۰۹۱۲۰۲۶۰۴۰۰ کانال تلگرام: @[illegible] مهدی رجبی

۱۲۴ ـ گزینه ۴

$$(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2=(a-b)^4(a+b)^4$$

$$=(a^2-b^2)^4$$

$$a=\sqrt[4]{\sqrt{9}-2}\Rightarrow a^2=\sqrt{\sqrt{9}-2}$$

$$b=\sqrt[4]{\sqrt{9}+2}\Rightarrow b^2=\sqrt{\sqrt{9}+2}$$

$$\Rightarrow(a^2-b^2)^4=\left[\left(\sqrt{\sqrt{9}-2}-\sqrt{\sqrt{9}+2}\right)^2\right]^2$$

$$=\left(\sqrt{9}-2+\sqrt{9}+2-2\sqrt{\sqrt{9}-2}\sqrt{\sqrt{9}+2}\right)^2$$

$$=\left(2\sqrt{9}-2\sqrt{(\sqrt{9}-2)(\sqrt{9}+2)}\right)^2$$

$$=\left(2\sqrt{9}-2\sqrt{9-4}\right)^2=\left(2\sqrt{9}-2\sqrt{3}\right)^2$$

$$=4(\sqrt{9}-\sqrt{3})^2=4(9+3-2\sqrt{12})$$

$$=4(8-4\sqrt{3})=16(2-\sqrt{3})$$

۱۲۷_ گزینه ۲ — دو طرف معادله را در $\sqrt[3]{x^2}$ ضرب می‌کنیم.

$$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\times\sqrt[3]{x^2}=2\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt[3]{x^4}+1+\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)}=2x$$

$$(a^2+b^2+ab)(a-b)=a^3-b^3$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3-1^3=2x\Rightarrow x^2-1=2x$$

$$\Rightarrow x^2-2x-1=0\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{(-2)}{1}=2$$

۱۲۸_ گزینه ۱

$$x=5-x^2\Rightarrow x^2+x-5=0$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=-1 \quad (1)$$

$$x_1x_2=-5 \quad (2)$$

Subject. Year Month Date

قرار میدهیم

$$\alpha = x_1 + 1 \qquad \beta = x_2 + 1$$

$$\alpha + \beta = x_1 + x_2 + ۲ \overset{①}{=} ۲ - ۱ = ۱ \quad ③$$

$$\alpha\beta = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1$$

$$\xRightarrow{② \text{ و } ①} \alpha\beta = -۵ - ۱ + ۱ = -۵ \quad ④$$

$$\frac{1}{(x_1+1)^۳} = \frac{1}{\alpha^۳}$$

$$\frac{1}{(x_2+1)} = \frac{1}{\beta^۳}$$

$$S = \frac{1}{\alpha^۳} + \frac{1}{\beta^۳} = \frac{\alpha^۳ + \beta^۳}{\alpha^۳\beta^۳} = \frac{(\alpha+\beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۳}$$

$$\xRightarrow{④ \text{ و } ③} S = \frac{1^۳ - ۳(-۵)(۱)}{(-۵)^۳} = \frac{۱۶}{۱۲۵} \quad ⑤$$

$$P = \frac{1}{\alpha^۳} \times \frac{1}{\beta^۳} = \frac{1}{(\alpha\beta)^۳} \overset{④}{=} \frac{1}{(-۵)^۳} = -\frac{1}{۱۲۵} \quad ⑥$$

PARASTU

در این اگر جمع ریشه‌ها برابر S و حاصلضرب آن‌ها برابر P باشد،

آن‌گاه ریشه‌های معادله در معادله زیر صدق می‌کنند:

$$x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{(4),(5)} x^2 + \frac{14}{125}x - \frac{1}{125} = 0$$

$$\xrightarrow{\times 125} 125x^2 + 14x - 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{125x^2 + 14x = 1}$$

۱۲۹ـ گزینه ۳ تسهیلات. با ضرب صورت و مخرج در $\sin 3x$ داریم:

$$f(x) = 16\cos^2 3x \cos^2 6x \cos^2 12x \cos^2 24x$$

$$= \left[4\cos 3x \cos 6x \cos 12x \cos 24x\right]^2$$

$$= \frac{\left[4\sin 3x \cos 3x \cos 6x \cos 12x \cos 24x\right]^2}{\sin^2 3x}$$

$$= \frac{\left[2\sin 6x \cos 6x \cos 12x \cos 24x\right]^2}{\sin^2 3x}$$

$$= \frac{\left(\sin 12x \cos 12x \cos 24x\right)^2}{\sin^2 3x}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\sin 24x \cos 24x\right)^2}{\sin^2 3x} = \frac{\left(\frac{1}{4}\sin 48x\right)^2}{\sin^2 3x}$$

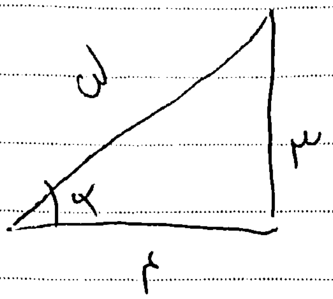
$$= \frac{1}{16}\,\frac{\sin^2 48x}{\sin^2 3x}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{36}\right) = \frac{1}{16}\,\frac{\sin^2 \frac{48\pi}{36}}{\sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{1}{16} \times \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{3}}{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}$$

$$= \frac{1}{16} \times \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{16} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{2-\sqrt{3}} = \frac{3}{16(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{3(2+\sqrt{3})}{16(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{6+3\sqrt{3}}{16}$$

۱۳_ گزینه ۲



$$\tan\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\alpha = -\frac{3}{5} \\ \cos\alpha = -\frac{4}{5}\end{array}\right\} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

$$\frac{\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) - \cos\alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}}$$

$$= \frac{(\sin 2\alpha - \cos\alpha)\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\left(\frac{24}{25} + \frac{4}{5}\right) \times \frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}$$

$$= \frac{۴۴}{۲۵} \times \frac{۲۴}{۷} = \frac{۱۰۵۶}{۱۷۵}$$

۱۳۱ـ گزینهٔ ۳

$$\cos^2 x - \sin^2 x \cos^3 x = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \cos^3 x = 1$$

$$\Rightarrow -\sin^2 x \left(1 + \cos^3 x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 1 + \cos^3 x = 0 \end{cases}$$

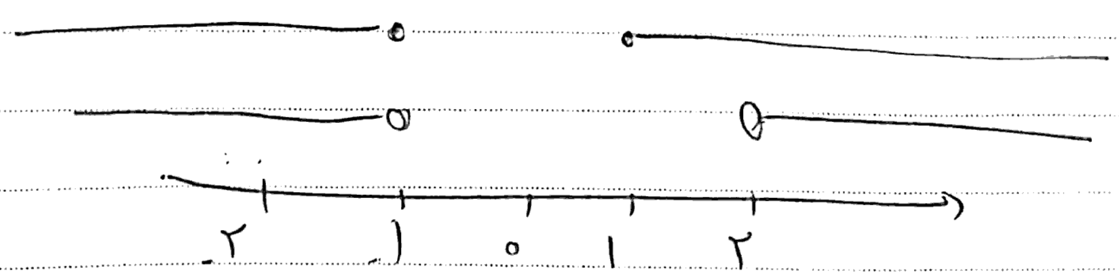
$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ 3x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \pi, 2\pi \\ x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \text{۵ جواب}$$

۱۳۲- گزینه ۱

$$f(x) = \frac{\log_x (x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2-1} + 1}$$

$$x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$



دامنه $= (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

۱۳۳ـ گزینه ۲ ـ روش اول

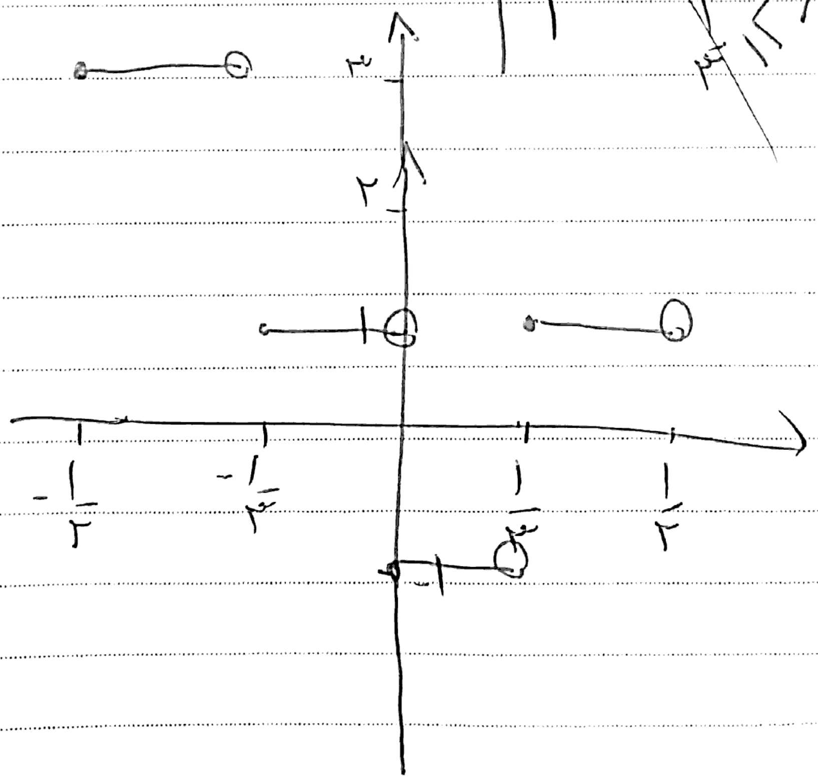
$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \Longrightarrow -\frac{3}{2} \leq 3x < \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow [3x] = \begin{cases} -2 & -\frac{3}{2} \leq 3x < -1 \\ -1 & -1 \leq 3x < 0 \\ 0 & 0 \leq 3x < 1 \\ 1 & 1 \leq 3x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow [3x] = \begin{cases} -2 & -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

ت) $\left|[3x]\right| = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$

ث) $y = 2\left|[3x]\right| - 1 = \begin{cases} 3 & -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \leq x < 0 \\ -1 & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \end{cases}$



روش دوم :

$$\lim_{x\to 0^+} 2\left|[3x]\right| - 1 = 2\left|[0^+]\right| - 1 = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} 2\left|[3x]\right| - 1 = 2\left|[0^-]\right| - 1 = 1$$

در سالا گزینه ۲ درست می‌کند!

۱۳۴ـ گزینه ۴

$$x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \Longrightarrow x^2 = y+3+y-3-2\sqrt{y^2-9}$$

$$\xrightarrow{2y = x^2} x^2 = x^2 - 2\sqrt{\frac{x^4}{4}-9} \Rightarrow \frac{x^4}{4}-9 = 0$$

$$\Rightarrow x^4 = 36 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} = 3$$

فاصله از مبدا $= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{6+9} = \sqrt{15}$

۱۳۵_ تمرین ۲

$$\frac{3^{n}\left(1+3+3^{2}+3^{3}+3^{4}+3^{5}\right)}{2^{n-2}\left(1+2+2^{2}+2^{3}+2^{4}+2^{5}\right)}=52$$

$$\Rightarrow \frac{3^{n}\left(\frac{\cancel{1}\left(3^{6}-1\right)}{3-1}\right)}{2^{n-2}\left(\frac{2^{6}-1}{2-1}\right)}=52$$

$$\Rightarrow \frac{3^{n}\times\frac{728}{2}}{2^{n-2}\times 63}=52$$

$$\Rightarrow \frac{3^{n}}{2^{n-2}}\times\frac{104\times 7}{2\times 9\times 7}=52$$

$$\Rightarrow \frac{3^x}{2^{x-2}} \times \frac{a^2}{9} = a^2$$

$$\Rightarrow \frac{3^{x-2}}{2^{x-2}} = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-2} = 1 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

۱۳۷_ گزینه ۳

$$2^{\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2^{|\cos x|+1} = 3$$

$$\Rightarrow |\cos x|+1 = \log_2^3 \Rightarrow |\cos x| = \underbrace{\log_2^3 - 1}_{\text{مقداری بین صفر و یک}} = a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = a \Rightarrow \text{۱ جواب در بازه } [0,\pi] \\ \cos x = -a \quad \text{۱ جواب در بازه } [0,\pi] \end{cases}$$

بنابراین در مجموع ۲ جواب دارد.

Subject.

۱۳۷_ گزینه ۴

$$\log_x y - 2\log_y x = 1 \Rightarrow \log_x y - \frac{2}{\log_x y} = 1$$

$$\xrightarrow{\log_x y = t} t - \frac{2}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - 2 = t$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_x y = 2 \\ \log_x y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \checkmark \\ y = -\frac{1}{x} \to \times \end{cases}$$

۱۳۸_ گزینه ۳

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x}}-\sqrt{\frac{x}{x^2}-\frac{x}{x^2+1}}\right)=(\sqrt{2}-0)=\sqrt{2}$$

۱۳۶_ گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-}[2\sin x-1]=[2\times\frac{1}{2}^- -1]=[1^- -1]=[0^-]=-1$$

۱۳۷_ گزینه ۳ – می‌دانیم قرینه تابع $y=f(x)$ نسبت به خط $y=x$ برابر $f^{-1}(x)$ می‌باشد. در نتیجه وارون تابع را به دست می‌آوریم.

$$y=2+\sqrt{x-1}\Longrightarrow y-2=\sqrt{x-1}\Longrightarrow y^2-4y+4=x-1$$

$$\Longrightarrow x=y^2-4y+5\Longrightarrow f^{-1}(x)=x^2-4x+5$$

$$g(x)=f^{-1}(x-2)-3=(x-2)^2-4(x-2)+5-3$$

$$\Longrightarrow g(4)=(4-2)^2-4(4-2)+5=4-8+5=-2$$

Subject.

۱۴) _ گزینه ۳

$$g(f(x)) = g(1-x^2) = \begin{cases} 1 & 1-x^2 > 0 \\ 0 & 1-x^2 = 0 \\ -1 & 1-x^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = \pm 1 \\ -1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \end{cases}$$

در نقاط

واضح است که تابع $g \circ f$ در نقاط $x = \pm 1$ ناپیوسته می‌باشد.

۱۳) _ گزینه ۲

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) & x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ -\dfrac{x^2}{x^2-1}(x^2-4) & -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

PARASTU

۱) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x^2}{x^2-1} & x>2 \text{ یا } x<-2 \\[2ex] \dfrac{4x^2 - x^3}{x^2-1} & -2 \le x \le 2 \end{cases}$

$$\left(\frac{x^3 - 4x^2}{x^2-1}\right)' = \frac{(3x^2 - 8x)(x^2-1) - 2x(x^3 - 4x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow x\,\frac{(3x - 8)(x^2-1) - 2x^3 + 8x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x\,(3x^3 - 3x^2 - 8x^2 + 8 - 2x^3 + 8x^2)}{(x^2-1)^2}$$

Subject:

$$= \frac{x(2x^4 - 4x^2 + 8)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 8)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x\left((x^2-1)^2 + 7\right)}{(x^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x\left((x^2-1)^2 + 7\right)}{(x^2-1)^2} & x > 2 \text{ یا } x < -2 \\[2ex] \dfrac{-2x\left((x^2-1)^2 + 7\right)}{(x^2-1)^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \pm\frac{2x\,\overbrace{\left((x^2-1)^2 + 7\right)}^{\Rightarrow \text{ریشه ندارد}}}{(x^2-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

PARASTU

از طرفی $f(x)$ در نقطه $x=\pm 2$ وجود ندارد اما در اطراف
این نقطه‌ها تغییر علامت می‌دهد. لذا ۳ نقطه اکسترمم داریم.

س ۱۳ـ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} A(x, x^2) \\ A'(x^2, x) \end{array}\right\} \Rightarrow AA' = \sqrt{(x^2-x)^2 + (x-x^2)^2}$$

$$= \sqrt{2}\,|x^2-x|$$

از طرفی با تلاقی نمودار $f(x)$ و $y=x$ داریم:

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

بنابراین باید اکسترمم مطلق تابع $g(x)=\sqrt{2}|x^2-x|$ را در فاصله
$x\in[0,1]$ بدست آوریم.

$$g(x) = \sqrt{2}\,|x^2 - x| \xrightarrow{0 \le x \le 1} g(x) = \sqrt{2}\,(x - x^2)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\,(1 - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 0$$

$\Rightarrow$ ماکزیمم $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۱۴۲ـ گزینه ۴

$$(f \circ g)' = g'(x)\, f'(g(x))$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{8} - 1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} = 2 \quad (1)$$

Subject. Year. Month. Date.

$$\Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{9}{8}-1\right)^{-\frac{4}{3}} \times \frac{6}{\sqrt{8}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{8}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{8}} \times 32$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -\frac{16}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2} \quad (2)$$

از طرفی در حالت الف $x=2$ داریم:

$$\left[x^2+\frac{1}{2}\right] = \left[4+\frac{1}{2}\right] = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(x\left(\left[x^2+\frac{1}{2}\right]\right)\right)^2 + 1 = 16x^2+1$$

$$\Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64 \quad (3)$$

$$(f\circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = g'\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) f'\left(g\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

① تا ③

$$-8\sqrt{2}\, f'(2) = -8\sqrt{2}\times 64$$

$$= 4(-128\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \frac{(f\circ g)'\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}{-128\sqrt{2}} = 4$$

۱۴۵ _ گزینه ۳

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2ax + b$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x\geq k\\ 2a & x<k\end{cases}$$

چون $f(x)$ مشتق‌پذیر است، لذا $f(x)$ در نقطه $x=k$ نیز مشتق‌پذیر و در نتیجه در این نقطه پیوسته نیز می‌باشد. بنابراین:

$$\lim_{x\to k^+} f(x)=\lim_{x\to k^-} f(x)=f(k)$$

$$\Rightarrow \boxed{ak^2+bk+c=2ak+b} \quad (1)$$

$$f'_+(k)=f'_-(k)\Rightarrow \boxed{2ak+b=2a} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \boxed{ak^2+bk+c=2a} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(2)} \boxed{b=2a-2ak} \quad (4)$$

از طرفی طبق فرض داریم :

$$b+c=a \Rightarrow c=a-b \xrightarrow{(4)} c=a-2a+2ak$$

$$\Rightarrow \boxed{c=-a+2ak} \quad (5)$$

$$\xrightarrow{(3),(2),(5)} ak^2+(2a-2ak)k-a+2ak=2a$$

$$\Rightarrow ak^2+2ak-2ak^2-a+2ak=2a$$

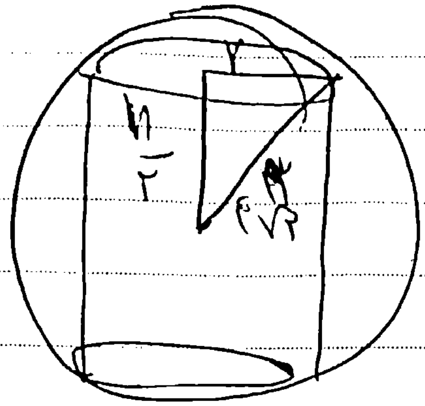
$$\Rightarrow -ak^2+4ak-3a=0$$

$$\Rightarrow -a(k^2-4k+3)=0 \xrightarrow{a\neq 0} k^2-4k+3=0$$

$$\Rightarrow (k-1)(k-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=3 \to max \end{cases}$$

Subject.

۱۴۶_ گزینه ۲



$$r^2+\frac{h^2}{4}=(4\sqrt{2})^2=32$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{4}=32-r^2$$

$$\Rightarrow h^2=4(32-r^2)\Rightarrow h=2\sqrt{32-r^2}$$

$$S=2\pi r h=4\pi r\sqrt{32-r^2}$$

$$S'=0\Rightarrow 4\pi\left(\sqrt{32-r^2}-\frac{2r^2}{2\sqrt{32-r^2}}\right)=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{32-r^2}=\frac{r^2}{\sqrt{32-r^2}}\Rightarrow 32-r^2=r^2\Rightarrow r^2=16\Rightarrow r=4$$

$$\Rightarrow S_{max}=4\pi\times 4\sqrt{32-16}=16\pi\times 4=64\pi$$

۱۴۷ـ گزینه ۳

A_i : قبولی در درس iام

$P(A_1) = /۹$ $\qquad$ $P(A_1 \cap A_2) = /۸۵$

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{/۸۵}{/۹} = \frac{۸۵}{۹۰} = \frac{۱۷}{۱۸}$$

۱۴۸ـ گزینه ۳

$$\left.\begin{array}{l} \text{مجموع ریشه‌ها} = -\frac{b}{a} \\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{c}{a} + ۲$$

$$\xRightarrow{\times(-a)} b = c - ۲a \Rightarrow c = b + ۲a$$

از طرفی $۱ < a,b,c < ۹$. بنابراین با مقدار دادن به پارامتر a

حالت‌هایی که به دست می‌آید را بررسی می‌کنیم

Subject. Year. Month. Date.

$a=1 \Rightarrow c=b+2 \Rightarrow 1 \leq b+2 \leq 9$

$\xrightarrow{b\geq 1} 1 \leq b \leq 7 \Rightarrow$ $\boxed{\text{7 حالت}}$

$a=2 \Rightarrow c=b+4 \Rightarrow 1 \leq b+4 \leq 9$

$\xrightarrow{b\geq 1} 1 \leq b \leq 5 \Rightarrow$ $\boxed{\text{5 حالت}}$

$a=3 \Rightarrow c=b+6 \Rightarrow 1 \leq b+6 \leq 9$

$\xrightarrow{b\geq 1} 1 \leq b \leq 3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{3 حالت}}$

$a=4 \Rightarrow c=b+8 \Rightarrow 1 \leq b+8 \leq 9 \xrightarrow{b\geq 1} 1 \leq b \leq 1$

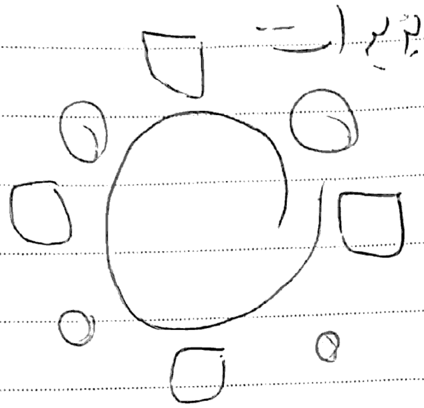
$\Rightarrow b=1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{1 حالت}}$

$a \geq 5 \Rightarrow 2a \geq 10 \xrightarrow{b\geq 1} c=2a+b \geq 11 \Rightarrow$ تناقض

بنابراین جمعاً $7+5+3+1=16$ حالت امکان پذیر است.

۱۴۹- گزینه ۱ - ابتدا دانش آموزان یک پایه را دور میز می نشانیم که این کار به $6 = 3! = (4-1)!$ حالت امکان پذیر است.

حال از بین ۴ جایگاه بین این افراد دانش آموزان پایه دیگر را می نشانیم که این کار به $4!$ امکان پذیر است.



بنابراین کل حالات برابر است با

$$6\times 4! = 6\times 4\times 3\times 2 = 144$$

۱۵۰- گزینه ۲ - می دانیم اعدادی بر ۴ بخش پذیر هستند که دو رقم آخر آن ها بر ۴ بخش پذیر باشد. بنابراین:

یک رقمی ← ۴ ← ۱

دو رقمی ← ۱۲ ، ۳۲ ، ۵۲ ، ۲۴ ← ۴

سه رقمی ← $\underbrace{\square}_{3}\ \underbrace{\square\ \square}_{4} = 3\times 4 = 12$

Subject.
Year: Month Date.

۴ رقمی : □ □ □ □ $= 3 \times 2 \times 4 = 24$

۳ حالت ۲ حالت ۴ حالت

۵ رقمی : □ □ □ □ □ $= 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24$

۳ ۲ ۱ ۴ حالت

$\Rightarrow n(A) = 1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$

$n(S)$: عدد ۱ رقمی از بین اعداد ۱ تا ۵

$$n(S) = \sum_{i=1}^{5} n_i = \underbrace{5}_{\text{۱ رقمی}} + \underbrace{20}_{\text{۲ رقمی}} + \underbrace{60}_{\text{۳ رقمی}} + \underbrace{120}_{\text{۴ رقمی}} + \underbrace{120}_{\text{۵ رقمی}} = 325$$

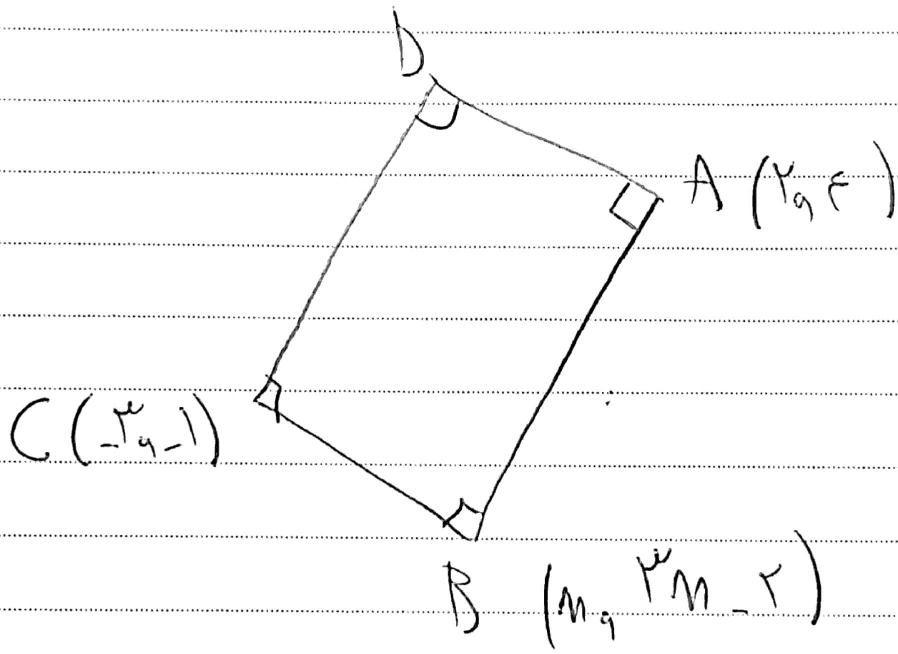
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$ د ! گزینه د درست

Subject.
Year: Month Date:

۱۱_ گزینه ۳

$y - ۴ = ۳(x - ۲) \Rightarrow y = ۳x - ۲$

بدون آنکه به کلیت مسئله خللی وارد شود، فرض میکنیم شکل به صورت زیر باشد.



چون ABCD مستطیل است، لذا شیب خط AB و شیب خط BC معکوس و قرینه یکدیگر میباشند. به عبارت دیگر $m_{AB} = -\frac{1}{m_{BC}}$

$$m_{AB} = 3 \quad (1)$$

$$m_{BC} = \frac{3m - 2 - (-1)}{m - (-3)} = \frac{3m - 1}{m + 3} \quad (2)$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{BC}} \Rightarrow \frac{3m - 1}{m + 3} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 9m - 3 = -m - 3 \Rightarrow 10m = 0 \Rightarrow m = 0$$

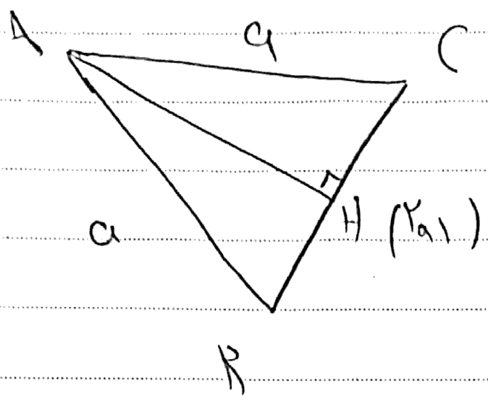
$$\Rightarrow B(0, -2)$$

$$AB = \sqrt{(0-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(0-(-3))^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\text{محیط} = 2(AB + BC) = 2(2\sqrt{10} + \sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$

۱۵۲ ـ تمرین ۲ ـ با فرض آنکه مختصات A به صورت $A(x,y)$ باشد داریم،



$$\text{محیط} = 3a = \sqrt{270} = 3\sqrt{30} \Rightarrow a = \sqrt{30}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{30} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

$$AH = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{90}{4} \quad (1)$$

$$m_{AH} = -\frac{1}{m_{BC}} \Rightarrow \frac{1-y}{2-x} = -\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\Rightarrow 3 - 3y = -2 + x \Rightarrow \boxed{x = 5 - 3y} \quad (3)$$

۳)، ۵)

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=\dfrac{45}{2}\\ x=5-3y\end{cases}$$

$$\Rightarrow (5-3y-2)^2+(y-1)^2=\frac{45}{2}$$

$$\Rightarrow (3-3y)^2+(y-1)^2=\frac{45}{2}$$

$$\Rightarrow 9(y-1)^2+(y-1)^2=\frac{45}{2} \Rightarrow 10(y-1)^2=\frac{45}{2}$$

$$\Rightarrow (y-1)^2=\frac{9}{4} \Rightarrow y-1=\pm\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases}y=\dfrac{5}{2}\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=5-3\times\dfrac{5}{2}=5-\dfrac{15}{2}=-\dfrac{5}{2}\\ x=5-3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=5+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}A\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right)\\ A\left(\dfrac{13}{2},-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases} \checkmark$$

۱۵۳ـ گزینه ۱ ابتدا تفاضل دو دایره را بدست می‌آوریم.

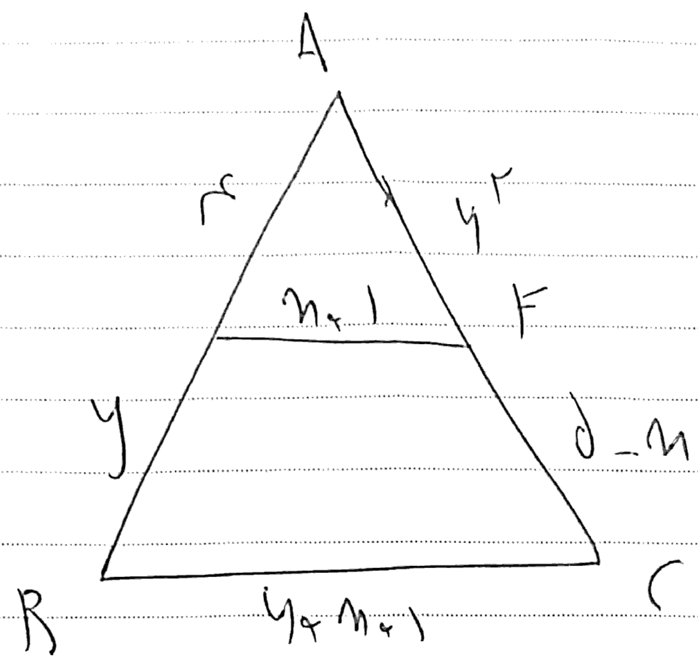
$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=30 \\ x^2+y^2+2y=30 \end{cases} \Longrightarrow 2x-2y=0 \Longrightarrow y=x$$

بنابراین هر دو نقطه برخورد دو دایره روی خط $x=y$ قرار دارد

ولذا این خط معادله وتر مشترک این دو دایره می‌باشد.

Subject. Year Month Date

۱۵۴ _ گزینه ۱



با توجه به قضیه تالس و تعمیم آن داریم:

$$\frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۵-x} \Rightarrow \boxed{۲۰-۴x=y^۳} \quad ۱$$

$$\frac{۴}{۴+y}=\frac{x+۱}{y+x+۱} \Rightarrow \frac{۴}{۴+y-۴}=\frac{x+۱}{y+x+۱-(x+۱)}$$

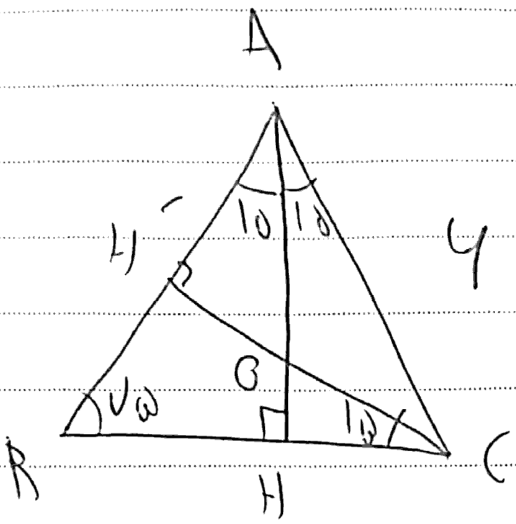
$$\Rightarrow \frac{۴}{y}=\frac{x+۱}{y} \Rightarrow x+۱=۴ \Rightarrow x=۳$$

$$\Rightarrow y-۲x=-۴$$

$$\xrightarrow{۱} y^۳=۲۰-۱۲=۸ \Rightarrow y=۲$$

Subject.
Year: Month: Date:

۱۵۵ـ درگزینه‌ها تب ۱



$$CH = AC \times \sin 15 = 4 \sin 15$$

$$\overset{\triangle}{OHC}: \quad \tan 15 = \frac{OH}{CH} \Rightarrow OH = CH \tan 15$$

$$\Rightarrow OH = 4 \sin 15 \times \tan 15$$

$$S = \frac{1}{2} OH \times CH = \frac{1}{2} \times 4 \sin 15 \times \tan 15 \times 4 \sin 15$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 8 \sin^2 15 \tan 15}$$

1

$$\sin^2 15 = \frac{1-\cos 30}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\cos^2 15 = 1-\sin^2 15 = 1-\frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\tan^2 15 = \frac{\sin^2 15}{\cos^2 15} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow \tan^2 15 = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow \tan 15 = 2-\sqrt{3} \quad (3)$$

$(1),(2),(3)$

$$\Rightarrow S = 18\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)(2-\sqrt{3})$$

$$= \frac{9}{2}(2-\sqrt{3})^2 = \frac{9}{2}(4+3-4\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{9}{2}(7-4\sqrt{3})}$$

$$S = \frac{9}{2}(7-4\sqrt{3})\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{2(7+4\sqrt{3})}$$