آزمون نیم سال اول ریاضیات تجربی

۱- نمودار یک تابع درجه‌دوم، محور yها را با عرض (−۵) و خط به معادلهٔ $y=3(x-3)$ را با عرض‌های (−۳) و (−۶) قطع می‌کند. نمودار این تابع درجه‌دوم، محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۱) ۱　۲) ۱/۵　۳) ۲　۴) ۲/۵

۲- دامنهٔ تابع $f(x)=\log_{(1-x)}(x-\sqrt[3]{x})$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر　۲) ۱　۳) ۲　۴) بی‌شمار

۳- نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ را در امتداد محور xها یک واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت انتقال می‌دهیم، منحنی حاصل، نمودار تابع f را در دو نقطه با طول‌های α و β قطع می‌کند. کدام گزینه در مورد α و β درست است؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۹)

۱) $\alpha+\beta=-1$　۲) $\alpha\beta=1$　۳) $\alpha+\beta=1$　۴) $\alpha\beta=-1$

۴- اگر $f(x)=x^3$ و $g(x)=3x(x+1)$، آن‌گاه نمودار تابع $f+g$ از کدام ناحیه نمی‌گذرد؟

۱) اول و دوم　۲) دوم و سوم　۳) اول و سوم　۴) دوم و چهارم

۵- تابع $f(x)=|x|+|x-1|-2$ در بازهٔ (a,b) صعودی و مقادیر آن منفی است. اگر مساحت ناحیهٔ محدود به خط‌های $x=a$، $x=b$، محور xها و نمودار f برابر با S باشد، بیشترین مقدار S کدام است؟

۱) ۰/۲۵　۲) ۰/۷۵　۳) ۱/۲۵　۴) ۱/۷۵

۶- اگر $f=\{(-1,2),(1,2),(-2,1),(2,1)\}$ و $g=\{(0,\sqrt{2}),(-1,2),(2,3),(\sqrt{5},4)\}$، آن‌گاه برد تابع gof از چند عضو تشکیل شده است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) بی‌شمار

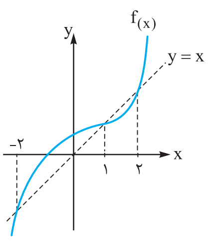
۷- اگر $g(x)=\sqrt{x+1}$ و $f(x)=x^2+2x$، آن‌گاه نامعادلهٔ $(gof)(x)>f(x)$ در بازهٔ (a,b) برقرار است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) $2\sqrt{5}$　۴) $1+\sqrt{5}$

۸- اگر $f(x)=\frac{1}{2}(x-[x]-1)$ و $g(x)=2(x^2+x+1)$، آن‌گاه برد تابع gof کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۹)

۱) $[0/5,1/5)$　۲) $[1/5,2)$　۳) $[0,2)$　۴) $[1,1/5)$

۹- در شکل روبه‌رو نمودار تابع f و نیمساز ربع اول و سوم در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{x^2-x.f^{-1}(x)}$ کدام است؟



۱) $[-2,0]\cup[1,2]$

۲) $(-\infty,-2]\cup[0,1]\cup[2,+\infty)$

۳) $(-\infty,-2]\cup[0,1]$

۴) $[-2,1]$

۱۰- اگر $f(x)$ وارون تابع $g(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(12)-f(2)$ کدام است؟

۱) ۶۳　۲) ۳۱　۳) ۱۵　۴) ۱۰

۱۱- اگر $f(x)=2-\sqrt{x+2}$ و $g(x)=2+\sqrt{x-2}$ باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

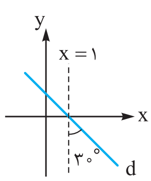
الف) $fof^{-1}=f^{-1}of$　ب) $gog^{-1}=g^{-1}og$

۱) فقط الف　۲) فقط ب　۳) الف و ب　۴) هیچ‌کدام

۱۲- تابع $f(x)=x-\frac{4}{x+1}, x\geq 0$ را در نظر بگیرید. طول نقطهٔ تقاطع نمودار تابع f^{-1} با نیمساز ربع دوم و چهارم، کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۹)

۱) ۲　۲) −۲　۳) ۱　۴) −۱

۱۳- در شکل روبه‌رو، نقطهٔ $(a,a+1)$ روی خط d قرار دارد؛ حاصل $a+\frac{1}{a}$ کدام است؟



۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۴- اگر α زاویه‌ای در ربع دوم باشد، به طوری که $\sin\alpha=0/6$، آن‌گاه حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})-\sin(\alpha-\pi)+\sin(\frac{3\pi}{2}+2\alpha)}{1+\cot(4\pi+\alpha)}$ کدام است؟ (مشابه خارج تجربی ۱۴۰۰)

۱) ۵/۰۴　۲) −۵/۰۴　۳) ۱/۴۴　۴) −۱/۴۴

۱۵- اگر $f(x)=\frac{\cos 16x}{\cos^2 x}$، آن‌گاه $f(\frac{\pi}{12})$ کدام است؟ (مشابه خارج تجربی ۱۴۰۰)

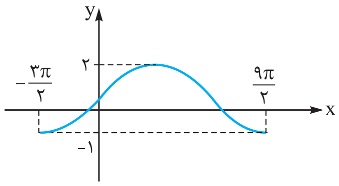
۱) $4+2\sqrt{3}$　۲) $-2\sqrt{3}-4$　۳) $4-2\sqrt{3}$　۴) $2\sqrt{3}-4$

۱۶- اگر x زاویه‌ای حاده باشد و $\sin x - \cos x = \frac{۱}{۲}$، آن‌گاه $\cos ۲x$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۷}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۷- دورهٔ تناوب تابع $f(x) = |\sin ۲x|$ برابر با $T_۱$ و دورهٔ تناوب تابع $g(x) = |\tan x|$ برابر با $T_۲$ است. حاصل $T_۱ + T_۲$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) $\frac{\pi}{۲}$



۱۸- شکل مقابل نمودار تابع $y = c + b\sin ax$ را در یک دورهٔ تناوب نشان می‌دهد. اگر a عددی منفی باشد، [b] کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۹)

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۹- معادلهٔ $\tan x = \sin ۲x$، در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) چهار ۲) پنج ۳) شش ۴) هفت

۲۰- تمام جواب‌های کلی معادلهٔ $۲\sin x \cos x = \cos(x + \frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) $۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲}$ ۳) $k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{۸}$

۲۱- حاصل $\lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{x + [-x]}{۲ - x}$ کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی ۹۹)

۱) -۱ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) صفر

۲۲- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{۲x^۲}}{x}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{۲x^۴}}{x^۲}$، آن‌گاه حد چپ تابع $g - f$ در $x = ۰$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) صفر

۲۳- حاصل $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۳}^+} [۲\cos x - ۱]$ کدام است؟ (مشابه سراسری تجربی ۱۴۰۰)

۱) صفر ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد.

۲۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x و $x + ۱$ به ترتیب برابر ۳ و -۲ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x^۲ - ۱) - P(-x^۲)$ بر $x + ۱$ کدام است؟

(مشابه سراسری تجربی ۹۹)

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) -۵

۲۵- حد تابع $f(x) = \frac{x - \sqrt[۳]{۳x^۲ - ۳x + ۱}}{(x - ۱)^۳}$ در $x = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $-\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) -۳

۲۶- اگر n عددی صحیح باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{۳x^n - x - ۱}{x - x^۲ - ۲x^۴}$ کدام نمی‌تواند باشد؟

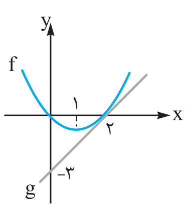
۱) صفر ۲) $-۱/۵$ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۲۷- اگر حد عبارت $\frac{۴(x^n - ۳)}{ax - \sqrt{x^۲ - ۵}}$ وقتی $x \to -\infty$ برابر با $۲/۴$ باشد، حد آن وقتی $x \to ۳$ کدام است؟

۱) $-۴/۸$ ۲) $۱/۲$ ۳) $-۳/۶$ ۴) صفر

۲۸- تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x + \cos x}{۱ + \cot x} & ۰ < x < \frac{۳\pi}{۴} \\ a\cos(x - \frac{۳\pi}{۲}) & \frac{۳\pi}{۴} \le x < ۲\pi \end{cases}$ در $x = \frac{۳\pi}{۴}$ پیوسته است. a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$



۲۹- در شکل روبه‌رو نمودار تابع درجه‌دوم f و تابع خطی g که در یک نقطه روی محور xها بر آن مماس است، رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{(f + g)(x)}{x - ۲}$ کدام است؟ (مشابه خارج تجربی ۱۴۰۰)

۱) $۱/۵$ ۲) $-۱/۵$ ۳) ۳ ۴) -۳

۳۰- اگر $f(x) = (۱ - x^۲)\sin \frac{\pi x}{۲}$، آن‌گاه $f'(۱) - f'(-۱)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. گزینه ۴ ضابطهٔ تابع درجه‌دوم را به صورت $y = ax^۲ + bx + c$ در نظر می‌گیریم. منحنی تابع محور yها را در نقطهٔ $(۰, -۵)$ قطع می‌کند، پس:

$$-۵ = a(۰)^۲ + b(۰) + c \Rightarrow c = -۵$$

حالا مختصات نقاط برخورد منحنی و خط $y = ۳(x-۳)$ را پیدا می‌کنیم:

$$y = -۳ \Rightarrow -۳ = ۳(x-۳) \Rightarrow x-۳ = -۱ \Rightarrow x = ۲$$

$$y = -۶ \Rightarrow -۶ = ۳(x-۳) \Rightarrow x-۳ = -۲ \Rightarrow x = ۱$$

پس نقاط برخورد عبارت‌اند از $(۲, -۳)$ و $(۱, -۶)$. حالا این نقاط را در ضابطهٔ منحنی صدق می‌دهیم تا a و b را پیدا کنیم:

$$(۲, -۳) \Rightarrow -۳ = a(۲)^۲ + b(۲) - ۵ \Rightarrow ۴a + ۲b = ۲ \Rightarrow ۲a + b = ۱$$

$$(۱, -۶) \Rightarrow -۶ = a(۱)^۲ + b(۱) - ۵ \Rightarrow a + b = -۱$$

با حل دستگاه معادله‌های بالا داریم:

$$\begin{cases} ۲a + b = ۱ \\ a + b = -۱ \end{cases} \xrightarrow{(-)} a = ۲, b = -۳$$

پس ضابطهٔ منحنی عبارت است از $y = ۲x^۲ - ۳x - ۵$. حالا نقاط برخورد منحنی با محور طول‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$y = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۵ = ۰ \xrightarrow{a+c=b} x = -۱, x = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

---

۲. گزینه ۱ می‌دانیم $\log_b a$ به شرطی تعریف شده است که $a > ۰$، $b > ۰$ و $b \neq ۱$ باشد. پس در تابع $f(x) = \log_{(۱-x)}(x - \sqrt[۳]{x})$، داریم:

$$x - \sqrt[۳]{x} > ۰ \Rightarrow x > \sqrt[۳]{x} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^۳ > x \Rightarrow x(x^۲ - ۱) > ۰ \Rightarrow x(x-۱)(x+۱) > ۰$$

$\xrightarrow{\text{تعیین‌علامت}}$

۰	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
		$-$		$+$		$-$		$+$	

$$\Rightarrow -۱ < x < ۰ \text{ یا } x > ۱ \quad (I)$$

$$۱ - x > ۰ \Rightarrow x < ۱ \quad (II)$$

$$۱ - x \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۰ \quad (III)$$

حالا اشتراک (I)، (II) و (III) می‌شود $-۱ < x < ۰$ پس $D_f = (-۱, ۰)$ است که شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

---

۳. گزینه ۳ اول ضابطهٔ $f(x)$ را تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = x^۳ \xrightarrow[\text{انتقال ۲ واحد در راستای مثبت محور yها}]{\text{انتقال ۱ واحد در راستای مثبت‌محور xها}} g(x) = ۲ + (x-۱)^۳$$

حالا f و g را با هم تقاطع می‌دهیم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^۳ - (x-۱)^۳ = ۲ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳x + ۱ = ۲ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{α و β ریشه‌های این معادله هستند.}} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = ۱ \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۱}{۳} \end{cases}$$

پس با توجه به گزینه‌ها، ۳ درست است.

۴. گزینه ۴ اول ضابطهٔ $(f+g)$ را پیدا می‌کنیم:

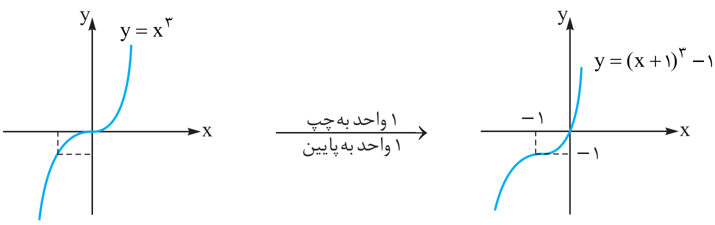
$$\begin{cases} f(x)=x^{۳} \\ g(x)=۳x^{۲}+۳x \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x$$

ضابطهٔ به دست آمده شبیه اتحاد $(a+b)^{۳}$ است، پس:

$$(f+g)(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱-۱=(x+۱)^{۳}-۱$$

حالا نمودار تابع را رسم می‌کنیم: با انتقال نمودار $y=x^{۳}$، (-۱) واحد در راستای محور xها (یعنی ۱ واحد به سمت چپ) و (-۱) واحد در راستای محور yها (یعنی ۱ واحد به پایین)

حواسمان باشد که نمودار از $(۰,۰)$ می‌گذرد.



حالا با توجه به شکل، جواب می‌شود ناحیهٔ دوم و چهارم.

بد نیست این را هم بدانید که در توابع اکیداً یکنوا، اگر $f(۰)=۰$ باشد، در صورتی که تابع صعودی باشد نمودار از ناحیهٔ ۲ و ۴ و در صورتی که تابع نزولی باشد، نمودار از ناحیهٔ ۱ و ۳ نمی‌گذرد.

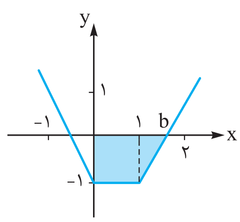
---

۵. گزینه ۳ ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=|x|+|x-۱|-۲$$

ریشه‌های داخل قدرمطلق: $x=۰, x=۱$

نقاط: $\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}۰\\-۱\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}۱\\-۱\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}۲\\۱\end{vmatrix}$ $\Rightarrow$



حالا با توجه به شکل $a=۰$ است (حواسمان باشد که تابع در بازهٔ $(۰,۱)$ صعودی و در بازهٔ $(۱,b)$ صعودی اکید است) و باید مقدار b را پیدا کنیم. معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۱,-۱)$ و $(۲,۱)$ را می‌نویسیم: $(۱,-۱),(۲,۱)$

$$m=\frac{۱-(-۱)}{۲-۱}=۲ \Rightarrow y=۲x-۳$$

$$\text{تقاطع با محور xها} \xrightarrow{y=۰} ۲x=۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

پس $b=\frac{۳}{۲}$ است و اندازهٔ مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۳}{۲})\times ۱=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

---

۶. گزینه ۱ اول تابع‌های f و g را به شکل زوج‌های مرتب می‌نویسیم.

$$f=\{(-۱,۲),(۱,۲),(-۲,۱),(۲,۱)\} \text{ و } g=\{(۰,\sqrt{۲}),(-۱,۲),(۲,۳),(\sqrt{۵},۴)\}$$

حالا gof را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow gof=\{(-۱,۳),(۱,۳)\}$$

بنابراین برد تابع gof یک مجموعهٔ تک‌عضوی است.

---

۷. گزینه ۴ داریم $f(x)=x^{۲}+۲x$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$، ضابطهٔ تابع gof را پیدا می‌کنیم:

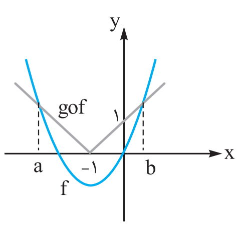
$$(gof)(x)=\sqrt{x^{۲}+۲x+۱}=\sqrt{(x+۱)^{۲}}=|x+۱|$$

حالا نامعادلهٔ $(gof)(x)>f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$|x+۱|>x^{۲}+۲x$$

نمودار دو تابع f و (gof) را رسم می‌کنیم:

حالا باید نقاط a و b را پیدا کنیم:



$$\text{پیداکردن a} \Rightarrow \underbrace{-x-۱}_{gof}=\underbrace{x^{۲}+۲x}_{f} \Rightarrow x^{۲}+۳x+۱=۰ \Rightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۹-۴}}{۲} \xrightarrow{a<-۱} a=\frac{-۳-\sqrt{۵}}{۲}$$

$$\text{پیداکردن b} \Rightarrow x+۱=x^{۲}+۲x \Rightarrow x^{۲}+x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱+۴}}{۲} \xrightarrow{b>۰} b=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

پس حداکثر مقدار $b-a$ برابر است با:

$$\max(b-a)=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}-\frac{-۳-\sqrt{۵}}{۲}=۱+\sqrt{۵}$$

۸. گزینهٔ ۲ دیدیم که برای پیداکردن برد تابع gof باید مقادیر تابع g را به ازای محدودهٔ تغییرات تابع f پیدا کنیم. می‌دانیم $۰ \le a-[a] < ۱$ است پس برد تابع f برابر است با:

$$۰\le x-[x]<۱ \Rightarrow -۱\le x-[x]-۱<۰ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le \frac{۱}{۲}(x-[x]-۱)<۰$$

پس $-\frac{۱}{۲}\le f(x)<۰$. حالا باید تعیین کنیم محدودهٔ تغییرات مقادیر تابع g به ازای $-\frac{۱}{۲}\le x<۰$ چیست:

$$g(x)=۲(x^۲+x+۱)=۲(x^۲+x+\frac{۱}{۴})+۲-\frac{۱}{۲}=۲(x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۲}$$

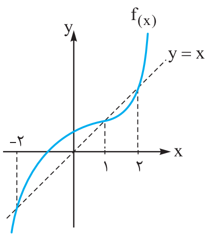
داریم:

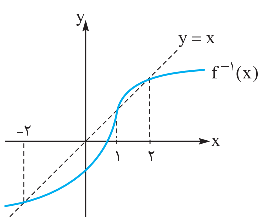
$$۰\le x+\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰\le (x+\frac{۱}{۲})^۲<\frac{۱}{۴} \Rightarrow ۰\le ۲(x+\frac{۱}{۲})^۲<\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}\le ۲(x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۲}<۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\le (gof)(x)<۲$$

پس برد تابع gof برابر است با $[۱/۵,۲)$.

---

۹. گزینهٔ ۲ ابتدا نمودار $f^{-۱}$ را از روی نمودار f (یعنی قرینه‌اش نسبت به خط $y=x$) رسم می‌کنیم:

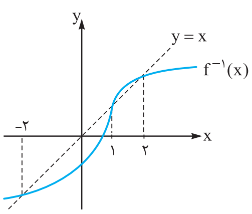




دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{x^۲-xf^{-۱}(x)}$ یا $g(x)=\sqrt{x(x-f^{-۱}(x))}$ برابر بازه‌هایی است که عبارت $x(x-f^{-۱}(x))$ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد پس x و $(x-f^{-۱}(x))$ باید هم‌علامت باشند (یا حداقل یکی‌شان برابر صفر باشد):

علامت این سطر با توجه به نمودار تعیین می‌شود.

	$-\infty$ تا -۲	-۲ تا ۰	۰ تا ۱	۱ تا ۲	۲ تا $+\infty$
$x-f^{-۱}(x)$	−	+	+	−	+
x	−	−	+	+	+
$x(x-f^{-۱}(x))$	+	−	+	−	+



پس دامنهٔ تابع $g(x)$ با توجه به جدول تعیین علامت برابر است با: $(-\infty,-۲]\cup[۰,۱]\cup[۲,+\infty)$

---

۱۰. گزینهٔ ۱ می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد، $f^{-۱}(b)=a$ است، پس برای تابع g داریم: $g(x)=\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}$

$$f=g^{-۱} \Rightarrow \begin{cases} g^{-۱}(۱۲)=a \Rightarrow f(a)=۱۲ \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt[۳]{a}=۱۲ \xrightarrow{\text{عددگذاری}} a=۲^۶=۶۴ \\ g^{-۱}(۲)=b \Rightarrow f(b)=۲ \Rightarrow \sqrt{b}+\sqrt[۳]{b}=۲ \xrightarrow{\text{عددگذاری}} b=۱ \end{cases}$$

بنابراین مقدار $f(۱۲)-f(۲)$ برابر است با: $۶۴-۱=۶۳$

---

۱۱. گزینهٔ ۲ می‌دانیم همواره $(fof^{-۱})(x)=x$ و $(f^{-۱}of)(x)=x$، یعنی ضابطه‌های این دو تابع با هم برابر و برابر تابع همانی است اما همان‌طور که در درس‌نامه داشتیم، برابری $f^{-۱}of=fof^{-۱}$ وقتی برقرار است که $D_f=R_f$ باشد (چون $D_{fof^{-۱}}=R_f$ و $D_{f^{-۱}of}=D_f$) پس برای هر کدام از تابع‌ها دامنه و برد را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=۲-\sqrt{x+۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه}: x\ge -۲ \Rightarrow D_f=[-۲,+\infty) \\ \text{برد}: y\le ۲ \Rightarrow R_f=(-\infty,۲] \end{cases} \times$$

$$g(x)=۲+\sqrt{x-۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه}: x\ge ۲ \Rightarrow D_g=[۲,+\infty) \\ \text{برد}: y\ge ۲ \Rightarrow R_g=[۲,+\infty) \end{cases} \checkmark$$

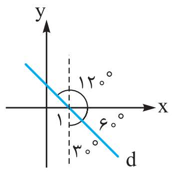
---

۱۲. گزینهٔ ۴ اول باید ضابطهٔ تابع وارون را پیدا کنیم. چون نقطهٔ تقاطع $f^{-۱}$ با خط $y=-x$ را می‌خواهیم لازم نیست x را برحسب y پیدا کنیم، کافی است جای x و y را عوض کنیم و سپس ضابطهٔ به دست آمده را با خط $x=-y$ قطع دهیم:

$$f: \underset{x\ge ۰}{y=x-\frac{۴}{x+۱}} \Rightarrow f^{-۱}: \begin{cases} x=y-\frac{۴}{y+۱}, y\ge ۰ \\ x=-y \end{cases} \Rightarrow y-\frac{۴}{y+۱}=-y \Rightarrow ۲y=\frac{۴}{y+۱} \Rightarrow y^۲+y-۲=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=۱ \checkmark \\ y=-۲ \times \end{cases} \xrightarrow{x=-y} x=-۱$$

۱۳. گزینه ۴ طبق شکل روبه‌رو زاویهٔ خط d با محور xها برابر ۱۲۰° درجه است؛ پس شیب خط برابر $m=\tan ۱۲۰^\circ=-\sqrt{۳}$ است،



معادلهٔ خط را می‌نویسیم: (خط از نقطهٔ $(۱,۰)$ می‌گذرد.)

$$y-۰=-\sqrt{۳}(x-۱)\xrightarrow{\text{نقطهٔ } (a,a+۱) \text{ روی خط}} a+۱=-\sqrt{۳}(a-۱)\Rightarrow a+\sqrt{۳}a=\sqrt{۳}-۱\Rightarrow a=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}+۱}$$

حالا مقدار $a+\frac{۱}{a}$ را پیدا می‌کنیم:

$$a+\frac{۱}{a}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۳}+۱}+\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}-۱}=\frac{(\sqrt{۳}-۱)^۲+(\sqrt{۳}+۱)^۲}{۳-۱}=\frac{۲(۳+۱)}{۲}=۴$$

---

۱۴. گزینه ۳ داریم $\sin\alpha=۰/۶$ و α در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است؛ پس:

$$\frac{\overbrace{\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})}^{\cos\alpha}-\overbrace{\sin(\alpha-\pi)}^{-\sin\alpha}+\overbrace{\sin(\frac{۳\pi}{۲}+۲\alpha)}^{-\cos ۲\alpha}}{۱+\underbrace{\cot(۴\pi+\alpha)}_{\cot\alpha}}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha-\cos ۲\alpha}{۱+\cot\alpha}$$

مقدار سایر نسبت‌های مثلثاتی α را از روی سینوس پیدا می‌کنیم:

$$\sin\alpha=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵}\Rightarrow \cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha\Rightarrow \cos^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\xrightarrow{\alpha\text{ در ربع دوم}}\cos\alpha=\frac{-۴}{۵}$$

$$\cot\alpha=\frac{-\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}}=-\frac{۴}{۳}$$

و چون $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$ داریم:

$$\cos ۲\alpha=۱-۲(\frac{۳}{۵})^۲=۱-\frac{۱۸}{۲۵}=\frac{۷}{۲۵}$$

بنابراین حاصل کسر داده‌شده برابر است با:

$$\frac{-\frac{۴}{۵}+\frac{۳}{۵}-\frac{۷}{۲۵}}{۱-\frac{۴}{۳}}=\frac{\frac{-۲۰+۱۵-۷}{۲۵}}{-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{-۱۲}{۲۵}}{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۳۶}{۲۵}=۱/۴۴$$

---

۱۵. گزینه ۴ مقدار صورت و مخرج کسر را پیدا می‌کنیم:

$$\cos\frac{۱۶\pi}{۱۲}=\cos\frac{۴\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱+\cos\frac{\pi}{۶}}{۲}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow f(\frac{\pi}{۱۲})=\frac{-۲}{۲+\sqrt{۳}}=-۲(۲-\sqrt{۳})=۲\sqrt{۳}-۴$$

---

۱۶. گزینه ۲ می‌دانیم $\cos ۲x=\cos^۲x-\sin^۲x=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)$ و x حاده است و چون $\cos x-\sin x=-\frac{۱}{۲}$، مقدار $\cos ۲x$ منفی است، حالا دو راه داریم:

راه I می‌دانیم $(\sin x-\cos x)^۲=۱-\sin ۲x$ پس:

$$(\sin x-\cos x)^۲=۱-\sin ۲x\Rightarrow \frac{۱}{۴}=۱-\sin ۲x\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۳}{۴}$$

$$\cos^۲ ۲x=۱-\sin^۲ ۲x\Rightarrow \cos^۲ ۲x=۱-\frac{۹}{۱۶}=\frac{۷}{۱۶}\xrightarrow{\cos ۲x<۰}\cos ۲x=-\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

راه II با استفاده از اتحاد $(\cos x-\sin x)^۲+(\sin x+\cos x)^۲=۲$ داریم:

$$(\cos x-\sin x)^۲+(\sin x+\cos x)^۲=۲\Rightarrow \frac{۱}{۴}+(\sin x+\cos x)^۲=۲\Rightarrow(\sin x+\cos x)^۲=\frac{۷}{۴}\Rightarrow \sin x+\cos x=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

حالا داریم:

$$\cos ۲x=(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)=-\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۷}}{۲}=-\frac{\sqrt{۷}}{۴}$$

۱۷. گزینه ۲ در درسنامه داشتیم که دورهٔ تناوب تابع $|\sin ax|$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ و دورهٔ تناوب تابع $|\tan ax|$ (و یا $\tan ax$) برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

پس:

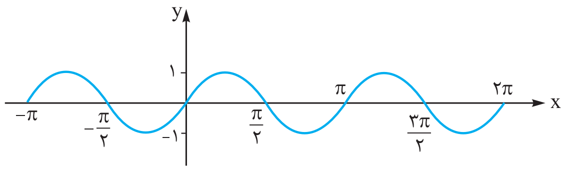
$$|\sin ۲x| \Rightarrow T_۱ = \frac{\pi}{۲}$$

$$|\tan x| \Rightarrow T_۲ = \pi$$

پس:

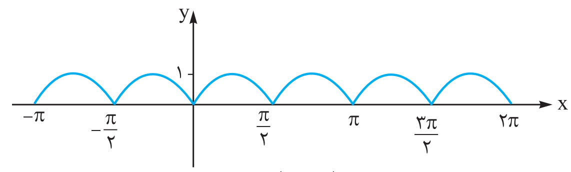
$$T_۱ + T_۲ = \frac{۳\pi}{۲}$$

بیایید یک نگاهی به نمودار دو تابع هم بیندازیم:

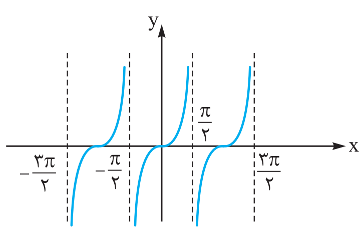


$y = \sin ۲x$

$\Rightarrow$

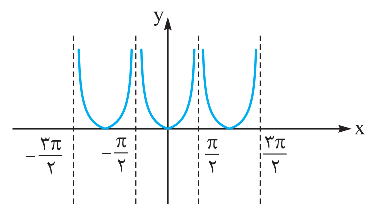


$y = |\sin ۲x|$



$y = \tan x$

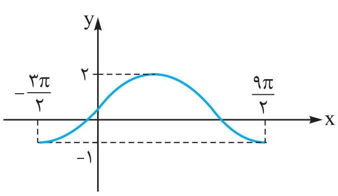
$\Rightarrow$



$y = |\tan ۲x|$

---

۱۸. گزینه ۲ دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{۹\pi}{۲} - (-\frac{۳\pi}{۲}) = ۶\pi$ است، پس:



$$\frac{۲\pi}{|a|} = \frac{۹\pi}{۲} + \frac{۳\pi}{۲} \xrightarrow{a<۰} a = -\frac{۱}{۳}$$

حالا چون شروع تابع مثل تابع سینوسی است پس $ab > ۰$ است و:

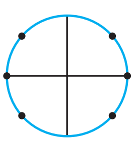
$$ab > ۰ \Rightarrow b < ۰ \Rightarrow \begin{cases} |b| + c = ۲ \\ -|b| + c = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{۱}{۲} \\ |b| = \frac{۳}{۲} \Rightarrow b = -۱/۵ \Rightarrow [b] = -۲ \end{cases}$$

---

۱۹. گزینه ۴ می‌دانیم $\sin ۲x = ۲\sin x \cos x$، پس:

$$\tan x = \sin ۲x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = ۲\sin x \cos x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ : \text{یک جواب} \\ \frac{۱}{\cos x} = ۲\cos x : \text{ادامه} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲\cos^۲ x = ۱ \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



حالا اگر نقاط مربوط به $\sin x = ۰$ و $\cos x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص کنیم:

معادله در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ هفت جواب دارد (نقطهٔ سمت راست دایره هم صفر است و هم ۲π).

۲۰. گزینه ۲ می‌دانیم $۲\sin x \cos x = \sin ۲x$ و $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)$؛ پس:

$$۲\sin x \cos x = \cos(x + \frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \sin ۲x = \sin(\frac{\pi}{۲} - x - \frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \sin ۲x = \sin(\frac{\pi}{۴} - x)$$

حالا جواب کلی را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} - x \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \\ x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

حالا نقاط مربوط به هر کدام از جواب‌های کلی را در یک دور دایره پیدا می‌کنیم:

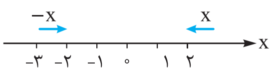
$$x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} k & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline x & \frac{\pi}{۱۲} & \frac{۳\pi}{۴} & \frac{۱۷\pi}{۱۲} \end{array}$$

$$x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \begin{array}{c|c} k & ۰ \\ \hline x & \frac{۳\pi}{۴} \end{array}$$

پس جواب‌های $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲}$، جواب‌های $x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$ را هم شامل می‌شوند و در نتیجه جواب کلی معادله برابر است با: $x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲}$

---

۲۱. گزینه ۲ وقتی $x \to ۲^+$ داریم:



$$\Rightarrow [-x] = -۳$$

بنابراین:

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{x + [-x]}{۲ - x} = \frac{۲ - ۳}{۲ - ۲^+} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

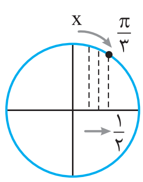
---

۲۲. گزینه ۱ می‌دانیم $f(x) = \frac{\sqrt{۲x^۲}}{x} = \frac{\sqrt{۲}\,|x|}{x}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{۲x^۴}}{x^۲} = \frac{\sqrt{۲x^۲}}{x^۲}$، پس:

$$\lim_{x \to ۰^-} (g - f)(x) = \lim_{x \to ۰^-} \frac{\sqrt{۲x^۲}}{x^۲} - \frac{\sqrt{۲}\,|x|}{x} = \lim_{x \to ۰^-} \sqrt{۲} - \frac{-\sqrt{۲}x}{x} = \sqrt{۲} + \sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

---

۲۳. گزینه ۲ با توجه به دایرهٔ مثلثاتی، وقتی $x \to (\frac{\pi}{۳})^+$ داریم $\cos x \to (\frac{۱}{۲})^-$، پس:



$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۳})^+} [۲\cos x - ۱] = [۲(\frac{۱}{۲})^- - ۱] = [۱^- - ۱] = [۰^-] = -۱$$

---

۲۴. گزینه ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر x و $x + ۱$ به ترتیب برابر ۳ و ۲- است، پس $P(۰) = ۳$ و $P(-۱) = -۲$، حالا می‌رویم سراغ باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $P(x^۲ - ۱) - P(-x^۲)$ بر $x + ۱$:

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow P(x^۲ - ۱) - P(x) = P(۰) - P(-۱) = ۳ - (-۲) = ۵$$

---

۲۵. گزینه ۱ صورت کسر را با استفاده از اتحاد $(a - b)(a^۲ + ab + b^۲) = a^۳ - b^۳$ گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x \to ۱} \frac{x - \sqrt[۳]{۳x^۲ - ۳x + ۱}}{(x - ۱)^۳} = \lim_{x \to ۱} \frac{x - \sqrt[۳]{۳x^۲ - ۳x + ۱}}{(x - ۱)^۳} \times \frac{(x^۲ + x\sqrt[۳]{۳x^۲ - ۳x + ۱} + \sqrt[۳]{(۳x^۲ - ۳x + ۱)^۲})}{(x^۲ + x\sqrt[۳]{۳x^۲ - ۳x + ۱} + \sqrt[۳]{(۳x^۲ - ۳x + ۱)^۲})}$$

$$= \lim_{x \to ۱} \frac{x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱}{(x - ۱)^۳ \underbrace{(x^۲ + x\sqrt[۳]{۳x^۲ - ۳x + ۱} + \sqrt[۳]{(۳x^۲ - ۳x + ۱)^۲})}_{۳}} = \lim_{x \to ۱} \frac{(x - ۱)^۳}{(x - ۱)^۳ \times ۳} = \frac{۱}{۳}$$

۲۶. گزینه ۳ برای n سه حالت $n \le ۳$، $n = ۴$ و $n > ۴$ را در نظر می‌گیریم:

$$n \le ۳ \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{۳x^n}{-۲x^۴} \Rightarrow L = ۰$$

$$n = ۴ \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{۳x^۴}{-۲x^۴} \Rightarrow L = -۱/۵$$

$$n > ۴ \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^n}{-۲x^۴} \Rightarrow L = -\infty$$

۲۷. گزینه ۱ حد کسر وقتی $x \to -\infty$ برابر ۲/۴ است، پس توان صورت باید برابر ۱ باشد:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۴(x-۳)}{ax-\sqrt{x^۲-۵}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{۴x}{ax-|x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{۴x}{(a+۱)x} = \frac{۴}{a+۱} \Rightarrow \frac{۴}{a+۱} = \frac{۲۴}{۱۰} \Rightarrow ۱۰ = ۶a+۶ \Rightarrow ۶a = ۴ \Rightarrow a = \frac{۲}{۳}$$

حالا داریم:

$$\lim_{x\to۳}\frac{۴(x-۳)}{\frac{۲}{۳}x-\sqrt{x^۲-۵}} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to۳}\frac{۴}{\frac{۲}{۳}-\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲-۵}}} = \frac{۴}{\frac{۲}{۳}-\frac{۳}{۲}} = \frac{۴}{\frac{۴-۹}{۶}} = \frac{۲۴}{-۵} = -۴/۸$$

۲۸. گزینه ۲ اول ضابطهٔ تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\sin x+\cos x}{۱+\cot x} = \frac{\sin x+\cos x}{۱+\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\sin x+\cos x}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}} = \sin x$$

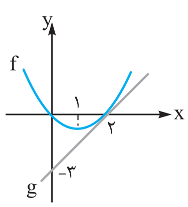
$$\cos(x-\frac{۳\pi}{۲}) = \cos(\frac{۳\pi}{۲}-x) = -\sin x$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت مقابل است:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ۰ \le x < \frac{۳\pi}{۴} \\ -a\sin x & \frac{۳\pi}{۲} \le x < ۲\pi \end{cases}$$

حالا می‌توانیم مقدار، حد راست و حد چپ تابع را در $x = \frac{۳\pi}{۴}$ برابر قرار دهیم اما چون دو ضابطه به شکل $\sin x$ و $-a\sin x$ هستند برای پیوسته‌بودن تابع کافی است $a = -۱$ باشد تا دو ضابطه یکسان شوند.

۲۹. گزینه ۳ از روی شکل معلوم است که $f(۲) = g(۲) = ۰$، پس می‌توانیم حد خواسته‌شده را به صورت زیر بنویسیم:



$$\lim_{x\to۲}\frac{(f+g)(x)}{x-۲} = \lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)+g(x)-g(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} + \lim_{x\to۲}\frac{g(x)-g(۲)}{x-۲} = f'(۲)+g'(۲)$$

از طرف دیگر تابع g یک تابع خطی است که بر منحنی $f(x)$ در $x = ۲$ مماس است بنابراین چون شیب خط برابر است با $m = \frac{۰-(-۳)}{۲-۰} = \frac{۳}{۲}$

پس $f'(۲) = g'(۲) = \frac{۳}{۲}$ و در نتیجه حاصل حد برابر است با: $f'(۲)+g'(۲) = \frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲} = ۳$

۳۰. گزینه ۴ مقدار $f'(۱)$ و $f'(-۱)$ را با استفاده از تعریف مشتق پیدا می‌کنیم:

$$f'(۱) = \lim_{x\to۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to۱}\frac{(۱-x^۲)\sin\frac{\pi x}{۲}-۰}{x-۱} = \lim_{x\to۱}\frac{(۱-x)(۱+x)\sin\frac{\pi x}{۲}}{x-۱} = \lim_{x\to۱}-(۱+x)\sin\frac{\pi x}{۲} = -۲$$

$$f'(-۱) = \lim_{x\to-۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x\to-۱}\frac{(۱-x^۲)\sin\frac{\pi x}{۲}-۰}{x+۱} = \lim_{x\to-۱}\frac{(۱-x)(۱+x)\sin\frac{\pi x}{۲}}{۱+x} = \lim_{x\to-۱}(۱-x)\sin\frac{\pi x}{۲} = -۲$$

پس حاصل $f'(۱)-f'(-۱)$ برابر است با: $(-۲)-(-۲) = ۰$