۰۹۱۸۷۸۸۳۳۹۸

فاروق منوچهری

سوال ۱۲۶:

$$(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \Big(\underbrace{(a^2+b^2)^2}_{a^4+b^4+2a^2b^2}-\overbrace{(2ab)^2}^{4a^2b^2}\Big)^2=(a^4+b^4-2a^2b^2)^2$$

$$\frac{a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}}{b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}} \quad \Big(\sqrt{6}-2+\sqrt{6}+2-2\underbrace{\sqrt{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}}_{2}\Big)^2=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2=\underbrace{24+8}_{32}-\underbrace{8\sqrt{12}}_{16\sqrt{3}}=16(2-\sqrt{3})$$

پاسخ: گزینه ۴

تحلیل: یک سوال ساده اما کمی وقت گیر بود که اگر دانش آموزان با دقت و صبر سوال را حل می کردند رسیدن به جواب امکان پذیر بود، البته می توان در حل سوال ابتدا روشهایی مانند تبدیل عبارت های اولیه به مربع کامل را نیز بکار برد. شبیه این سوال را در سال ۹۵ در رشته ریاضی می توان یافت کمی سخت تر هم بود امسال از ترتیب های رشته ریاضی الگو گرفته است.

سوال ۱۲۷:

$$\Big(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\Big)\Big(\sqrt[3]{x^2}-1\Big)=2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{دو طرف در } \sqrt[3]{x^2} \text{ ضرب شود}} \Big(x\sqrt[3]{x}+1+\sqrt[3]{x^2}\Big)\Big(\sqrt[3]{x^2}-1\Big)=2x$$

$$x^2+\cancel{\sqrt[3]{x^2}}+\cancel{x\sqrt[3]{x}}-\cancel{x\sqrt[3]{x}}-1-\cancel{\sqrt[3]{x^2}}=2x \to x^2-1=2x \to x^2-2x-1=0 \to S=x_1+x_2=2$$

پاسخ: گزینه ۴

تحلیل: یک سوال به ظاهر ترسناک که در واقعیت فقط با ساده سازی جواب سوال درست می آمد و مشابه این سوال در سال ۹۴ باز هم در رشته ریاضی طرح شده بود که در آنجا ضرب ریشه ها را می خواست.

سوال ۱۲۸:

$$x=5-x^2 \to x^2+x-5=0 \to \begin{cases} S=x_1+x_2=-1 \\ P=x_1\times x_2=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{(x_1+1)^3} \\ \beta=\dfrac{1}{(x_2+1)^3} \end{cases} \to \begin{cases} \alpha\times\beta=\dfrac{1}{(x_1+1)^3}\times\dfrac{1}{(x_2+1)^3}=\dfrac{1}{((x_1+1)(x_2+1))^3}=\dfrac{1}{(\underbrace{x_1x_2}_{-5}+\underbrace{x_1+x_2}_{-1}+1)^3}=\dfrac{1}{(-5)^3}=\dfrac{-1}{125} \\ \alpha+\beta=\dfrac{1}{(x_1+1)^3}+\dfrac{1}{(x_2+1)^3}=\dfrac{(x_1+1)^3+(x_2+1)^3}{(x_1+1)^3\times(x_2+1)^3} \end{cases}$$

(1)

ادامه در صفحه بعدی

۰۹۱۸۷۸۸۳۴۹۸

فاروق منوچهری

ادامه سوال ۱۲۸

ادامه $\alpha+\beta$

صورت = چاق ولاغر

$$\frac{(x_1+1+x_2+1)\left((x_1+1)^2+(x_2+1)^2-(x_1+1)(x_2+1)\right)}{-125}=\frac{(S+2)(x_1^2+x_2^2+x_1+x_2-x_1x_2+1)}{-125}$$

$$\xrightarrow{x_1^2+x_2^2=S^2-2P}-\frac{14}{125}\Longrightarrow x^2-Sx+P=0\Rightarrow x^2+\frac{14}{125}x-\frac{1}{125}=0\Rightarrow 125x^2+14x=1$$

پاسخ: گزینه ۱

تحلیل: سوال وقت‌گیر بود ولی مشابه آن در کنکورهای قبلی طرح شده بود اما با توجه به محدود بودن زمان کنکور می‌توان گفت سوال سختی بوده است. مشابه این سوال را در سال ۹۲ رشته ریاضی و همچنین ۹۰ رشته ریاضی داشته‌ایم

سوال ۱۲۹:

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=16\cos^2\left(\frac{\cancel{3\pi}}{\cancel{36}}\right)\cos^2\left(\frac{\cancel{6\pi}}{\cancel{36}}\right)\cos^2\left(\frac{\cancel{12\pi}}{\cancel{36}}\right)\cos^2\left(\frac{\cancel{24\pi}}{\cancel{36}}\right)$$

($\frac{\pi}{12}$، $\frac{\pi}{6}$، $\frac{\pi}{3}$، $\frac{2\pi}{3}$)

$\cos 15^\circ=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ در صفحه ۴۳ کتاب دوازدهم داریم

$$=16\times\left(\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{16(2-\sqrt{3})}\xrightarrow{\text{گویا شود}}\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

پاسخ: گزینه ۴

تحلیل: برای حل این سوال می‌بایست دانش‌آموز مقادیر نسبت‌های 15° را بدست می‌آورد یا طبق مقادیر بدست آمده در صفحه ۴۳ کتاب دوازدهم آنها را حفظ می‌کرد. سوال بجز این نکته نکته خاصی نداشت اما در صورت خلاق بودن می‌شد سوال را به روش زیر هم حل کرد.

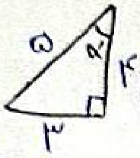
روش دوم:

$$f(x)=16\cos^2(3x)\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)\xrightarrow{\times\frac{\sin^2(3x)}{\sin^2(3x)}}$$

$$f(x)=\frac{16\,\overbrace{\cancel{\sin^2(3x)\cos^2(3x)}}^{\left(\frac{\sin 6x}{2}\right)^2}\times\cos^2(6x)\cos^2(12x)\cos^2(24x)}{\sin^2(3x)}\xrightarrow[\text{فرمول } \sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}]{\text{با استفاده چندین بار}}\frac{\sin^2(48x)}{16\sin^2(3x)}$$

$$f\left(\frac{\pi}{36}\right)=\frac{\sin^2\left(\frac{48\pi}{36}\right)}{16\sin^2\left(\frac{3\pi}{36}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{16\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{16\times\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2}=\frac{3}{16(2-\sqrt{3})}\overset{\text{گویا کردن}}{=}\frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

سوال ۱۳۰ :



$\rightarrow \tan\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\frac{4}{5} \\ \sin\alpha = -\frac{3}{5} \end{cases}$ به سوال گفته α ربع سوم و $\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25} \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{7}{25} \end{cases}$

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + \cos(\alpha+\pi)}{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}} = \frac{\sin 2\alpha - \cos\alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}} = \frac{\frac{24}{25} + \frac{4}{5}}{\frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}}} = \frac{+1056}{175}$$

پاسخ: گزینه ۲

تحلیل: یک سوال به ظاهر ساده ولی دارای ریزه کاری که بنظر دانش آموزانی که مثلث مطرح بالا را قبلاً کار کرده باشند در حل این سوال به مشکل خاصی برنخورند.

سوال ۱۳۱ :

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos 3x = 1 \Rightarrow \cancel{1} - \sin^2 x - \sin^2 x \cos 3x = \cancel{1} \Rightarrow -\sin^2 x(1 + \cos 3x) = 0$$

$$\begin{cases} -\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \boxed{x = 0}, \boxed{x = \pi}, \boxed{x = 2\pi} \\ 1 + \cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -1 = \cos\pi \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} \boxed{x = +\frac{\pi}{3}} \\ x = \pi \\ \boxed{x = \frac{5\pi}{3}} \end{cases} \end{cases}$$

پاسخ: گزینه ۳

تحلیل: یک سوال متوسط که در سالهای قبل مشابه آن را دیده ایم بطور مثال سوال ۱۴۲ کنکور ۹۸ تجربی و سوال معادلات مثلثاتی سال ۹۶ و ۹۲ خارج از کشور تجربی شبیه این سوال بوده اند.

سؤال ۱۳۲:

روش رد گزینه:

$x=-4 \Rightarrow f(-4)=\dfrac{\log_{4}^{10}}{\sqrt{8}+1}$

x=-۴ مقدار حقیقی خواهد داشت پس باید جزء دامنه باشد پس گزینه‌های ۲،۴ حذف می‌شوند

$x=2 \Rightarrow f(2)=\dfrac{\log_{4}^{0}}{\sqrt{3}+1}$

$\log_4^0$ قابل تعریف نیست پس x=2 جزء دامنه نخواهد بود پس گزینه ۳ نیز حذف می‌شود

پاسخ: گزینه ۱

تحلیل:

سؤال ۱۳۲ برای دانش آموزانی که رد گزینه را بلد هستند می‌تواند سؤالی بشدت ساده محسوب شود اما اگر کلی در نظر بگیریم سؤال متوسط بوده که در سال ۹۵ رشته ریاضی و خارج کنکور مشابه آن یافت می‌شود.

سؤال ۱۳۲:

حل طبق نکات کتاب درسی:

$$D_f=\begin{cases} ①\ x^2-x-2>0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & 2 & \\ \hline x^2-x-2 & + & 0 & - & 0 & + \end{array} \quad x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty) \\ \text{اشتراک} \\ ②\ x^2-1>0 \Rightarrow x^2>1 \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \\ \text{اشتراک} \\ ③\ \sqrt{x^2-1}+1\neq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}\neq -1 \end{cases}$$

رادیکال همواره مثبت است پس عبارت همواره برقرار است.

$$①\cap②\cap③=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$$

سؤال ۱۳۳:

$$-\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} -\frac{3}{2}\leq x<\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}\leq x<-1 & \Rightarrow y=2|-2|-1=3 \\ -1\leq x<0 & \Rightarrow y=2|-1|-1=1 \\ 0\leq x<1 & \Rightarrow y=2|0|-1=-1 \\ 1\leq x<\frac{3}{2} & \Rightarrow y=2|1|-1=1 \end{cases}$$

ادامه سوال ۱۳۳:

پاسخ: گزینه ۲

تحلیل: با کمی تمرین و حل سوالات ۷ و ۸ صفحه ۵۶ کتاب یازدهم این سوال به سادگی قابل حل بود.

سوال ۱۳۴:

$$\begin{cases} 2y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2y} \\ x=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3} \end{cases} \xRightarrow[\text{باید دو تابع را برابر قرار دهیم}]{\text{برای یافتن نقطه تلاقی}} \sqrt{2y}=\sqrt{y+3}-\sqrt{y-3}$$

دقت کنید در تابع دوم چون $\sqrt{y+3}$ حتما از $\sqrt{y-3}$ بیشتر می‌شود پس مقدار x همواره مثبت است و در تابع اول $x=+\sqrt{2y}$ را در نظر می‌گیریم.

$$\xRightarrow{\text{توان ۲}} 2y=y+\cancel{3}+y-\cancel{3}-2\sqrt{y^2-9} \Rightarrow 2\sqrt{y^2-9}=0 \Rightarrow y^2=9 \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ y=-3 \times \end{cases}$$

اگر $y=-3$ باشد تابع دوم تعریف نمی‌شود.

$$\xRightarrow[2y=x^2]{y=3} 6=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ x=-\sqrt{6} \times \end{cases} \xRightarrow{\text{فاصله } (\sqrt{6},3) \text{ از } (0,0)} R=\sqrt{(\sqrt{6}-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{15}$$

پاسخ: گزینه ۴

تحلیل: مشابه این سوال در سال ۹۹ خارج کشور تجربی در سوال ۱۳۲ ببینیم با این تفاوت که سوال بالا با حل y جواب بدست می‌آید.

در سوال می‌توانستیم با توان ۲ گرفتن از معادله دوم $x^2=y+3+y-3-2\sqrt{y^2-9}$ را بدست آوریم و معادله اول را در این معادله جایگذاری کنیم سپس y را بدست آوریم.

سوال ۱۳۵:

$$\frac{3^x+3\times3^x+3^2\times3^x+3^3\times3^x+3^4\times3^x+3^5\times3^x}{2^{-2}\times2^x+2^{-1}\times2^x+2^0\times2^x+2^1\times2^x+2^2\times2^x+2^3\times2^x}=52 \Rightarrow \frac{3^x(3^0+3^1+3^2+3^3+3^4+3^5)}{2^x(2^{-2}+2^{-1}+2^0+2^1+2^2+2^3)}=13\times4$$

$$\frac{3^x\times364}{2^x\times\frac{63}{4}}=\frac{3^x\times4\times\cancel{7}\times13\times4}{2^x\times\cancel{7}\times9}=13\times4 \Longrightarrow$$

پس برای آنکه معادله برقرار باشد باید 2^x با ۴ و 3^x با ۹ ساده شود پس $x=2$

ادامه سوال ۱۳۵ :

پاسخ: گزینه ۲

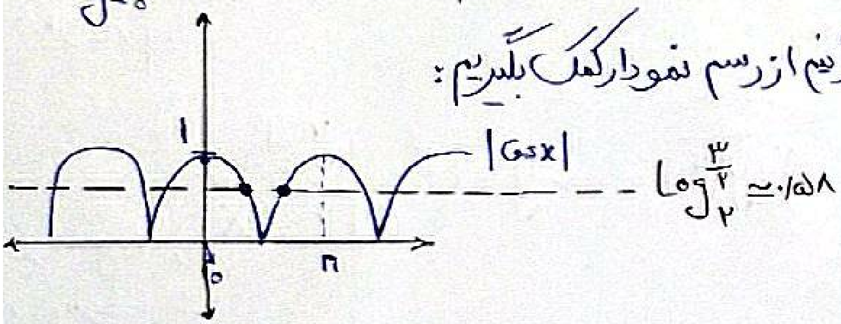
تحلیل: یک سوال ترکیبی و جالب که معادلات نمایی و مجموع جملات دنباله هندسی را باهم ترکیب کرده بود البته این سوال بدون اطلاعات دنباله هندسی نیز می توانست حل شود اما محاسبات زمانبر می شد.

سوال ۱۳۶ :

$$y=2^{|\sin x|} \xrightarrow[\frac{3}{2}\ \text{به سمت y های منفی}]{\frac{\pi}{2}\ \text{به سمت x های مثبت}} y = 2^{|\sin(x-\frac{\pi}{2})|} - \frac{3}{2} = 2^{|-\cos x|} - \frac{3}{2} = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow[y=0]{\text{تقاطع با محور x ها}} 0 = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} \Rightarrow 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_2^{\frac{3}{2}} = |\cos x|$$

چون سوال تعداد نقاط برخورد را می خواهد پس می توانیم از رسم نمودار کمک بگیریم:



در بازه $[0, 2\pi]$ فقط دو نقطه برخورد داریم.

پاسخ: گزینه ۳

تحلیل: رسم و انتقال نمودار چند سالیست در کنکور سراسری بیشتر مورد سوال است پس به دانش آموزان توصیه می شود بیشتر روی این تیپ سوالات کار کنند. این سوال هرچند مشابه سالهای گذشته بود اما رسم و حل آن دشوار بود.

سوال ۱۳۷ :

$$\log_x^y - 2\log_y^x = 1 \Rightarrow \log_x^y - \frac{2}{\log_x^y} = 1 \xrightarrow{\log_x^y = t} t - \frac{2}{t} = 1$$

$$\xrightarrow{\times t} t^2 - 2 = t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \to \log_x^y = -1 \to y = x^{-1} = \frac{1}{x} \\ t=2 \to \log_x^y = 2 \to y = x^2 \end{cases}$$

چون در سوال داریم ادل x و y پس این حالت پیش نخواهد آمد.

پاسخ: گزینه ۱

روش دوم حل سوال ۱۳۷ :

با در نظر گرفتن $x=2$ و $y=4$ داریم ⇐

$$\log_2 4 - 2\log_4 2 = 1 \Rightarrow 2-2\left(\frac{1}{2}\right)=1 \ \checkmark \Rightarrow \text{رد گزینه}$$

پس فقط گزینه ۱ می‌تواند گزینه مطلوب باشد.

تحلیل: یک سوال ترکیبی و جالب از معادلات لگاریتمی که در سالهای گذشته مشابه آن را نداشتیم.

سوال ۱۳۸ :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x(x+1)}}-\sqrt{\frac{1}{x^2(x^2+1)}}\right)$$

$$\overset{\text{هم ارزی توان بزرگ}}{=}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^4}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{|x|}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}\,\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\sqrt{2}-0=\sqrt{2}$$

پاسخ: گزینه ۴

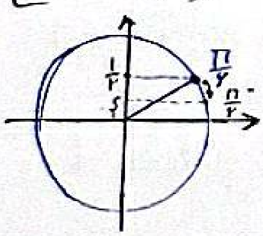
تحلیل: یک سوال ترکیبی و نوین که به روش زیر نیز حل می‌شود:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x^2}-\frac{x}{x^2+1}}\right)\overset{\text{هم ارزی توان بزرگ}}{=}$$

$$=\left(\sqrt{1+1}-\sqrt{0-0}\right)=\sqrt{2}$$

سوال ۱۳۹ :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=\left[2\sin\left(\frac{\pi}{6}^-\right)-1\right]=\left[2\times\left(\frac{1}{2}^-\right)-1\right]=[1^- -1]=[0^-]=-1$$



پاسخ: گزینه ۱

تحلیل: یک سوال ساده!

واقعا در کنکور ۱۴۰۰ با طرح این سوال می‌توانیم بگوییم ۷ سوال ساده پیدا می‌شد!

سوال ۱۴۰ :

$$y=2+\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } y=x \Leftrightarrow \text{وارون}} y-2=\sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (y-2)^2=x-1$$

$$\Rightarrow (y-2)^2+1=x \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض شود}} y=(x-2)^2+1 \xrightarrow[\text{۳ واحد در جهت منفی } y\text{ها}]{\text{۲ واحد در جهت } x\text{ها}} y=(x-2-2)^2+1-3$$

$$g(x)=(x-4)^2-2 \Rightarrow g(4)=(4-4)^2-2=-2$$

پاسخ: گزینه ۳

تحلیل: یک سوال طولانی و زمانبر که روش حل آن به ذهن می‌رسید ولی حل آن به صرفه نبود.
مشابه تابع داده شده در سال ۹۲ رشته تجربی طرح شده بود.

روش دوم:

اگر وارون تابع y را f^{-1} در نظر بگیریم و آنرا فقط انتقال دهیم داریم:

$$g(x)=f^{-1}(x-2)-3$$

$$\Rightarrow g(4)=f^{-1}(2)-3$$

حال کافیست $f^{-1}(2)$ را بیابیم که با حل $2+\sqrt{x-1}=2$ داریم $\boxed{x=1}$

$$\Rightarrow g(4)=1-3=-2$$

سوال ۱۴۱ :

$$gof(x)=g(f(x))=\begin{cases}1 & 1-x^2>0\\ 0 & 1-x^2=0\\ -1 & 1-x^2<0\end{cases} \Rightarrow gof(x)=\begin{cases}1 & x\in(-1,1)\\ 0 & x=\pm 1\\ -1 & x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\end{cases}$$

طبق تابع درست آمده کافیست فقط به بررسی نقاط شکستگی ($x=\pm 1$) بپردازیم و تابع در دیگر نقاط پیوسته است.

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^-} gof(x)=1\\ \lim_{x\to 1^+} gof(x)=-1\\ gof(1)=0\end{cases}$$

پس در $x=1$ پیوستگی نداریم ،

$$\begin{cases}\lim_{x\to -1^-} gof(x)=-1\\ \lim_{x\to -1^+} gof(x)=1\\ gof(-1)=0\end{cases}$$

پس در $x=-1$ نیز پیوستگی نداریم

ادامه سوال ۱۴۱ :

پاسخ : گزینه ۳

تحلیل : یک تیپ جدید و سوالی ترکیبی و جالب که ذهن دانش آموز را هدف گرفته بود.

سوال ۱۴۲ :

برای سادگی حل سوال می‌توان $t=x^2-1$ را در نظر گرفت و داریم :

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}\left|x^2-4\right| \xrightarrow{t=x^2-1}$$

$$f(x)=\frac{t+1}{t}\left|t-3\right| = \pm\left(\frac{t+1}{t}\times(t-3)\right)=\pm\left(\frac{t^2-2t-3}{t}\right)=\pm\left(t-2-\frac{3}{t}\right)$$

$$f(x)=\pm\left(x^2-1-2-\frac{3}{x^2-1}\right)=\pm\left(x^2-3-\frac{3}{x^2-1}\right)$$

می‌دانیم ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق نقاط بحرانی اند پس $x=\pm2$ نقاط بحرانی اند و کافیست از f مشتق بگیریم :

$$f'(x)=\pm\left(2x+\frac{3(2x)}{(x^2-1)^2}\right) \Rightarrow \pm2x\left(1+\frac{3}{(x^2-1)^2}\right)=0$$

$$\begin{cases} \pm2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ 1+\dfrac{3}{(x^2-1)^2} \end{cases}$$

همواره مثبت است و صفر نمی‌شود

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'		$-$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	
f		↘	min نسبی	↗	تن	↗	max نسبی	↘	تن	↘	min نسبی	↗	

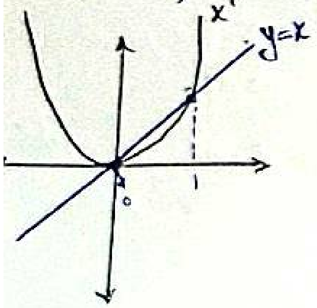
ریشه‌های مخرج f اند

پاسخ : گزینه ۲

تحلیل : سوالی زمانبر و سخت که حل آن در بازه زمانی کنکور به صرفه نیست مگر آنکه دانش آموز تسلط خوبی بر روی کار بر مشتق داشته باشد. در کنکور ۹۸ تابعی مشابه این تابع طرح شده بود (سوال ۱۵۰ تجربی داخل) اما آن سوال به سادگی قابل رسم بود.

سوال ۱۴۳: طول نقطه A را اگر x در نظر بگیریم داریم:

$$A(x,x^2) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به}]{y=x} (x^2,x) \Rightarrow A'(x^2,x)$$



طبق سوال طول نقطه A بین دو نقطه تقاطع P و y=x است پس $\boxed{0<x<1}$

طول AA' برابر خواهد بود با:

$$AA'=\sqrt{(x^2-x)^2+\underbrace{(x-x^2)^2}_{(-(x^2-x))^2=(x^2-x)^2}}=\sqrt{2(x^2-x)^2}=\sqrt{2}|x^2-x|$$

حال برای یافتن ماکزیمم فاصله AA' با ابزار مشتق کمک بگیریم:

$$AA'=\sqrt{2}|x^2-x| \xrightarrow{0<x<1} \sqrt{2}(-x^2+x)=-\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}x \xrightarrow{\text{مشتق}} -2\sqrt{2}x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$AA'=\sqrt{2}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right|=\sqrt{2}\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

پاسخ: گزینه ۳

تحلیل: چون بحث بهینه سازی در رشته تجربی تقریبا جدید حساب می‌شود سوالی مشابه آن در تجربی وجود ندارد اما در سوالات رشته ریاضی این تیپ قبلا مطرح شده بود پس دانش آموزان به کمک اساتید خود با این تیپ را قبلاً کار می‌کردند اما در کل سوالی سخت محسوب می‌شود

سوال ۱۴۴:

$$f\circ g'(x)=g'(x)f'(g(x)) \xrightarrow{x=\frac{3}{\sqrt{8}}} f\circ g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right) \quad \star$$

حال کافیست $g(\frac{3}{\sqrt{8}})$ و $g'(\frac{3}{\sqrt{8}})$ را بیابیم:

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2-1}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}=2$$

$$g(x)=(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x)=-\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}(2x) \xrightarrow{x=\frac{3}{\sqrt{8}}} g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}\times\left(\frac{6}{\underbrace{\sqrt{8}}_{2\sqrt{2}}}\right)=\frac{-16}{\sqrt{2}}$$

$$\star\ f\circ g'\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)=\frac{-16}{\sqrt{2}}f'(2)=\frac{-16}{\sqrt{2}}\times 64$$

$$f(x)=\left(x\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)^2+1 \xrightarrow{x=2} f(x)=(x\times4)^2+1=16x^2+1 \Rightarrow f'(x)=32x \Rightarrow f'(2)=64$$

ادامه سوال ۱۴۴ :

$$\xrightarrow{\text{چندبرابر}} \frac{\frac{-16\times 64}{\sqrt{2}}}{\frac{-128\sqrt{2}}{1}} = \frac{16\times 64}{128\times 2} = 4$$

پاسخ: گزینه ۴

تحلیل: یک سوال سخت و زمانبر که اعداد آن هم طوری بود که دانش آموزان باید دقت زیادی به خرج می دادند. این سوال تقریبا مشابه سوال ۱۴۸ سال ۹۸ تجربی بود با چاشنی محاسبات بیشتر.

سوال ۱۴۵ :

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & x\geq k \\ 2ax+b & x<k \end{cases}$$

برای آنکه تابع f مشتق پذیر باشد باید در نقطه مرزی $(x=k)$ هم پیوسته وهم مشتق چپ و راست تعریف شده و یکی باشد پس :

$$\text{پیوستگی} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to k^-} 2ax+b = 2ak+b \\ \lim_{x\to k^+} ax^2+bx+c = ak^2+bk+c \end{cases} \rightarrow \boxed{ak^2+bk+c=2ak+b}\ (1)$$

$$\text{مشتق} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) \xrightarrow{k^-} 2a \Rightarrow f'(k)=2a \\ f'(x) \xrightarrow{k^+} 2ax+b \Rightarrow f'(k)=2ak+b \end{cases} \rightarrow \boxed{2ak+b=2a}\ (2) \Rightarrow \boxed{b=2a-2ak}\ (3)$$

$$\xrightarrow[(3)]{\text{طبق سوال } b+c=a} 2a-2ak+c=a \Rightarrow \boxed{c=2ak-a}\ (4)$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب ۱ و ۲}} ak^2+bk+c=2a = \quad ak^2+(2a-2ak)k+2ak-a=2a$$

$$\Rightarrow ak^2-4ak+3a=0 \Rightarrow a(k^2-4k+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \ \times \\ k=3 \ \checkmark \end{cases}$$ چون بیشترین k را می‌خواهیم

پاسخ: گزینه ۳

ادامه سوال ۱۴۵:

تحلیل: یک تیپ بدون عدد و ۴ مجهول که جواب آن عدد می‌شد. بله، سوال ۱۴۵ دارای ۴ مجهول بود اما صبر در حل مسأله و طی کل نکات دانش‌آموز را به جواب درست می‌رساند اما در کل سوال سخت بود.

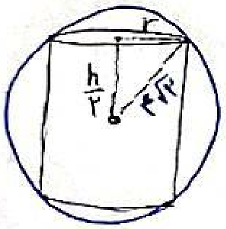
روش دوم: در نگرش اول حل سوال برای آنکه پیوستگی و مشتق‌پذیری را با هم بررسی کنیم می‌توانیم

$$g(k)=g'(k)=g''(k) \Rightarrow \boxed{ak^2+bk+c}=\boxed{2ak+b}=\boxed{2a}$$

① ②

را بررسی کنیم ولی مراحل ساده‌تر می‌شد.

سوال ۱۴۶:



می‌دانیم مساحت جانبی یک استوانه $S=2\pi r h$ خواهد بود و طبق اطلاعات سوال

و با رسم شکل در می‌یابیم: $\xrightarrow{\text{فیثاغورث}} r^2+\frac{h^2}{4}=(4\sqrt{2})^2 \Rightarrow r^2=32-\frac{h^2}{4} \Rightarrow r=\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}$

$$S=2\pi r h \xlongequal{r=\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}} 2\pi h\sqrt{32-\frac{h^2}{4}} \Rightarrow S'=2\pi\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}+\frac{4\pi h\left(-\frac{h}{4}\right)}{2\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}} \xRightarrow{\text{مخرج مشترک}}$$

$$S'=\frac{4\pi\left(32-\frac{h^2}{4}\right)-\pi h^2}{2\sqrt{32-\frac{h^2}{4}}}=0 \Rightarrow \quad \pi - \quad \pi \quad ^2=0 \Rightarrow \quad ^2=\frac{256\pi}{16\pi}= \quad \Rightarrow \quad =$$

$$S \xlongequal{h=8} 2\pi(8)\sqrt{32-\frac{(8)^2}{4}}=64\pi$$

پاسخ: گزینه ۲

تحلیل:

سوالی دیگر از بهینه‌سازی که جای تعجب دارد در طراح ۲ سوال از یک بخش کوچک غیرقابل پیش‌بینی بود اما طرح شد.

سوال ۱۴۷:

$P(A) = ۰/۶ \qquad P(A\cap B) = ۰/۱۵$

$P(B) = ۰/۹$

سوال احتمال شرطی را می‌خواهد پس $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۱۵}{۰/۹}$ که با ساده سازی برابر $\frac{۱۷}{۲۸}$ می‌شود

پاسخ: گزینه ۳

تحلیل: یک سوال ساده!

سوال ۱۴۸: طبق سوال S (جمع ریشه‌ها) از P (ضرب ریشه‌ها) دو واحد بیشتر است پس:

$$S = P + ۲ \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a} + ۲ \xrightarrow{\times a} \boxed{+b = +c - ۲a}$$

حال کافیست با حالت بندی c و بررسی a و b جواب‌ها را بیابیم بطور مثال:

$if\ c = ۴ \Rightarrow b = ۴ - ۲a$

حال $a = ۱$ فقط می‌تواند قابل قبول باشد چون برای $a > ۱$ مقدار b منفی می‌شود.

$(a,b,c) \Longrightarrow$ {(۱و۱و۳) (۱و۲و۴) (۱,۳,۵) (۱,۴,۶) (۱و۵,۷) (۱و۶و۸) (۱و۷,۹) (۲,۱,۵) (۲و۲,۶) (۲,۳,۷) (۲و۴و۸) (۲و۵و۹) (۳,۱,۷) (۳,۲,۸) (۳,۳,۹) (۴,۱و۹)}

پاسخ: گزینه ۳

تحلیل: سوالی ترکیبی دیگر با درجه ۲ که نشان میدهد طراح امسال بشدت علاقمند به ترکیب سوالات با تابع درجه ۲ داشته است.

سوال ۱۴۹: می‌دانیم برای دور یک میز نشستن n نفر، $(n-1)!$ حالت داریم ولی سوال گفته است هیچ هم پایه‌ای کنار هم نباشند پس باید حالت یک درمیان باشند، چون دو گروه تعداد یکسانی دارند با یکی از گروه‌ها شروع کرده و یک درمیان آنها را می‌چینیم پس:

$n(A) = (۴-۱)! \times ۴! = ۱۴۴$

پاسخ: گزینه ۱

تحلیل: این سوال متأسفانه خارج از کتاب درسی طرح شده است.

سوال ۱۵۰: اگر بخواهیم عددی بر ۴ بخش پذیر باشد باید یکان زوج و مجموع یکان و دو برابر دهگان بر ۴ بخش پذیر باشد

پس اولاً n(S) را می نویسیم:

$$n(S) = \underbrace{۵}_{\text{یک رقمی}} + \underbrace{۲۰}_{\text{دو رقمی}} + \underbrace{۶۰}_{\text{سه رقمی}} + \underbrace{۱۲۰}_{\text{چهار رقمی}} + \underbrace{۱۲۰}_{\text{پنج رقمی}} = ۳۲۵$$

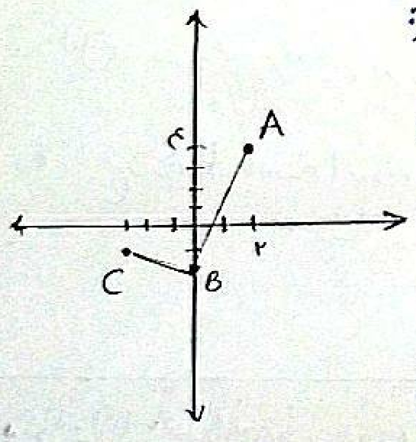
حال n(A) را می یابیم:

۶۵ حالت
- یک رقمی ⇐ ۱ حالت
- دو رقمی ⇐ ۴ حالت
- سه رقمی ⇐ ○①② (۳ حالت) یا ○③② (۳ حالت) یا ○⑤② (۳ حالت) یا ○②④ (۳ حالت) ⇐ ۱۲ حالت
- چهار رقمی ⇐ ○○①② (۳×۲ حالت) یا ○○③② (۳×۲ حالت) یا ○○⑤② (۳×۲ حالت) یا ○○②④ (۳×۲ حالت) ⇐ ۲۴ حالت
- پنج رقمی ⇐ ○○○①② (۳×۲×۱ حالت) یا ○○○③② (۳×۲×۱ حالت) یا ○○○⑤② (۳×۲×۱ حالت) یا ○○○②④ (۳×۲×۱ حالت) ⇐ ۲۴ حالت

تحلیل: جواب سوال بمقدار $\frac{۱}{۵}$ می شود اما متأسفانه در گزینه ها موجود نیست!

سوال ۱۵۱: چون $\underbrace{\text{شیب AB}}_{۳}$ را داریم و $\underbrace{\text{نقطه A}}_{(۲،۴)}$ روی آن است پس معادله خط AB برابر:

$$y-۴=۳(x-۲) \Rightarrow y=۳x-۲$$



وچون باید مستطیل بسازیم پس خط گذرا از C بر خط AB عمود است یعنی شیبش برابر $-\frac{۱}{۳}$ است وچون از C نیز می گذرد معادله آن برابر:

$$y--۱=-\frac{۱}{۳}(x--۳) \Rightarrow y=\frac{-x}{۳}-۲$$

حال کافیست فاصله A از خط BC و فاصله C از خط AB را بدست آوریم تا طول و عرض مستطیل بدست آید:

$$\begin{cases} x=\dfrac{|۲+۱۲+۶|}{\sqrt{۹+۱}}=\dfrac{۲۰}{\sqrt{۱۰}}=۲\sqrt{۱۰} \\ y=\dfrac{|-۹+۱-۲|}{\sqrt{۹+۱}}=\dfrac{۱۰}{\sqrt{۱۰}}=\sqrt{۱۰} \end{cases}$$

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(x+y) = ۲(۲\sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۰}) = ۶\sqrt{۱۰}$$

پاسخ: گزینه ۳

روش دوم حل سوال ۱۵۱ :

فرض کنید نقطه $B(x,y)$ باشد و طبق سوال شیب AB برابر ۳ و چون مستطیل داریم شیب BC برابر $-\frac{1}{3}$ خواهد بود و شیب برابر $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ است پس :

$$\begin{cases} \frac{y-4}{x-2}=3 \Rightarrow 3x-6=y-4 \Rightarrow 3x-y=2 \\ \frac{y+1}{x+3}=\frac{-1}{3} \Rightarrow 3y+3=-x-3 \Rightarrow 3y+x=-6 \end{cases} \xRightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{matrix} x=0 \\ y=-2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} AB=\sqrt{(2-0)^2+(4-(-2))^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}=\text{طول} \\ AC=\sqrt{(-3-0)^2+(-1-(-2))^2}=\sqrt{10}=\text{عرض} \end{cases}$$

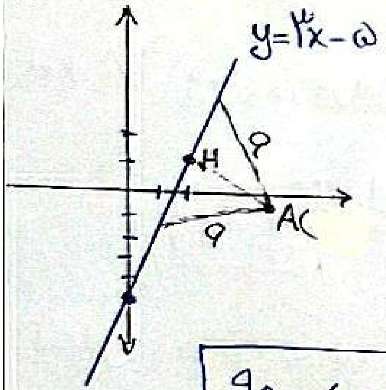
$$\text{محیط}=2(2\sqrt{10}+\sqrt{10})=6\sqrt{10}$$

تحلیل :

یک سوال متوسط و قابل حل که در سالهای گذشته بخاطر جدید بودن مبحث نمونه نداریم.

سوال ۱۵۲ : معادله خط داده شده $y=3x-5$ است و می‌دانیم

$$\text{محیط مثلث متساوی الاضلاع}=3a=\sqrt{270}=\sqrt{9\times 30}=3\sqrt{30} \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{30}}$$



می‌دانیم ارتفاع در مثلث متساوی الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ است و اگر نقطه $A(x,y)$ در نظر بگیریم داریم

$$\begin{cases} AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{30}=\frac{3\sqrt{10}}{2} \\ AH=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3\sqrt{10}}{2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{90}{4}=(x-2)^2+(y-1)^2} \quad (1)$$

از طرفی چون AH بر خط عمود است پس شیب AH باید برابر $-\frac{1}{3}$ باشد :

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{-1}{3} \Rightarrow 3y-3=-x+2 \Rightarrow \boxed{x-2=3-3y} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)(2)} \frac{90}{4}=\underbrace{(3-3y)^2}_{-3(y-1)}+(y-1)^2 \Rightarrow \frac{90}{4}=9(y-1)^2+(y-1)^2=10(y-1)^2 \Rightarrow (y-1)^2=\frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} y-1=\frac{3}{2} \\ y-1=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{5}{2} \longrightarrow \times \text{ در گزینه‌ها نیست} \\ y=-\frac{1}{2} \longrightarrow \text{گزینه } 2 \end{cases}$$

پاسخ : گزینه ۲

ادامه سؤال ۱۵۲ :

تحلیل: یک سؤال سخت و زمانبر که شامل نکات زیادی بود.

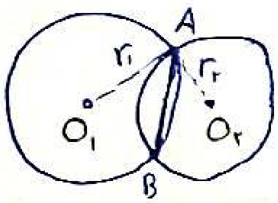
سؤال ۱۵۳ :

روش تستی: کافیست دو معادله دایره را از هم کم کنیم:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=3 \\ x^2+y^2+2y=3 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2x-2y=0 \Rightarrow \boxed{x=y}$$

پاسخ: گزینه ۱

روش کتاب: اگر معادله خط AB را بخواهیم باید یکی از نقاط A یا B و شیب را داشته باشیم:



$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{4+12}=2 \qquad O_1=\left(-\frac{0}{2}, -\frac{2}{2}\right)=(0,-1)$

$r_2=\frac{1}{2}\sqrt{4+12}=2 \qquad O_2=\left(-\frac{2}{2}, -\frac{0}{2}\right)=(-1,0)$

خط گذرا از OO' بر AB عمود است و شیب OO' برابر: $\frac{0-(-1)}{-1-0}=-1$ پس شیب AB برابر 1 است ← گزینه‌های ۳ و ۴ حذف

نقطه A را (x_0, y_0) در نظر بگیرید پس: $r_1=r_2=2 \Rightarrow O_1A=O_2A=2 \Rightarrow \sqrt{(x_0-0)^2+(y_0+1)^2}=\sqrt{(x_0+1)^2+(y_0-0)^2}=2$

① $\Rightarrow x_0^2+y_0^2+2y_0+1=x_0^2+2x_0+1+y_0^2 \Rightarrow \boxed{x_0=y_0}$

$\xrightarrow{\text{معادله خط}} y-y_0=1\times(x-x_0) \xrightarrow{y_0=x_0} \boxed{y=x}$

تحلیل: با توجه به نکته گفته شده سؤال ساده می‌شد اما در کل سؤال سخت، زمانبر و تیپ کاملاً جبری بود.

سؤال ۱۵۴ :

طبق قضیه تالس:

$$\frac{4}{y}=\frac{y^2}{5-x} \Rightarrow \frac{4}{y}=\frac{y^2}{\frac{5-3}{2}} \Rightarrow y^3=8 \Rightarrow \boxed{y=2}$$

طبق تعمیم تالس:

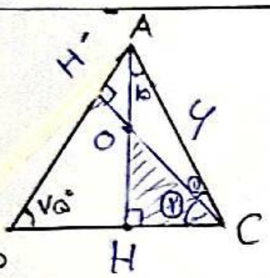
$$\frac{4}{y+4}=\frac{x+1}{y+x+1} \Rightarrow 4y+\cancel{4(x+1)}=y(x+1)+\cancel{4(x+1)} \Rightarrow 4\cancel{y}=(x+1)\cancel{y} \Rightarrow \boxed{x=3}$$

ادامه سوال ۱۵۴ :

$$y-2x \xlongequal{y=2,\ x=3} 2-6=-4$$

پاسخ: گزینه ۱

تحلیل: سوالی ساده که بنظر دانش آموزان در حل آن مشکل خاصی نداشته باشند.



سوال ۱۵۵ : چون مثلث متساوی‌الساقین است پس $AC=AB=6$ و $\hat{C}=\hat{B}=75^\circ$

و $\hat{A}=30^\circ$ و چون AH عمود است پس A به دو زاویه 15° تقسیم می‌شود، از طرفی در مثلث $AH'C$

چون A و H' معلوم اند پس $\hat{C}_1=60^\circ$ و در نتیجه $\hat{C}_2=15^\circ$ خواهد بود.

$$\xrightarrow{\text{در مثلث } \overset{\triangle}{AHC}} \sin 15^\circ = \frac{HC}{6} \Rightarrow HC = 6\sin 15^\circ \xRightarrow{\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}} 3\sqrt{2-\sqrt{3}} = HC$$

$$\xrightarrow{\text{در مثلث } \overset{\triangle}{OHC}} \tan \hat{C}_2 = \frac{OH}{HC} \Rightarrow \tan 15^\circ = \frac{OH}{3\sqrt{2-\sqrt{3}}} \xRightarrow{\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{1}{(2+\sqrt{3})}} OH = 3\sqrt{2-\sqrt{3}} \times \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$S_{OH} = \frac{1}{2} HC \times OH = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2-\sqrt{3}} \times 3 \times \sqrt{2-\sqrt{3}} \times \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{9(2-\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{9}{2\underbrace{\cancel{(2+\sqrt{3})^2}}_{7+4\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$$

پاسخ: گزینه

تحلیل: طبق حل بالا متاسفانه گزینه درست نداریم.