2y} \rightarrow \sqrt{2y} = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$$

چشمی می‌توان حدس زد  $y = 3$

$$x = \sqrt{6} \rightarrow \text{فاصله} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (3)^2} = \sqrt{15}$$

۱۳۵- اگر  $\frac{3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} + 3^{x+5}}{2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3}} = 52$  باشد، مقدار  $x$  کدام است؟  
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ صحیح: گزینه ۲ - متوسط با محاسبات زیاد

$$\frac{3^x(1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243)}{2^x(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + 8)} = 52 \rightarrow \frac{3^x(364)}{2^x(\frac{63}{4})} = 52 \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{52 \times 63}{364 \times 4} = \frac{9}{4} \rightarrow x = 2$$

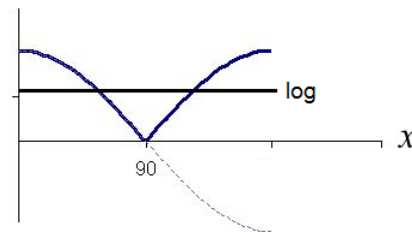
۱۳۶- نمودار تابع  $y = 2^{|\sin x|}$  را ابتدا به اندازه  $\frac{\pi}{2}$  در امتداد محور  $x$  ها در جهت مثبت و سپس  $\frac{3}{2}$  در امتداد محور  $y$  ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور  $x$  ها در فاصله  $[0, \pi]$ ، کدام است؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

پاسخ صحیح: گزینه ۳ - متوسط

انتقال  $y = 2^{|\sin x|} \rightarrow y = 2^{|\sin(x - \frac{\pi}{2})|} - \frac{3}{2} = 2^{-|\cos x|} - \frac{3}{2} = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} \xrightarrow{y=0} 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} = 0$

$$2^{|\cos x|} = \frac{3}{2} \rightarrow |\cos x| = \log_2 \frac{3}{2}$$

همانطور که مشاهده می‌کنید دو نقطه برخورد داریم.



۱۳۷- اگر تساوی  $\log_x y - 2 \log_y x = 1$  به ازای  $x, y > 1$  برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

$xy = 2$  (۴)       $y = \sqrt{x}$  (۳)       $y = x^2$  (۲)       $y = x^2$  (۱)

پاسخ صحیح: گزینه ۱ - متوسط

$$\log_x y - 2 \log_y x = 1 \rightarrow \log_x y = a \rightarrow a - \frac{2}{a} = 1 \rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 2 \rightarrow y = x^2 \\ a = -1 \rightarrow \text{غقق} \end{cases}$$

۱۳۸- مقدار  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left( \sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$  ، کدام است؟

$\sqrt{2}$  (۴)       $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (۳)      ۱ (۲)      صفر (۱)

پاسخ صحیح: گزینه ۴ - متوسط

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2} - \frac{x}{x^2+1}} \right) \xrightarrow{\text{هم ارزی}} \sqrt{1+1} - \sqrt{0-0} = \sqrt{2}$$

۱۳۹- مقدار  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x - 1]$  ، کدام است؟ ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

$-1$  (۱)      صفر (۲)      ۱ (۳)      وجود ندارد. (۴)

پاسخ صحیح: گزینه ۱ - آسان

$$\sin \frac{\pi}{6}^- < \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \left[ 2 \times \frac{1}{2}^- - 1 \right] = [1^- - 1] = [0^-] = -1$$

۱۴۰- قرینه نمودار تابع  $y = 2 + \sqrt{x-1}$  را نسبت به خط  $y = x$  رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور  $x$  ها و ۳ واحد در جهت منفی محور  $y$  ها انتقال می دهیم و آن را  $y = g(x)$  می نامیم. مقدار  $g(4)$  کدام است؟

(۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) -۴

پاسخ صحیح: گزینه ۳ - متوسط

$$g(x) = f^{-1}(x - 2) - 3 \rightarrow g(4) = f^{-1}(2) - 3$$

برای بدست آوردن  $f^{-1}(2)$  کافیست  $f(x) = 2$  را حل کنیم.

$$2 = 2 + \sqrt{x-1} \rightarrow x = 1 \rightarrow g(4) = 1 - 3 = -2$$

۱۴۱- فرض کنید  $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  و  $f(x) = 1 - x^2$ . تعداد نقاط ناپیوستگی تابع  $g \circ f$ ، کدام است؟

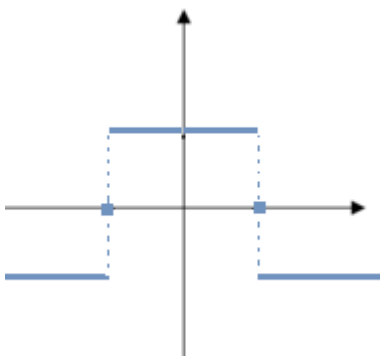
(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ صحیح: گزینه ۳ - متوسط

در تابع  $g(x)$  بجای بازه ها تابع  $f(x)$  را جاگذاری می کنیم.

$$g(f(x)) = \begin{cases} 1, & 1 - x^2 > 0 \\ 0, & 1 - x^2 = 0 \\ -1, & 1 - x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & x = \pm 1 \\ -1, & x < -1 \text{ یا } 1 < x \end{cases}$$

کافی است نمودار تابع را رسم یا پیوستگی تابع را در  $x = \pm 1$  بررسی کنیم.



۱۴۲- تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} |x^2-4|$ ، کدام است؟

- ۲ (۱)      ۳ (۲)      ۴ (۳)      ۵ (۴)

پاسخ صحیح: گزینه ۲ - سخت

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} |x^2-4| = \pm \frac{x^2(x^2-4)}{x^2-1} = \pm \frac{x^4-4x^2}{x^2-1}$$

$$\rightarrow f(x)' = \pm \frac{(4x^3-8x)(x^2-1) - (x^4-4x^2)(2x)}{(x^2-1)^2} = \overset{\text{صورت}=\cdot}{\cdot} \rightarrow \pm(2x^5-4x^3+8x) = \cdot$$

$$\rightarrow \pm 2x(x^4-2x^2+4) = \cdot \rightarrow \begin{cases} \pm 2x = \cdot \rightarrow x = \cdot \\ x^4-2x^2+4 = \cdot \end{cases}$$

ریشه ندارد

از طرفی  $x = \pm 2, x = \cdot$  (ریشه‌های قدرمطلق) نقاط بحرانی‌اند. در کل سه نقطه اکسترمم دارد.  $x = \pm 2, x = \cdot$

۱۴۳- قرینه نقطه A واقع بر سهمی  $f(x) = x^2$  را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطه A بین دو طول متوالی از محل بر تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط AA'، کدام است؟

- ۱)  $\sqrt{2}$       ۲)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       ۳)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       ۴)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$

پاسخ صحیح: گزینه ۳ - سخت

$$A(x, x^2) \xrightarrow{\text{قرینه}} A'(x^2, x)$$

سهمی  $y = x^2$  در دو نقطه  $\cdot$  و ۱ با نیمساز اول و سوم برخورد می‌کند. پس  $\cdot < x < 1$

$$AA' = \sqrt{(x^2-x)^2 - (x-x^2)^2} = \sqrt{2(x^2-x)^2} = \sqrt{2}|x^2-x|$$

$$\xrightarrow{\cdot < x < 1} \sqrt{2}(x-x^2) = \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^2 \xrightarrow{\Delta=2} \max(AA') = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{2}{4(-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y' = \cdot \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \max = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

✓ برای بدست آوردن max می‌توان نوشت:



۱۴۴- فرض کنید  $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1$  و  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ . مقدار مشتق تابع  $f \circ g$  در  $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$  چند برابر

است؟  $(-128\sqrt{2})$

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۴ (۱)

پاسخ صحیح: گزینه ۴ - سخت

$$y = f \circ g(x) \rightarrow y' = (f \circ g(x))' = g'(x) \times f'(g(x)) \xrightarrow{g(\frac{3}{\sqrt{8}}) = 2} y' = g' \left( \frac{3}{\sqrt{8}} \right) \times f'(2)$$

$$f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1 \xrightarrow{x=2} f(x) = 16x^2 + 1 \rightarrow f'(x) = 32x \xrightarrow{x=2} f'(2) = 64$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x \xrightarrow{x = \frac{3}{\sqrt{8}}} g' \left( \frac{3}{\sqrt{8}} \right) = -\frac{1}{3} \left( \frac{9}{8} - 1 \right)^{-\frac{4}{3}} \times \frac{6}{\sqrt{8}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{8}} \times \left( \frac{1}{8} \right)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{\sqrt{8}}{4} \times (2)^4 = -8\sqrt{2} \rightarrow y' = -8\sqrt{2} \times 64 \rightarrow \frac{-8\sqrt{2} \times 64}{-128\sqrt{2}} = 4$$

۱۴۵- فرض کنید  $g(x) = ax^2 + bx + c$  و  $(a \neq 0)$  حداکثر مقدار  $k$  به شرط  $b + c = a$ ، کدام است؟  
 $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$  باشد. اگر  $f$  یک تابع مشتق پذیر باشد،

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

$\frac{3}{4}$  (۱)

پاسخ صحیح: گزینه ۳ - سخت

$$\begin{cases} \text{I: } ak^2 + bk + c = 2ak + b & \text{شرط پیوستگی} \\ \text{II: } 2ak + b = 2a \rightarrow b = 2a - 2ak & \text{شرط مشتق پذیری} \\ \text{III: } b + c = a \rightarrow c = a - b \end{cases}$$

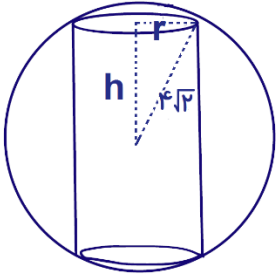
$$\text{I} \xrightarrow{\text{II \& III}} ak^2 + (2a - 2ak)k + a - (2a - 2ak) = 2ak + 2a - 2ak$$

$$\rightarrow a(k^2 - 4k + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 3 \text{ max} \end{cases}$$

۱۴۶- حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع  $4\sqrt{2}$  محاط می‌شود، کدام است؟

- (۱)  $32\pi$       (۲)  $64\pi$       (۳)  $\frac{256\pi}{3}$       (۴)  $\frac{512\pi}{3}$

پاسخ صحیح: گزینه ۲ - متوسط



$$h^2 + r^2 = 32 \rightarrow h = \sqrt{32 - r^2}$$

$$S = 2\pi r \times 2h = 4\pi r \times \sqrt{32 - r^2} = 4\pi\sqrt{32r^2 - r^4}$$

$$S' = \frac{2\pi(64r - 4r^3)}{\sqrt{32r^2 - r^4}} = 0 \rightarrow 64r - 4r^3 = 0 \rightarrow r = 4 \rightarrow h = 4 \rightarrow S = 64\pi$$

۱۴۷- احتمال این که یک دانش‌آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد  $0/9$  و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد  $0/85$  است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال این که امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{8}{9}$       (۲)  $\frac{85}{94}$       (۳)  $\frac{17}{18}$       (۴)  $\frac{45}{47}$

پاسخ صحیح: گزینه ۳ - آسان

$$P(A) = P(B) = 0/9, \quad P(A \cap B) = 0/85 \rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/85}{0/9} = \frac{17}{18}$$

۱۴۸- فرض کنید  $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ . چند معادله درجه دوم به صورت  $ax^2 + bx - c = 0$  می‌توان تشکیل داد، به طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

- (۱) ۱۴      (۲) ۱۵      (۳) ۱۶      (۴) ۱۸

پاسخ صحیح: گزینه ۳ - سخت

$$S = P + 2 \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a} + 2 \rightarrow c = b + 2a$$

c	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
(a, b)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)
			(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
					(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
							(4, 1)

تعداد کل: ۱۶ حالت

۱۴۹- در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش آموزان در صندلی‌ها بنشینند، به طوری که در کنار هر دانش آموزی، دانش آموز هم پایه قرار نگیرد؟

۱۴۴ (۱)      ۲۸۸ (۲)      ۲۷۶ (۳)      ۱۱۵۲ (۴)

پاسخ صحیح: گزینه ۱ - سخت (خارج از کتاب)

ابتدا یازدهمی‌ها به  $(4 - 1)!$  طریق دور میز قرار می‌گیرند، سپس دوازدهمی‌ها به  $4!$  طریق بین یازدهمی‌ها

می‌نشینند.  $(4 - 1)! \times 4! = 6 \times 24 = 144$

۱۵۰- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟

۱)  $\frac{13}{21}$       ۲)  $\frac{4}{7}$       ۳)  $\frac{3}{7}$       ۴)  $\frac{1}{4}$

پاسخ صحیح: هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست - سخت

$$n(s) = 5 + (5 \times 4) + (5 \times 4 \times 3) + (5 \times 4 \times 3 \times 2) + (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 325$$

اعداد بخش پذیر بر ۴: یا باید یکان ۲ با دهگان فرد باشد یا باید یکان چهار با دهگان زوج

تک رقمی	دو رقمی	سه رقمی	چهار رقمی	پنج رقمی
فقط ۴ (یک حالت)	۱۲, ۲۴, ۳۲, ۵۲ (کلا ۴ حالت)	برای هر کدام از اعداد دو رقمی ۳ حالت ممکن است. مثلا برای ۱۲: ۵۱۲, ۴۱۲, ۳۱۲ (کلا ۱۲ حالت)	برای هر کدام از اعداد دو رقمی، $3 \times 2$ حالت ممکن است. (۲۴ حالت)	برای هر کدام از اعداد دو رقمی، $3 \times 2 \times 1$ حالت ممکن است. (۲۴ حالت)

$$1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65 \rightarrow P(A) = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$

۱۵۱- شیب نیم خطی با نقطه شروع  $A(2, 4)$  برابر ۳ است. مستطیل  $ABCD$  را چنان می‌سازیم، که نقطه  $B$  روی نیم خط فوق و رأس سوم آن  $C(-3, -1)$  باشد. محیط مستطیل، کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳)  $6\sqrt{10}$  (۴)  $3\sqrt{10}$

پاسخ صحیح: گزینه ۳ - سخت

$$\text{شیب } AB = 3 \rightarrow \text{شیب } BC = \frac{-1}{3}, \quad \text{معادله } AB \rightarrow y - 4 = 3(x - 2) \rightarrow y = 3x - 2$$

$$\text{معادله } BC \rightarrow y - (-3) = \frac{-1}{3}(x - (-1)) \rightarrow y = \frac{-1}{3}x - 2$$

$$\text{بدست آوردن مختصات نقطه } B \xrightarrow{AB=BC} 3x - 2 = \frac{-1}{3}x - 2 \rightarrow x_B = 0, y_B = -2$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}, BC = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \rightarrow \text{محیط} = 2(2\sqrt{10} + \sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$

۱۵۲- نقطه  $H(2, 1)$  را روی خط  $3x - y = 5$  در نظر بگیرید. مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  را با ارتفاع  $AH$  می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث  $\sqrt{270}$  واحد باشد. مختصات یک رأس  $A$ ، کدام است؟

- (۱)  $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$  (۲)  $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$  (۳)  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$  (۴)  $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{6})$

پاسخ صحیح: گزینه ۲ - سخت

$$\text{محیط} = \sqrt{270} \rightarrow \text{ضلع } a = \frac{\sqrt{270}}{3} = \sqrt{30} \rightarrow \text{ارتفاع } h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

$$h = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} \rightarrow \frac{90}{4} = (x-2)^2 + (y-1)^2$$

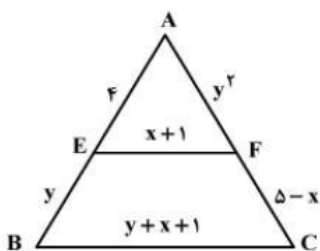
تنها گزینه ۲ در معادله بالا صدق می‌کند.

۱۵۳- دایره‌های  $x^2 + y^2 + 2x = 3$  و  $x^2 + y^2 + 2y = 3$  متقاطع‌اند. معادله وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟  
 (۱)  $x = y$  (۲)  $x = 1 + y$  (۳)  $x = -y$  (۴)  $x = 1 - y$

پاسخ صحیح: گزینه ۱ - سخت (خارج از کتاب)

کافیست دستگاه تشکیل بدهیم و معادله دو دایره را از هم کم کنیم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ x^2 + y^2 + 2y = 3 \end{cases} \rightarrow 2x - 2y = 0 \rightarrow x = y$$



۱۵۴- در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار  $y - 2x$ ، کدام است؟

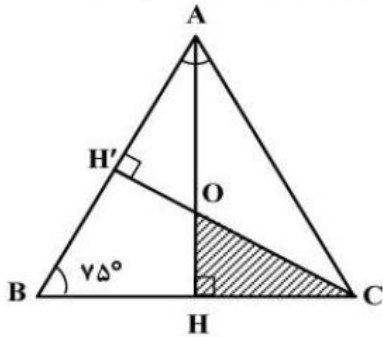
- (۱) -۴
- (۲) -۲
- (۳) ۲
- (۴) ۴

پاسخ صحیح: گزینه ۱ - آسان

$$\frac{4}{y+4} = \frac{x+1}{y+x+1} \xrightarrow{\text{تفاضل صورت از مخرج}} \frac{4}{y} = \frac{x+1}{y} \rightarrow x = 3$$

$$\frac{4}{y} = \frac{y^2}{5-x} \rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y^2}{2} \rightarrow y = 2 \rightarrow y - 2x = -4$$

۱۵۵- در شکل زیر مثلث  $ABC$  متساوی الساقین و طول ساق  $AC$  برابر ۶ است. مساحت مثلث  $OHC$ ، کدام است؟



$$\frac{4}{3} \quad (2) \qquad \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$\frac{9}{7+4\sqrt{3}} \quad (4) \qquad \frac{18}{7+4\sqrt{3}} \quad (3)$$

پاسخ صحیح: هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست - سخت

نکته:  $\sin 15 \cong \tan 15 \cong \frac{1}{4}$

اگر رأس  $A$  باشد: ( $C_1$  همان رأس قسمت رنگی است).  $A_1 = 15^\circ, C_1 = 15^\circ$

$$\sin A_1 = \frac{HC}{AC} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{HC}{6} \rightarrow HC = \frac{3}{2}, \quad \tan C_1 = \frac{OH}{HC} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{OH}{\frac{3}{2}} \rightarrow OH = \frac{3}{8}$$

$$S = \frac{1}{2} HC \times OH = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{32} \cong 0.28$$

اگر گزینه‌ها را ساده کنیم ( $\sqrt{3} = 1/7$ )، گزینه  $3 \cong 1/3$ ، گزینه  $4 \cong 0.65$  (هیچ گزینه‌ای صحیح نیست)



RIAZIKONKOUR



RIAZIDARAMI



۰۹۳۶۴۵۵۳۰۳۲